

С. Лычев, К. Койфман, Д. Бут

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

6 июня 2020 г.

© С. Лычев, К. Койфман, Д. Бут

Обо всех найденных опечатках и ошибках просьба сообщать Константину Койфману на почту koifman.bmstu@yandex.ru

Файл периодически обновляется, следите за обновлениями!

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1	Необходимые сведения из теории множеств	17
1.	Замечания об использовании множеств	17
2.	Упорядоченные пары. Декартовы произведения. Отношения	18
2.1.	Упорядоченная пара	18
2.2.	Декартово произведение	18
2.3.	Отношения	19
3.	Функции	20
	Библиография	21
2	Основы алгебры	23
1.	Бинарная операция	23
2.	Основные алгебраические структуры	24
2.1.	Полугруппы	24
2.2.	Группы	25
2.3.	Кольца	31
2.4.	Поля	32
2.5.	Модули	34
2.6.	Алгебры	35
3.	Векторные пространства	37
3.1.	Аксиомы векторного пространства	37
3.2.	Базис и размерность	38
3.3.	Арифметическое векторное пространство	39
3.4.	Линейные и полилинейные отображения	39

3.5.	Изоморфизм векторных пространств	40
3.6.	Дуальное векторное пространство	41
3.7.	Подпространство	43
3.8.	Внешняя прямая сумма	43
3.9.	Внутренняя прямая сумма	44
3.10.	Факторпространство	44
4.	Тензорные произведения векторных пространств	45
4.1.	Формальные линейные комбинации	45
4.2.	Определение тензорного произведения пространств	45
4.3.	Ассоциативность	46
4.4.	Базис и размерность	46
4.5.	Тензорное произведение и линейные отображения .	47
4.6.	Типичные пространства	47
5.	Внешние формы	48
5.1.	Определение	48
5.2.	Внешнее произведение	48
5.3.	Базис и размерность	51
5.4.	Связь с определителями	51
6.	Аффинные пространства	51
6.1.	Аксиомы Вейля	51
6.2.	Векторизация и арифметизация	53
6.3.	Прямые и плоскости	54
7.	Евклидовы векторные пространства	55
7.1.	Скалярное произведение	55
7.2.	Дуальный базис	56
7.3.	Музыкальные изоморфизмы	56
8.	Эрмитовы векторные пространства	57
8.1.	Скалярное произведение	57
9.	Перенос алгебраической структуры на множество	58
9.1.	Случай полугруппы	58
9.2.	Случай группы	59
9.3.	Случай кольца	60
9.4.	Случай векторного пространства	61
	Библиография	62
3	Основы метрической топологии	63
1.	Метрическое пространство	63

1.1.	Прототипы метрического пространства	63
1.2.	Аксиомы функции расстояния	66
1.3.	Шары и сферы	67
1.4.	Сходимость и непрерывность	68
1.5.	Метрическая топология	72
1.6.	Подпространство метрического пространства	78
1.7.	Произведение пространств	80
2.	Нормированное векторное пространство	82
2.1.	Аксиомы нормы и метрическая структура	82
2.2.	Сходимость и непрерывность по норме	84
2.3.	Норма и скалярное произведение	86
2.4.	Произведение нормированных векторных пространств	87
3.	Полные метрические пространства	88
3.1.	Последовательность Коши и ее свойства	88
3.2.	Теорема о неподвижной точке	91
4.	Линейные и билинейные непрерывные отображения	94
4.1.	Критерий непрерывности линейного отображения	94
4.2.	Норма непрерывного линейного отображения	96
4.3.	Пространство линейных непрерывных отображений	99
4.4.	Критерий непрерывности билинейного отображения	99
4.5.	Норма непрерывного билинейного отображения	99
4.6.	Канонический изоморфизм	99
5.	Банахово пространство	99
5.1.	Ряды в банаховом пространстве	99
5.2.	Обратимые отображения в банаховых пространствах	99
	Библиография	99
4	Основы анализа	101
1.	Дифференциальное исчисление в \mathbb{R} : сводка результатов	101
1.1.	Производная функции	101
1.2.	Формула Тейлора	102
2.	Дифференциальное исчисление в \mathbb{R}^n : сводка результатов	103
3.	Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах	103
3.1.	Аффинное нормированное пространство	103
3.2.	Тензоры	103

3.3.	Производная Гато и Фреше	104
3.4.	Тейлоризация	106
	Библиография	107
5	Элементы векторного анализа	109
1.	Векторные и тензорные поля в евклидовом пространстве .	109
1.1.	Скалярное поле	109
1.2.	Векторное поле	110
1.3.	Ковекторное поле	110
1.4.	Тензорное поле	111
2.	Градиенты скалярных полей	112
2.1.	Градиент скалярного поля в \mathbb{R}^n	112
2.2.	Градиент скалярного поля в $\vec{\mathcal{E}}$	112
2.3.	Градиент скалярного поля в \mathcal{E}	113
2.4.	Градиент векторных и тензорных полей	114
3.	Дивергенция векторных и тензорных полей	116
3.1.	Дивергенция векторного поля в \mathbb{R}^n	116
3.2.	Дивергенция векторного поля в \mathcal{E}	117
3.3.	Дивергенция тензорного поля	117
3.4.	Ротор (вихрь) векторных и тензорных полей	117
3.5.	Ротор векторного поля в \mathbb{R}^3	118
3.6.	Ротор векторного поля в \mathcal{E}	118
3.7.	Ротор тензорного поля в \mathcal{E}	118
	Библиография	119
6	Геометрическая теория уравнений в частных производных	121
1.	Уравнения в частных производных: общие определения и примеры	121
2.	Уравнения в частных производных для заданных семейств функций	128
3.	Системы уравнений	130
3.1.	Взаимосвязь систем с уравнениями более высокого порядка	130
3.2.	Исключение неизвестных из линейной системы с постоянными коэффициентами	132

4.	Частные методы интегрирования уравнений в частных производных	134
5.	Геометрическая интерпретация уравнения в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными	141
6.	Полный интеграл	143
7.	Преобразование Лежандра	144
8.	Уравнения в частных производных первого порядка	146
8.1.	Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных	146
8.2.	Общий нелинейный случай уравнений в частных производных первого порядка	157
9.	Теорема Коши – Ковалевской	164
9.1.	Аналитические функции	164
9.2.	Метод мажорант Коши для обыкновенного дифференциального уравнения	168
9.3.	Теорема Коши – Ковалевской	173
10.	Приведение квазилинейных систем к нормальному виду	181
10.1.	Общий случай	181
10.2.	Линейные уравнения первого порядка	188
10.3.	Примеры	188
10.4.	Линейные уравнения второго порядка	191
11.	Приведение линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду в области	192
11.1.	Случай $A = C = 0$	193
11.2.	Случай $A \neq 0$	193
12.	Волновое уравнение	201
12.1.	Задача Коши для волнового уравнения	201
12.2.	Начально – краевые задачи для волнового уравнения	203
12.3.	Единственность решений первой, второй и третьей начально – краевых задач	205
12.4.	Непрерывная зависимость решений первой, второй и третьей краевых задач от начальных условий	208
12.5.	Решение одномерного волнового уравнения для неограниченной области	211
12.6.	Разрывные решения	216
12.7.	Решение трехмерного волнового уравнения	220

12.8.	Решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения	225
12.9.	Интегральные представления решений волнового уравнения	226
13.	Ряды и интегралы Фурье	240
13.1.	Кусочно непрерывные функции	240
13.2.	Периодические функции	243
13.3.	Семейства ортогональных функций	244
13.4.	Ряды Фурье	247
13.5.	Сходимость рядов Фурье	251
13.6.	Неравенство Бесселя	252
13.7.	Равенство Парсеваля	253
13.8.	Лемма Римана – Лебега	254
13.9.	Теорема о поточечной сходимости	256
13.10.	Интеграл Фурье	259
14.	Разделение переменных	263
14.1.	Идея метода разделения переменных	263
14.2.	Колебания ограниченной струны	265
14.3.	Задача теплопроводности	279
15.	Функция Грина	285
15.1.	Дельта-функция Дирака	285
15.2.	Наводящие соображения	292
15.3.	Свойство функции Грина	294
15.4.	Построение функции Грина	296
15.5.	Решение задачи Дирихле для оператора Лапласа методом функции Грина	296
	Библиография	299
	Задачи	299
7	Элементы теории меры и интеграла Лебега	301
	Библиография	301
8	Гильбертовы пространства	303
1.	Комплексное гильбертово пространство	303
	Библиография	304

9	Элементы общей топологии	305
1.	Топологическое пространство	305
1.1.	Аксиомы топологического пространства	305
1.2.	Замкнутые подмножества	310
1.3.	Внутренность, внешность, замыкание и граница множества	311
2.	Сходимость и непрерывность	318
2.1.	Сходимость последовательности	318
2.2.	Непрерывные отображения и гомеоморфизмы	321
3.	База топологии и база системы окрестностей	333
3.1.	База топологии	333
3.2.	Построение топологии по базе	336
3.3.	База системы окрестностей	338
4.	Аксиомы отделимости и счетности	338
4.1.	Аксиома Хаусдорфа	338
4.2.	Аксиомы счетности	342
5.	Подпространство и произведение пространств	351
5.1.	Подпространство	351
5.2.	Топологические вложения	363
5.3.	Произведение пространств	365
6.	Многообразия	380
6.1.	Локально евклидовы пространства	380
6.2.	Локальные координаты	382
6.3.	Координатное представление отображений	383
6.4.	Топологические многообразия	385
6.5.	Замечания, касающиеся определения многообразий	391
6.6.	Многообразия с краем	392
7.	Топологические группы и действия групп	396
7.1.	Топологические группы	396
7.2.	Действия групп	399
	Библиография	404
10	Анализ на многообразиях	405
1.	Гладкая структура	405
1.1.	C^k -согласованность	405
1.2.	Отношение эквивалентности в классе гладких атласов	407
2.	Гладкие отображения	408

2.1.	Алгебра $C^k(M)$ гладких функций	408
2.2.	Гладкие отображения между многообразиями	410
2.3.	Диффеоморфизмы	410
2.4.	Иммерсии, субмерсии и вложения	411
2.5.	Теоремы Уитни о вложениях	413
2.6.	Разбиение единицы	414
2.7.	Замечание о гладких структурах	414
3.	Вложенные подмногообразия	415
3.1.	Определение подмногообразия	416
3.2.	Образ как подмногообразие	416
3.3.	Ограничение отображений на подмногообразия	418
3.4.	Координаты на подмногообразии	418
4.	«Башня» тензорных пространств	419
4.1.	Касательное пространство к гладкому многообразию	420
4.2.	Касательное отображение в точке	429
4.3.	Замечания о касательных пространствах	430
4.4.	Кокасательное пространство к гладкому многообразию	433
4.5.	«Башня»	435
5.	Векторные расслоения и их сечения	437
5.1.	Гладкие векторные расслоения ранга k	438
5.2.	Касательные и кокасательные расслоения	439
5.3.	Операции над векторными расслоениями	442
5.4.	Векторные расслоения высокого ранга	444
5.5.	Сечения векторных расслоений	445
5.6.	Гомоморфизмы векторных расслоений	448
5.7.	«Pullback» и «pushforward»	450
5.8.	Интегральные кривые	453
5.9.	Гладкие реперы	454
5.10.	Голономные и неголономные реперы	455
5.11.	Внешнее дифференцирование	456
5.12.	Риманова метрика и музыкальные изоморфизмы	459
5.13.	Двухточечные тензоры	462
6.	Ориентация и интегрирование на многообразиях	467
6.1.	Форма объема и ориентация гладкого многообразия	467
6.2.	Звезда Ходжа	469

6.3.	Интегрирование дифференциальных форм и теорема Стокса	470
	Библиография	472
11	Группы и алгебры Ли	475
1.	Основные определения	475
2.	Примеры	485
3.	Левоинвариантные векторные поля	491
4.	Алгебра Ли группы Ли	492
5.	Экспоненциальное отображение	496
6.	Представление групп и алгебр Ли	499
7.	Форма Маурера – Картана	503
8.	Действие группы	503
8.1.	Определение и простейшие свойства	503
8.2.	Примеры	508
8.3.	Полупрямое произведение	510
8.4.	Пространство орбит	513
	Библиография	517
12	Главные расслоения	519
1.	Локально тривиальное расслоение	519
1.1.	Определение	519
1.2.	Слой над точкой как гладкое многообразие	521
1.3.	Натуральные координаты на тотальном пространстве расслоения	523
2.	Главное расслоение	523
2.1.	Определение	523
2.2.	Примеры главных расслоений	526
2.3.	Морфизмы	529
2.4.	Сечения главных расслоений	532
2.5.	Функции перехода и коциклическое условие	532
2.6.	Ассоциированные расслоения	535
	Библиография	537
13	Связности на главных расслоениях	539
1.	Вспомогательные построения	539
1.1.	Векторное поле Киллинга	539
1.2.	Распределения	540

2.	Связность как распределение	541
2.1.	Вертикальное подпространство	541
2.2.	Определение связности	542
2.3.	Горизонтальный лифт векторного поля	543
2.4.	Индукция связности на ассоциированное рас- слоение	543
3.	Связность как форма	544
3.1.	Форма связности	544
3.2.	Локальное представление связности	545
4.	Ковариантная производная	546
4.1.	Ковариантная внешняя производная и форма кри- визны	546
4.2.	Структурное уравнение и тождество Бианки	547
4.3.	Ковариантная производная ∇^ω	548
4.4.	Форма кривизны, порождаемая ∇^ω	550
4.5.	Параллельный перенос и голономия	551
4.6.	Линейная связность	552
	Библиография	555
14	Пространства аффинной связности	557
1.	Связности на векторных расслоениях	557
1.1.	Аксиоматическое определение	557
1.2.	Координатное представление	558
1.3.	Ковариантные производные тензорных полей	558
1.4.	Обозначение для компонент	560
1.5.	Операторное представление связности	560
1.6.	Параллельный перенос	560
2.	Аффинная связность	561
2.1.	Выражения для ковариантных производных	562
2.2.	Закон преобразования коэффициентов связности	562
2.3.	Пространство аффинной связности	564
2.4.	Пространство аффинной связности с метрикой	565
2.5.	Частный случай: евклидово пространство	567
2.6.	Частный случай: риманово пространство	570
2.7.	Связность на «pullback»-расслоении	573
2.8.	Метод подвижного репера	575
2.9.	Структурные уравнения Картана	579

Библиография	582
15 Деформируемый континуум	585
Библиография	585
16 Неевклидова механика континуума	587
1. Тело и физическое пространство	587
1.1. Тело	587
1.2. Физическое пространство	589
1.3. Конфигурации	591
1.4. Деформации	593
2. Движение	594
2.1. Движение как кривая	594
2.2. Скорости	596
3. Меры напряжений	598
3.1. Сосредоточенные силы и плотности сил	599
3.2. Гиперплоскости с инклинацией	601
3.3. Сечение Пиолы	604
3.4. Сечение Коши	607
3.5. Выражения для мощности в терминах напряжений Коши и Пиола	610
3.6. Переход от пространственного описания к матери- альному	610
4. Материальное единообразие и структурная неоднородность	613
4.1. Отклик	613
4.2. Локальные конфигурации	614
4.3. Локальная конфигурация как линейное отображение	615
4.4. Простое тело	616
4.5. Материальное единообразие	616
4.6. Структурная неоднородность	618
5. Материальные связности	619
5.1. Гладкая единообразная отсчетная	620
5.2. Материальная метрика	621
5.3. Материальная связность Леви-Чивита	622
5.4. Материальная связность Вайценбока	623
6. Меры деформаций	627
6.1. Градиент конфигурации	627

6.2. Меры Коши – Грина	628
Библиография	630
17 Электродинамика	633
Библиография	633
18 Общая теория относительности	635
1. Ньютоново пространство время	635
1.1. Определение	635
1.2. Законы Ньютона	637
2. Релятивистское пространство время	638
2.1. Многообразия Лоренца	638
2.2. Ориентация времени	640
2.3. Определение релятивистского пространства времени	640
2.4. Наблюдатели	642
2.5. Преобразование Лоренца	643
3. Материя	643
3.1. Точечная материя	643
3.2. Полевая материя	644
4. Уравнение Эйнштейна	645
4.1. Тензор энергии-импульса	645
4.2. Вывод уравнения Эйнштейна	646
5. Частные решения уравнений Эйнштейна	649
5.1. Решение Шварцшильда	649
5.2. Решение Керра	652
5.3. Решение Рейснера-Нордстрема	653
Библиография	653
19 Среды с дефектами	655
1. Уравнения Эделена и калибровочная теория дефектов	655
1.1. 1-формы дисторсии	655
1.2. Реперы и формы объема	657
1.3. Уравнения Эделена	658
1.4. Баланс импульса	659
1.5. Звездообразная область	660
1.6. Оператор гомотопии	660
1.7. Матричное представление	661
1.8. Структурные уравнения и их интерпретация	661

1.9. Калибровочный формализм	663
Библиография	664
20 Термодинамика	667
Библиография	667
21 Квантовая механика	669
1. Макроскопический мир vs микроскопический мир	669
2. Наблюдаемая	670
2.1. Классическая наблюдаемая	670
2.2. Задача двух тел	672
2.3. Атом водорода	673
2.4. Какой математический аппарат нужен?	675
3. Измерения vs состояние квантовой системы	678
4. Измерения vs вероятность	680
5. Аксиомы квантовой механики	683
Библиография	685

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

Необходимые сведения из теории множеств

1. Замечания об использовании множеств

В настоящей книге мы систематически используем множества, аксиоматическое рассмотрение которых можно найти в [1, 2]. Ниже приведены замечания об обозначениях, связанных с множествами.

Отношение $x \in X$ означает, что множество x является элементом множества X . Если множество Y является подмножеством множества X , то это записывается в виде отношения $Y \subset X$.

Пустое множество обозначается через \emptyset . Множество, определенное списком множеств обозначается перечислением этих множеств между скобками « $\{$ » и « $\}$ ». Если X — множество, а $P(x)$ — предложение, которое либо истинно, либо ложно, при x принадлежащем X , то единственное множество всех тех $x \in X$, для которых $P(x)$ истинно, обозначается через $\{x \in X \mid P(x)\}$.

Объединение двух множеств X и Y обозначается через $X \cup Y$, а их пересечение — через $X \cap Y$. Символ $X \setminus Y$ означает разность множеств X и Y .

Символы \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} и \mathbb{C} обозначают, соответственно, множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество вещественных (действительных) чисел и множество комплексных чисел. Если r, s — целые числа, такие, что $r \leq s$, то множество

$\{r, \dots, s\} \subset \mathbb{Z}$ определяется как

$$\{r, \dots, s\} := \{k \in \mathbb{Z} \mid r \leq k \leq s\}.$$

Если $a < b$ — вещественные числа, то интервал обозначается через $]a, b[$, а отрезок — через $[a, b]$. Полуинтервалы обозначаются, соответственно, через $[a, b[$ и $]a, b]$.

2. Упорядоченные пары. Декартовы произведения. Отношения

2.1. Упорядоченная пара

Пусть x и y — множества. Они определяют новое множество (x, y) , **упорядоченную пару x и y** , следующим образом

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

В отличие от множества, состоящего из x и y , то есть, от $\{x, y\}$, упорядоченная пара (x, y) содержит информацию о порядке ее элементов: для произвольных множеств x, y, z, t ,

$$(x, y) = (z, w) \quad \text{если и только если} \quad (x = z) \wedge (y = w).$$

Процедура построения упорядоченной пары может повторяться индуктивно. Для множеств x, y, z определим упорядоченную тройку $(x, y, z) := ((x, y), z)$. В общем случае, упорядоченный набор из k элементов определен равенством

$$(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) := ((x_1, x_2, \dots, x_{k-1}), x_k).$$

2.2. Декартово произведение

Пусть X и Y — множества. **Декартовым произведением $X \times Y$** называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Индуктивно, предположим, что X, Y, Z — множества. Тогда $X \times Y \times Z := (X \times Y) \times Z$. В общем случае, для произвольной совокупности множеств X_1, \dots, X_k их декартово произведение определяется как

$$\begin{aligned} X_1 \times \dots \times X_k &:= (X_1 \times \dots \times X_{k-1}) \times X_k = \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) \mid x_i \in X_i, \quad i = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

2.3. Отношения

Любое подмножество $R \subset X \times Y$ декартова произведения называется **(бинарным) отношением**. Если R — отношение, то мы пишем xRy вместо $(x, y) \in R$. Пусть теперь $P \subset X \times Y$ и $R \subset Y \times Z$. Отношение

$$P^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X \mid xRy\}$$

называется **обратным к P** . Отношение

$$R \circ P := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (xPy \wedge yRz)\}$$

называется **композицией P и R** .

Пусть X — множество, на котором определено отношение \sim (то есть, $\sim \subset X \times X$). Отношение \sim называется **отношением эквивалентности на X** , если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

- (i) $\forall x \in X : x \sim x$;
- (ii) $\forall x, y \in X : (x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$;
- (iii) $\forall x, y, z \in X : (x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$.

Если $x \in X$ то множество

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

называется **классом эквивалентности x по отношению \sim** . Классы эквивалентности удовлетворяют следующему свойству: для любых $x, y \in X$ либо $[x] = [y]$, либо $[x] \cap [y] = \emptyset$. Множество всех классов эквивалентности, то есть,

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\},$$

называется **фактормножеством X по отношению \sim** .

3. Функции

Пусть X и Y — множества, а $R \subset X \times Y$ — отношение. Оно называется **функциональным**, если

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 : (xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Пусть отношение $R \subset X \times Y$ функционально. Если множество всех первых элементов пар, составляющих R , совпадает с X , то есть,

$$X = \{x \in X \mid \exists y \in Y : xRy\},$$

а множество вторых элементов пар, составляющих R , содержится в Y , то есть,

$$\{y \in Y \mid \exists x \in X : xRy\},$$

то упорядоченная тройка $f = (X, R, Y)$ называется **отображением (функцией, преобразованием, морфизмом) из X в Y** и обозначается через $f : X \rightarrow Y$ [1].

В книге символ Y^X обозначает множество всех отображений из X в Y . Если $f \in Y^X$, $f = (X, R, Y)$, и $x \in X$, то определение f влечет, что существует единственный $y \in Y$, такой, что xRy . Этот элемент y называется **значением f в x** и обозначается через $f(x)$. Таким образом, равенство $y = f(x)$ является не более, чем альтернативной записью того, что xRy . Если $f_1, f_2 \in Y^X$, то

$$(f_1 = f_2) \Leftrightarrow \forall x \in X : f_1(x) = f_2(x).$$

Для $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$ и $B \subset Y$ определим множества

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}, \\ f^{-1}(B) &= \{x \in X \mid f(x) \in B\}. \end{aligned}$$

Множества $f(A)$ и $f^{-1}(B)$, называются, соответственно, **образом A** и **прообразом B** при отображении f .

Имеется следующая классификация функций. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется:

- **сюръективной**, если $f(X) = Y$;

- **инъективной**, если

$$\forall x, y \in X : (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y);$$

- **биективной**, если f сюръективна и биективна.

Пусть $f = (X, R, Y)$ – биективная функция из X в Y . Тогда отношение R^{-1} функционально и $f^{-1} := (Y, R^{-1}, X)$ является биективным отображением из Y в X . Функция $f^{-1} : Y \rightarrow X$ называется **обратной к f** .

Пусть $f \in Y^X$, $f = (X, R, Y)$ и $g \in Z^Y$, $g = (Y, S, Z)$. Тогда отношение $S \circ R$ функционально и $g \circ f := (X, S \circ R, Z)$ является функцией из X в Z . Более того,

$$\forall x \in X : (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Функция $g \circ f : X \rightarrow Z$ называется **композицией функций f и g** . Операция композиции является ассоциативной: если $h \in Y^X$, $g \in Z^Y$ и $f \in W^Z$, то $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. В этой связи, можно опускать скобки и писать $f \circ g \circ h$.

Для любого множества X определено **тождественное отображение X** , $\text{Id}_X : X \rightarrow X$,

$$\forall x \in X : \text{Id}_X(x) := x. \quad (1.3.1)$$

Тождественное отображение удовлетворяет равенству $f \circ \text{Id}_X = \text{Id}_Y \circ f$ для каждого $f \in Y^X$. Более того, пусть $f \in Y^X$ и $g \in X^Y$. Тогда $g = f^{-1}$ если и только если выполняются оба соотношения $g \circ f = \text{Id}_X$ и $f \circ g = \text{Id}_Y$ hold.

Пусть $A \subset X$ и $f \in Y^X$. Тогда отображение $f|_A : A \rightarrow Y$, определенное равенством

$$\forall x \in X : f|_A(x) := f(x),$$

называется **ограничением (или сужением) f на A** .

Если $A \subset X$, то отображение

$$\iota_A : A \rightarrow X, \iota_A(p) := p, \quad (1.3.2)$$

являющееся сужением тождественного отображения Id_X на A , называется **канонической инъекцией A в X** [3].

Библиография

1. Бурбаки Н. Теория множеств. — М. : Мир, 1965.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М. : Мир, 1970.
3. Шварц Л. Анализ. Том 1. — М. : Мир, 1972.

1. Бинарная операция

Определение 2.1. Пусть X — множество. **Бинарная операция на X** (внутренний закон композиции на X) — это отображение вида

$$\top : X \times X \rightarrow X.$$

Будем использовать обозначение

$$x \top y := \top(x, y).$$

Пример 2.1. (Операция, не являющаяся бинарной) Соответствие $(m, n) \mapsto m - n$ на \mathbb{N} не является бинарной операцией, поскольку ее результат, в общем случае, не лежит в \mathbb{N} .

Определение 2.2. Бинарная операция \top на множестве X называется **ассоциативной**, если

$$\forall x, y, z \in X : (x \top y) \top z = x \top (y \top z).$$

Определение 2.3. Бинарная операция \top на множестве X называется **коммутативной**, если

$$\forall x, y \in X : x \top y = y \top x.$$

Пример 2.2. (Независимость ассоциативности и коммутативности) Пусть на \mathbb{Z} задана операция $x \top y := -x - y$. Операция \top коммутативна, но не ассоциативна, поскольку

$$(1 \top 2) \top 3 = 0 \neq 4 = 1 \top (2 \top 3).$$

Теорема 2.1. Если бинарная операция \top на X ассоциативна, то результат ее последовательного применения к $n \in \mathbb{N}$ элементам множества X не зависит от расстановки скобок.

Доказательство. (Кострикин) Будем рассуждать индукцией по n . При $n = 1, 2$ доказывать нечего. При $n = 3$ утверждение теоремы совпадает с законом ассоциативности. Пусть теперь $n > 3$ и для числа элементов $< n$ справедливость утверждения установлена. Нужно лишь показать, что

$$(x_1 \top \cdots \top x_k) \top (x_{k+1} \top \cdots \top x_n) = (x_1 \top \cdots \top x_l) \top (x_{l+1} \top \cdots \top x_n)$$

для любых k, l , где $1 \leq k, l \leq n-1$. Была выписана только внешняя пара скобок, поскольку по предположению индукции расстановка внутренних скобок несущественна. Рассмотрим два случая:

- (1) $k = n - 1$. Тогда $(x_1 \top \cdots \top x_{n-1}) \top x_n = (\cdots (x_1 \top x_2) \top \cdots \top x_{n-1}) \top x_n$.
- (2) $k < n - 1$. Тогда, в силу ассоциативности,

$$\begin{aligned} (x_1 \top \cdots \top x_k) \top (x_{k+1} \top \cdots \top x_n) &= \\ &= (x_1 \top \cdots \top x_k) \top ((x_{k+1} \top \cdots \top x_{n-1}) \top x_n) = \\ &= ((x_1 \top \cdots \top x_k) \top (x_{k+1} \top \cdots \top x_{n-1})) \top x_n = \\ &= (\cdots ((\cdots (x_1 \top x_2) \top \cdots \top x_k) \top x_{k+1}) \top \cdots \top x_{n-1}) \top x_n. \end{aligned}$$

К такому же виду приводится и правая часть доказываемого равенства. \square

2. Основные алгебраические структуры

2.1. Полугруппы

Определение 2.4. Структура (X, \top) , в которой X — множество, а \top — ассоциативная бинарная операция на X , называется **полугруппой**.

Пример 2.3. (Пример полугруппы) Структура $(n\mathbb{Z}, \cdot)$, в которой $n\mathbb{Z} := \{nt \mid t \in \mathbb{Z}\}$ — множество целых чисел, делящихся на $n \in \mathbb{N}$, а (\cdot) — умножение в \mathbb{Z} , является полугруппой.

Определение 2.5. Элемент $\mathbf{1} \in X$ называется **нейтральным** относительно бинарной операции \top , если

$$\forall x \in X : x \top \mathbf{1} = \mathbf{1} \top x = x.$$

Пусть $\mathbf{1}, \mathbf{1}' \in X$ — нейтральные элементы относительно бинарной операции \top . Тогда

$$\mathbf{1}' = \mathbf{1}' \top \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Определение 2.6. Полугруппа (X, \top) , в которой \top обладает нейтральным элементом, называется **полугруппой с единицей**, или **моноидом**.

Пример 2.4. (Примеры моноидов)

- Пусть X — множество, а X^X — множество всех отображений X в себя. Тогда структура (X^X, \circ) , где \circ — бинарная операция, порожденная операцией композиции отображений, является моноидом; единица представлена тождественным отображением Id_X .
- Пусть $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех квадратных $n \times n$ матриц с вещественными элементами, а $(+)$ и (\cdot) — операции сложения и умножения матриц. Тогда $(M_n(\mathbb{R}), +)$ и $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ — моноиды. В первом случае нейтральным элементом является нулевая матрица 0 , а во втором случае — единичная матрица E .

2.2. Группы

Определение 2.7. Пусть (X, \top) — моноид с нейтральным элементом $\mathbf{1}$. Элемент $x \in X$ называется **обратимым** относительно бинарной операции \top , если

$$\exists x' \in X : x \top x' = x' \top x = \mathbf{1}.$$

Если $x', x'' \in X$ таковы, что $x \top x' = x' \top x = \mathbf{1}$ и $x \top x'' = x'' \top x = \mathbf{1}$, то

$$x'' = \mathbf{1} \top x'' = (x' \top x) \top x'' = x' \top (x \top x'') = x' \top \mathbf{1} = x'.$$

Определение 2.8. Если $x \in X$ — обратимый элемент относительно операции \top , то тот единственный элемент $x' \in X$, для которого $x \top x' = x' \top x = \mathbf{1}$, обозначается через x^{-1} и называется **обратным** к x .

Определение 2.9. Моноид (G, \top) , все элементы которого обратимы, называется **группой**. Таким образом, группой называется структура (G, \top) , удовлетворяющая следующим свойствам:

(G_0) \top — бинарная операция на G .

(G_1) Операция \top ассоциативна:

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 \top g_2) \top g_3 = g_1 \top (g_2 \top g_3).$$

(G_2) \top обладает нейтральным элементом $\mathbf{1}$:

$$\forall g \in G : g \top \mathbf{1} = \mathbf{1} \top g = g.$$

(G_3) Для каждого элемента $g \in G$ существует обратный $g^{-1} \in G$:

$$g \top g^{-1} = g^{-1} \top g = \mathbf{1}.$$

Предложение 2.1. (Правило сокращения в группе) Пусть (G, \top) — группа. Если $g \top h_1 = g \top h_2$ или $h_1 \top g = h_2 \top g$, то $h_1 = h_2$.

Доказательство. Подействуем на обе части равенства $g \top h_1 = g \top h_2$ отображением

$$g^{-1} \top \cdot : G \rightarrow G, \quad g^{-1} \top \cdot (h) := g^{-1} \top h,$$

тогда из равенства аргументов следует равенство образов:

$$g^{-1} \top (g \top h_1) = g^{-1} \top (g \top h_2).$$

Используя свойство ассоциативности, получаем

$$(g^{-1} \top g) \top h_1 = (g^{-1} \top g) \top h_2.$$

Поскольку $g^{-1} \top g = \mathbf{1}$, то приходим к равенству $\mathbf{1} \top h_1 = \mathbf{1} \top h_2$, откуда $h_1 = h_2$. Случай равенства $h_1 \top g = h_2 \top g$ рассматривается аналогично. \square

Определение 2.10. Пусть (G, \top_G) — группа, а $H \subset G$ — множество. Структура (H, \top_H) называется **подгруппой** группы (G, \top_G) , если:

(H₁) \top_H — бинарная операция на H и

$$\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \top_H h_2 = h_1 \top_G h_2.$$

(H₂) $1 \in H$, где 1 — единица группы G .

(H₃) Если $h \in H$, то $h^{-1} \in H$, где h^{-1} — элемент, обратный к h относительно \top_G .

Пример 2.5. (Примеры матричных групп)

- Пусть

$$\text{GL}(n; \mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}.$$

Тогда $(\text{GL}(n; \mathbb{R}), \cdot)$ — группа. Она называется **полной (общей) линейной группой ранга n** .

- Пусть

$$\text{SL}(n; \mathbb{R}) := \{A \in \text{GL}(n; \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Тогда $(\text{SL}(n; \mathbb{R}), \cdot)$ — подгруппа группы $(\text{GL}(n; \mathbb{R}), \cdot)$. Она называется **специальной линейной группой ранга n** .

- Положим

$$\text{O}(n) := \{A \in \text{GL}(n; \mathbb{R}) \mid A^T \cdot A = E\},$$

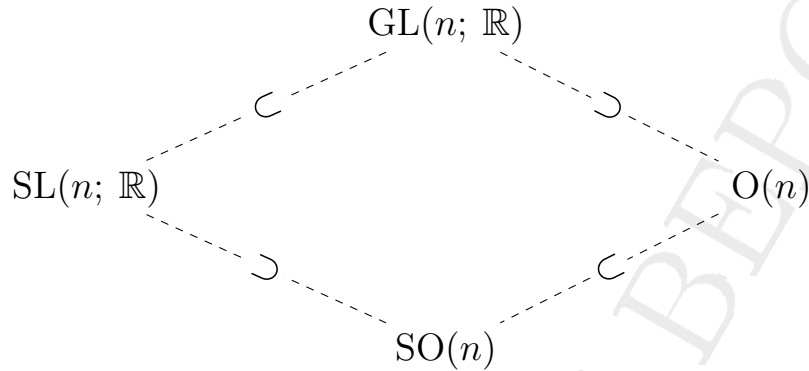
тогда $(\text{O}(n), \cdot)$ — подгруппа $(\text{GL}(n; \mathbb{R}), \cdot)$. Она называется **ортогональной группой ранга n** .

- Положим $\text{SO}(n) := \text{O}(n) \cap \text{SL}(n; \mathbb{R})$, то есть,

$$\text{SO}(n) = \{A \in \text{GL}(n; \mathbb{R}) \mid (A^T \cdot A = E) \wedge (\det A = 1)\}.$$

Структура $(\text{SO}(n), \cdot)$ — подгруппа $(\text{O}(n), \cdot)$, называемая **специальной ортогональной группой ранга n** . Например, в случае $n = 2$,

$$\text{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$



Пример 2.6. (Единичная окружность) отождествляя \mathbb{R}^2 с \mathbb{C} в силу биекции $(x, y) \mapsto x + iy$, рассмотрим единичную окружность $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ с центром в нуле как множество

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Тогда (\mathbb{S}^1, \cdot) , где (\cdot) — умножение комплексных чисел, является группой. Для проверки того, что (\mathbb{S}^1, \cdot) — группа, достаточно заметить, что элемент $z \in \mathbb{S}^1$ имеет вид $z = e^{i\varphi}$, поэтому

(G₀) Если $z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$, то $z_1 = e^{i\varphi_1}$, $z_2 = e^{i\varphi_2}$ и $z_1 \cdot z_2 = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \in \mathbb{S}^1$.

(G₁) (\cdot) — ассоциативная операция.

(G₂) $\mathbf{1} = 1$.

(G₃) Если $z = e^{i\varphi}$, то $z^{-1} = e^{-i\varphi} \in \mathbb{S}^1$.

Пример 2.7. (Группа перестановок) Пусть $X_n = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Обозначим через S_n множество всевозможных биекций (перестановок)

$$\sigma : X_n \rightarrow X_n, \quad \sigma_i := \sigma(i).$$

Тогда (S_n, \circ) — группа.

Пусть (G_1, \top_1) и (G_2, \top_2) — группы. Определим бинарную операцию на $G_1 \times G_2$:

$$\top : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \rightarrow G_1 \times G_2, \quad (a_1, a_2) \top (b_1, b_2) := (a_1 \top_1 b_1, a_2 \top_2 b_2).$$

Тогда $(G_1 \times G_2, \top)$ — группа. Пара $(\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2)$ является нейтральным элементом относительно \top . Далее, если $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$, то $(a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1})$.

Пример 2.8. (Пример произведения групп) Множество $\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ раз}}$ называется *n-тором*. Как произведение групп, \mathbb{T}^n — группа.

Определение 2.11. Группа (G, \top) называется **коммутативной** или **абелевой**, если \top — коммутативная операция

Пример 2.9. (Примеры абелевых групп) Группы $(\mathbb{Z}, +)$ и (\mathbb{S}^1, \cdot) — абелевы.

Пример 2.10. (Пример неабелевой группы) Группа $(GL(n; \mathbb{R}), \cdot)$ неабелева, поскольку произведение матриц некоммутативно.

Определение 2.12. Пусть (G_1, \top_1) и (G_2, \top_2) — группы, а $f : G_1 \rightarrow G_2$ — отображение. Тогда

- f называется **гомоморфизмом**, если

$$\forall a, b \in G_1 : f(a \top_1 b) = f(a) \top_2 f(b),$$

- f называется **изоморфизмом**, если оно является биективным гомоморфизмом,
- f называется **эндоморфизмом**, если $G_1 = G_2$ и f — гомоморфизм,
- f называется **автоморфизмом**, если оно является биективным эндоморфизмом.

Пример 2.11. (Примеры гомоморфизмов) Пусть $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тогда (\mathbb{R}^*, \cdot) — группа. Отображение

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad \exp(t) := e^t,$$

является гомоморфизмом групп $(\mathbb{R}, +)$ и (\mathbb{R}^*, \cdot) , а отображение

$$\det : GL(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*,$$

является гомоморфизмом групп $(GL(n; \mathbb{R}), \cdot)$ и (\mathbb{R}^*, \cdot) .

Предложение 2.2. (Свойства гомоморфизмов групп) Пусть (G_1, \top_1) , (G_2, \top_2) — группы с единицами $\mathbf{1}_1$ и $\mathbf{1}_2$, соответственно, а $f : G_1 \rightarrow G_2$ — гомоморфизм. Тогда

(a) $f(\mathbf{1}_1) = \mathbf{1}_2$,

(b) $\forall g \in G_1 : f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$,

(c) если f обратимо, то отображение $f^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ является гомоморфизмом.

Доказательство. (a) Поскольку $\mathbf{1}_1 \top_1 \mathbf{1}_1 = \mathbf{1}_1$, то $f(\mathbf{1}_1 \top_1 \mathbf{1}_1) = f(\mathbf{1}_1)$. Тогда, поскольку f — гомоморфизм, получаем, что

$$f(\mathbf{1}_1) \top_2 f(\mathbf{1}_1) = f(\mathbf{1}_1) \top_2 \mathbf{1}_2.$$

Применяя правило сокращения (Предложение 2.1), получаем равенство $f(\mathbf{1}_1) = \mathbf{1}_2$.

(b) Пусть $g \in G_1$, тогда $g \top_1 g^{-1} = \mathbf{1}_1$. Применяя к обеим частям равенства отображение f и используя определение гомоморфизма, получаем, что $f(g) \top_2 f(g^{-1}) = f(\mathbf{1}_1)$, или, в силу (a),

$$f(g) \top_2 f(g^{-1}) = \mathbf{1}_2.$$

Аналогично, из равенства $g^{-1} \top_1 g = \mathbf{1}_1$ получаем равенство

$$f(g^{-1}) \top_2 f(g) = \mathbf{1}_2.$$

Следовательно, в силу единственности обратного элемента, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

(c) Пусть $h_1, h_2 \in G_2$. В силу биективности f , существуют элементы $g_1, g_2 \in G_1$, такие, что $f(g_1) = h_1$, $f(g_2) = h_2$. Используя определение гомоморфизма, получаем, что $f(g_1 \top_1 g_2) = f(g_1) \top_2 f(g_2) = h_1 \top_2 h_2$. Теперь, применяя к обеим частям равенства f^{-1} , приходим к окончательному результату:

$$f^{-1}(h_1 \top_2 h_2) = g_1 \top_1 g_2 = f^{-1}(h_1) \top_1 f^{-1}(h_2).$$

□

2.3. Кольца

Определение 2.13. Пусть (X, \top, \perp) — некоторая структура, в которой \top и \perp — бинарные операции. Операция \perp называется **дистрибутивной** относительно \top , если

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in X : (x \top y) \perp z &= (x \perp z) \top (y \perp z), \\ \forall x, y, z \in X : z \perp (x \top y) &= (z \perp x) \top (z \perp y).\end{aligned}$$

Пример 2.12. (Пример дистрибутивной операции) Операция (\cdot) матричного умножения дистрибутивна относительно операции $(+)$ сложения матриц в $M_n(\mathbb{R})$.

Пример 2.13. (Пример недистрибутивной операции) Пусть $(\mathbb{Z}, +, \diamond)$, где $x \diamond y := x + y + xy$. Тогда \diamond не дистрибутивно относительно $+$:

$$(1 + 2) \diamond 3 = 15 \neq 18 = (1 \diamond 3) + (2 \diamond 3).$$

Определение 2.14. **Кольцом** называется любая структура (R, \top, \perp) , в которой

(R_1) подструктура (R, \top) является абелевой группой;

(R_2) подструктура (R, \perp) является полугруппой;

(R_3) выполняются соотношения дистрибутивности:

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in R : (x \top y) \perp z &= (x \perp z) \top (y \perp z), \\ \forall x, y, z \in R : z \perp (x \top y) &= (z \perp x) \top (z \perp y).\end{aligned}$$

Определение 2.15. Кольцо (R, \top, \perp) называется **коммутативным**, если операция \perp коммутативна.

Определение 2.16. Кольцо (R, \top, \perp) называется **кольцом с единицей**, если (R, \perp) — моноид.

Пример 2.14. (Кольцо целых чисел) Структура $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — коммутативное кольцо с единицей. Нейтральным элементом группы $(\mathbb{Z}, +)$ является 0, а нейтральным элементом полугруппы (\mathbb{Z}, \cdot) является 1.

Пример 2.15. (Кольцо квадратных матриц) Пара $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ является кольцом с единицей. Оно некоммутативно, так как умножение матриц некоммутативно. Нейтральным элементом группы $(M_n(\mathbb{R}), +)$ является нулевая матрица 0 , а нейтральным элементом полугруппы $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ является единичная матрица E .

Пример 2.16. (Кольцо функций) Пусть X — множество, а (R, \oplus, \odot) — кольцо. На множестве $R^X = \{X \rightarrow R\}$ всех отображений из X в R можно ввести структуру кольца. Определим поточечную сумму и поточечное произведение отображений $f, g \in R^X$:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) \oplus g(x), \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \odot g(x).\end{aligned}$$

Тогда $(R^X, +, \cdot)$ — кольцо. Нейтральный элемент группы $(R^X, +)$ — отображение $0_X : x \mapsto 0$, где 0 — нейтральный элемент группы (R, \oplus) .

Пример 2.17. (Кольца функций над \mathbb{R}) Структура $(\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \cdot)$ — коммутативное кольцо с единицей. Оно содержит:

- кольцо $M([0, 1]; \mathbb{R})$ всех ограниченных функций;
- кольцо $C([0, 1]; \mathbb{R})$ всех непрерывных функций;
- кольцо $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ всех непрерывно-дифференцируемых функций,

и т.д.

2.4. Поля

Пусть $(R, +, \cdot)$ — кольцо. Нейтральный элемент относительно $(+)$ будем называть **нулем** и обозначать через 0 , а нейтральный элемент относительно (\cdot) будем называть **единицей** и обозначать через 1 .

Определение 2.17. Если $x \cdot y = 0$ при $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то x называют **левым**, а y — **правым делителем нуля**. В случае коммутативного кольца левый и правый делители нуля совпадают; тогда говорят о **делителях нуля**.

Пример 2.18. (Пример делителей нуля) В кольце $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ есть делители нуля:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 2.18. Коммутативное кольцо $(F, +, \cdot)$ с $1 \neq 0$, каждый элемент $a \neq 0$ которого обратим относительно (\cdot) , называется **полем**. Таким образом, если обозначить $F^* := F \setminus \{0\}$, то $(F, +, \cdot)$ — поле, если

(F₁) $(F, +)$ — абелева группа с нулем 0;

(F₂) (F^*, \cdot) — абелева группа с единицей 1;

(F₃) операция (\cdot) дистрибутивна относительно $(+)$.

Пример 2.19. (Поле \mathbb{Q} и его расширение) Структура $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ является полем. Здесь $(+)$ и (\cdot) — операции сложения и умножения рациональных чисел. Расширим это поле на $\sqrt{2}$ (решение уравнения $x^2 = 2$):

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

На $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ определяются операции сложения

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \times \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \\ (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) &:= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}, \end{aligned}$$

и умножения

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \times \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \\ (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) &:= (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}, \end{aligned}$$

превращающие его в поле.

Определение 2.19. Поле комплексных чисел \mathbb{C} — это расширение поля \mathbb{R} на решение уравнения $x^2 + 1 = 0$. Пусть i — символ, обозначающий решение этого уравнения, тогда

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}(i) = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

На \mathbb{C} вводятся операции сложения

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \end{aligned}$$

и умножения

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2), \end{aligned}$$

определяющие структуру $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ — поле комплексных чисел.

На \mathbb{C} вводится операция

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C},$$

сопоставляющая каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопряженное к нему, $\bar{z} := x - iy$. Свойства сопряжения:

- $\forall z \in \mathbb{C} : \bar{\bar{z}} = z,$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$
- $\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} \geq 0.$

2.5. Модули

Определение 2.20. Пусть (R, \top, \perp) — коммутативное кольцо с единицей 1, а X — множество. Тогда R -модулем называется структура

$$(X, R, \top, \perp, +, \cdot),$$

в которой отображения

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X, & (x, y) &\mapsto x + y, \\ \cdot : R \times X &\rightarrow X, & (r, y) &\mapsto r \cdot y = ry, \end{aligned}$$

таковы, что

(i) $(X, +)$ — абелева группа;

(ii) для любых $r, q \in R$ и для любых $x, y \in X$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} r \cdot (x + y) &= (r \cdot x) + (r \cdot y), & (r \top q) \cdot x &= (r \cdot x) + (q \cdot x), \\ (r \perp q) \cdot x &= r \cdot (q \cdot x), & 1 \cdot x &= x. \end{aligned}$$

Пример 2.20. (Векторное пространство) вещественное (соответственно, комплексное) векторное пространство — это \mathbb{R} -модуль (соответственно, \mathbb{C} -модуль).

2.6. Алгебры

Определение 2.21. Алгебра над полем \mathbb{F} — это структура $(V, \mathbb{F}, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$, в которой подструктура $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ — векторное пространство, а $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ — билинейное (2-линейное) отображение.

Алгебра $(V, \mathbb{F}, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ называется

- **коммутативной**, если

$$\forall u, v \in V : [u, v] = [v, u],$$

- **ассоциативной**, если

$$\forall u, v, w \in V : [[u, v], w] = [u, [v, w]].$$

Определение 2.22. Алгебра Ли над полем \mathbb{F} — это алгебра $(\mathfrak{g}, \mathbb{F}, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ над \mathbb{F} , такая, что

(1) $\forall A \in \mathfrak{g} : [A, A] = 0$ (*антисимметричность*),

(2) $\forall A, B, C \in \mathfrak{g} : [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (*тождество Якоби*).

В таком случае отображение $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ называется *скобкой Ли*.

Пример 2.21. (Матричная алгебра Ли) Структура $(M_n(\mathbb{F}), \mathbb{F}, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ в которой $(+)$ и (\cdot) — операции сложения матриц и умножения их на скаляр, а $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор,

$$[A, B] := A \cdot B - B \cdot A,$$

является алгеброй Ли.

Пример 2.22. (Алгебра Ли геометрических векторов) Векторное пространство геометрических векторов с векторным произведением $[\cdot, \cdot]$ является алгеброй Ли.

Пример 2.23. (Алгебра Ли эндоморфизмов) На векторном пространстве $\text{Lin}(V; V)$ линейных отображений $L : V \rightarrow V$ (эндоморфизмов) можно ввести структуру алгебры Ли, определив коммутатор

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \text{Lin}(V; V) \times \text{Lin}(V; V) &\rightarrow \text{Lin}(V; V), \\ [L, M] &:= L \circ M - M \circ L. \end{aligned}$$

Пример 2.24. (Алгебра кватернионов) Пусть \mathbb{H} — вещественное векторное пространство с базисом $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Определим на \mathbb{H} операцию умножения

$$\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H},$$

так, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \\ \mathbf{i}\mathbf{j} &= -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j}\mathbf{k} &= -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k}\mathbf{i} &= -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Тогда \mathbb{H} превращается в вещественную ассоциативную алгебру — **алгебру кватернионов**. Вектор $\mathbf{1}$ является единицей относительно умножения. Любой ненулевой элемент обратим относительно (\cdot) . В этой связи, \mathbb{H} — «почти» поле (умножение некоммутативно).

Пример 2.25. (Алгебра кватернионов и матрицы) Имеется соответствие

$$\mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C}),$$

определенное следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{i} &\mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{j} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{k} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определение 2.23. *Левый \mathbb{H} -модуль* — это вещественное векторное пространство V с внешней операцией

$$\cdot : \mathbb{H} \times V \rightarrow V, \quad (q, v) \mapsto q \cdot v,$$

удовлетворяющей условиям:

- (\cdot) билинейна,
- $\forall p, q \in \mathbb{H} \forall v \in V : p \cdot (q \cdot v) = (pq) \cdot v$.

Определение 2.24. *Правый \mathbb{H} -модуль* — это вещественное векторное пространство V с внешней операцией

$$\cdot : V \times \mathbb{H} \rightarrow V, \quad (v, q) \mapsto v \cdot q,$$

удовлетворяющей условиям:

- (\cdot) билинейна,
- $\forall p, q \in \mathbb{H} \forall v \in V : (v \cdot q) \cdot p = v \cdot (qp)$.

3. Векторные пространства

3.1. Аксиомы векторного пространства

Определение 2.25. Пусть $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ — поле с нулем 0 и единицей 1 . Здесь $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Структура $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$, в которой

- V – множество,
- $+$: $V \times V \rightarrow V$ – внутренний закон композиции,
- \cdot : $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ – внешний закон композиции,

называется **векторным пространством над \mathbb{F}** , если для нее выполняются следующие аксиомы:

$$(C^+) \quad \forall v, w \in V : v + w = w + v,$$

$$(A^+) \quad \forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w),$$

$$(N^+) \quad \exists 0_V \in V \forall v \in V : v + 0_V = v,$$

$$(I^+) \quad \forall v \in V \exists (-v) \in V : v + (-v) = 0_V,$$

$$(A) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \forall v \in V : \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \odot \mu) \cdot v,$$

$$(D_1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \forall v \in V : (\lambda \oplus \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v,$$

$$(D_2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall v, w \in V : \lambda \cdot v + \lambda \cdot w = \lambda \cdot (v + w),$$

$$(U) \quad \forall v \in V : 1 \cdot v = v.$$

3.2. Базис и размерность

Определение 2.26. Пусть $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ – векторное пространство над полем \mathbb{F} . Подмножество $B \subset V$ называется **базисом**, если

$$\forall v \in V \exists! \text{конечный } \{f_1, \dots, f_n\} \subset B : \exists! v^1, \dots, v^n : v = v^1 f_1 + \dots + v^n f_n.$$

Если для заданного векторного пространства существует базис B с конечным числом n элементов, то говорят, что векторное пространство n -мерное:

$$\dim V := n.$$

Выбрав конкретный базис (e_1, \dots, e_n) конечномерного векторного пространства $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$, мы можем единственным образом сопоставить вектору упорядоченную n -ку чисел

$$v \mapsto (v^1, \dots, v^n),$$

так, чтобы

$$v^1 e_1 + \dots + v^n e_n = v.$$

Число v^i называется i -й компонентой вектора в выбранном базисе.

3.3. Арифметическое векторное пространство

На множестве

$$\mathbb{F}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^i \in \mathbb{F}, \quad i = 1, \dots, n\}$$

всех упорядоченных наборов из n элементов поля \mathbb{F} вводится структура векторного пространства над \mathbb{F} посредством операций покомпонатного сложения и умножения на скаляр:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n, \\ (x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) &:= (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n, \\ \lambda \cdot (x^1, \dots, x^n) &:= (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n). \end{aligned}$$

Базис пространства \mathbb{F}^n образуют n кортежей $I_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, n$, где 1 стоит на k -м месте. Поэтому $\dim \mathbb{F}^n = n$.

3.4. Линейные и полилинейные отображения

Определение 2.27. Пусть $(V_1, \mathbb{F}, +_1, \cdot_1)$ и $(V_2, \mathbb{F}, +_2, \cdot_2)$ — векторные пространства над одним и тем же полем \mathbb{F} . Отображение $L : V_1 \rightarrow V_2$ называется **линейным**, если

$$(i) \quad \forall u, v \in V_1 : L(u +_1 v) = L(u) +_2 L(v) \quad (\text{аддитивность}),$$

$$(ii) \quad \forall u \in V_1 \forall \lambda \in \mathbb{F} : L(\lambda \cdot_1 u) = \lambda \cdot_2 L(u) \quad (\text{однородность}).$$

Пусть $(V_1, \mathbb{F}, +_1, \cdot_1)$ и $(V_2, \mathbb{F}, +_2, \cdot_2)$ — векторные пространства над полем \mathbb{F} . Рассмотрим множество линейных отображений

$$\text{Lin}(V_1; V_2) := \{L \in V_2^{V_1} \mid L \text{ — линейное отображение}\}.$$

Наделим это множество операциями сложения и умножения на число так, чтобы получить векторное пространство:

$$\begin{aligned} + : \text{Lin}(V_1; V_2) \times \text{Lin}(V_1; V_2) &\rightarrow \text{Lin}(V_1; V_2), \\ (L_1, L_2) &\mapsto L_1 + L_2, \\ (L_1 + L_2)(u) &:= L_1(u) +_2 L_2(u); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \text{Lin}(V_1; V_2) &\rightarrow \text{Lin}(V_1; V_2), \\ (\lambda, L) &\mapsto \lambda \cdot L, \\ (\lambda \cdot L)(u) &:= \lambda \cdot_2 L(u). \end{aligned}$$

Структура $(\text{Lin}(V_1; V_2), \mathbb{F}, +, \cdot)$ — **пространство линейных отображений**.

Пусть V_1, \dots, V_k и W — векторные пространства над \mathbb{F} , а $L \in W^{V_1 \times \dots \times V_k}$ — отображение. Зафиксируем k векторов $v_i \in V_i$, $i = 1, \dots, k$, и определим частные отображения:

$$\begin{aligned} L(v_1, \dots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \dots, v_k) &: V_i \rightarrow W, \\ L(v_1, \dots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \dots, v_k) &: u \mapsto L(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Определение 2.28. *Отображение $L \in W^{V_1 \times \dots \times V_k}$ называется k -линейным, если для любых векторов $v_i \in V_i$, $i = 1, \dots, k$, и для любого $i = 1, \dots, k$, частное отображение $L(v_1, \dots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \dots, v_k) : V_i \rightarrow W$ является линейным.*

Множество всех k -линейных отображений из $V_1 \times \dots \times V_k$ в W обозначается через

$$\text{Lin}_k(V_1, \dots, V_k; W) := \{L \in W^{V_1 \times \dots \times V_k} \mid L \text{ — } k\text{-линейное отображение}\}.$$

На $\text{Lin}_k(V_1, \dots, V_k; W)$ поточечно определяются операции сложения $(+)$ и умножения (\cdot) на скаляр.

3.5. Изоморфизм векторных пространств

Определение 2.29. *Пусть $(V_1, \mathbb{F}, +_1, \cdot_1)$ и $(V_2, \mathbb{F}, +_2, \cdot_2)$ — векторные пространства над одним и тем же полем \mathbb{F} . Отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ называется **изоморфизмом**, если*

(i) φ — биекция,

(ii) φ — линейное отображение.

Если $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ — изоморфизм, то пространства V_1 и V_2 называются **изоморфными**. Обозначение: $V_1 \cong V_2$.

Теорема 2.2. Если V — n -мерное векторное пространство над полем \mathbb{F} , то $V \cong \mathbb{F}^n$.

Доказательство. Выберем базис $(e_i)_{i=1}^n$ пространства V . Тогда искомым изоморфизм определяется как

$$\Phi : V \rightarrow \mathbb{F}^n, \quad \Phi(v) := (v^1, \dots, v^n), \quad \text{для } v = v^i e_i.$$

□

Следствие 2.1. Если V_1 и V_2 — два векторных пространства одинаковой размерности над одним и тем же полем \mathbb{F} , то $V_1 \cong V_2$.

Доказательство. Пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Поскольку отношение изоморфности является отношением эквивалентности, то из $V_1 \cong \mathbb{F}^n$ и $\mathbb{F}^n \cong V_2$ следует $V_1 \cong V_2$. □

3.6. Дуальное векторное пространство

Пусть $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ — векторное пространство. Введем обозначение

$$V^* := \text{Lin}(V; \mathbb{F}) = \{\varphi \in \mathbb{F}^V \mid \varphi \text{ — линейное отображение}\}.$$

Определение 2.30. Элементы множества V^* называются **ковекторами** или **линейными функционалами**.

На V^* , как и в общем случае линейных отображений, определяются поточечные операции сложения (+) и умножения (\cdot).

Определение 2.31. Векторное пространство $(V^*, \mathbb{F}, +, \cdot)$ называется **векторным пространством, дуальным к V** .

Теорема 2.3. Пусть $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ — векторное пространство размерности n . Тогда сопряженное пространство $(V^*, \mathbb{F}, +, \cdot)$ имеет ту же размерность n .

Доказательство. Достаточно установить изоморфизм $V^* \cong \mathbb{F}^n$. Выберем базис $(e_i)_{i=1}^n$ в V и определим отображение

$$\Phi : V^* \rightarrow \mathbb{F}^n, \quad \Phi(\varphi) := (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

Отображение Φ линейно и инъективно. Для доказательства сюръективности выберем $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{F}^n$. Определим отображение

$$\varphi_w : V \rightarrow \mathbb{F}, \quad \varphi_w(x) = x^i w_i,$$

где x^i — i -я компонента вектора x в базисе $(e_i)_{i=1}^n$. Тогда $\varphi_w \in V^*$ и $\Phi(\varphi_w) = w$, что влечет сюръективность Φ . Таким образом, Φ — изоморфизм. \square

Следствие 2.2. *Если V конечномерно, то $V \cong V^*$.*

Пусть $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ — векторное пространство размерности n . Выберем базис $(e_i)_{i=1}^n$ в V . Изоморфизм

$$\Phi : V^* \rightarrow \mathbb{F}^n, \quad \Phi(\varphi) := (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)),$$

определяет базис $(e^i)_{i=1}^n$ пространства V^* согласно равенствам

$$e^i := \Phi^{-1}(0, \dots, 1, \dots, 0),$$

где 1 стоит на i -м месте. Таким образом определенный базис $(e^i)_{i=1}^n$ удовлетворяет соотношениям

$$e^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Определение 2.32. *Базис $(e^i)_{i=1}^n$ называется дуальным базисом.*

Определение 2.33. *Вторым сопряженным называется векторное пространство*

$$V^{**} := (V^*)^* = \{f \in \mathbb{F}^{V^*} \mid f \text{ — линейное отображение}\}.$$

Как сопряженное к V^* , пространство V^{**} имеет одну и ту же с ним размерность.

Теорема 2.4. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Тогда V и V^{**} канонически изоморфны.

Изоморфизм представлен **каноническим отображением**

$$\varepsilon : V \rightarrow V^{**}, \quad \varepsilon(u) = \varepsilon_u,$$

где $\varepsilon_u : V^* \rightarrow \mathbb{F}$ — отображение, которое действует на ковектор ν по правилу

$$\varepsilon_u(\nu) := \nu(u).$$

Соглашение (для конечномерных пространств): Вектор u отождествляется с функционалом ε_u и используется запись $u(\nu)$ вместо $\varepsilon_u(\nu)$.

Значение $\nu(u)$ ковектора ν на векторе u записывается в виде

$$\langle \nu, u \rangle = \langle u, \nu \rangle := \nu(u).$$

Соответствие $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называется **каноническим спариванием**.

3.7. Подпространство

Определение 2.34. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Подмножество $U \subset V$, рассматриваемое с ограничениями на нем операций $(+)$ и (\cdot) , называется **подпространством** V , если оно замкнуто относительно этих ограничений, то есть,

$$\begin{aligned} \forall u, v \in U : u + v \in U, \\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \forall u \in U : \lambda u \in U. \end{aligned}$$

3.8. Внешняя прямая сумма

Пусть V_1, \dots, V_k — векторные пространства над \mathbb{F} . Декартово произведение $V_1 \times \dots \times V_k$ может быть снабжено структурой векторного пространства над \mathbb{F} посредством введения на нем следующих операций:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_k) + (y_1, \dots, y_k) &:= (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k), \\ \lambda(x_1, \dots, x_k) &:= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_k), \end{aligned}$$

где $x_i, y_i \in V_i$, $i = 1, \dots, k$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Определенное таким образом пространство называется **внешней прямой суммой** V_1, \dots, V_k и обозначается через $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, или, $\bigoplus_{i=1}^k V_i$.

3.9. Внутренняя прямая сумма

Пусть V — векторное пространство, а U_1, \dots, U_k — его подпространства. Предположим, что для каждого вектора $v \in V$ существует единственная совокупность векторов $u_i \in U_i$, $i = 1, \dots, k$, таких, что

$$v = u_1 + \dots + u_k.$$

В этом случае векторное пространство называется **внутренней прямой суммой** U_1, \dots, U_k и обозначается как

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k, \quad \text{или,} \quad V = \bigoplus_{i=1}^k U_i.$$

3.10. Факторпространство

Пусть U — подпространство векторного пространства V . Рассмотрим отношение \sim_U на V :

$$\forall u, v \in V : (u \sim_U v) \Leftrightarrow (u - v \in U).$$

Отношение \sim_U — отношение эквивалентности на V . Пусть $x \in V$, а $[x]$ — соответствующий класс эквивалентности. Тогда

$$[x] = \{x + u \mid u \in U\}.$$

Фактормножество V по отношению \sim_U обозначается через

$$V/U.$$

Пусть $a, b \in V/U$, а $\lambda \in \mathbb{F}$. Выбирая $u \in a$, $v \in b$, положим

$$\begin{aligned} a + b &:= [u + v], \\ \lambda a &:= [\lambda u]. \end{aligned}$$

Эти определения не зависят от представителей u и v . Таким образом, корректно определены операции

$$\begin{aligned} + : V/U \times V/U &\rightarrow V/U, & (a, b) &\mapsto a + b, \\ \cdot : \mathbb{F} \times V/U &\rightarrow V/U, & (\lambda, a) &\mapsto \lambda a. \end{aligned}$$

Определение 2.35. Векторное пространство $(V/U, \mathbb{F}, +, \cdot)$ называется **факторпространством**.

4. Тензорные произведения векторных пространств

4.1. Формальные линейные комбинации

Пусть X — множество, а \mathbb{F} — поле. **Формальной линейной комбинацией элементов X** называется скалярнозначная функция $f : X \rightarrow \mathbb{F}$, такая, что множество

$$K_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{F} \setminus \{0\})$$

точек, в которых f отлична от нуля, является конечным. Множество $M(X)$ всех таких функций образует векторное пространство относительно поточечных операций сложения и умножения на число.

Базис $M(X)$ образован функциями $(\delta_x)_{x \in X}$ из $M(X)$, определенными следующим образом:

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1, & y = x, \\ 0, & y \neq x. \end{cases}$$

Каждый элемент $f \in M(X)$ имеет единственное разложение $f = \sum_{i=1}^k a_i \delta_{x_i}$, где x_1, \dots, x_k — элементы X , для которых $f(x) \neq 0$, а $a_i = f(x_i)$. По определению K_f , эта сумма состоит из конечного числа слагаемых.

Как правило, функция δ_x отождествляется с x и множество X рассматривается как подмножество $M(X)$. В этой связи, пишут $f = \sum_{i=1}^k a_i x_i$.

4.2. Определение тензорного произведения пространств

Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над одним и тем же полем \mathbb{F} . Множество $V_1 \times V_2$ состоит из всевозможных упорядоченных пар (v_1, v_2) , $v_i \in V_i$, и на нем может быть задана структура векторного пространства $M(V_1 \times V_2)$ формальных линейных комбинаций. Тогда выражения (где

$v_i, v'_i, v''_i \in V_i, \lambda \in \mathbb{F}$)

$$\begin{aligned} (v'_1 + v''_1, v_2) - (v'_1, v_2) - (v''_1, v_2), & \quad (v_1, v'_2 + v''_2) - (v_1, v'_2) - (v_1, v''_2), \\ \lambda(v_1, v_2) - (\lambda v_1, v_2), & \quad \lambda(v_1, v_2) - (v_1, \lambda v_2), \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

отличны от нуля.

Рассмотрим пространство $M(V_1 \times V_2)$ всевозможных формальных линейных комбинаций. Пусть N — его подпространство, натянутое на всевозможные разности (2.4.1).

Определение 2.36. *Тензорным произведением $V_1 \otimes V_2$ называется факторпространство*

$$V_1 \otimes V_2 := M(V_1 \times V_2)/N.$$

Класс эквивалентности элемента (v_1, v_2) обозначается через

$$v_1 \otimes v_2 := [(v_1, v_2)],$$

и называется **тензорным произведением** v_1 и v_2 . Для тензорного произведения \otimes справедливы равенства

$$\begin{aligned} (v'_1 + v''_1) \otimes v_2 &= v'_1 \otimes v_2 + v''_1 \otimes v_2, & v_1 \otimes (v'_2 + v''_2) &= v_1 \otimes v'_2 + v_1 \otimes v''_2, \\ \lambda(v_1 \otimes v_2) &= (\lambda v_1) \otimes v_2, & \lambda(v_1 \otimes v_2) &= v_1 \otimes (\lambda v_2). \end{aligned}$$

4.3. Ассоциативность

Пусть U, V, W — три векторных пространства над \mathbb{F} . Поскольку $(U \otimes V) \otimes W$ канонически изоморфно $U \otimes (V \otimes W)$, то можно записать $U \otimes V \otimes W$ для этих множеств и $u \otimes v \otimes w$ для их элементов. Таким образом, индуктивно приходим к произведениям $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ и $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ для k векторных пространств и их элементов.

4.4. Базис и размерность

Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над \mathbb{F} размерностей n_1 и n_2 . Если $(e_j^{(i)})_{j=1}^{n_i}$ — базисы $V_i, i = 1, 2$, то совокупность

$$(e_{i_1}^{(1)} \otimes e_{i_2}^{(2)})_{1 \leq i_1 \leq n_1, 1 \leq i_2 \leq n_2},$$

образует базис $V_1 \otimes V_2$. Таким образом, $\dim(V_1 \otimes V_2) = n_1 n_2$.

4.5. Тензорное произведение и линейные отображения

Пусть V_1, \dots, V_k — конечномерные векторные пространства над \mathbb{F} . Тогда имеются следующие канонические изоморфизмы:

$$\begin{aligned} V_1 \otimes \dots \otimes V_k &\cong \text{Lin}_k(V_1^*, \dots, V_k^*; \mathbb{F}), \\ V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^* &\cong \text{Lin}_k(V_1, \dots, V_k; \mathbb{F}). \end{aligned}$$

Таким образом, тензорное произведение k векторных пространств канонически изоморфно векторному пространству k -линейных отображений.

4.6. Типичные пространства

- Пространство $T^k(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ раз}}$ **контравариантных тензоров ранга k** . Базис: $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n}$. Здесь $(e_i)_{i=1}^n$ — базис V .
- Пространство $T^k(V^*) := \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ раз}}$ **ковариантных тензоров ранга k** . Базис: $(\vartheta^{i_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{i_k})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n}$. Здесь $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — базис V^* .
- Пространство смешанных тензоров типа (k, l) :

$$T^{(k,l)}(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ раз}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{l \text{ раз}}.$$

Базис этого пространства имеет вид:

$$(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes \vartheta^{j_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{j_l})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n},$$

где $(e_i)_{i=1}^n$ — базис V , а $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — дуальный базис V^* .

Соглашения:

$$\begin{aligned} T^0(V) &= T^0(V^*) := \mathbb{F}, \\ T^{(0,k)}(V) &= T^k(V^*), \quad T^{(k,0)}(V) = T^k(V), \quad \dots \end{aligned}$$

5. Внешние формы

Исчисление внешних форм было развито в работах Ф. Klein [1], Н. Weyl [2], Е. Cartan [3] для математически строгого определения операции интегрирования на многообразиях. С середины 20 века внешние формы интенсивно используются в теоретической физике для формализации полей, заданных в искривленном пространстве-времени [4, 5]. В механике континуума исчисление внешних форм используется существенно реже: большинство задач ставится в евклидовом пространстве и нет необходимости усложнять традиционный аппарат теории интегрирования. Вместе с тем, настоящая работа выходит за рамки классических евклидовых постановок и представляется удобным использовать элементы исчисления внешних форм для определения полей, представляющих плотности физических величин: массовые силы, напряжения и т.д.

5.1. Определение

Пусть V — векторное пространство над \mathbb{R} . В силу канонического изоморфизма удобно рассматривать каждый элемент $T \in T^k(V^*)$ как k -линейное отображение

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Определение 2.37. *Отображение $\omega \in T^k(V^*)$ называется **внешней k -формой** (или, **антисимметричным тензором**, если для любых векторов $u_1, \dots, u_k \in V$ и любой пары различных индексов $i, j \in \{1, \dots, k\}$ справедливо равенство*

$$\omega(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_k) = -\omega(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_k).$$

Множество $\Lambda^k(V^*) \subset T^k(V^*)$ всех внешних k -форм является подпространством $T^k(V^*)$.

5.2. Внешнее произведение

Операция \otimes не переводит внешние формы во внешнюю форму. В этой связи, необходимо определить другую операцию.

Напомним, что **перестановка** — это биекция $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть S_k — множество всех перестановок. Вместе с операцией композиции \circ оно образует группу. Для любого тензора $T \in T^k(V^*)$ перестановка $\sigma \in S_k$ определяет новый тензор ${}^\sigma T \in T^k(V^*)$:

$$\forall u_1, \dots, u_k \in V : {}^\sigma T(u_1, \dots, u_k) := T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}).$$

Для перестановки $\sigma \in S_k$ ее **знак** определяется как число

$$\operatorname{sgn} \sigma := \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ четная,} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Эквивалентное определение внешней формы: $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ если и только если $\omega \in T^k(V^*)$ и для любых векторов $u_1, \dots, u_k \in V$, и любой перестановки $\sigma \in S_k$ справедливо равенство

$$\omega(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) \omega(u_1, \dots, u_k).$$

Отображение $\operatorname{Alt} : T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$,

$$\operatorname{Alt} T := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) ({}^\sigma T),$$

называется **альтернированием**. В явном виде, для всех $u_1, \dots, u_k \in V$ имеем

$$\operatorname{Alt} T(u_1, \dots, u_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}).$$

Определение 2.38. *Внешним произведением форм $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ и $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ называется форма $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V^*)$, определяемая равенством*

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta). \quad (2.5.1)$$

Пример 2.26. Пусть $\alpha, \beta \in \Lambda^1(V^*) = V^*$. Тогда $\alpha \otimes \beta \in T^2(V^*)$ и

$$\operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} (\operatorname{sgn} \sigma) ({}^\sigma(\alpha \otimes \beta)).$$

Множество S_2 состоит из двух перестановок:

$$S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\},$$

поэтому

$$\text{Alt}(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{2!} \left({}^{(1,2)}(\alpha \otimes \beta) - {}^{(2,1)}(\alpha \otimes \beta) \right).$$

Пусть $u_1, u_2 \in V$, тогда

$$\begin{aligned} {}^{(1,2)}(\alpha \otimes \beta)(u_1, u_2) &= \alpha \otimes \beta(u_1, u_2), \\ {}^{(2,1)}(\alpha \otimes \beta)(u_1, u_2) &= \alpha \otimes \beta(u_2, u_1) = \beta \otimes \alpha(u_1, u_2), \end{aligned}$$

поэтому

$${}^{(1,2)}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \otimes \beta, \quad {}^{(2,1)}(\alpha \otimes \beta) = \beta \otimes \alpha.$$

Таким образом,

$$\text{Alt}(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha).$$

Внешнее произведение $\alpha \wedge \beta$ имеет вид

$$\alpha \wedge \beta = \frac{2!}{1!1!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha.$$

Приходим к операции $\wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^l(V^*) \rightarrow \Lambda^{k+l}(V^*)$. Ее свойства:

(\wedge_1) **Билинейность.** Для $\omega, \omega' \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta, \eta' \in \Lambda^l(V^*)$ и $a, a' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (a\omega + a'\omega') \wedge \eta &= a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta), \\ \omega \wedge (a\eta + a'\eta') &= a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega \wedge \eta'). \end{aligned}$$

(\wedge_2) **Ассоциативность.** Для $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ и $\mu \in \Lambda^r(V^*)$,

$$\omega \wedge (\eta \wedge \mu) = (\omega \wedge \eta) \wedge \mu.$$

(\wedge_3) **Антикоммутативность.** Для $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^l(V^*)$,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

(\wedge_4) Если $\nu^1, \dots, \nu^k \in V^*$ и $u_1, \dots, u_k \in V$, то

$$\nu^1 \wedge \dots \wedge \nu^k(u_1, \dots, u_k) = \det[\nu^i(u_j)].$$

5.3. Базис и размерность

Пусть $(e_i)_{i=1}^n$ — базис V , а $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — базис V^* , дуальный к $(e_i)_{i=1}^n$. Совокупность

$$(\vartheta^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{i_k})_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n}$$

образует базис $\Lambda^k(V^*)$. Для каждой внешней k -формы ω справедливо разложение:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \vartheta^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{i_k},$$

где $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. В этой связи, $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$.

5.4. Связь с определителями

Для $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ и векторов $u_1, \dots, u_k \in V$ имеется связь между значением внешней k -формы и определителем:

$$\omega(u_1, \dots, u_k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \begin{vmatrix} u_1^{i_1} & \dots & u_1^{i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_k^{i_1} & \dots & u_k^{i_k} \end{vmatrix},$$

где $\vartheta^{i_j}(u_l) = u_l^j$. В частности, для $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ и векторов $u_1, \dots, u_n \in V$ имеем

$$\omega(u_1, \dots, u_n) = \omega_{1\dots n} \begin{vmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^1 & \dots & u_n^n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, формализм внешнего произведения, как и исчисление внешних форм в целом, тесно связаны с теорией определителей, развитие которой привело к появлению геометрических концепций ориентированной площади и объема.

6. Аффинные пространства

6.1. Аксиомы Вейля

Определение 2.39. Пусть $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. **Аффинным пространством над полем \mathbb{F}** называется структура $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \psi)$, в которой:

(\mathcal{A}_1) \mathcal{A} — непустое множество;

(\mathcal{A}_2) $\vec{\mathcal{A}}$ — векторное пространство над \mathbb{F} ;

(\mathcal{A}_3) $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}$ — отображение, $(a, b) \mapsto \vec{ab}$, удовлетворяющее аксиомам Вейля:

(W_1) каковы бы ни были элементы $a, b, c \in \mathcal{A}$, выполняется соотношение Шаля: $\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca} = \vec{0}$;

(W_2) для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ частичное отображение $\psi_a : \mathcal{A} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}$, $x \mapsto \vec{ax}$, является биекцией.

Элементы \mathcal{A} — точки, элементы $\vec{\mathcal{A}}$ — трансляционные векторы.

Следствия из аксиом Вейля:

- Полагая в соотношении Шаля $a = b = c$, приходим к равенству $\vec{aa} = \vec{0}$.
- Если положить в соотношении Шаля $a = c$, то тогда $\vec{ab} = -\vec{ba}$. В этой связи, соотношение Шаля может быть записано в виде

$$\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}.$$

- Поскольку для любой точки $a \in \mathcal{A}$ отображение $\psi_a : \mathcal{A} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}$ является биекцией, то существует обратная биекция $\psi_a^{-1} : \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$. Таким образом, определена внешняя бинарная операция

$$+ : \mathcal{A} \times \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}, \quad + : (a, \vec{v}) \mapsto a + \vec{v} := \psi_a^{-1}(\vec{v}),$$

сопоставляющая каждой паре (a, \vec{v}) единственную точку $b \in \mathcal{A}$, такую, что $\vec{ab} = \vec{v}$.

Свойства операции $+ : \mathcal{A} \times \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$:

- (+₁) если $a, b \in \mathcal{A}$ — две точки, то существует единственный трансляционный вектор $\vec{u} \in \vec{\mathcal{A}}$, удовлетворяющий равенству $a + \vec{u} = b$;
- (+₂) для любой точки $a \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $a + \vec{0} = a$;

(+3) для любой точки $a \in \mathcal{A}$ и любых векторов $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$ справедливо соотношение $(a + \vec{u}) + \vec{v} = a + (\vec{u} + \vec{v})$.

Размерность аффинного пространства:

$$\dim \mathcal{A} := \dim \vec{\mathcal{A}}.$$

«Разность» точек:

$$\overrightarrow{b - a} := \overrightarrow{a b}.$$

Векторное пространство — частный случай аффинного: Если V — векторное пространство над \mathbb{F} , то структура (V, V, ψ) , в которой отображение $\psi : V \times V \rightarrow V$ определено равенством $\psi(u, v) := v - u$, является аффинным пространством.

6.2. Векторизация и арифметизация

Каждой точке n -мерного аффинного пространства $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \psi)$ можно единственным образом сопоставить вектор. Действительно, для фиксированной точки $a \in \mathcal{A}$ определим отображение

$$p := \psi_a : \mathcal{A} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}, \quad p(x) := \overrightarrow{x - a}, \quad (2.6.1)$$

Оно является биективным и осуществляет **векторизацию** аффинного пространства, то есть, переход от точек к векторам.

Определение 2.40. *Отображение $p : \mathcal{A} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}$, определенное правилом (2.6.1), называется **полем векторов места**.*

Переход от точек к числам из некоторого поля \mathbb{K} будем называть **арифметизацией** и определять как биекцию

$$\text{Ar} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Структура аффинного пространства позволяет ввести на нем естественную арифметизацию.

Определение 2.41. *Пусть $\dim \mathcal{A} = n$. **Общая (аффинная) система координат** — это пара $(a, (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$, в которой $a \in \mathcal{A}$ — **начало**,*

a $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ — базис $\vec{\mathcal{A}}$. Любая точка $x \in \mathcal{A}$ единственным образом представляется в виде

$$x = a + x^i \vec{e}_i,$$

где $(x^i)_{i=1}^n$ — компоненты вектора $p(x)$, называемые **координатами точки x** .

Пусть $(e^i)_{i=1}^n$ — базис в сопряженном пространстве $\vec{\mathcal{A}}^*$, дуальный к $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$, то есть, $\langle e^i, \vec{e}_j \rangle = \delta_j^i$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $x^i = e^i(p(x))$ и, таким образом, определена биекция $\text{Ar}_{(a, (\vec{e}_i)_{i=1}^n)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\text{Ar}_{(a, (\vec{e}_i)_{i=1}^n)} : x \mapsto (e^1(p(x)), \dots, e^n(p(x))), \quad (2.6.2)$$

являющаяся, если использовать терминологию теории многообразий, координатным отображением, сопоставляющим каждой точке ее координаты относительно системы $(a, (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$. В дальнейшем в качестве арифметизации будем использовать только отображение $\text{Ar}_{(a, (\vec{e}_i)_{i=1}^n)}$. В том случае, когда две аффинные системы координат одновременно не используются, будем иногда опускать нижний индекс и писать просто Ar . Соотношения между Ar и p показаны на следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{p} & \vec{\mathcal{A}} \\ \text{Ar} \downarrow & & \searrow \Phi = \text{Ar} \circ p^{-1} \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Отображение $\Phi : \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, используемое в диаграмме, является изоморфизмом векторных пространств.

6.3. Прямые и плоскости

Пусть $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \psi)$ — аффинное пространство размерности $\dim \mathcal{A} = n$. Предположим, что $\mathcal{U} \subset \vec{\mathcal{A}}$ — подпространство $\vec{\mathcal{V}}$, а $a \in \mathcal{A}$ — некоторая точка. Тогда множество

$$\mathcal{F} := a + \mathcal{U} = \{a + \vec{h} \mid \vec{h} \in \mathcal{U}\},$$

называется **аффинным подпространством** размерности $\dim \mathcal{U}$. Если $\dim \mathcal{F} = 1$ то \mathcal{F} называется **аффинной прямой**. В этом случае подпространство \mathcal{U} порождается ненулевым вектором $\vec{h} \in \mathcal{U}$ и можно записать

$$\mathcal{F} = \{a + \lambda \vec{h} \mid \lambda \in \mathbb{F}\}.$$

Аффинное подпространство размерности 2 называется **аффинной плоскостью**. Если $\dim \mathcal{U} = n - 1$ то аффинное подпространство называют **аффинной гиперплоскостью**. Таким образом, аффинное пространство — это абсолютный мир прямых и плоскостей; мир, который представлен в классической синтетической геометрии.

7. Евклидовы векторные пространства

7.1. Скалярное произведение

Определение 2.42. Пусть $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ — векторное пространство над \mathbb{R} . **Скалярное произведение на V** — это отображение

$$(\cdot | \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяющее условиям

(i) **Симметричность.** $\forall u, v \in V : (u|v) = (v|u)$.

(ii) **Линейность по первому аргументу.**

$$\forall v_1, v_2, w \in V \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : ((\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)|w) = \lambda_1 (v_1|w) + \lambda_2 (v_2|w).$$

(iii) **Положительная определенность.** $\forall v \in V : (v|v) \geq 0$. Более того,

$$\forall v \in V : ((v|v) = 0 \Leftrightarrow v = 0).$$

Норма и угол:

• **Норма вектора v :** число $\|v\| := \sqrt{(v|v)}$.

• **Угол между векторами u и v :** число $\varphi \in [0, \pi]$, такое, что

$$\cos \varphi = \frac{(u|v)}{\|u\| \|v\|}.$$

7.2. Дуальный базис

Определение 2.43. Пусть V — n -мерное векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)$. Если $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ — базис V , то можно построить **дуальный векторный базис** $(\mathbf{e}^i)_{i=1}^n$. Он определяется равенствами

$$(\mathbf{e}^i|\mathbf{e}_j) = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Обозначим $g_{ij} = (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда $n \times n$ матрица $[g_{ij}]$ симметрична, невырождена и $g = \det[g_{ij}] > 0$. Элементы дуального базиса $(\mathbf{e}^i)_{i=1}^n$ можно разложить по базису $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$:

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $[g^{ij}]$ обратная матрица: $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$.

Вектор $\mathbf{v} \in V$ можно разложить по любому из базисов $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ и $(\mathbf{e}^i)_{i=1}^n$:

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i = v_i\mathbf{e}^i,$$

где

$$v^i = (\mathbf{v}|\mathbf{e}^i), \quad v_i = (\mathbf{v}|\mathbf{e}_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

v^i — контравариантные компоненты \mathbf{v} , а v_i — ковариантные компоненты \mathbf{v} .

7.3. Музыкальные изоморфизмы

Теорема 2.5. (Рисс) Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)$. Для любого линейного функционала $\nu \in V^*$ существует единственный вектор $\mathbf{w} \in V$, такой, что

$$\forall \mathbf{v} \in V : \nu(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}|\mathbf{w}).$$

Доказательство. 1. Единственность. Пусть $\nu \in V^*$. Предположим, что существуют по меньшей мере два вектора $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$, такие, что $\nu(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}|\mathbf{w}_1) = (\mathbf{v}|\mathbf{w}_2)$, для любого вектора $\mathbf{v} \in V$. Используя свойство линейности скалярного произведения, получаем, что $(\mathbf{v}|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) = 0$ для любого вектора $\mathbf{v} \in V$. В частности, это равенство выполняется для $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ и тогда свойство положительной определенности влечет, что $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$. Единственность доказана.

2. Существование. Доказательство существования можно провести следующим способом. Пусть $\dim V = n$. Выберем базис $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^n$ пространства V и соответствующие дуальные базисы $(e^k)_{k=1}^n$ пространства V^* и $(\mathbf{e}^k)_{k=1}^n$ пространства V . Для ковектора $\nu \in V^*$ имеем $\nu = \nu_k e^k$. Если $\mathbf{v} \in V$, то $\nu(\mathbf{v}) = v^k \nu_k$, где $\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k$. Положим $\mathbf{w} := \nu_k \mathbf{e}^k$. Тогда $(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = v^k \nu_k$ и \mathbf{w} — искомый вектор. \square

Взаимно обратные отображения

$$(\cdot)^\flat : V \rightarrow V^* \quad \text{и} \quad (\cdot)^\sharp : V^* \rightarrow V,$$

определенные соотношениями

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \quad \langle \mathbf{v}^\flat, \mathbf{w} \rangle &= (\mathbf{v}|\mathbf{w}), \\ \forall \mathbf{w} \in V \forall \nu \in V^* : \quad (\nu^\sharp|\mathbf{w}) &= \langle \nu, \mathbf{w} \rangle, \end{aligned}$$

являются изоморфизмами, зависящими от скалярного произведения. Они называются **музыкальными изоморфизмами**.

8. Эрмитовы векторные пространства

8.1. Скалярное произведение

Определение 2.44. Пусть $(V, \mathbb{C}, +, \cdot)$ — векторное пространство над \mathbb{C} . **Скалярное произведение на V** — это отображение

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C},$$

удовлетворяющее условиям

(i) **Эрмитовость.** $\forall u, v \in V : (u|v) = \overline{(v|u)}$.

(ii) **Линейность по первому аргументу.**

$$\forall v_1, v_2, w \in V \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : ((\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)|w) = \lambda_1 (v_1|w) + \lambda_2 (v_2|w).$$

(iii) **Положительная определенность.** $\forall v \in V : (v|v) \geq 0$. Более того,

$$\forall v \in V : ((v|v) = 0 \Leftrightarrow v = 0).$$

Норма и угол:

- **Норма вектора v :** число $\|v\| := \sqrt{(v|v)}$.
- **Угол между векторами u и v :** число $\varphi \in [0, \pi]$, такое, что $\cos \varphi = \frac{|(u|v)|}{\|u\|\|v\|}$.

9. Перенос алгебраической структуры на множество

Пусть X, Y — множества, а $\varphi : X \rightarrow Y$ — биекция. Предполагая, что на Y задана алгебраическая структура, перенесем ее на множество X посредством биекции φ .

9.1. Случай полугруппы

Пусть (Y, \top_Y) — полугруппа. Определим отображение

$$\top_X : X \times X \rightarrow X, \quad a \top_X b := \varphi^{-1}(\varphi(a) \top_Y \varphi(b)). \quad (2.9.1)$$

Здесь $\varphi(a), \varphi(b)$ — элементы Y , поэтому на них можно подействовать операцией \top_Y . Результат, $\varphi(a) \top_Y \varphi(b)$, является элементом Y и поэтому на него можно подействовать отображением φ^{-1} . Следовательно, отображение \top_X определено корректно.

Предложение 2.3. *Структура (X, \top_X) является полугруппой.*

Доказательство. Для доказательства того, что (X, \top_X) — полугруппа, нужно показать, что операция \top_X является ассоциативной. Пусть $a, b, c \in X$, тогда

$$\begin{aligned} (a \top_X b) \top_X c &= \{\varphi^{-1}(\varphi(a) \top_Y \varphi(b))\} \top_X c = \varphi^{-1}[(\varphi(a) \top_Y \varphi(b)) \top_Y \varphi(c)], \\ a \top_X (b \top_X c) &= a \top_X \{\varphi^{-1}(\varphi(b) \top_Y \varphi(c))\} = \varphi^{-1}[\varphi(a) \top_Y (\varphi(b) \top_Y \varphi(c))]. \end{aligned}$$

Поскольку операция \top_Y ассоциативна, то $(\varphi(a) \top_Y \varphi(b)) \top_Y \varphi(c) = \varphi(a) \top_Y (\varphi(b) \top_Y \varphi(c))$. В этой связи, $(a \top_X b) \top_X c = a \top_X (b \top_X c)$ и (X, \top_X) — полугруппа. \square

9.2. Случай группы

Пусть (Y, \top_Y) — группа, единицу которой обозначим через $\mathbf{1}_Y$. Снова определим операцию \top_X на X по формуле (2.9.1).

Предложение 2.4. *Структура (X, \top_X) является группой, единица которой равна $\mathbf{1}_X = \varphi^{-1}(\mathbf{1}_Y)$, а элемент, обратный к $a \in X$, равен $a^{-1} = \varphi^{-1}(\varphi(a)^{-1})$.*

Доказательство. В соответствии с определением 2.9, необходимо проверить выполнение аксиом (G_1) – (G_3) . Свойство (G_1) следует из Предложения 2.3. Покажем теперь, что элемент $\mathbf{1}_X := \varphi^{-1}(\mathbf{1}_Y)$ является нейтральным относительно \top_X . Действительно, для $a \in X$ имеем

$$\begin{aligned} a \top_X \mathbf{1}_X &= \varphi^{-1}(\varphi(a) \top_Y \varphi(\mathbf{1}_X)) = \varphi^{-1}(\varphi(a) \top_Y \mathbf{1}_Y) = a, \\ \mathbf{1}_X \top_X a &= \varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{1}_X) \top_Y \varphi(a)) = \varphi^{-1}(\mathbf{1}_Y \top_Y \varphi(a)) = a. \end{aligned}$$

В этой связи, $\mathbf{1}_X$ — нейтральный элемент и свойство (G_2) выполнено. Пусть теперь $a \in X$, тогда положим $b = \varphi^{-1}(\varphi(a)^{-1})$, где $\varphi(a)^{-1}$ — элемент Y , обратный к $\varphi(a)$ относительно \top_Y . Для a и b мы имеем, что

$$\begin{aligned} a \top_X b &= \varphi^{-1}(\varphi(a) \top_Y \varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(a) \top_Y \varphi(a)^{-1}) = \mathbf{1}_X, \\ b \top_X a &= \varphi^{-1}(\varphi(b) \top_Y \varphi(a)) = \varphi^{-1}(\varphi(a)^{-1} \top_Y \varphi(a)) = \mathbf{1}_X. \end{aligned}$$

В этой связи, $b = a^{-1}$ и свойство (G_3) выполнено. Этим завершается доказательство того, что (X, \top_X) — группа. \square

В силу определения операции \top_X , отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ является изоморфизмом алгебраических структур (X, \top_X) и (Y, \top_Y) :

$$\forall a, b \in X : \varphi(a \top_X b) = \varphi(a) \top_Y \varphi(b).$$

Предложение 2.5. *Структура (X, \top_X) является единственной структурой группы на X , для которой φ — изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\top}_X$ — групповая операция на X , такая, что φ — изоморфизм групп $(X, \tilde{\top}_X)$ и (Y, \top_Y) . Тогда для любых $a, b \in X$,

$$\varphi(a \tilde{\top}_X b) = \varphi(a) \top_Y \varphi(b),$$

по определению изоморфизма. В этой связи,

$$a\tilde{\top}_X b = \varphi^{-1}(\varphi(a)\top_Y\varphi(b)) = a\top_X b,$$

и тогда $\tilde{\top}_X = \top_X$. □

В заключение раздела заметим, что если (Y, \top_Y) — абелева группа, то группа (X, \top_X) также является абелевой. Действительно, если $a, b \in X$, то

$$a\top_X b = \varphi^{-1}(\varphi(a)\top_Y\varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(b)\top_Y\varphi(a)) = b\top_X a.$$

9.3. Случай кольца

Аналогично случаям группы и полугруппы, на множество можно перенести структуру кольца. Пусть (Y, \top_Y, \perp_Y) — кольцо. Определим бинарные операции на X в соответствии с формулой (2.9.1):

$$\begin{aligned} \top_X : X \times X &\rightarrow X, & a\top_X b &:= \varphi^{-1}(\varphi(a)\top_Y\varphi(b)), \\ \perp_X : X \times X &\rightarrow X, & a\perp_X b &:= \varphi^{-1}(\varphi(a)\perp_Y\varphi(b)). \end{aligned}$$

Предложение 2.6. *Структура (X, \top_X, \perp_X) является кольцом.*

Доказательство. В силу Предложения 2.4, структура (X, \top_X) является группой, причем, абелевой, а в силу Предложения 2.3, структура (X, \perp_X) — полугруппа. Осталось лишь проверить выполнение свойства дистрибутивности. Пусть $a, b, c \in X$, тогда

$$(a\top_X b)\perp_X c = \varphi^{-1}(\varphi(a)\top_Y\varphi(b))\perp_X c = \varphi^{-1}((\varphi(a)\top_Y\varphi(b))\perp_Y\varphi(c)).$$

В силу дистрибутивности \perp_Y относительно \top_Y ,

$$(a\top_X b)\perp_X c = \varphi^{-1}\{(\varphi(a)\perp_Y\varphi(c))\top_Y(\varphi(b)\perp_Y\varphi(c))\}.$$

Поскольку φ^{-1} — гомоморфизм групп (Y, \top_Y) и (X, \top_X) , то

$$\begin{aligned} (a\top_X b)\perp_X c &= \varphi^{-1}(\varphi(a)\perp_Y\varphi(c))\top_X\varphi^{-1}(\varphi(b)\perp_Y\varphi(c)) = \\ &= (a\perp_X c)\top_X(b\perp_X c). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$c\perp_X(a\top_X b) = (c\perp_X a)\top_X(c\perp_X b).$$

Следовательно, (X, \top_X, \perp_X) — кольцо. □

9.4. Случай векторного пространства

Наконец, рассмотрим последний случай. Пусть X — множество а $(Y, \mathbb{F}, +_Y, \cdot_Y)$ — векторное пространство над полем $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$. Определим операции на X :

$$\begin{aligned} +_X : X \times X &\rightarrow X, & u +_X v &:= \varphi^{-1}(\varphi(u) +_Y \varphi(v)), \\ \cdot_X : \mathbb{F} \times X &\rightarrow X, & \lambda \cdot_X u &:= \varphi^{-1}(\lambda \cdot_Y \varphi(u)). \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

Предложение 2.7. *Структура $(X, \mathbb{F}, +_X, \cdot_X)$ является векторным пространством над \mathbb{F} , а отображение φ — изоморфизмом векторных пространств.*

Доказательство. Необходимо проверить выполнение аксиом определения 2.25. В силу Предложения 2.4, структура $(X, +_X)$ является группой, причем, удовлетворяющей свойству коммутативности. В этой связи, аксиомы (C^+) – (I^+) удовлетворяются. Осталось лишь проверить выполнение аксиом (A) – (U) .

Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, а $v \in X$, тогда

$$\begin{aligned} \lambda \cdot_X (\mu \cdot_X v) &= \lambda \cdot_X \varphi^{-1}(\mu \cdot_Y \varphi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda \cdot_Y (\mu \cdot_Y \varphi(v))) = \\ &= \varphi^{-1}((\lambda \odot \mu) \cdot_Y \varphi(v)) = (\lambda \odot \mu) \cdot_X v, \end{aligned}$$

что влечет (A) . Далее,

$$(\lambda \oplus \mu) \cdot_X v = \varphi^{-1}((\lambda \oplus \mu) \cdot_Y \varphi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda \cdot_Y \varphi(v) +_Y \mu \cdot_Y \varphi(v)).$$

Поскольку φ^{-1} — гомоморфизм групп $(Y, +_Y)$ и $(X, +_X)$, то

$$(\lambda \oplus \mu) \cdot_X v = \varphi^{-1}(\lambda \cdot_Y \varphi(v)) +_X \varphi^{-1}(\mu \cdot_Y \varphi(v)) = \lambda \cdot_X v + \mu \cdot_X v,$$

и справедливость (D_1) установлена.

Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$, $v, w \in X$, тогда

$$\begin{aligned} \lambda \cdot_X (v +_X w) &= \lambda \cdot_X \varphi^{-1}(\varphi(v) +_Y \varphi(w)) = \varphi^{-1}(\lambda \cdot_Y \varphi(v) +_Y \lambda \cdot_Y \varphi(w)) = \\ &= \varphi^{-1}(\lambda \cdot_Y \varphi(v)) +_X \varphi^{-1}(\lambda \cdot_Y \varphi(w)) = \lambda \cdot_X v +_X \lambda \cdot_X w, \end{aligned}$$

и (D_2) установлено.

Наконец, пусть $v \in X$, тогда

$$1 \cdot_X v = \varphi^{-1}(1 \cdot_Y \varphi(v)) = v,$$

и мы установили справедливость (U). Таким образом, $(X, \mathbb{F}, +_X, \cdot_X)$ — векторное пространство.

В силу формулы (2.9.2), для любых $\lambda \in \mathbb{F}$ и $u, v \in X$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\varphi(u +_X v) &= \varphi(u) +_Y \varphi(v), \\ \varphi(\lambda \cdot_X u) &= \lambda \cdot_Y \varphi(u),\end{aligned}$$

означающие, что φ — изоморфизм векторных пространств $(X, \mathbb{F}, +_X, \cdot_X)$ и $(Y, \mathbb{F}, +_Y, \cdot_Y)$. \square

Как и в случае группы, можно показать, что структура $(X, \mathbb{F}, +_X, \cdot_X)$, определенная формулой (2.9.2), является единственной, для которой φ — изоморфизм.

Библиография

1. Klein F. **Elementary Mathematics from a Higher Standpoint. Volume II: Geometry.** — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.
2. Вейль Г. Пространство, время, материя. — М. : Янус, 1996.
3. Cartan E. J. Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1899. — Vol. 16. — P. 239–332.
4. Mangiarotti L., Sardanashvili G.A. Connections in Classical and Quantum Field Theory. — World Scientific, 2000.
5. Gravitation / C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, D.I. Kaiser. — Princeton University Press, 2017.

1. Метрическое пространство

1.1. Прототипы метрического пространства

Пространство \mathbb{R}

В классических курсах анализа определения предела числовой последовательности и непрерывности отображения формулируются с использованием ε - δ формализма, предложенного О. Коши. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность. Число $x \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Здесь число $d(x, y) := |x - y|$ играет роль отклонения x от y , или расстояния от x до y . В этой связи, словесное определение предела последовательности имеет вид: для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε найдется натуральное число N , такое, что расстояние от любого члена последовательности x_n с номером $n > N$ до числа x будет меньше ε .

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — числовая функция, тогда она называется непре-

рывной в точке $x \in \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

В этой связи, определения предела и непрерывности связаны с возможностью формализовать отклонение одной точки от другой. В случае множества вещественных чисел отклонение определяется модулем числа.

Пространство \mathbb{R}^n

Рассмотрим многомерный случай. Декартово произведение $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \in \mathbb{N}}$ является множеством

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : x^i \in \mathbb{R}\}$$

всевозможных упорядоченных кортежей из n вещественных чисел. Элемент \mathbb{R}^n обозначается через¹ (x^1, \dots, x^n) или через x . Используется соглашение: $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

На \mathbb{R}^n вводится структура n -мерного вещественного векторного пространства посредством определения на нем операций покомпонентного сложения и умножения на скаляр:

$$\begin{aligned} (x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) &= (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n), \\ \lambda(x^1, \dots, x^n) &= (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n), \end{aligned}$$

для всех $(x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

На векторном пространстве \mathbb{R}^n вводится скалярное произведение $(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \cdot y := x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n,$$

где $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, \mathbb{R}^n становится n -мерным евклидовым пространством.

Скалярное произведение определяет геометрические свойства \mathbb{R}^n . Например, оно порождает норму (длину вектора) $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу: $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$. То есть,

$$\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}.$$

¹Мы обозначаем элемент \mathbb{R}^n через (x^1, \dots, x^n) , а не через (x_1, \dots, x_n) , что согласуется с правилом суммирования Эйнштейна. Если $n = 3$, то мы часто используем обозначение (x, y, z) .

Если x и y — ненулевые элементы \mathbb{R}^n , то угол между векторами x и y определяется как число $\varphi \in [0, \pi]$, такое, что

$$\cos \varphi = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}.$$

Норма $\|x - y\|$ определяет расстояние между точками $x, y \in \mathbb{R}^n$. В этой связи, можно сформулировать определения сходимости и непрерывности.

Последовательность $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ точек \mathbb{R}^n сходится к $x \in \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall i \in \mathbb{N} : i \geq N \Rightarrow \|x_i - x\| < \varepsilon.$$

Отображение $f : U \rightarrow V$ подмножеств $U, V \subset \mathbb{R}^n$ называется непрерывным в точке $x \in U$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in U : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Пространство $C([a, b]; \mathbb{R})$

Рассмотрим более абстрактный пример — пространство функций. Пусть $[a, b]$ — отрезок вещественной оси. Свойство «быть непрерывным в каждой точке $[a, b]$ » выделяет из множества $\mathbb{R}^{[a, b]}$ подмножество

$$C([a, b]; \mathbb{R}) := \{f \in \mathbb{R}^{[a, b]} \mid f \text{ непрерывно в каждой точке } [a, b]\}.$$

По теореме Вейерштрасса о непрерывных функциях, каждый элемент $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ ограничен на отрезке $[a, b]$ и достигает на нем своих наименьшего и наибольшего значений. Поскольку свойство непрерывности сохраняется при арифметических операциях, то для $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ можно определить число

$$d(f, g) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|,$$

которое можно интерпретировать как расстояние между функциями f и g . Использование такого расстояния мотивируется результатом, полученным К. Вейерштрассом и известным как теорема Вейерштрасса об аппроксимации:

Теорема 3.1. Пусть $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен p с вещественными коэффициентами, что $d(f, p) < \varepsilon$.

1.2. Аксиомы функции расстояния

Функции, определяющие отклонение (расстояние) на множествах \mathbb{R} , \mathbb{R}^n , $C([a, b]; \mathbb{R})$ обладают общими свойствами, которые мы сформулируем в виде аксиом.

Определение 3.1. Пусть X — множество. Отображение

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y),$$

называется **функцией расстояния**, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(d_1) **симметрия:**

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x);$$

(d_2) **положительность (дефинитность):**

$$d(x, y) > 0, \text{ если } x \neq y, \text{ и } d(x, x) = 0;$$

(d_3) **неравенство треугольника:**

$$\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Аксиомы (d_1)–(d_3) можно интерпретировать, используя образ линейки, измеряющей расстояние между предметами на столе. Так, согласно (d_1), результат измерения расстояния между двумя предметами не зависит от того, к чему мы приложим начало линейки. Аксиома (d_2) утверждает, что расстояние не может быть отрицательным. При этом, расстояние между предметом и им самим равно нулю, поскольку этому случаю соответствует только одно деление линейки. Наконец, (d_3) является обобщением неравенства, связывающего стороны треугольника: неравенства треугольника.

Пример 3.1. (Функции расстояния)

(а) Скалярное произведение (\cdot) в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n порождает отображение $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \cdots + (x^n - y^n)^2},$$

являющееся функцией расстояния. Будем называть ее **евклидовой функцией расстояния**.

(b) Если $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок, то число $d(f, g) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ определяет функцию расстояния на множестве $C([a, b]; \mathbb{R})$ непрерывных отображений $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(c) Пусть X — произвольное множество. Определим функцию расстояния на нем, полагая

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Построенная функция называется **дискретной метрикой** на X .

Функция расстояния наделяет множество X структурой, изучение которой позволяет получить свойства, применимые ко всем частным реализациям структуры (например, для рассмотренных выше случаев \mathbb{R} , \mathbb{R}^n и $C([a, b]; \mathbb{R})$).

Определение 3.2. Если X — множество, а d — функция расстояния на нем, то пара (X, d) называется **метрическим пространством**.

1.3. Шары и сферы

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Выделим в нем специальные подмножества, обобщающие множества точек в евклидовом пространстве, расстояние от которых до фиксированной точки меньше заданного числа, расстояние от которых до фиксированной точки не больше заданного числа, и расстояние от которых до фиксированной точки равно заданному числу. Пусть $x \in X$ и $r > 0$, тогда:

- **Открытым шаром радиуса r с центром в x** называется множество

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

- **Замкнутым шаром радиуса r с центром в x** называется множество

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}.$$

- Сферой радиуса r с центром в x называется множество

$$S_r(x) := \{y \in X \mid d(y, x) = r\}.$$

Предложение 3.1. Для множеств $B_r(x)$, $\overline{B}_r(x)$ и $S_r(x)$ справедливы утверждения:

- (a) $x \in B_r(x)$ и $x \in \overline{B}_r(x)$;
- (b) $\overline{B}_r(x) = B_r(x) \cup S_r(x)$;
- (c) если $0 < r_1 \leq r_2$, то $B_{r_1}(x) \subset B_{r_2}(x)$ и $\overline{B}_{r_1}(x) \subset \overline{B}_{r_2}(x)$.

Доказательство. (a) В силу аксиомы (d_2) , $d(x, x) = 0 < r$, поэтому $x \in B_r(x)$ и $x \in \overline{B}_r(x)$.

(b) Если $y \in \overline{B}_r(x)$, то $y \in X$ и $d(y, x) \leq r$. Возможны два случая: 1) $d(y, x) \neq r$, тогда $y \in B_r(x)$; 2) $d(y, x) = r$, тогда $y \in S_r(x)$. Каждый из этих случаев влечет, что $y \in B_r(x) \cup S_r(x)$ и, в этой связи, справедливо включение $\overline{B}_r(x) \subset B_r(x) \cup S_r(x)$.

Обратно, пусть $y \in B_r(x) \cup S_r(x)$, тогда $y \in X$ и или $d(y, x) < r$, или $d(y, x) = r$. Следовательно, $d(y, x) \leq r$ и $y \in \overline{B}_r(x)$. Мы доказали включение $B_r(x) \cup S_r(x) \subset \overline{B}_r(x)$, а с ним и равенство.

(c) Пусть $y \in B_{r_1}(x)$, тогда $y \in X$ и $d(y, x) < r_1$. Поскольку $r_1 \leq r_2$, то $d(y, x) < r_2$, что влечет $y \in B_{r_2}(x)$ и желаемое включение. Второй случай рассматривается аналогично. \square

Таким образом, шары содержат свой центр, замкнутый шар является объединением открытого шара и граничной сферы и шар меньшего радиуса содержится в шаре большего радиуса.

1.4. Сходимость и непрерывность

Задание одной лишь функции расстояния на множестве позволяет определить на нем понятия сходимости и непрерывности.

Определение 3.3. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек X **сходится к точке** $x \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

В таком случае x называется **пределом последовательности** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и пишут $x_n \rightarrow x$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Согласно определению предела последовательности, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, если числовая последовательность $(d(x_n, x))_{n=1}^{\infty}$ стремится к нулю. Определение 3.3 можно сформулировать эквивалентно, используя открытые шары:

Определение 3.4. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек X **сходится к точке** $x \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow x_n \in B_{\varepsilon}(x).$$

Отрицания этих определений, соответственно, имеют вид:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : (n > N) \wedge (d(x_n, x) \geq \varepsilon),$$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : (n > N) \wedge (x_n \notin B_{\varepsilon}(x)).$$

Замечание 3.1. Если заменить неравенства $n > N$ и $d(x_n, x) < \varepsilon$ в определении 3.3 предела последовательности на, соответственно, неравенства $n \geq N$ и (или) $d(x_n, x) \leq \varepsilon$, то придем к эквивалентным определениям предела последовательности. Вместе с тем, необходимо соблюдать осторожность при одновременном использовании определений с другими знаками. Например, отрицание определения со знаками $>$ и \leq имеет вид

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : (n > N) \wedge (d(x_n, x) > \varepsilon).$$

Мы будем использовать определения с неравенствами $n > N$ и $n \geq N$ в зависимости от удобства, но при этом всегда будем использовать знак строгого неравенства в $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Для того, чтобы сформулировать простейшие свойства предела последовательности, определим понятия финально постоянной и ограниченной последовательностей:

- Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек X называется **финально постоянной**, если существуют точка $x \in X$ и номер $N \in \mathbb{N}$, такие, что для любого $n \geq N$ справедливо равенство $x_n = x$. В частности, при $N = 1$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — **постоянная последовательность**.
- Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек X называется **ограниченной**, если существуют точка $x \in X$ и число $r > 0$, такие, что $x_n \in B_r(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Предложение 3.2. (а) *Финально постоянная последовательность сходится.*

(b) *Сходящаяся последовательность ограничена.*

(c) *Сходимость последовательности не зависит от перестановки ее членов.*

(d) *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. (а) Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — финально постоянная последовательность точек X . Тогда существуют точка $x \in X$ и номер $N \in \mathbb{N}$, такие, что для любого $n \geq N$ справедливо равенство $x_n = x$. Если $\varepsilon > 0$, то при $n \geq N$, в силу Предложения 3.1 (а), имеем $x_n = x \in B_{\varepsilon}(x)$, что влечет $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

(b) Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек X , сходящаяся к точке $x \in X$. Тогда найдется номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $d(x_n, x) < 1$ при $n > N$. Положим теперь

$$r > \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_N, x), 1\}.$$

Тогда $x_n \in B_r(x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

(c) Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек X , сходящаяся к точке $x \in X$. Переставить члены последовательности — означает задать биекцию $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $p_k := p(k) = n$, которая определяет новую последовательность $(x_{p_k})_{k=1}^{\infty}$. Покажем, что полученная последовательность сходится, и причем к x .

Для $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $d(x_n, x) < \varepsilon$. Поскольку p — биекция, то множество $p^{-1}(\{1, \dots, N\})$, являющееся прообразом конечного множества, конечно. Пусть $K = \max p^{-1}(\{1, \dots, N\})$. Если $k > K$, то $p_k > N$, и поэтому $d(x_{p_k}, x) < \varepsilon$. Это означает, что $x_{p_k} \rightarrow x$.

(d) Пусть $x, y \in X$ — пределы последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, причем $x \neq y$. Положим $\varepsilon = d(x, y)/4 > 0$. Тогда найдутся номера $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, такие, что

$$d(x_n, x) < \varepsilon \text{ при } n > N_1,$$

$$d(x_n, y) < \varepsilon \text{ при } n > N_2.$$

Если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то, в силу неравенства треугольника,

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < 2\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y),$$

откуда следует неравенство $1 < 1/2$. Пришли к противоречию. Таким образом, если последовательность имеет предел, то он единственный. \square

Определение 3.5. Пусть $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ — метрические пространства, а $x \in X_1$. Отображение $f : X_1 \rightarrow X_2$ называется **непрерывным в точке x** , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Отображение f называется **непрерывным**, если оно непрерывно в каждой точке X_1 .

Определение непрерывности отображения в точке можно сформулировать эквивалентно, используя открытые шары.

Определение 3.6. Пусть $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ — метрические пространства, а $x \in X_1$. Отображение $f : X_1 \rightarrow X_2$ называется **непрерывным в точке x** , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Следующее Предложение связывает понятия непрерывности отображения и сходимости последовательности.

Предложение 3.3. Пусть $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ — метрические пространства, а $f : X_1 \rightarrow X_2$ — некоторое отображение. Оно является непрерывным в том и только в том случае, когда из $x_n \rightarrow x$ (в X_1) следует $f(x_n) \rightarrow f(x)$ (в X_2).

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть f — непрерывное отображение и пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ точек X_1 сходится к точке $x \in X_1$. Покажем, что тогда последовательность $(f(x_n))_{i=1}^\infty$ точек X_2 сходится к точке $f(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку отображение f непрерывно, то оно непрерывно в точке x . По ε найдем $\delta > 0$, такое, что $d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$, если произвольная точка $y \in X_1$ такова, что $d_1(y, x) < \delta$.

Поскольку $x_n \rightarrow x$, то для δ существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $d_1(x_n, x) < \delta$ при $n > N$. Таким образом, для любого $n > N$ получаем, что $d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$. Но это и означает, что $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

(\Leftarrow) Будем рассуждать «от противного». Предположим, что f не является непрерывным отображением. Тогда существует точка $x \in X_1$, в которой отображение f не является непрерывным. Это означает, что

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists y \in X_1 : (d_1(x, y) < \delta) \wedge (d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon).$$

В этой связи, для любого $n \in \mathbb{N}$ мы можем найти точку $x_n \in X_1$, удовлетворяющую условию

$$d_1(x, x_n) < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad d_2(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon.$$

По построению, последовательность $(x_n)_{i=1}^{\infty}$ точек X_1 сходится к точке x . Вместе с тем, последовательность $(f(x_n))_{i=1}^{\infty}$ точек X_2 не сходится к точке $f(x)$. Но это противоречит условию Предложения. \square

1.5. Метрическая топология

Задание на множестве X функции расстояния d позволяет говорить о сходимости последовательности и непрерывности отображений. Вместе с тем, понятия сходимости и непрерывности не являются чисто метрическими. Действительно, пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится по функции расстояния d к точке x . Тогда, как легко убедиться, она будет сходиться и по функции расстояния $d' = c d$, где $c > 0$, к той же точке x . Рассмотрим другой пример. На множестве \mathbb{R}^n , помимо евклидовой функции расстояния $d_E(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$, можно задать другую функцию расстояния, $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$. Между ними выполняются соотношения

$$d(x, y) \leq d_E(x, y) \leq \sqrt{n} d(x, y),$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$. В этой связи, сходимости и непрерывности по d_E равносильна сходимости и непрерывности по d .

Свойства сходимости и непрерывности можно сформулировать в более общих терминах, не используя функцию расстояния явно. Пусть (X, d) — метрическое пространство.

- Множество $O \subset X$ называется **открытым подмножеством** X , если для любой его точки найдется открытый шар с центром в этой точке, целиком содержащийся в O :

$$O \text{ открыто в } X \Leftrightarrow \forall x \in O \exists r > 0 : B_r(x) \subset O.$$

- Множество $F \subset X$ называется **замкнутым подмножеством** X , если $X \setminus F$ открыто в X .

Предложение 3.4. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $x \in X$, а $r > 0$. Тогда множество $B_r(x)$ является открытым подмножеством X .

Доказательство. Пусть $y \in B_r(x)$. Возьмем число δ так, чтобы $0 < \delta < r - d(x, y)$ и рассмотрим шар $B_\delta(y)$. Для любой точки $z \in B_\delta(y)$, в силу неравенства треугольника, имеем

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(x, y) < r,$$

откуда следует, что $B_\delta(y) \subset B_r(x)$. В силу произвольности y заключаем, что $B_r(x)$ — открытое подмножество X . \square

Предложение 3.5. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $x \in X$, а $r > 0$. Тогда множество $\overline{B}_r(x)$ является замкнутым подмножеством X .

Доказательство. Мы должны показать, что множество

$$G = X \setminus \overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(y, x) > r\}$$

является открытым. Пусть $y \in G$. Возьмем δ так, чтобы $0 < \delta < d(y, x) - r$. Тогда, для $z \in B_\delta(y)$, в силу неравенства треугольника, получим

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x),$$

откуда

$$d(y, x) - d(y, z) \leq d(z, x).$$

Поскольку $d(y, z) < \delta$, то $d(y, x) - d(y, z) > r$, откуда следует, что $d(z, x) > r$. В этой связи, $B_\delta(y) \subset G$. В силу произвольности y , мы получаем, что G — открытое множество. Тем самым доказано, что $\overline{B}_r(x)$ является замкнутым подмножеством X . \square

Предложение 3.6. (Свойства открытых подмножеств метрического пространства) Пусть (X, d) — метрическое пространство. Тогда совокупность \mathcal{T}_d всех его открытых подмножеств обладает свойствами:

- (а) X и \emptyset являются открытыми подмножествами X .
- (б) Пересечение любого конечного семейства открытых подмножеств X есть открытое подмножество X .
- (в) Объединение любого семейства открытых подмножеств X есть открытое подмножество X .

Доказательство. Множество X является открытым множеством, поскольку любой открытый шар с центром в любой точке X содержится в X . Рассмотрим пустое множество. Поскольку утверждение

$$(x \in \emptyset \rightarrow P(x)),$$

где $P(x)$ — предикат, всегда истинно, независимо от x , то \emptyset является открытым множеством. Утверждение (а) доказано.

Пусть $(O_i)_{i=1}^n$ — семейство открытых подмножеств X . Покажем, что пересечение $O = \bigcap_{i=1}^n O_i$ является открытым подмножеством X . Пусть $x \in O$. Тогда, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, $x \in O_i$. Поскольку O_i — открытое множество, то существует число $r_i > 0$, такое, что $B_{r_i}(x) \subset O_i$. Положим $r = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} r_i$ и рассмотрим открытый шар $B_r(x)$. Мы имеем, что

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : B_r(x) \subset B_{r_i}(x) \subset O_i,$$

откуда следует, что $B_r(x) \subset O$. В силу произвольности x , мы получаем, что O является открытым подмножеством X и утверждение (б) доказано.

Пусть $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство открытых множеств. Покажем, что объединение $O = \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ является открытым подмножеством X . Пусть $x \in O$, тогда для некоторого $\alpha_x \in A$ будем иметь, что $x \in O_{\alpha_x}$. По определению открытого множества, существует число $r_x > 0$, такое, что $B_{r_x}(x) \subset O_{\alpha_x}$. Но тогда, поскольку $O_{\alpha_x} \subset O$, мы приходим к включению

$$B_{r_x}(x) \subset O,$$

что, в силу произвольности x , доказывает то, что множество O открыто. Утверждение (в) доказано, а вместе с ним, и Предложение. \square

Определение 3.7. Совокупность \mathcal{T}_d всех открытых подмножеств X будем называть **метрической топологией**.

С помощью открытых множеств можно определить сходимость и непрерывность, не используя явно функцию расстояния. Это является отправной точкой к изучению произвольных совокупностей подмножеств множества X , удовлетворяющим свойствам, указанным в Предложении 3.6.

Теорема 3.2. (Критерий непрерывности в терминах открытых множеств) *Отображение $f : X_1 \rightarrow X_2$ между метрическими пространствами непрерывно в том и только в том случае, когда прообраз каждого открытого подмножества открыт: если U — открытое подмножество X_2 , то его прообраз $f^{-1}(U)$ — открытое подмножество X_1 .*

Доказательство. (\Rightarrow) Предположим, что отображение f непрерывно и пусть U — открытое подмножество X_2 . Если x — произвольная точка $f^{-1}(U)$, то, поскольку U открыто, существует $\varepsilon > 0$, такое, что $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Из непрерывности f следует, что существует $\delta > 0$, такое, что из $y \in B_\delta(x)$ следует $f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. В этой связи, $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$. Поскольку точка x — произвольная, то $f^{-1}(U)$ является открытым множеством.

(\Leftarrow) Обратное, предположим, что прообраз любого открытого подмножества открыт. Выберем произвольную точку $x \in X_1$ и пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Поскольку шар $B_\varepsilon(f(x))$ открыт в X_2 , то, согласно предположению, его прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ открыт в X_1 . Поскольку $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, то это означает, что существует шар $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Иными словами, если $y \in B_\delta(x)$, то $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$. В этой связи, отображение f непрерывно в точке x . В силу произвольности x отсюда тогда следует, что f непрерывно. \square

Различные функции расстояния могут порождать одну и ту же метрическую топологию на X . Следующее Предложение дает необходимое и достаточное условие того, что две функции расстояния порождают одну и ту же топологию.

Предложение 3.7. Пусть X — множество, а d и d' — различные функции расстояния на нем. Функции d и d' определяют одну и ту же

метрическую топологию на X в том и только в том случае, когда выполнено условие:

$$\forall x \in X \forall r > 0 \exists r_1 > 0 \exists r_2 > 0 : (B_{r_1}^{(d')} (x) \subset B_r^{(d)} (x)) \wedge (B_{r_2}^{(d)} (x) \subset B_r^{(d')} (x)).$$

Здесь индекс d в $B_r^{(d)} (x)$ означает, что шар определяется в метрике d .

Доказательство. Обозначим совокупности открытых множеств, порожденные функциями d и d' , через \mathcal{T}_d и $\mathcal{T}_{d'}$.

(\Rightarrow) Предположим сначала, что $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, а $r > 0$ — произвольное положительное число. Множество $B_r^{(d)} (x)$ является открытым шаром относительно метрики d и, в этой связи, $B_r^{(d)} (x) \in \mathcal{T}_d$. Это означает, по предположению, что $B_r^{(d)} (x) \in \mathcal{T}_{d'}$. По определению открытого множества, для $x \in B_r^{(d)} (x)$ существует число $r_1 > 0$, такое, что $B_{r_1}^{(d')} (x) \subset B_r^{(d)} (x)$.

Аналогично, множество $B_r^{(d')} (x)$ является открытым шаром относительно метрики d' и потому — элементом $\mathcal{T}_{d'}$. Но тогда $B_r^{(d')} (x)$ — открытое множество в топологии \mathcal{T}_d . Это значит, что для $x \in B_r^{(d')} (x)$ существует число $r_2 > 0$, такое, что $B_{r_2}^{(d)} (x) \subset B_r^{(d')} (x)$. Необходимость доказана.

(\Leftarrow) Пусть $O \in \mathcal{T}_d$. Покажем, что тогда $O \in \mathcal{T}_{d'}$. Пусть $x \in O$, тогда найдется число $r > 0$, такое, что $B_r^{(d)} (x) \subset O$. Для x и r найдутся числа $r_1, r_2 > 0$, такие, что $B_{r_1}^{(d')} (x) \subset B_r^{(d)} (x)$ и $B_{r_2}^{(d)} (x) \subset B_r^{(d')} (x)$. Используем первое включение. Таким образом, мы нашли число $r_1 > 0$, такое, что

$$B_{r_1}^{(d')} (x) \subset B_r^{(d)} (x) \subset O.$$

Следовательно, в силу произвольности x , получаем $O \in \mathcal{T}_{d'}$ и мы доказали включение $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$.

Пусть теперь $O \in \mathcal{T}_{d'}$. Покажем, что тогда $O \in \mathcal{T}_d$. Для $x \in O$ существует число $r > 0$, такое, что $B_r^{(d')} (x) \subset O$. Как и в предыдущем рассмотрении, для x и r найдутся числа $r_1, r_2 > 0$, такие, что $B_{r_1}^{(d')} (x) \subset B_r^{(d)} (x)$ и $B_{r_2}^{(d)} (x) \subset B_r^{(d')} (x)$. Используем второе включение. Тогда:

$$B_{r_2}^{(d)} (x) \subset B_r^{(d')} (x) \subset O.$$

Отсюда, в силу произвольности x , следует включение $O \in \mathcal{T}_d$. В этой связи, $\mathcal{T}_{d'} \subset \mathcal{T}_d$. Окончательно, приходим к равенству $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$. \square

Следующее Предложение показывает, что если d — функция расстояния на некотором множестве X , то каждый элемент множества $\{cd \mid c > 0\}$ является функцией расстояния на X , порождающей ту же метрическую топологию, что и исходная функция d .

Предложение 3.8. Пусть (X, d) — метрическое пространство, а $c > 0$. Определим функцию расстояния d' на X , полагая

$$d'(x, y) := cd(x, y).$$

Тогда d и d' порождают одну и ту же метрическую топологию на X .

Доказательство. Поскольку функция d' симметрична, положительна и удовлетворяет неравенству треугольника, то она является функцией расстояния. Для доказательства равенства метрических топологий, порождаемых d и d' , будем использовать Предложение 3.7. Пусть $x \in X$ и $r > 0$. Положим $r_1 = cr$, $r_2 = r/c$. Тогда, пусть $y \in B_{r_1}^{(d')}(x)$. Для y , по определению открытого шара, имеем неравенство $d'(x, y) < r_1$. В силу выбора r_1 , отсюда тогда следует, что $d(x, y) < r$, то есть, что $y \in B_r^{(d)}(x)$. В силу произвольности y , получаем отсюда, что $B_{r_1}^{(d')}(x) \subset B_r^{(d)}(x)$. Аналогично устанавливается, что $B_{r_2}^{(d)}(x) \subset B_r^{(d')}(x)$. Таким образом, метрические топологии, порождаемые функциями d и d' , совпадают. \square

Из Предложения 3.8 следует, в частности, что евклидову топологию на \mathbb{R}^n можно построить на основе множества функций вида cd , где $c > 0$, а d — евклидова метрика. Вместе с тем, функцию расстояния, порождающую евклидову топологию, можно представить в виде, отличном от cd .

Предложение 3.9. Пусть d' — функция расстояния на \mathbb{R}^n , определенная формулой

$$d'(x, y) = \max\{|x^1 - y^1|, \dots, |x^n - y^n|\}.$$

Тогда метрические топологии на \mathbb{R}^n , порожденные евклидовой функцией расстояния d и функцией d' , совпадают.

Доказательство. Для установления равенства метрических топологий, порождаемых функциями d и d' , будем использовать Предложение 3.7. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Для любых $y, z \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$d'(y, z) \leq d(y, z) \leq \sqrt{n} d'(y, z). \quad (3.1.1)$$

В этой связи, положим $r_1 = r/\sqrt{n}$, $r_2 = r$.

Если $y \in B_{r_1}^{(d')}(x)$, то $d'(x, y) < r_1$, откуда, в силу (3.1.1), будем иметь неравенство $d(x, y) < r$, означающее, что $y \in B_r^{(d)}(x)$. В силу произвольности y , получаем отсюда, что $B_{r_1}^{(d')}(x) \subset B_r^{(d)}(x)$.

Аналогично, если $y \in B_{r_2}^{(d)}(x)$, то $d(x, y) < r_2 = r$. Согласно (3.1.1), отсюда следует неравенство $d'(x, y) < r$. В этой связи, $y \in B_r^{(d')}(x)$. В силу произвольности точки y получаем отсюда, что $B_{r_2}^{(d)}(x) \subset B_r^{(d')}(x)$. Таким образом, согласно Предложению 3.7, метрические топологии, порожденные функциями расстояния d и d' , совпадают. \square

На основе Предложения 3.7 можно сформулировать условие, достаточное для того, чтобы две функции расстояния порождали одну и ту же метрическую топологию.

Предложение 3.10. Пусть d и d' — функции расстояния на множестве X . Предположим, что существуют числа $k_1, k_2 > 0$, такие, что

$$\forall x, y \in X : k_1 d'(x, y) \leq d(x, y) \leq k_2 d'(x, y).$$

Тогда метрические топологии, порожденные функциями d и d' , совпадают.

Доказательство Предложения практически полностью повторяет доказательство Предложения 3.9 и остается в качестве упражнения.

1.6. Подпространство метрического пространства

Пусть (X, d) — метрическое пространство, а $Y \subset X$ — некоторое подмножество. Функция расстояния d индуцирует метрическую структуру на Y , определяя функцию $d|_Y := d|_{Y \times Y}$,

$$d|_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad d|_Y(x, y) := d(x, y).$$

Легко проверить, что $d|_Y$ является функцией расстояния на Y .

Определение 3.8. Метрическое пространство $(Y, d|_Y)$ называется **подпространством** метрического пространства (X, d) .

Символом B будем обозначать шары в X , а символом β — шары в Y . Если $x \in Y$, а $r > 0$, то

$$\begin{aligned} B_r(x) &= \{y \in X \mid d(y, x) < r\}, \\ \beta_r(x) &= \{y \in Y \mid d|_Y(y, x) < r\}. \end{aligned}$$

В этой связи, справедливо равенство

$$\beta_r(x) = Y \cap B_r(x).$$

Пример 3.2. Пусть $X = \mathbb{R}$, а $Y = [0, 1]$. Тогда $B_{1/2}(0) =] - 1/2, 1/2[$, а $\beta_{1/2}(0) = [0, 1/2[$.

Следующее Предложение устанавливает связь между открытыми подмножествами пространства и его подпространства.

Предложение 3.11. Пусть (X, d) — метрическое пространство, а $(Y, d|_Y)$ — его подпространство. Множество $U \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда

$$U = Y \cap O,$$

для некоторого множества $O \subset X$, открытого в X .

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть множество U открыто в Y . Для точки $x \in U$ найдется число $r_x > 0$, такое, что $\beta_{r_x}(x) \subset U$. Поскольку $\{x\} \subset \beta_{r_x}(x)$, то справедливо равенство

$$U = \bigcup_{x \in U} \beta_{r_x}(x).$$

Тогда, в силу равенства $\beta_{r_x}(x) = Y \cap B_{r_x}(x)$, получаем

$$U = \bigcup_{x \in U} (Y \cap B_{r_x}(x)) = Y \cap V,$$

где $V = \bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$ — открытое подмножество X , будучи объединением открытых множеств.

(\Leftarrow) Пусть $U = Y \cap O$, где множество $O \subset X$ открыто в X . Пусть $x \in U$, тогда $x \in Y$ и $x \in O$. Поскольку O открыто в X , то существует число $r > 0$, такое, что $B_r(x) \subset O$. В этой связи,

$$\beta_r(x) = Y \cap B_r(x) \subset Y \cap O = U,$$

что, в силу произвольности x , означает, что множество U открыто в Y . \square

1.7. Произведение пространств

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства. На множестве $X \times Y$ можно определить одну из следующих функций расстояния:

$$\begin{aligned}\delta_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}, \\ \delta_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \\ \delta_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2},\end{aligned}$$

для $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Поскольку

$$\begin{aligned}\delta_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\leq \delta_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq 2\delta_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \\ \delta_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\leq \delta_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \sqrt{2}\delta_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)),\end{aligned}$$

то все три функции расстояния порождают одну и ту же метрическую топологию.

Определение 3.9. Любое из метрических пространств $(X \times Y, \delta_i)$, $i = 1, 2, 3$, будем называть **произведением метрических пространств**.

Если через $B_r^{(\delta_i)}(x, y)$ обозначить открытый шар относительно функции расстояния δ_i с центром в точке $(x, y) \in X \times Y$, то можно установить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}B_r^{(\delta_1)}(x, y) &= B_r^{(d_X)}(x) \times B_r^{(d_Y)}(y), \\ B_r^{(\delta_i)}(x, y) &\subset B_r^{(d_X)}(x) \times B_r^{(d_Y)}(y), \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Здесь $B_r^{(d_X)}(x) \subset X$, $B_r^{(d_Y)}(y) \subset Y$ — открытые шары относительно функций расстояния d_X и d_Y .

Рассмотрим представление открытых подмножеств в произведении пространств.

Предложение 3.12. Пусть $U \subset X$ и $V \subset Y$ — открытые множества. Тогда множество $U \times V$ открыто в $X \times Y$.

Доказательство. Поскольку функции расстояния δ_i порождают одну и ту же метрическую топологию, то будем доказывать утверждение в

случае $i = 1$. Пусть $(x, y) \in U \times V$, тогда $x \in U$ и $y \in V$. Поскольку U и V открыты, то существуют числа $r_1, r_2 > 0$, такие, что

$$B_{r_1}^{(d_X)}(x) \subset U, \quad B_{r_2}^{(d_Y)}(y) \subset V.$$

Положим $r = \min\{r_1, r_2\}$, тогда $B_r^{(d_X)}(x) \subset U$ и $B_r^{(d_Y)}(y) \subset V$, что влечет включение

$$B_r^{(d_X)}(x) \times B_r^{(d_Y)}(y) \subset U \times V.$$

В этой связи, $B_r^{(\delta_1)}(x, y) \subset U \times V$, и множество $U \times V$ открыто в $X \times Y$. \square

Из доказанного следует, что всевозможные объединения вида $\bigcup(U \times V)$, где множества U открыты в X , а множества V открыты в Y , являются открытыми подмножествами $X \times Y$. Как показывает следующее Предложение, только такими множествами и исчерпывается метрическая топология.

Предложение 3.13. Пусть множество $O \subset X \times Y$ открыто в произведении метрических пространств. Тогда $O = \bigcup(U \times V)$, где множества U открыты в X , а множества V открыты в Y .

Доказательство. Докажем утверждение для функции расстояния δ_1 . Для любой точки $(x, y) \in O$ существует число $r_{(x, y)} > 0$, такое, что $B_{r_{(x, y)}}^{(\delta_1)}(x, y) \subset O$. Тогда

$$O = \bigcup_{(x, y) \in O} B_{r_{(x, y)}}^{(\delta_1)}(x, y) = \bigcup_{(x, y) \in O} (U_{(x, y)} \times V_{(x, y)}).$$

Здесь множество $U_{(x, y)} = B_{r_{(x, y)}}^{(d_X)}(x)$ открыто в X , а множество $V_{(x, y)} = B_{r_{(x, y)}}^{(d_Y)}(y)$ открыто в Y . \square

Пример 3.3. Пространство \mathbb{R}^2 с евклидовой функцией расстояния можно рассматривать как произведение пространств $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Множества вида $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ (открытые прямоугольники) открыты в \mathbb{R}^2 , как и их всевозможные объединения.

2. Нормированное векторное пространство

2.1. Аксиомы нормы и метрическая структура

Рассмотрим случай, когда множество, на котором определяется метрическая структура, обладает дополнительной надстройкой в виде структуры векторного пространства. Пусть $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Мы знаем, что скалярное произведение $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ для каждого вектора $\vec{x} \in V$ определяет вещественное число $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$ — его длину. Число $\|\vec{x}\|$ удовлетворяет интуитивным представлениям о длине: оно неотрицательно, масштабируется при гомотетии и удовлетворяет неравенству треугольника. В этой связи, оно является удобным кандидатом для определения свойств сходимости и непрерывности. Абстрагируясь от происхождения $\|\vec{x}\|$, примем следующее определение.

Определение 3.10. Пусть $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ — векторное пространство над \mathbb{F} . Функция

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|,$$

называется **нормой** на V , если выполнены условия:

($\|\cdot\|_1$) **положительность:** $\|\vec{x}\| > 0$, для $\vec{x} \neq \vec{0}$, и $\|\vec{0}\| = 0$;

($\|\cdot\|_2$) **преобразование при гомотетии:** $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$ для $\vec{x} \in V$ и $\lambda \in \mathbb{F}$;

($\|\cdot\|_3$) **условие выпуклости (треугольника):** $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ для $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

Если $\|\cdot\|$ — норма на V , то пара $(V, \|\cdot\|)$ называется **нормированным векторным пространством**.

Норма $\|\cdot\|$ индуцирует функцию расстояния на V :

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Полученная метрическая структура согласована с векторной:

(A) инвариантность относительно сдвига:

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V : d(\vec{x} - \vec{z}, \vec{y} - \vec{z}) = d(\vec{x}, \vec{y});$$

(В) преобразование при гомотетии:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \forall \lambda \in \mathbb{F} : d(\lambda \vec{x}, \lambda \vec{y}) = |\lambda| d(\vec{x}, \vec{y}).$$

Задание нормы на векторном пространстве всегда определяет на нем метрическую структуру. Условия (А) и (В) являются, при этом, необходимыми. Вместе с тем, если, наоборот, задана произвольная функция расстояния, то она может не быть порожденной никакой нормой.

Пример 3.4. Пусть V — векторное пространство. Дискретная метрика d не порождается никакой нормой на V , поскольку не выполнено условие (В) преобразования при гомотетии: $d(2\vec{x}, 2\vec{y}) = 1 \neq 2d(\vec{x}, \vec{y})$, если $x \neq y$.

Следующее Предложение утверждает, что условия (А) и (В) достаточны для того, чтобы функция расстояния порождала норму.

Предложение 3.14. Пусть V — векторное пространство над \mathbb{F} , а d — функция расстояния на V . Если функция d обладает свойствами (А) и (В), то она определяет норму на V по формуле

$$\|\vec{x}\| := d(\vec{0}, \vec{x}).$$

Доказательство. Определим отображение

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|\vec{x}\| := d(\vec{0}, \vec{x}),$$

и покажем, что оно является нормой на V . Аксиома $(\|\cdot\|_1)$ следует из аксиомы (d_2) функции расстояния. Пусть $\vec{x} \in V$, а $\lambda \in \mathbb{F}$, тогда, в силу (В),

$$\|\lambda \vec{x}\| = d(\vec{0}, \lambda \vec{x}) = |\lambda| d(\vec{0}, \vec{x}) = |\lambda| \|\vec{x}\|,$$

что дает $(\|\cdot\|_2)$. Наконец, пусть $\vec{x}, \vec{y} \in V$, тогда, в силу (d_3) ,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = d(\vec{0}, \vec{x} + \vec{y}) \leq d(\vec{0}, \vec{x}) + d(\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}).$$

Применяя (А) к правой части полученного неравенства, получаем

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + d(\vec{0} + \vec{x}, \vec{y} + \vec{x}) = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|,$$

что доказывает $(\|\cdot\|_3)$. В этой связи, $\|\cdot\|$ — норма на V . \square

На одном и том же векторном пространстве может быть определено несколько норм. Следующее Предложение дает необходимые и достаточные условия того, что метрические топологии, порождаемые двумя нормами, совпадают.

Предложение 3.15. Пусть V — векторное пространство. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на V порождают одну и ту же метрическую топологию тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные $k_1, k_2 > 0$, что

$$\forall \vec{x} \in V : k_1 \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1 \leq k_2 \|\vec{x}\|_2.$$

Доказательство см. в [1].

2.2. Сходимость и непрерывность по норме

Поскольку норма порождает функцию расстояния, то определены понятия сходимости и непрерывности. Пусть $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность векторов V . В соответствии с определением 3.3, она сходится к вектору $\vec{x} \in V$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon.$$

В таком случае мы будем говорить, что \vec{x} — **предел последовательности** $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ **по норме** $\|\cdot\|$.

Пусть $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ — нормированные пространства. Тогда, в соответствии с определением 3.5, отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$ является непрерывным, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{y} \in V_1 : \|\vec{x} - \vec{y}\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|_2 < \varepsilon.$$

Относительно метрической структуры, порождаемой нормой $\|\cdot\|$, сама норма является непрерывным отображением.

Предложение 3.16. Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — векторное нормированное пространство над \mathbb{F} . Тогда отображение $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ векторного нормированного пространства $(V, \|\cdot\|)$ в одномерное евклидово пространство $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ является непрерывным.

Доказательство. В силу аксиомы $(\|\cdot\|_3)$, справедливо обратное неравенство треугольника:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V : \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Пусть $\vec{x} \in V$. Выберем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$. Тогда, для вектора $\vec{y} \in V$, такого, что $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$, в силу обратного неравенства треугольника будем иметь неравенство $\left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right| < \varepsilon$, означающее непрерывность нормы в точке \vec{x} . В силу произвольности \vec{x} , заключаем отсюда, что $\|\cdot\|$ — непрерывное отображение. \square

Из непрерывности нормы и Предложения 3.3 следует, что если последовательность $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ векторов пространства V сходится к вектору \vec{x} из V , то числовая последовательность $(\|\vec{x}_n\|)_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $\|\vec{x}\|$:

$$(\vec{x}_n \rightarrow \vec{x}) \Rightarrow (\|\vec{x}_n\| \rightarrow \|\vec{x}\|).$$

Как и для произвольного метрического пространства, предел по норме обладает всеми свойствами, указанными в Предложении 3.2. Вместе с тем, операция предельного перехода также согласована с операциями сложения векторов и умножения их на скаляр.

По заданным последовательностям $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\vec{y}_n)_{n=1}^{\infty}$ пространства V и последовательности $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ элементов поля \mathbb{F} можно построить новые последовательности — сумму $(\vec{x}_n + \vec{y}_n)_{n=1}^{\infty}$ и произведение $(\lambda_n \vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$. Для них справедливо следующее Предложение.

Предложение 3.17. Пусть $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\vec{y}_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательности пространства V , сходящиеся по норме к векторам \vec{x} , $\vec{y} \in V$ соответственно, а $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов поля \mathbb{F} , сходящаяся к $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{x}_n + \vec{y}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{y}_n = \vec{x} + \vec{y}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n \vec{x}_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n \right) = \lambda \vec{x}. \end{aligned}$$

Доказательство. В случае суммы последовательностей, используя неравенство треугольника, получаем оценку

$$\|(\vec{x}_n + \vec{y}_n) - (\vec{x} + \vec{y})\| \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}\| + \|\vec{y}_n - \vec{y}\|.$$

Выбирая $\varepsilon > 0$, найдем такие $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, что $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon/2$ при $n > N_1$ и $\|\vec{y}_n - \vec{y}\| < \varepsilon/2$ при $n > N_2$. Тогда при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ будем иметь, что $\|(\vec{x}_n + \vec{y}_n) - (\vec{x} + \vec{y})\| < \varepsilon$. В этой связи, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{x}_n + \vec{y}_n) = \vec{x} + \vec{y}$.

В случае произведения последовательностей имеем оценку

$$\|(\lambda_n \vec{x}_n) - (\lambda \vec{x})\| \leq |\lambda_n - \lambda| \|\vec{x}_n\| + |\lambda| \|\vec{x}_n - \vec{x}\|.$$

Последовательность $(\|\vec{x}_n\|)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, будучи сходящейся последовательностью. Тогда произведение $|\lambda_n - \lambda| \|\vec{x}_n\|$ является бесконечно малой последовательностью, будучи произведением бесконечно малой числовой последовательности на ограниченную. Произведение $|\lambda| \|\vec{x}_n - \vec{x}\|$ также является бесконечно малой последовательностью. В этой связи, правая часть рассматриваемого неравенства стремится к нулю и мы получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n \vec{x}_n) = \lambda \vec{x}$. \square

Доказанное предложение имеет следующую интерпретацию: операции $+: V \times V \rightarrow V$ и $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ сложения и умножения на скаляр являются непрерывными отображениями.

2.3. Норма и скалярное произведение

Возвращаясь к скалярному произведению, отметим условия, при которых норма порождается скалярным произведением.

Теорема 3.3. Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — векторное нормированное пространство над \mathbb{R} . Предположим, что норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет **правилу параллелограмма**:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Тогда на V можно ввести скалярное произведение $(\cdot|\cdot)$ так, что $\|\vec{u}\|^2 = (\vec{u}|\vec{u})$ для всех $\vec{u} \in V$.

Искомое скалярное произведение определяется согласно **поляризационному тождеству**:

$$(\vec{u}|\vec{v}) := \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Теорема 3.4. Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — векторное нормированное пространство над \mathbb{C} . Предположим, что норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет **правилу параллелограмма**:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Тогда на V можно ввести скалярное произведение $(\cdot|\cdot)$ так, что $\|\vec{u}\|^2 = (\vec{u}|\vec{u})$ для всех $\vec{u} \in V$.

Искомое скалярное произведение определяется согласно **поляризационному тождеству**:

$$(\vec{u}|\vec{v}) := \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 + i\|\vec{u} - i\vec{v}\|^2 - i\|\vec{u} + i\vec{v}\|^2).$$

2.4. Произведение нормированных векторных пространств

Пусть $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ — нормированные пространства над полем \mathbb{F} . Напомним, что произведение $V_1 \times V_2$ можно снабдить векторной структурой над полем \mathbb{F} , определяя операции покомпонентного сложения и умножения на скаляр:

$$\begin{aligned}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2) &= (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2), \\ \lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= (\lambda\vec{x}_1, \lambda\vec{x}_2),\end{aligned}$$

для $(\vec{x}_1, \vec{x}_2), (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in V_1 \times V_2$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ индуцируют структуру нормированного пространства на $V_1 \times V_2$ по любой из формул

$$\begin{aligned}\|(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\| &= \max\{\|\vec{x}_1\|_1, \|\vec{x}_2\|_2\}, \\ \|(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\| &= \|\vec{x}_1\|_1 + \|\vec{x}_2\|_2, \\ \|(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\| &= \sqrt{\|\vec{x}_1\|_1^2 + \|\vec{x}_2\|_2^2}.\end{aligned}$$

Нормы, определяемые этими формулами, порождают одну и ту же метрическую топологию. Следовательно, ни одну из них нельзя предпочесть другой.

3. Полные метрические пространства

3.1. Последовательность Коши и ее свойства

Пусть (X, d) — метрическое пространство.

Определение 3.11. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек X называется *последовательностью Коши* (или *фундаментальной последовательностью*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} : m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Эквивалентно, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, p \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

Перед рассмотрением простейших свойств последовательности Коши определим подпоследовательность последовательности:

Определение 3.12. *Подпоследовательность* последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — это последовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, являющаяся композицией возрастающего отображения $k \mapsto n_k$,

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots,$$

из \mathbb{N} в \mathbb{N} и исходной последовательности $n \mapsto x_n$.

Предложение 3.18. (а) Любая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.

(b) Последовательность Коши ограничена.

(c) Если в последовательности Коши есть сходящаяся подпоследовательность, то исходная последовательность сходится.

(d) Если $(Y, d|_Y)$ — подпространство метрического пространства (X, d) , то последовательность точек Y является последовательностью Коши в Y тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши в X .

Доказательство. (а) Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек X , сходящаяся к точке $x \in X$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что при $n > N$ справедливо неравенство $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Пусть теперь $m, n > N$, тогда, в силу неравенства треугольника,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши.

(б) Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши. Тогда существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что при $m, n \geq N$ справедливо неравенство $d(x_m, x_n) < 1$. В частности, тогда $d(x_n, x_N) < 1$ при $n \geq N$. Возьмем

$$R > \max\{d(x_1, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N), 1\}.$$

Тогда $x_n \in B_R(x_N)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

(с) Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши, а $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ — ее подпоследовательность, сходящаяся к точке $x \in X$. Покажем, что в этом случае последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к x .

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши, то найдется номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что для $m, n > N$ справедливо неравенство $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$. Далее, из сходимости последовательности $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ следует, что найдется номер $K \in \mathbb{N}$, такой, что при $k > K$ справедливо неравенство $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$. Функция $k \mapsto n_k$ не ограничена сверху на множестве $\{k \in \mathbb{N} | k > K\}$, поэтому существует номер $k_0 > K$, такой, что $n_{k_0} > N$. Пусть теперь $n > N$, тогда, в силу неравенства треугольника,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что исходная последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к x .

(д) Следует из того, что в точках Y функции расстояния d и $d|_Y$ совпадают. \square

Каждая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши. Вместе с тем, обратное не всегда верно.

Пример 3.5. (Последовательности Коши, не являющиеся сходящимися)

- (а) Пусть $X =]0, 1] \subset \mathbb{R}$, а d — сужение евклидовой функции расстояния. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке 0, поэтому является последовательностью Коши. Вместе с тем, $0 \notin X$, поэтому последовательность является расходящейся.
- (б) Пусть $X = \mathbb{Q}$, а d — сужение евклидовой функции расстояния. Последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$,

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

точек X сходится к $\sqrt{2}$ в \mathbb{R} , поэтому является последовательностью Коши. Вместе с тем, $\sqrt{2} \notin X$, поэтому рассматриваемая последовательность расходитя.

- (с) Рассмотрим пространство $C([-1, 1]; \mathbb{R})$ непрерывных отображений с функцией расстояния

$$d(x, y) = \left(\int_{-1}^1 (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ nt, & t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

является последовательностью Коши, поскольку

$$d(x_{n+p}, x_n)^2 = \int_{-1/n}^{1/n} (x_{n+p}(t) - x_n(t))^2 dt \leq 4 \int_{-1/n}^{1/n} dt = \frac{8}{n} \rightarrow 0.$$

Вместе с тем, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к разрывной функции

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, 0[, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t \in]0, 1], \end{cases}$$

не принадлежащей $C([-1, 1]; \mathbb{R})$.

Выделим класс метрических пространств, в которых каждая последовательность Коши сходится.

Определение 3.13. Метрическое пространство (X, d) называется **полным**, если любая последовательность Коши его точек сходится в X .

Пример 3.6. (а) Пространства \mathbb{R} , \mathbb{C} с функциями расстояния, порожденными модулем числа, являются полными.

(б) Пространства из Примера 3.5 не являются полными.

3.2. Теорема о неподвижной точке

Рассмотрим специальный класс отображений. Пусть (X, d) — метрическое пространство.

Определение 3.14. Отображение $f \in X^X$ называется **сжимающим**, если существует число $k \in]0, 1[$ (**коэффициент сжатия**), такое, что

$$\forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y). \quad (3.3.1)$$

Используя только определение сжимающего отображения, мы немедленно получаем, что оно непрерывно.

Предложение 3.19. Сжимающее отображение является непрерывным отображением.

Доказательство. Пусть $f \in X^X$ — сжимающее отображение с коэффициентом сжатия k . Покажем, что оно непрерывно в любой точке $x \in X$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon/k$. Пусть теперь $y \in X$ — такая точка, что $d(x, y) < \delta$. Тогда

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < k\delta = \varepsilon.$$

Следовательно, отображение f непрерывно в точке x . Поскольку точка $x \in X$ произвольна, то f — непрерывное отображение. \square

Определение 3.15. Пусть X — множество, а $f \in X^X$ — некоторое отображение. Точка $x \in X$ называется **неподвижной точкой** f , если $f(x) = x$.

Теорема 3.5. (Принцип сжимающих отображений) Любое сжимающее отображение полного метрического пространства (X, d) в себя имеет неподвижную точку, и притом только одну.

Доказательство. Пусть $f \in X^X$ — сжимающее отображение с коэффициентом сжатия k . Выберем и зафиксируем произвольную точку $a \in X$. Определим последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ точек X :

$$x_0 = a, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

В доказательстве удобно использовать следующее обозначение: $f^0 := \text{Id}_X$, $f^1 := f$ и

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}},$$

при $n > 1$. Тогда $x_n = f^n(a)$. Покажем, что $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность Коши.

Пусть $n, p \in \mathbb{N}$, тогда, используя неравенство треугольника, получаем:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+p}) \leq \dots \leq \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}). \end{aligned}$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$; оценим значение $d(x_m, x_{m+1})$, используя то, что f — сжимающее отображение:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_{m+1}) &= d(f^m(a), f^{m+1}(a)) = d(f(f^{m-1}(a)), f(f^m(a))) \leq \\ &\leq kd(f^{m-1}(a), f^m(a)) = kd(f(f^{m-2}(a)), f(f^{m-1}(a))) \leq \\ &\leq k^2d(f^{m-2}(a), f^{m-1}(a)) \leq \dots \leq k^m d(f^0(a), f^1(a)) = k^m d(x_1, a). \end{aligned}$$

Учитывая полученное неравенство $d(x_m, x_{m+1}) \leq k^m d(x_1, a)$, для $d(x_n, x_{n+p})$ мы тогда имеем

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x, a) \{k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+p-1}\} = \\ &= k^n d(x, a) \{1 + k + \dots + k^{p-1}\} \leq k^n d(x, a) \sum_{m=0}^{\infty} k^m = \frac{k^n}{1-k} d(x_1, a). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили следующую оценку:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, a). \quad (3.3.2)$$

Поскольку правая часть неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то это означает, что последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ является последовательностью Коши. Из полноты пространства (X, d) тогда следует, что $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ сходится и имеет своим пределом некоторую точку $x \in X$.

Перейдем в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x),$$

где использовано то, что f непрерывно. Таким образом мы показали, что x — неподвижная точка f .

Покажем, что x — единственная неподвижная точка f . Действительно, предположим, что это не так: f имеет неподвижную точку $y \neq x$. Тогда

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),$$

что влечет неравенство $1 \leq k$, несовместимое с условием $k \in]0, 1[$. Таким образом, x — единственная неподвижная точка f . \square

Замечание 3.2. Условие $k < 1$ существенно как для доказательства существования неподвижной точки, так и для доказательства ее единственности. Пусть $X = \mathbb{R}$. Отображение $x \mapsto x + 1$ удовлетворяет условию (3.3.1) с $k = 1$, но не имеет ни одной неподвижной точки. С другой стороны, тождественное отображение метрического пространства в себя удовлетворяет (3.3.1) при $k = 1$ и каждая точка пространства является для него неподвижной.

Замечание 3.3. Неравенство (3.3.2) позволяет получить оценку скорости итерационного процесса $x_0 = a$, $x_n = f^n(a)$ по отысканию неподвижной точки. Переходя в (3.3.2) к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем желаемую оценку:

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, a).$$

4. Линейные и билинейные непрерывные отображения

4.1. Критерий непрерывности линейного отображения

Хотя любое линейное отображение, действующее между конечномерными векторными пространствами, является непрерывным, в случае бесконечномерных пространств это не так.

Пример 3.7. Пусть V_1 — бесконечномерное векторное пространство полиномов с вещественными коэффициентами над полем \mathbb{R} . Определим на нем норму по правилу

$$\|P\| := \max_{x \in [0, 1]} |P(x)|.$$

Норма определена корректно, поскольку полином P — непрерывная функция. Рассмотрим отображение $L : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$, действующее по правилу

$$L(P) = P(5).$$

Оно линейно. Вместе с тем, оно не является непрерывным отображением. Действительно, рассмотрим последовательность $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ элементов V_1 , общий член которой равен $P_n(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^n$. Поскольку

$$\|P_n - 0\| = \left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$, то последовательность $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к $0 \in V_1$. Если бы отображение L было непрерывным, то последовательность $(L(P_n))_{n=1}^{\infty}$ образов стремилась бы к $L(0) = 0$. Однако, это не так:

$$|L(P_n) - L(0)| = \left(\frac{5}{4}\right)^n \rightarrow \infty,$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, хотя отображение L линейно, оно не является непрерывным.

Следующая Теорема устанавливает критерий непрерывности линейных отображений между нормированными пространствами².

Теорема 3.6. Пусть $(V_1, \|\cdot\|_1)$ и $(V_2, \|\cdot\|_2)$ — нормированные векторные пространства над полем \mathbb{F} .

- (а) Линейное отображение $L : V_1 \rightarrow V_2$, непрерывное в нуле пространства, непрерывно всюду.
- (б) Линейное отображение $L : V_1 \rightarrow V_2$ непрерывно тогда и только тогда, когда существует число $k \geq 0$, такое, что

$$\forall \vec{x} \in V_1 : \|L(\vec{x})\|_2 \leq k\|\vec{x}\|_1. \quad (3.4.1)$$

Доказательство. (а) Пусть линейное отображение $L : V_1 \rightarrow V_2$ непрерывно в нуле $\vec{0} \in V_1$. Зафиксируем $\vec{x} \in V_1$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что если вектор $\vec{z} \in V_1$ удовлетворяет неравенству $\|z\|_1 < \delta$, то тогда справедливо неравенство $\|L(\vec{z})\|_2 < \varepsilon$. Здесь учтено, что для линейного отображения $L(\vec{0}_1) = \vec{0}_2$. Пусть теперь вектор $\vec{y} \in V_1$ таков, что справедливо неравенство $\|\vec{y} - \vec{x}\|_1 < \delta$. Тогда

$$\|L(\vec{y}) - L(\vec{x})\|_2 = \|L(\vec{y} - \vec{x})\|_2 < \varepsilon,$$

что влечет непрерывность L в точке \vec{x} . Следовательно, в силу произвольности \vec{x} , отображение L непрерывно.

(б) (\Rightarrow) Пусть линейное отображение $L : V_1 \rightarrow V_2$ непрерывно. В частности, тогда оно непрерывно в нуле пространства. В этой связи, найдется число $\delta > 0$, такое, что если вектор $\vec{z} \in V_1$ удовлетворяет неравенству³ $\|z\|_1 \leq \delta$, то тогда $\|L(\vec{z})\|_2 \leq 1$. Пусть теперь $\vec{x} \neq \vec{0}_1$ — произвольный вектор из V_1 . Для вектора $\vec{z} = \delta \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_1}$ мы имеем, что $\|\vec{z}\|_1 = \delta \leq \delta$. Значит,

$\left\| L\left(\delta \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_1}\right) \right\|_2 \leq 1$, откуда следует, что

$$\|L(\vec{x})\|_2 \leq \frac{1}{\delta} \|\vec{x}\|_1.$$

²Всюду мы предполагаем, что нормированные пространства, между которыми действуют отображения, не являются нульмерными, ибо случай нульмерных пространств тривиален.

³В открытом шаре всегда содержится замкнутый шар, поэтому мы можем перейти к нестрогим неравенствам.

В этой связи, в качестве k можно выбрать число $1/\delta$. Если же $\vec{x} = \vec{0}_1$, то неравенство в (3.4.1) удовлетворяется и потому мы доказали его для всех $\vec{x} \in V_1$.

(\Leftarrow) Пусть существует число $k \geq 0$, для которого удовлетворяется (3.4.1). Выбирая произвольное число $\varepsilon > 0$ и полагая $\delta = \varepsilon/k$, мы получаем, что если вектор $\vec{x} \in V_1$ таков, что $\|\vec{x}\|_1 < \delta$, то

$$\|L(\vec{x})\|_2 \leq k\|\vec{x}\|_1 < \varepsilon.$$

Следовательно, отображение L непрерывно в нуле пространства. Но тогда, в силу (а), оно является непрерывным отображением во всех точках V_1 . \square

4.2. Норма непрерывного линейного отображения

Пусть $L : V_1 \rightarrow V_2$ — линейное непрерывное отображение нормированных пространств $(V_1, \|\cdot\|_1)$ и $(V_2, \|\cdot\|_2)$. В силу Теоремы 3.6, множество

$$A_L = \{k \geq 0 \mid \forall \vec{x} \in V_1 : \|L(\vec{x})\|_2 \leq k\|\vec{x}\|_1\}$$

непусто и ограничено снизу нулем.

Определение 3.16. Число $\|L\| := \inf A_L$ называется **нормой** линейного отображения L .

Замечание 3.4. Как будет показано далее, точную нижнюю грань можно заменить на \min .

Удобно использовать другое выражение для нормы. Пусть

$$B_L = \left\{ \frac{\|L(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_1} \mid \vec{x} \in V_1 \setminus \{\vec{0}_1\} \right\}.$$

Предложение 3.20. Множество B_L ограничено сверху, причем

$$\|L\| = \sup B_L.$$

Доказательство. Пусть $k \in A_L$, тогда $\frac{\|L(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_1} \leq k$ для всех $\vec{x} \in$

$V_1 \setminus \{\vec{0}_1\}$. Это означает, что B_L ограничено сверху и, потому, имеет верхнюю грань s_L . Поскольку $s_L \leq k$ для любого $k \in A_L$, то $s_L \leq \|L\|$, по определению нижней грани.

Далее, для любого $\vec{x} \in V_1 \setminus \{\vec{0}_1\}$, в силу определения верхней грани, справедливо неравенство $\frac{\|L(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_1} \leq s_L$. В этой связи, $s_L \in A_L$. Значит, $\|L\| \leq s_L$ и мы доказали, что $s_L = \|L\|$. Кроме того, мы попутно установили, что $\|L\| = \min A_L$. \square

Таким образом, мы можем вычислить норму L по любой из формул

$$\|L\| = \sup_{\vec{x} \in V_1 \setminus \{\vec{0}_1\}} \frac{\|L(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_1} = \sup_{\vec{x} \in S_1(\vec{0}_1)} \|L(\vec{x})\|_2.$$

Отметим, что в анализе часто используется понятие ограниченного отображения.

Определение 3.17. *Линейное отображение L называется **ограниченным**, если*

$$\sup_{\vec{x} \in V_1 \setminus \{\vec{0}_1\}} \frac{\|L(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_1} < +\infty.$$

Из рассуждений выше следует, что понятия ограниченности и непрерывности в случае линейных отображений являются эквивалентными. В силу определения нормы отображения, для любого $\vec{x} \in V_1$ справедливо неравенство

$$\|L(\vec{x})\|_2 \leq \|L\| \|\vec{x}\|_1.$$

Пример 3.8. Пусть $V_1 = V_2 = V$. Рассмотрим тождественное отображение (единичный оператор)

$$\text{Id}_V : V \rightarrow V, \quad \text{Id}_V(\vec{x}) := \vec{x}.$$

Если $\|\vec{x}\|_V = 1$, то $\|\text{Id}_V(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|_V = 1$ и тогда $\|\text{Id}_V\| = \sup_{\|\vec{x}\|_V=1} \{1\} = 1$. Таким образом,

$$\|\text{Id}_V\| = 1.$$

Пример 3.9. Пусть $W = C([0, 1]; \mathbb{F})$ с нормой

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Через V обозначим пространство $C^1([0, 1]; \mathbb{F})$ непрерывно-дифференцируемых \mathbb{F} -значных функций на отрезке $[0, 1]$. Тогда $V \subset W$ (любая

дифференцируемая функция непрерывна) и более того, V является подпространством W (сумма двух дифференцируемых функций — дифференцируемая функция; умножение на скаляр дифференцируемой функции — дифференцируемая функция). Индуцируем на V норму из W , то есть на V рассматривается сужение функции $\|\cdot\|_\infty$.

Рассмотрим отображение

$$p : V \rightarrow W, \quad p(f) := f'.$$

В силу линейности производной, p линейно:

(i) аддитивность: $p(f + g) = (f + g)' = f' + g' = p(f) + p(g)$;

(ii) однородность: $p(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda p(f)$.

Вместе с тем, p не является непрерывным (ограниченным). Чтобы это показать, достаточно подобрать такую последовательность $(f_n)_n^\infty$ функций из V , чтобы последовательность их значений была неограниченной. В качестве такой последовательности рассмотрим функции

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0, 1] : f_n(x) := \sin(2\pi n x).$$

Каждая функция f_n действительно является элементом V , и, кроме того, $\|f_n\|_\infty = 1$. Тогда последовательность значений $(p(f_n))_{n=1}^\infty$ определена формулой

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0, 1] : p(f_n)(x) = 2\pi n \cos(2\pi n x).$$

Таким образом, $\|p(f_n)\|_\infty = 2\pi n$. В этой связи,

$$\|p\| = \sup_{f \in V, \|f\|_V=1} \|p(f)\|_W \leq \sup_{f \in \{f_n\}} \|p(f)\|_W = \sup\{2\pi n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty,$$

поскольку множество $\{2\pi n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не ограничено сверху. Отсюда следует, что оператор p не является непрерывным (ограниченным).

Несмотря на кажущуюся искусственность подобного примера, такие отображения сплошь и рядом встречаются в квантовой механике. Например, неограниченным является оператор импульса

$$p(\psi) = -i\hbar\psi'.$$

Поэтому, наряду с ограниченными операторами главную роль будут играть и неограниченные операторы. Также отметим, что совокупности дифференциальных операторов, рассматриваемых в классической механике (например, оператор в уравнении Ламе) являются неограниченными.

4.3. Пространство линейных непрерывных отображений

4.4. Критерий непрерывности билинейного отображения

4.5. Норма непрерывного билинейного отображения

4.6. Канонический изоморфизм

5. Банахово пространство

5.1. Ряды в банаховом пространстве

5.2. Обратимые отображения в банаховых пространствах

Библиография

1. Шварц Л. Анализ. Том 1. — М. : Мир, 1972.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1. Дифференциальное исчисление в \mathbb{R} : сводка результатов

1.1. Производная функции

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество.

Определение 4.1. (*Производная как линейное отображение*) Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, называется **дифференцируемой в точке** $x \in X$, предельной для X , если

$$f(x+h) = f(x) + A_x h + o(h),$$

где число $h \in \mathbb{R}$ таково, что $x+h \in X$, $o(h)$ — бесконечно малая при $h \rightarrow 0$ функция, а A_x — число, зависящее от x . Линейное отображение $h \mapsto A_x h$ называется **производным отображением в точке** x .

Определение 4.2. (*Производная как предел отношения*) Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ имеет **производную в точке** $x \in X$, предельной для X , если предел

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0, x+h \in X} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

существует и конечен. Число $f'(x)$ называется **производной** f в точке x .

Оба определения равносильны:

$$f'(x) = A_x \Rightarrow \text{единственность производного отображения.}$$

1.2. Формула Тейлора

Разложение функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле Тейлора в окрестности $x \in X$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + r_n(x; h),$$

Формы остаточного члена:

- форма Шлёмильха – Роша:

$$r_n(x; h) = \left(\frac{h}{x+h-\xi} \right)^p \frac{(x+h-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi),$$

где $p > 0$, а $\xi = \xi(p)$;

- форма Лагранжа:

$$r_n(x; h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h),$$

где $\theta \in]0, 1[$;

- форма Коши:

$$r_n(x; h) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x + \theta h),$$

где $\theta \in]0, 1[$;

- интегральная форма:

$$r_n(x; h) = \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} (x+h-t)^n f^{(n+1)}(t) dt;$$

- форма Пеано:

$$r_n(x; h) = o(h^n).$$

2. Дифференциальное исчисление в \mathbb{R}^n : сводка результатов

3. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

3.1. Аффинное нормированное пространство

Определение 4.3. *Аффинное нормированное пространство — это структура $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \psi, \|\cdot\|)$, в которой $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \psi)$ — аффинное пространство, а $\|\cdot\|$ — норма на $\vec{\mathcal{A}}$.*

Норма определяет функцию расстояния $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу

$$d(x, y) := \|\overrightarrow{y - x}\|.$$

Согласованность с аффинной структурой:

- инвариантность при сдвиге: $d(x + \vec{h}, y + \vec{h}) = d(x, y)$;
- инвариантность при гомотетии $x \mapsto x' = o + \lambda(\overrightarrow{x - o})$: $d(x', y') = d(x, y)$.

Определение 4.4. *Евклидово аффинное пространство — это структура $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, \psi, (\cdot|\cdot))$, в которой $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, \psi)$ — аффинное пространство над \mathbb{R} , а $(\cdot|\cdot) : \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярное произведение на $\vec{\mathcal{E}}$.*

Норма трансляционного вектора v : число $\|v\| := \sqrt{(v|v)}$.

Пусть $\dim \mathcal{E} = n$. В пространстве $\vec{\mathcal{E}}$ можно выбрать ортонормированный базис (процесс Грама–Шмидта) $(i_k)_{k=1}^n$.

Определение 4.5. *Аффинная система координат $(o, (i_k)_{k=1}^n)$ называется декартовой системой координат.*

3.2. Тензоры

Пусть V — векторное пространство. Вектор $u \in V$ и ковектор $\nu \in V^*$ определяют линейный оператор $u \otimes \nu : V \rightarrow V$ по действию:

$$u \otimes \nu(v) := \langle \nu, v \rangle u.$$

Определение 4.6. $u \otimes \nu(v)$ — *диадное произведение*.

Если $\dim V = n$, $(e_i)_{i=1}^n$ — базис V , то $(e_i \otimes e^j)_{i,j=1}^n$ — базис $\text{Lin}(V; V)$. Для $L \in \text{Lin}(V; V)$ справедливо разложение

$$L = L^i_j e_i \otimes e^j.$$

Если V — пространство со скалярным произведением, то используя отождествление вектора и ковектора (по теореме Рисса), можно определить диаду $u \otimes v$, где $u, v \in V$, как

$$u \otimes v(w) := (v|w)u.$$

3.3. Производная Гато и Фреше

Пусть $(\mathcal{A}_1, \vec{\mathcal{A}}_1, \psi_1, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathcal{A}_2, \vec{\mathcal{A}}_2, \psi_2, \|\cdot\|_2)$ — конечномерные аффинные нормированные пространства, $X \subset \mathcal{A}_1$ — непустое множество, а $x \in X$ — внутренняя точка, т.е. центр некоторого открытого шара, содержащегося в X .

Определение 4.7. *Отображение $f : X \rightarrow \mathcal{A}_2$ называется дифференцируемым в точке x , если существует линейное отображение $L_x \in \text{Lin}(\vec{\mathcal{A}}_1; \vec{\mathcal{A}}_2)$, такое, что для любого $\vec{h} \in \vec{\mathcal{A}}_1$, $x +_1 \vec{h} \in X$, выполняется соотношение*

$$f(x +_1 \vec{h}) = f(x) +_2 L_x[\vec{h}] + \vec{o}(\|\vec{h}\|_1),$$

где $\vec{o}(\|\vec{h}\|_1)$ — функция, бесконечно малая при $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$. Отображение L_x называется *производной Фреше*.

Производная Гато

Отображение $f : X \rightarrow \mathcal{A}_2$ имеет **производную Гато** $\partial_{\vec{h}} f(x)$ в точке x вдоль вектора $\vec{h} \in \vec{\mathcal{A}}_1$, если существует предел

$$\partial_{\vec{h}} f(x) := \lim_{X_{x;\vec{h}} \ni t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{f(x +_1 t\vec{h}) -_2 f(x)}}{t},$$

где $X_{x;\vec{h}} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \neq 0, x +_1 t\vec{h} \in X\}$.

Единственность производной Фреше

Если отображение $f : X \rightarrow \mathcal{A}_2$ дифференцируемо в точке \boldsymbol{x} , то оно имеет производную Гато вдоль любого вектора $\vec{h} \in \vec{\mathcal{A}}_1$, причем

$$L_{\boldsymbol{x}}[\vec{h}] = \partial_{\vec{h}} f(\boldsymbol{x}).$$

В этой связи, производная Фреше единственна и обозначается через $f'(\boldsymbol{x})$.

Фреше \Rightarrow непрерывность

Если f имеет в точке \boldsymbol{x} производную Фреше, то, поскольку при $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$ справедливо стремление $f'(\boldsymbol{x})[\vec{h}] \rightarrow \vec{0}$, приращение $f(\boldsymbol{x} + \vec{h}) - f(\boldsymbol{x})$ также стремится к $\vec{0}$ и отображение f непрерывно в точке \boldsymbol{x} .

Контрпример: Гато $\not\Rightarrow$ Фреше

Функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная равенством

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{для } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}, & \text{для } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

не является непрерывной в нуле и поэтому не имеет в этой точке производную Фреше. Вместе с тем, она имеет производную Гато в нуле вдоль любого вектора.

Координатное представление производных

Если $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ — базис $\vec{\mathcal{A}}_1$, $(\vec{g}_j)_{j=1}^m$ — базис $\vec{\mathcal{A}}_2$, $\boldsymbol{o} \in \mathcal{A}_2$ — фиксированная точка, то отображение $f : X \rightarrow \mathcal{A}_2$ представимо в виде

$$f = \boldsymbol{o} + f^j \vec{g}_j,$$

где $f^j : X \rightarrow \mathbb{F}$ — компоненты f . Для производной Гато $\partial_{\vec{e}_i} f^j(\boldsymbol{x})$ введем обозначение

$$\partial_i f^j(\boldsymbol{x}) := \partial_{\vec{e}_i} f^j(\boldsymbol{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^j(\boldsymbol{x} + t \vec{e}_i) - f^j(\boldsymbol{x})}{t},$$

тогда

$$f'(\boldsymbol{x}) = \partial_i f^j(\boldsymbol{x}) \vec{g}_j \otimes \vec{e}_i.$$

3.4. Тейлоризация

Производные высших порядков

Пусть $f : X \rightarrow \mathcal{A}_2$ — отображение открытого множества X в \mathcal{A}_2 . Если оно дифференцируемо всюду в X , то определено отображение $x \mapsto f'(x)$ из X в $\text{Lin}(\vec{\mathcal{A}}_1; \vec{\mathcal{A}}_2)$. Предположим, что это отображение дифференцируемо в некоторой точке $x \in X$. Тогда его производная Фреше обозначается через $f''(x) := (f')'(x)$ и является элементом пространства $\text{Lin}(\vec{\mathcal{A}}_1; \text{Lin}(\vec{\mathcal{A}}_1; \vec{\mathcal{A}}_2))$. В силу канонического изоморфизма

$$\text{Lin}(\vec{\mathcal{A}}_1; \text{Lin}(\vec{\mathcal{A}}_1; \vec{\mathcal{A}}_2)) \rightarrow \text{Lin}_2(\vec{\mathcal{A}}_1, \vec{\mathcal{A}}_1; \vec{\mathcal{A}}_2), \quad U \mapsto u(\vec{h}_1, \vec{h}_2) = (U\vec{h}_1)\vec{h}_2,$$

$f''(x)$ рассматривается как билинейное отображение. Вычисление через производные Гато:

$$f''(x)(\vec{h}_1, \vec{h}_2) = \partial_{\vec{h}_1}(\partial_{\vec{h}_2}f)(x).$$

Если уже определена производная порядка $m - 1$ и функция $f^{(m-1)} : x \mapsto f^{(m-1)}(x)$ определена всюду в X и дифференцируема в $x \in X$, то производная порядка m определяется как $f^{(m)}(x) := (f^{(m-1)})'(x)$ и отождествляется с m -линейным отображением из $\text{Lin}_m(\vec{\mathcal{A}}_1, \dots, \vec{\mathcal{A}}_1; \vec{\mathcal{A}}_2)$.

Формула Тейлора

Пусть $f : X \rightarrow \mathcal{A}_2$ — отображение, r раз дифференцируемое в точке $x \in X$. Для $\vec{h} \in \vec{\mathcal{A}}_1$ будем использовать обозначение

$$f^{(k)}(x)[\vec{h}^k] := f^{(k)}(x)[\vec{h}, \dots, \vec{h}].$$

Справедлива **формула Тейлора**

$$f(x + \vec{h}) = f(x) + f'(x)[\vec{h}] + \dots + \frac{f^{(r)}(x)[\vec{h}^r]}{r!} + o(\|\vec{h}\|^r).$$

Предположим, что отрезок $[x, x + \vec{h}]$ целиком лежит в X и f имеет производную порядка $(r + 1)$ в точках интервала $]x, x + \vec{h}[$, не превосходящую по норме числа $M > 0$. Тогда

$$\left\| \overrightarrow{f(x + \vec{h}) - f(x) - f'(x)[\vec{h}] - \dots - \frac{f^{(r)}(x)[\vec{h}^r]}{r!}} \right\| \leq \frac{M\|\vec{h}\|^{r+1}}{(r+1)!}.$$

Если $\mathcal{A}_2 = \mathbb{R}$, отрезок $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \vec{h}]$ целиком лежит в X и f имеет производную порядка $(r + 1)$ в точках интервала $] \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \vec{h}[$, то

$$f(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})[\vec{h}] + \cdots + \frac{f^{(r)}(\boldsymbol{x})[\vec{h}^r]}{r!} + \frac{f^{(r+1)}(\boldsymbol{x} + \theta\vec{h})[\vec{h}^{r+1}]}{(r + 1)!},$$

где $\theta \in]0, 1[$.

Библиография

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1. Векторные и тензорные поля в евклидовом пространстве

Пусть \mathcal{E} — n -мерное евклидово аффинное пространство со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)$, а $O \subset \mathcal{E}$ — открытое множество. Пусть $\mathcal{D} : x \mapsto (x^i)_{i=1}^n$ — соответствие, которое точкам из \mathcal{E} сопоставляет их декартовы координаты (декартова арифметизация).

1.1. Скалярное поле

Функция на \mathcal{E} — это отображение $f : O \rightarrow \mathbb{R}$. Его координатное представление $\tilde{f} = f \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathcal{D}(O) \rightarrow \mathbb{R}$ является вещественной функцией от n вещественных переменных. Функция является гладкой (принадлежащей классу C^∞), если отображение \tilde{f} является гладким, то есть, $\tilde{f} \in C^\infty(\mathcal{D}(O); \mathbb{R})$.

Связь между f и \tilde{f} иллюстрируется коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} O & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \mathcal{D} \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \mathcal{D}(O) & & \end{array}$$

1.2. Векторное поле

Векторное поле на \mathcal{E} — это отображение $\mathbf{u} : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$. Его можно представить как векторнозначную функцию $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathcal{D}(O) \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ n вещественных аргументов или как отображение $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}} = \Phi \circ \mathbf{u} \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathcal{D}(O) \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\Phi : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — изоморфизм, определяемый декартовой арифметизацией. Гладкость \mathbf{u} равносильно гладкости $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}$

Связь между векторным полем и его координатными представлениями иллюстрируется коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} O & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{D} \downarrow & \nearrow \tilde{\mathbf{u}} & \downarrow \Phi \\ \mathcal{D}(O) & \xrightarrow{\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

1.3. Ковекторное поле

Ковекторное поле на \mathcal{E} — это отображение $\nu : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}^*$. Декартова арифметизация определяет отображение

$$\tilde{\nu} = \nu \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathcal{D}(O) \rightarrow \vec{\mathcal{E}}^*.$$

Определяя изоморфизм

$$\Psi : \vec{\mathcal{E}}^* \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Psi : \nu = \nu_k e^k \mapsto (\nu_1, \dots, \nu_n),$$

можно представить поле ν как вещественную функцию вещественных переменных

$$\tilde{\tilde{\nu}} = \Psi \circ \nu \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathcal{D}(O) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Гладкость ковекторного поля ν равносильна гладкости его координатного представления $\tilde{\nu}$.

1.4. Тензорное поле

Тензоры являются элементами тензорного произведения пространств $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{E}}^*$. Смешанные тензоры типа (k, l) — элементы

$$T^{(k,l)}(\vec{\mathcal{E}}) := \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{k \text{ раз}} \otimes \underbrace{\vec{\mathcal{E}}^* \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}^*}_{l \text{ раз}}.$$

Поле \mathbb{R} , векторные пространства $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{E}}^*$ являются примерами тензорных пространств:

$$T^{(0,0)}(\vec{\mathcal{E}}) = \mathbb{R}, \quad T^{(1,0)}(\vec{\mathcal{E}}) = \vec{\mathcal{E}}, \quad T^{(0,1)}(\vec{\mathcal{E}}) = \vec{\mathcal{E}}^*.$$

Эквивалентно, тензор типа (k, l) можно рассматривать как полилинейное отображение из

$$\text{Lin}_{k+l}(\underbrace{\vec{\mathcal{E}}^*, \dots, \vec{\mathcal{E}}^*}_{k \text{ раз}}, \underbrace{\vec{\mathcal{E}}, \dots, \vec{\mathcal{E}}}_{l \text{ раз}}; \mathbb{R}).$$

Базис $(e_i)_{i=1}^n$ и его дуальный, $(e^i)_{i=1}^n$, определяют изоморфизм $\Theta : T^{(k,l)}(\vec{\mathcal{E}}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^{k+l}}$,

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_k \cdot \cdot \cdot}_{\cdot \cdot \cdot j_1 \dots j_l} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_l} &\mapsto \\ &\mapsto (T^{i_1 \dots i_k \cdot \cdot \cdot}_{\cdot \cdot \cdot j_1 \dots j_l})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n}. \end{aligned}$$

Тензорное поле типа (k, l) на \mathcal{E} — это отображение $\mathbf{T} : O \rightarrow T^{(k,l)}(\vec{\mathcal{E}})$. Арифметизация определяет отображение

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathcal{D}(O) \rightarrow T^{(k,l)}(\vec{\mathcal{E}}).$$

Учитывая изоморфизм Θ , приходим к координатному представлению

$$\tilde{\tilde{\mathbf{T}}} = \Theta \circ \mathbf{T} \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathcal{D}(O) \rightarrow \mathbb{R}^{n^{k+l}}.$$

Гладкость \mathbf{T} равносильна гладкости $\tilde{\tilde{\mathbf{T}}}$.

2. Градиенты скалярных полей

2.1. Градиент скалярного поля в \mathbb{R}^n

Скалярное поле в \mathbb{R}^n — это функция $f : O \rightarrow \mathbb{R}$, где $O \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Если поле f дифференцируемо в точке $x \in O$, то

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)[h] + o(\|h\|),$$

где $h \in \mathbb{R}^n$ — такой элемент, что $x+h \in O$, а $\|\cdot\|$ — норма в евклидовой топологии. Ковектор $f'(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ будем называть **градиентом скалярного поля f в точке x** .

В классическом анализе под градиентом понимается не ковектор $f'(x)$, а ассоциированный с ним по музыкальному изоморфизму вектор $\text{grad } f(x) \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{grad } f(x) := (f'(x))^\sharp,$$

то есть, $f'(x)[h] = (\text{grad } f(x)|h)_{\mathbb{R}^n}$.

Если f дифференцируемо всюду в O , то определено отображение

$$f' : O \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \quad x \mapsto f'(x),$$

или, эквивалентно, отображение (векторное поле)

$$\text{grad } f : O \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \text{grad } f(x).$$

2.2. Градиент скалярного поля в $\vec{\mathcal{E}}$

Скалярное поле в евклидовом векторном пространстве $\vec{\mathcal{E}}$ — это отображение $f : O \rightarrow \mathbb{R}$, заданное на открытом множестве $O \subset \vec{\mathcal{E}}$. Физический смысл отображения f : плотность упругой энергии, зависящая от перемещений. Если поле f дифференцируемо в точке $\mathbf{x} \in O$, то

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})[\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|),$$

где $\mathbf{h} \in \vec{\mathcal{E}}$ — такой вектор, что $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in O$, а $\|\cdot\|$ — норма, порожденная скалярным произведением. Ковектор $f'(\mathbf{x}) \in \vec{\mathcal{E}}^*$ будем называть **градиентом скалярного поля f в точке \mathbf{x}** .

Музыкальный изоморфизм позволяет ассоциировать с ковектором $f'(\mathbf{x})$ вектор $\text{grad } f(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}$:

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) := (f'(\mathbf{x}))^\sharp,$$

то есть, $f'(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = (\text{grad } f(\mathbf{x})|\mathbf{h})$.

В случае, когда f дифференцируемо всюду в O , определены ковекторное поле

$$f' : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}^*, \quad \mathbf{x} \mapsto f'(\mathbf{x}),$$

и векторное поле

$$\text{grad } f : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}, \quad \mathbf{x} \mapsto \text{grad } f(\mathbf{x}).$$

2.3. Градиент скалярного поля в \mathcal{E}

Пространства \mathbb{R}^n и $\vec{\mathcal{E}}$ являются частным случаем пространства \mathcal{E} . Пусть $O \subset \mathcal{E}$ — открытое множество, а $f : O \rightarrow \mathcal{E}$ — скалярное поле. С физической точки зрения его можно интерпретировать как поле температур. Предположим, что поле f дифференцируемо в точке $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle + o(\|\mathbf{h}\|),$$

где $\mathbf{h} \in \vec{\mathcal{E}}$ — такой вектор, что $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in O$, а $\|\cdot\|$ — норма, порожденная скалярным произведением. Ковектор $f'(\mathbf{x}) \in \vec{\mathcal{E}}^*$ будем называть **градиентом скалярного поля f в точке \mathbf{x}** .

Используя музыкальный изоморфизм, ассоциируем с ковектором $f'(\mathbf{x})$ вектор $\text{grad } f(\mathbf{x}) \in \vec{\mathcal{E}}$:

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) := (f'(\mathbf{x}))^\sharp.$$

Тогда $\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle = (\text{grad } f(\mathbf{x})|\mathbf{h})$. В декартовой системе координат $(\sigma, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^n)$ вектор $\text{grad } f(\mathbf{x})$ имеет представление

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \partial_k f(\mathbf{x}) \mathbf{i}^k,$$

где $\partial_k f(\mathbf{x})$ — обычные частные производные:

$$\partial_k f(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x^1, \dots, x^k + t, \dots, x^n) - \tilde{f}(x^1, \dots, x^k, \dots, x^n)}{t}.$$

Если f дифференцируемо всюду в O , то определены ковекторное поле

$$f' : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}^*, \quad x \mapsto f'(x),$$

и векторное поле

$$\text{grad } f : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}, \quad x \mapsto \text{grad } f(x).$$

Определение 5.1. Гладкое векторное поле $\mathbf{u} : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ **потенциально**, если $\mathbf{u} = \text{grad } f$ для некоторого гладкого скалярного поля $f : O \rightarrow \mathbb{R}$. Такое скалярное поле f называется **потенциалом** \mathbf{u} .

Потенциал определен с точностью до постоянного слагаемого: если f_0 — потенциал \mathbf{u} , а $c \in \mathbb{R}$, то поле $f = f_0 + c$ также является потенциалом \mathbf{u} .

Замечание 5.1. В физических приложениях часто используется определение со знаком «минус»: $\mathbf{F} = -\text{grad } U$ для силы \mathbf{F} и потенциала U .

Пример 5.1. Примеры сил, имеющих потенциал:

- Ньютонова гравитационная сила взаимодействия между двумя материальными точками равна $\mathbf{F}_{\text{grav}} = -\text{grad } U_{\text{grav}}$, где гравитационный потенциал U_{grav} имеет вид $U_{\text{grav}}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$, в котором G — гравитационная постоянная, m_1, m_2 — массы частиц, а $r = \|\mathbf{r}\|$ — длина радиус-вектора от одной частицы к другой.
- Гармоническая сила $\mathbf{F}_{\text{harm}}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$, где k — постоянная, является потенциальной: $\mathbf{F}_{\text{harm}} = -\text{grad } U_{\text{harm}}$, где $U_{\text{harm}} = \frac{1}{2}kr^2$.

2.4. Градиент векторных и тензорных полей

Градиент векторного поля в \mathbb{R}^n

Векторное поле в \mathbb{R}^n — это отображение $u : O \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное на открытом множестве $O \subset \mathbb{R}^n$. Если оно дифференцируемо в $x \in O$, то

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)[h] + o(\|h\|),$$

где $u'(x) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Линейное отображение $u'(x)$ называется **градиентом векторного поля u в точке x** . Если u дифференцируемо всюду на O , то определено отображение

$$u' : O \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \quad u' : x \mapsto u'(x).$$

Градиент векторного поля в $\vec{\mathcal{E}}$

Векторное поле в $\vec{\mathcal{E}}$ — это отображение $\mathbf{u} : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$, заданное на открытом множестве $O \subset \vec{\mathcal{E}}$. Если оно дифференцируемо в $\mathbf{x} \in O$, то

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x})[\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|),$$

где $\mathbf{u}'(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}})$. Линейное отображение $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ называется **градиентом векторного поля \mathbf{u} в точке \mathbf{x}** . Если \mathbf{u} дифференцируемо всюду на O , то определено тензорное поле

$$\mathbf{u}' : O \rightarrow \text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}}), \quad \mathbf{u}' : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}'(\mathbf{x}).$$

Градиент векторного поля в \mathcal{E}

Рассмотрим общий случай. Отображение $\mathbf{u} : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$, заданное на открытом множестве $O \subset \mathcal{E}$, представляет векторное поле в \mathcal{E} . Если оно дифференцируемо в $\mathbf{x} \in O$, то

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x})[\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|),$$

где $\mathbf{u}'(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}})$. Линейное отображение $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ называется **градиентом векторного поля \mathbf{u} в точке \mathbf{x}** .

Значение градиента на векторе $\mathbf{h} \in \vec{\mathcal{E}}$ есть предел

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})}{t}.$$

В декартовой системе координат $(\mathcal{o}, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^n)$ поле \mathbf{u} имеет вид $\mathbf{u} = u^k \mathbf{i}_k$, а тензор $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ имеет представление

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \partial_j u^k(\mathbf{x}) \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}^j,$$

где $\partial_j u^k(\mathbf{x})$ — частные производные:

$$\partial_j u^k(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}^k(x^1, \dots, x^j + t, \dots, x^n) - \tilde{u}^k(x^1, \dots, x^j, \dots, x^n)}{t}.$$

Здесь \tilde{u}^k — координатное представление поля u^k .

Если \mathbf{u} дифференцируемо всюду на O , то определено тензорное поле

$$\mathbf{u}' : O \rightarrow \text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}}), \quad \mathbf{u}' : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}'(\mathbf{x}).$$

Градиент тензорного поля

Пусть $O \subset \mathcal{E}$ — открытое множество, $\mathbf{T} : O \rightarrow \text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}})$ — тензорное поле второго ранга на \mathcal{E} . Если оно дифференцируемо в точке $x \in O$, то, согласно определению, существует производная Фреше $\mathbf{T}'(x) \in \text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}}))$:

$$\mathbf{T}(x + \mathbf{h}) = \mathbf{T}(x) + \mathbf{T}'(x)[\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|),$$

где трансляционный вектор $\mathbf{h} \in \vec{\mathcal{E}}$ таков, что $x + \mathbf{h} \in O$. Будем называть линейный оператор $\mathbf{T}'(x)$ **градиентом тензорного поля \mathbf{T} в точке x** . Используя канонический изоморфизм

$$\text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}})) \rightarrow \text{Lin}_2(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}}), \quad \mathbf{U} \mapsto \mathbf{u}(\vec{h}_1, \vec{h}_2) = (\mathbf{U}\vec{h}_1)\vec{h}_2,$$

градиент $\mathbf{T}'(x)$ можно рассматривать как билинейное отображение из $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$ в $\vec{\mathcal{E}}$.

В декартовой системе координат $(\mathcal{o}, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^n)$ поле \mathbf{T} имеет вид $\mathbf{T} = T_{\cdot s}^{k\cdot} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}^s$, а градиент $\mathbf{T}'(x)$ — представление

$$\mathbf{T}'(x) = \partial_j T_{\cdot s}^{k\cdot}(x) \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}^s \otimes \mathbf{i}^j,$$

в котором $\partial_j T_{\cdot s}^{k\cdot}(x)$ — частные производные:

$$\partial_j T_{\cdot s}^{k\cdot}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{T}_{\cdot s}^{k\cdot}(x^1, \dots, x^j + t, \dots, x^n) - \tilde{T}_{\cdot s}^{k\cdot}(x^1, \dots, x^j, \dots, x^n)}{t}.$$

Здесь $\tilde{T}_{\cdot s}^{k\cdot}$ — координатное представление поля $T_{\cdot s}^{k\cdot}$.

3. Дивергенция векторных и тензорных полей

3.1. Дивергенция векторного поля в \mathbb{R}^n

Пусть $u : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторное поле, определенное на открытом множестве $O \subset \mathbb{R}^n$ и дифференцируемое в точке $x \in O$. Оно имеет представление $u = u^k I_k$, где $(I_k)_{k=1}^n$, $I_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, — базис \mathbb{R}^n . **Дивергенцией u в точке x** называется скаляр $\text{div } u(x)$, определенный равенством:

$$\text{div } u(x) = \partial_k u^k(x),$$

где $\partial_i u^j(x)$ — частные производные.

3.2. Дивергенция векторного поля в \mathcal{E}

Рассмотрим векторное поле $\mathbf{u} : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$, заданное на открытом множестве $O \subset \mathcal{E}$ и дифференцируемое в точке $x \in O$. **Дивергенция \mathbf{u} в точке x** — это скаляр

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x) := \operatorname{tr}[\mathbf{u}'(x)],$$

определяемый как след градиента $\mathbf{u}'(x)$. В декартовой системе координат $(\sigma, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^n)$ дивергенция может быть представлена в виде суммы частных производных

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x) = \partial_k u^k(x).$$

Если \mathbf{u} дифференцируемо всюду в O , то определено скалярное поле, поле дивергенции

$$\operatorname{div} \mathbf{u} : O \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{div} \mathbf{u}(x).$$

3.3. Дивергенция тензорного поля

Пусть тензорное поле $\mathbf{T} : O \rightarrow \operatorname{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}})$, заданное на открытом множестве $O \subset \mathcal{E}$, дифференцируемо в точке $x \in O$. Тогда транспонированное тензорное поле $\mathbf{T}^T : O \rightarrow \operatorname{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}})$ также дифференцируемо в точке $x \in O$. **Дивергенцией поля \mathbf{T} в точке x** называется единственный вектор $\operatorname{div} \mathbf{T}(x) \in \vec{\mathcal{E}}$, для которого равенство

$$(\mathbf{u} | \operatorname{div} \mathbf{T}(x)) = \operatorname{div}\{\mathbf{T}^T(x)[\mathbf{u}]\},$$

выполнено при любом векторе $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{E}}$. В правой части этого равенства — дивергенция векторного поля.

В декартовой системе координат $(\sigma, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^n)$, если $\mathbf{T} = T_{\cdot l}^k \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}^l$, то $\operatorname{div} \mathbf{T}(x) = \partial_l T_{\cdot l}^k \mathbf{i}_k$. В том случае, когда \mathbf{T} дифференцируемо всюду в O , определено векторное поле

$$\operatorname{div} \mathbf{T} : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}, \quad x \mapsto \operatorname{div} \mathbf{T}(x).$$

3.4. Ротор (вихрь) векторных и тензорных полей

В настоящем пункте $n = 3$.

3.5. Ротор векторного поля в \mathbb{R}^3

Пусть $u : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное поле, определенное на открытом множестве $O \subset \mathbb{R}^3$ и дифференцируемое в точке $x \in O$. Для него справедливо разложение $u = u^k I_k$, где $I_1 = (1, 0, 0)$, $I_2 = (0, 1, 0)$, $I_3 = (0, 0, 1)$. **Ротором (вихрем) u в точке x** называется вектор $\text{curl } u(x)$, результат вычисления формального определителя

$$\text{curl } u(x) = \begin{vmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \end{vmatrix}.$$

3.6. Ротор векторного поля в \mathcal{E}

Ротор векторного поля в некоторой точке — это вектор, который ассоциируется с антисимметричной частью градиента векторного поля. Более формально, пусть векторное поле $\mathbf{u} : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$, заданное на открытом множестве $O \subset \mathcal{E}$, дифференцируемо в точке $x \in O$. **Ротором (вихрем) \mathbf{u} в точке x** называется вектор $\text{curl } \mathbf{u}(x)$, удовлетворяющий равенству

$$(\mathbf{u}'(x) - (\mathbf{u}')^T(x))\mathbf{v} = (\text{curl } \mathbf{u}(x)) \times \mathbf{v},$$

для любого вектора \mathbf{v} . В правой части равенства символ \times обозначает векторное произведение. В декартовой системе координат $(\sigma, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$, если $\mathbf{u} = u^k \mathbf{i}_k$, то

$$\text{curl } \mathbf{u}(x) = e^{skq} \delta_{ql} \partial_k u^l(x) \mathbf{i}_s.$$

Если поле \mathbf{u} дифференцируемо всюду в O , то определено векторное поле

$$\text{curl } \mathbf{u} : O \rightarrow \vec{\mathcal{E}}, \quad x \mapsto \text{curl } \mathbf{u}(x).$$

3.7. Ротор тензорного поля в \mathcal{E}

Пусть тензорное поле второго ранга $\mathbf{T} : O \rightarrow \text{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}})$ определено на открытом множестве $O \subset \mathcal{E}$ и дифференцируемо в точке $x \in O$. Тогда ротор (вихрь) поля \mathbf{T} в точке x — это единственный тензор второго ранга $\text{curl } \mathbf{T}(x)$, удовлетворяющий равенству

$$(\text{curl } \mathbf{T}(x))\mathbf{u} = \text{curl}\{\mathbf{T}^T(x)[\mathbf{u}]\},$$

для любого вектора $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{E}}$. Если $\mathbf{T} = T_{\cdot k}^s \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}^k$, в декартовой системе координат $(\mathcal{o}, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$, то

$$\operatorname{curl} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = e^{srq} \delta_{kl} \partial_r T_{\cdot q}^l(\mathbf{x}) \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}^k.$$

Если \mathbf{T} дифференцируемо во всех точках O , то определено тензорное поле

$$\operatorname{curl} \mathbf{T} : O \rightarrow \operatorname{Lin}(\vec{\mathcal{E}}; \vec{\mathcal{E}}), \quad \mathbf{x} \mapsto \operatorname{curl} \mathbf{T}(\mathbf{x}).$$

Библиография

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

Геометрическая теория уравнений в частных
производных

1. Уравнения в частных производных: общие определения и примеры

Содержание настоящей главы основано на монографиях [1, 2].

Определение 6.1. *Уравнением в частных производных называется уравнение вида*

$$F(x, y, z, \dots; u; u_x, u_y, u_z, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0,$$

где

- F — заданная функция; $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ или $F : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$;
- u — искомая функция; $u : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ или $u : \mathbb{C}^n \supset D \rightarrow \mathbb{C}$;
- $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$

Предполагается, что функции F, u требуемое число раз непрерывно дифференцируемы.

Определение 6.2. *Порядком уравнения* называется порядок старшей производной, входящей в F .

Определение 6.3. *Уравнение в частных производных называется:*

- *линейным*, если функция F линейна относительно u, u_x, u_y, \dots
- *квазилинейным*, если функция F линейна относительно старших производных.

В случае двух переменных решение $u(x, y)$ геометрически можно рассматривать как «интегральную поверхность» (см. Рис. 6.1).

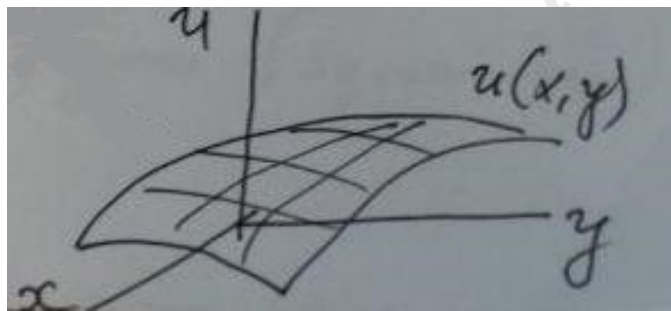


Рис. 6.1. Интегральная поверхность

Пример 6.1. *Обыкновенное дифференциальное уравнение является частным случаем уравнения в частных производных:*

$$F(x; u; u', u'', \dots) = 0.$$

Его решение зависит от **постоянных интегрирования:**

$$u = \varphi(x; c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (6.1.1)$$

Например,

$$u'' = 0 \Rightarrow u = c_1 + c_2x,$$

$$u'' + \omega^2 u = 0 \Rightarrow u = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x),$$

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - \alpha^2)u = 0 \Rightarrow u = c_1 J_\alpha(x) + c_2 Y_\alpha(x),$$

где последнее уравнение — уравнение Бесселя.

1. Уравнения в частных производных: общие определения и примеры **123**

Важно отметить, что по данному решению (6.1.1) можно однозначно определить F , исключая постоянные интегрирования из равенств:

$$\begin{aligned}u &= \varphi(x; c_1, c_2, \dots, c_n), \\u' &= \varphi'(x; c_1, c_2, \dots, c_n), \\&\dots \\u^{(n)} &= \varphi^{(n)}(x; c_1, c_2, \dots, c_n).\end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned}u &= c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x), \\u' &= \omega c_1 \cos(\omega x) - \omega c_2 \sin(\omega x), \\u'' &= -\omega^2 c_1 \sin(\omega x) - \omega^2 c_2 \cos(\omega x),\end{aligned}$$

поэтому $u'' + \omega^2 u = 0$.

В отличие от обыкновенного дифференциального уравнения, для уравнения в частных производных:

- 1) аналог «общего решения» содержит произвольные функции,
- 2) «общее решение» не исчерпывает все решения; существуют «особые решения».

Пример 6.2. Уравнение $u_y = 0$ имеет решение $u = \omega(x)$, где ω — произвольная функция.

Пример 6.3. Уравнение $u_{xy} = 0$ имеет решение $u = \omega(x) + \nu(y)$, в котором ω и ν — произвольные функции.

Пример 6.4. Решение «неоднородного» дифференциального уравнения $u_{xy} = f$ имеет вид

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \omega(x) + \nu(y),$$

где $\omega(x) + \nu(y)$ — решение однородного дифференциального уравнения. Решение неоднородного уравнения можно представить иначе:

$$u(x, y) = \int_D f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \omega(x) + \nu(y).$$

Здесь D — область, ограниченная кривой C (Рис. 6.2).

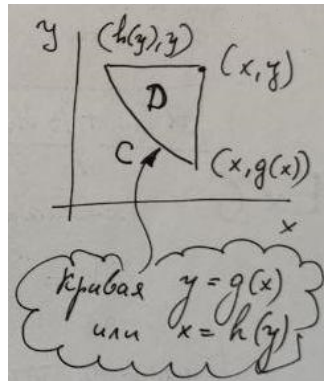


Рис. 6.2. Область D , ограниченная кривой C

Дифференцирование u по x и отдельно по y дает

$$u_x = \int_{g(x)}^y f(x, \eta) d\eta + \omega'(x),$$

$$u_y = \int_{h(y)}^x f(\xi, y) d\xi + \nu'(y).$$

Если положить $\omega(x) = \nu(y) = 0$, то $u = u_x = u_y = 0$ для всех точек C . Таким образом, мы получили решение начальной задачи (задачи Коши).

Пример 6.5. Рассмотрим уравнение $u_x = u_y$. Произведем замену переменных:

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y,$$

тогда $u(x, y) = \omega(\xi, \eta)$. Вычисляя производные, получаем:

$$u_x = \omega_\xi \xi_x + \omega_\eta \eta_x = \omega_\xi + \omega_\eta,$$

$$u_y = \omega_\xi \xi_y + \omega_\eta \eta_y = \omega_\xi - \omega_\eta.$$

Тогда в новых переменных дифференциальное уравнение примет вид

$$\omega_\eta = 0.$$

Согласно полученному уравнению, ω является функцией только от ξ . В этой связи,

$$u(x, y) = \omega(\xi) = \omega(x + y).$$

Установленный результат легко обобщить на уравнение

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0,$$

в котором α и β — постоянные. Его решение имеет вид $u = \omega(\beta x - \alpha y)$.

Пример 6.6. Якобиан функций $u(x, y)$ и $g(x, y)$ равен

$$J = \frac{\partial(u, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = u_x g_y - u_y g_x.$$

Полагая, что функция g задана, получаем уравнение в частных производных, соответствующее $J = 0$:

$$u_x g_y - u_y g_x = 0.$$

Его решение имеет вид $u = \omega(g(x, y))$, где ω — произвольная функция, и характеризует зависимость между u и g .

Пример 6.7. Обобщая дифференциальное уравнение из Примера 6.6, рассмотрим квазилинейное уравнение:

$$\omega_x g_y(x, y, \omega) - \omega_y g_x(x, y, \omega) = 0.$$

Здесь g является функцией трех переменных: независимых переменных x, y и искомой функции $\omega(x, y)$. Пусть $\gamma(x, y) = g(x, y, \omega(x, y))$, тогда

$$\omega_x \gamma_y - \omega_y \gamma_x = \omega_x g_y - \omega_y g_x + \omega_x g_\omega \omega_y - \omega_y g_\omega \omega_x = 0.$$

Таким образом,

$$\omega(x, y) = W[g(x, y, \omega(x, y))],$$

что является неявным способом задания функции ω .

Например, если

$$\alpha(\omega)\omega_x - \beta(\omega)\omega_y = 0,$$

то

$$\omega = W[\alpha(\omega)y + \beta(\omega)x].$$

В частном случае, если уравнение имеет вид $v_t + vv_x = 0$ (ускорение всех частиц равно нулю), то $v = W(tv - x)$.

Пример 6.8. Рассмотрим уравнение второго порядка:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Производя замену переменных

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y, \quad u(x, y) = \omega(\xi, \eta),$$

получаем упрощенное уравнение

$$\omega_{\xi\eta} = 0.$$

Его решение имеет вид: $\omega(\xi, \eta) = \nu_1(\xi) + \nu_2(\eta)$, где ν_1, ν_2 — произвольные функции. Тогда

$$u(x, y) = \nu_1(x + y) + \nu_2(x - y).$$

Обобщением рассмотренного уравнения является уравнение колебаний струны:

$$u_{xx} - \frac{1}{\mu^2}u_{yy} = 0.$$

Используя аналогичную замену переменных, приходим к **решению Д'Аламбера**

$$u(x, y) = \nu_1(x + \mu y) + \nu_2(x - \mu y).$$

Пример 6.9. Возьмем в примере 6.7 $\mu = i = \sqrt{-1}$, тогда получим **уравнение Лапласа**

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

В качестве функций ν_1 и ν_2 выберем функцию z^n , $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(x + iy)^n = P_n(x, y) + iQ_n(x, y),$$

$$(x - iy)^n = P_n(x, y) - iQ_n(x, y),$$

1. Уравнения в частных производных: общие определения и примеры 127

где P_n и Q_n — многочлены. Они также являются решениями уравнения Лапласа (гармоническими функциями), поскольку оператор Δ линеен, и

$$\begin{aligned}\Delta(x + iy)^n = 0 &\Rightarrow \Delta(P_n(x, y) + iQ_n(x, y)) = 0, \\ &\Rightarrow \Delta P_n(x, y) + i\Delta Q_n(x, y) = 0, \\ &\Rightarrow \Delta P_n(x, y) = 0 \text{ и } \Delta Q_n(x, y) = 0.\end{aligned}$$

Перейдем в полярную систему координат

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Многочлены P_n и Q_n примут вид

$$P_n(x, y) = r^n \cos(n\theta), \quad Q_n(x, y) = r^n \sin(n\theta),$$

а уравнение Лапласа —

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$

Обобщим рассмотренный пример, заменив $n \in \mathbb{N}$ на $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда решения примут вид

$$r^\alpha \cos(\alpha\theta), \quad \text{и} \quad r^\alpha \sin(\alpha\theta).$$

В силу линейности Δ , сумма решений также является решением. Значит, интегралы — это тоже решения:

$$\int_a^b \omega(\alpha) r^\alpha \cos(\alpha\theta) d\alpha, \quad \text{и} \quad \int_a^b \nu(\alpha) r^\alpha \sin(\alpha\theta) d\alpha.$$

Здесь ω, ν — произвольные функции, такие, что интегралы дважды непрерывно дифференцируемы.

Пример 6.10. Рассмотрим бигармоническое уравнение $\Delta\Delta u = 0$. В явном виде оно имеет вид

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0.$$

Замена переменных

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy,$$

преобразует уравнение к виду

$$u_{\xi\xi\eta\eta} = 0.$$

Решение полученного уравнения имеет вид (Гурса):

$$u(\xi, \eta) = \omega(\eta) + \xi\omega_1(\eta) + \nu(\xi) + \eta\nu_1(\xi),$$

где $\omega, \omega_1, \nu, \nu_1$ — произвольные функции.

2. Уравнения в частных производных для заданных семейств функций

Рассмотрим следующую проблему: можно ли построить уравнение в частных производных с n независимыми переменными, решением которого является заданное семейство функций, зависящее от произвольных функций $(n - 1)$ переменных?

Пусть дано: ($n = 2$)

$$u = f(x, y, \omega(g(x, y))),$$

где f и g — заданные функции, а ω — произвольная функция одного переменного. Дифференцируя, получаем:

$$u_x = f_x + f_\omega \omega' g_x,$$

$$u_y = f_y + f_\omega \omega' g_y.$$

Исключая $f_\omega \omega'$, приходим к уравнению

$$(u_x - f_x)g_y - (u_y - f_y)g_x = 0.$$

Замечание 6.1. Пришли к уравнению специального вида — линейному. Следовательно, предложенное семейство не является достаточно общим для того, чтобы прийти к произвольному уравнению первого порядка.

Пример 6.11. Рассмотрим функцию

$$u = \omega(xy),$$

где ω — произвольная функция одного переменного. Геометрически, u является поверхностью, линии уровня которой — равносторонние гиперболы. Дифференцируя, получаем

$$u_x = y\omega', \quad u_y = x\omega'.$$

Исключая ω' , приходим к уравнению

$$xu_x - yu_y = 0.$$

Пример 6.12. Рассмотрим совокупность всех поверхностей вращения:

$$u = \omega(x^2 + y^2).$$

Выполняя дифференцирование, приходим к дифференциальному уравнению

$$yu_x - xu_y = 0.$$

Пример 6.13. Линейчатые поверхности могут быть описаны в общем виде функцией

$$u = \omega\left(\frac{x}{y}\right)$$

Ей соответствует уравнение

$$xu_x + yu_y = 0.$$

Пример 6.14. *Развертывающиеся поверхности* — это огибающие однопараметрического семейства плоскостей. За исключением цилиндров с осью, перпендикулярной плоскости xOy , все такие поверхности задаются уравнением:

$$u = \alpha x + \omega(\alpha)y + \nu(\alpha),$$

где функция $\alpha = \alpha(x, y)$ такова, что $x + \omega'(\alpha)y + \nu'(\alpha) = 0$. Первые производные u имеют вид:

$$u_x = \alpha, \quad u_y = \omega(\alpha).$$

Следовательно, $u_y = \omega(u_x)$. Дифференцируя еще раз, получаем:

$$u_{yy} = \omega' u_{xy}, \quad u_{xy} = \omega' u_{xx}.$$

Окончательно,

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0.$$

3. Системы уравнений

3.1. Взаимосвязь систем с уравнениями более высокого порядка

Для обыкновенных дифференциальных уравнений теория систем эквивалентна теории одного обыкновенного дифференциального уравнения. Например, обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

заменой $y' = z$ может быть сведено к системе двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} F(x, y, z, z') &= 0, \\ y' - z &= 0. \end{aligned}$$

Обратно, система двух уравнений первого порядка относительно функций y, z ,

$$\begin{aligned} f(x, y, z, y', z') &= 0, \\ g(x, y, z, y', z') &= 0, \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

может быть сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно y , если

$$f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0.$$

При этом условии уравнения (6.3.1) можно разрешить относительно z и z' :

$$z' = \varphi(x, y, y'), \quad z = \psi(x, y, y').$$

Дифференцируя второе уравнение и исключая z' , получим

$$\varphi(x, y, y') - \psi_x - \psi_y y' - \psi_{y'} y'' = 0.$$

Для уравнений в частных производных ситуация сложнее. Система уравнений может не иметь эквивалентного уравнения более высокого порядка.

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка:

$$F(x, y; u; u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Подстановка $u_x = p$, $u_y = q$ приводит к системе

$$\begin{cases} F(x, y; u; p, q, p_x, p_y, q_y) = 0, \\ u_x - p = 0, \\ u_y - q = 0. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение второго порядка может быть приведено к системе уравнений первого порядка (весьма специального вида). Вместе с тем, обратное утверждение, в общем случае, неверно. Рассмотрим контрпример.

Система уравнений в частных производных имеет вид:

$$\begin{cases} u_x + v_y = -yu, \\ u_y + v_x = yv. \end{cases}$$

Для того, чтобы исключить v , повысим порядок системы:

$$\begin{cases} u_{xx} + v_{xy} = -yu_x, \\ u_{yy} + v_{xy} = v + yv_y. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, приходим к равенству

$$u_{yy} - u_{xx} = v + yv_y + yu_x.$$

Из первого уравнения исходной системы выразим v_y и подставим в полученное равенство. Это приводит к выражению

$$v = u_{yy} - u_{xx} + y^2u.$$

Подстановка выражения для v в каждое уравнение исходной системы дает два дифференциальных уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2u + u_{yy} - u_{xx}) + u_x + yu = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2u + u_{yy} - u_{xx}) + u_y - y(y^2u + u_{yy} - u_{xx}) = 0.$$

3.2. Исключение неизвестных из линейной системы с постоянными коэффициентами

Пусть

- u, v, w, \dots — неизвестные функции (n штук),
- x, y, z, \dots — независимые переменные,
- P_1, Q_i, \dots — формальные полиномы от символов $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots$, то есть

$$P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots\right) = \sum a_{\nu_1\nu_2\dots}^i \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\dots}}{\partial x^{\nu_1}\partial y^{\nu_2}\partial z^{\nu_3}\dots},$$

где $a_{\nu_1\nu_2\dots}^i$ — постоянные коэффициенты.

Система n уравнений относительно n неизвестных функций имеет вид:

$$\begin{cases} P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots\right)u + Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots\right)v + \dots = g_1(x, y, \dots), \\ P_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots\right)u + Q_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots\right)v + \dots = g_2(x, y, \dots), \\ \dots \\ P_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots\right)u + Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots\right)v + \dots = g_n(x, y, \dots). \end{cases}$$

Решить систему можно методом формального алгебраического исключения, используя правило Крамера:

$$Du = G^1, \quad Dv = G^2, \quad \dots,$$

где

$$D = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & \dots \\ P_2 & Q_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ P_n & Q_n & \dots \end{vmatrix}, \quad G^1 = \begin{vmatrix} g_1 & Q_1 & \dots \\ g_2 & Q_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ g_n & Q_n & \dots \end{vmatrix}, \quad \text{и т.д.}$$

Определенные, переопределенные и недоопределенные системы

Пусть имеются h независимых уравнений с t неизвестными функциями. Возможны следующие варианты:

- $h = t$ — **определенная система**;
- $h > t$ — **переопределенная система**;
- $h < t$ — **недоопределенная система**.

Пример 6.15. Система Коши – Римана относительно $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= 0, \\ u_y + v_x &= 0, \end{aligned}$$

и является определенной системой. Дифференцирование каждого уравнения по x и по y приводит к двум системам:

$$\begin{cases} u_{xx} - v_{xy} = 0, \\ u_{yy} + v_{xy} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_{xy} - v_{yy} = 0, \\ u_{xy} + v_{xx} = 0. \end{cases}$$

Каждая из полученных систем сводится к уравнению Лапласа относительно u (соответственно, v):

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = 0. \end{aligned}$$

Пример 6.16. Примером переопределенной системы является система

$$u_x = f(x, y), \quad u_y = g(x, y).$$

Условие разрешимости (интегрируемости) может быть получены на основании того, что $u_{xy} = u_{yx}$:

$$f_y = g_x.$$

Пример 6.17. Примером недоопределенной системы является якобиан двух функций:

$$u_x v_y - u_y v_x = 0.$$

Из него следует, что функции u и v являются зависимыми: $\omega(u, v) = 0$.

4. Частные методы интегрирования уравнений в частных производных

Рассмотрим методы, основанные на разделении переменных. Если $u(x, y)$ — искомая функция, то, в зависимости от уравнения, полагают либо $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, либо $u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, где φ и ψ — новые неизвестные функции. Уравнение в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций φ и ψ .

Пример 6.18. Рассмотрим уравнение

$$u_x^2 + u_y^2 = 1.$$

Предположим, что $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$. Тогда

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1,$$

или $(\varphi')^2 = 1 - (\psi')^2$. Поскольку левая часть нового уравнения зависит только от x , а правая — от y , то для выполнения равенства обе части должны быть равны константе, α^2 :

$$(\varphi')^2 = \alpha^2 \Rightarrow \varphi = \alpha x + c_1,$$

$$1 - (\psi')^2 = \alpha^2 \Rightarrow \psi = \sqrt{1 - \alpha^2}y + c_2.$$

Тогда решение исходного уравнения равно

$$u(x, y) = \alpha x + \sqrt{1 - \alpha^2}y + \beta,$$

где $\beta = c_1 + c_2$ — постоянная.

Пример 6.19. Уравнение $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ решается по аналогии с Примером 6.18. Разделение переменных имеет вид

$$u(x, y, z) = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(z).$$

Решение:

$$u = \alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}z + \gamma,$$

где α, β, γ — постоянные.

Пример 6.20. Рассмотрим уравнение

$$f(x)u_x^2 + g(y)u_y^2 = a(x) + b(y),$$

в котором f, g, a, b — заданные функции. Используем метод разделения переменных: $u = \varphi(x) + \psi(y)$. Решение имеет вид:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{a(\xi) + \alpha}{f(\xi)}} d\xi + \int_{y_0}^y \sqrt{\frac{b(\eta) - \alpha}{g(\eta)}} d\eta + \beta,$$

где α и β — постоянные.

Пример 6.21. Рассмотрим пример уравнения, в котором полезно сделать предварительное преобразование переменных:

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} - h,$$

где k и h — постоянные. Перейдем к полярным координатам:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Уравнение примет вид

$$r^2 u_r^2 + u_\theta^2 = kr - hr^2.$$

Мы свели задачу к уравнению, общий вид которого был рассмотрен в Примере 6.20. В рассматриваемом случае решение имеет вид

$$u(r, \varphi) = \int_0^r \sqrt{\frac{k}{\rho} - h - \frac{\alpha^2}{\rho^2}} d\rho + \alpha\theta + \beta.$$

Пример 6.22. Рассмотрим «уравнение теплопроводности»:

$$u_{xx} - u_y = 0.$$

Положим $u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Подстановка в уравнение дает

$$\varphi''(x)\psi(y) - \varphi(x)\psi'(y) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \frac{\psi'}{\psi} = \lambda,$$

где λ — постоянная. Удобно положить $\lambda = \pm\nu^2$. Приходим к двум семействам дифференциальных уравнений и соответствующим семействам решений¹:

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \nu^2\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = a \operatorname{sh} \nu(x - b), \\ \varphi''(x) &= -\nu^2\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = a \sin \nu(x - b), \\ \psi'(y) &= \nu^2\psi(y) \Rightarrow \psi(y) = e^{\nu^2 y}, \\ \psi'(y) &= -\nu^2\psi(y) \Rightarrow \psi(y) = e^{-\nu^2 y}.\end{aligned}$$

Собирая решения, получаем

$$\begin{aligned}u_1 &= a \operatorname{sh} \nu(x - b)e^{\nu^2 y}, \\ u_2 &= a \sin \nu(x - b)e^{-\nu^2 y},\end{aligned}$$

где распределение температуры u_2 стремится к нулю с течением времени.

Поскольку исходное уравнение линейно, то сумма решений также является решением. Выберем второе решение и проинтегрируем его по параметру ν , положив $a = 1$ и $b = \pi/2$:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 y} \cos(\nu x) d\nu.$$

Мы получили новое решение. Покажем, что интеграл можно вычислить, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 y} \cos(\nu x) d\nu = \sqrt{\frac{\pi}{y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right).$$

Для этого сделаем подстановку $\lambda = \nu\sqrt{y}$. Тогда $\nu x = \frac{x}{\sqrt{y}}\lambda$ и $d\nu =$

¹Напомним, что $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$.

$\frac{1}{\sqrt{y}}d\lambda$. Решение $u(x, y)$ можно представить в виде

$$u = \frac{1}{\sqrt{y}}J(a), \quad a = \frac{x}{\sqrt{y}}, \quad J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} \cos(a\lambda) d\lambda.$$

Таким образом, задача сводится к вычислению интеграла $J(a)$.

Дифференцирование под знаком интеграла (по a) дает

$$J'(a) = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda^2} \sin(a\lambda) d\lambda.$$

Проинтегрируем полученное выражение по частям:

$$J'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{-\lambda^2})'_{\lambda} \sin(a\lambda) d\lambda = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} (\sin(a\lambda))'_{\lambda} d\lambda = -\frac{a}{2} J(a).$$

Таким образом, мы пришли к дифференциальному уравнению

$$J'(a) = -\frac{a}{2} J(a),$$

решение которого имеет вид

$$J(a) = c \exp \frac{a^2}{4}.$$

Для определения постоянной c , вернемся к исходному выражению для J и вычислим его значение при² $a = 0$:

$$J(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\pi}.$$

²Интеграл $J(0)$ называется **интегралом Пуассона**, который может быть вычислен различными способами. Один из них принадлежит Фубини и использует переход к полярным координатам:

$$J(0)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = \pi.$$

Учитывая равенство $J(0) = \sqrt{\pi}$, получаем решение $J(a) = \sqrt{\pi} \exp \frac{a^2}{4}$. Таким образом, мы окончательно установили, что

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right).$$

Пример 6.23. Рассмотрим уравнение теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$, где a — постоянная, на интервале $]0, l[$ с граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

и начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$. Используя метод разделения переменных $u = s(t)k(x)$, рассмотренный в Примере 6.22, получаем задачу на собственные значения

$$k'' + \lambda k = 0, \quad k(0) = 0, \quad k(l) = 0,$$

для функции k . Ее нетривиальные решения имеют вид

$$k_n = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда решение u может быть представлено в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

в котором c_n — неизвестные коэффициенты (коэффициенты Фурье). Определим их из начальных условий:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Домножим обе части равенства на $\sin \frac{\pi m}{l} x$ и проинтегрируем по x от 0 до l . Справедливо равенство (ортогональность тригонометрической

системы):

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi m}{l} \xi d\xi &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos \frac{(n-m)\pi}{l} \xi - \cos \frac{(n+m)\pi}{l} \xi \right] d\xi = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{l}{2}, & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

В этой связи,

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Подставляя выражения для коэффициентов c_n в решение u , приходим к равенствам

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right] \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi$$

называется **функцией мгновенного точечного источника**.

Для обоснования того, что построенный формально ряд является решением, покажем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ производных сходятся равномерно. Рассмотрим первый ряд. Его общий член имеет оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| &= \left| -c_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x \right| < \\ &< |c_n| \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t\right). \end{aligned}$$

Будем полагать, что функция φ ограничена на интервале $]0, l[$, то есть, существует число $M > 0$, такое, что $|\varphi(x)| < M$ для всех $x \in]0, l[$. Тогда

$$|c_n| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right| < 2M.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| < 2M \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 \exp \left(- \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 t \right).$$

Аналогично получается оценка

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| < 2M \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 \exp \left(- \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 t \right).$$

В обоих случаях имеем мажорантный ряд с общим членом вида

$$\alpha_n = N n^2 \exp \left(- \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 t \right).$$

Применим к нему признак Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \exp \left(- \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (n+1)^2 a^2 t \right)}{n^2 \exp \left(- \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 n^2 a^2 t \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \exp \left(- \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 (2n+1)t \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, ряды производных сходятся и ряд для u действительно является решением исходной начально-краевой задачи.

Пример 6.24. Получим решение краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $r^2 = x^2 + y^2 < 1$; при $r = 1$ задается граничное значение $g(\theta)$. Разложим функцию g в ряд Фурье по тригонометрической системе. Коэффициенты Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Тогда решение является рядом

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n P_n(x, y) + b_n Q_n(x, y)). \end{aligned}$$

Заменяя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \varphi) \right] d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} g(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

В правой части — интеграл Пуассона.

5. Геометрическая интерпретация уравнения в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными

Пусть дано уравнение в частных производных

$$F(x, y; \omega; p, q) = 0,$$

где $p = \omega_x$, $q = \omega_y$. На F наложено условие: $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$. Тогда, если ассоциировать $u = \omega(x, y)$ с поверхностью в \mathbb{R}^3 , то p и q определяют положение касательной плоскости (Рис. 6.3).

Для заданной точки $P = (x, y; \omega)$ множество всех p и q является однопараметрическим семейством. Например, если $p^2 + q^2 = 1$, то $p = \sin t$, $q = \cos t$, где t — параметр.

Если функция F линейна по p и q (квазилинейное уравнение), то семейство возможных плоскостей образует пучок, проходящий через прямую, называемую **осью Монжа**. В общем случае, огибающая этих плоскостей — **конус Монжа**.

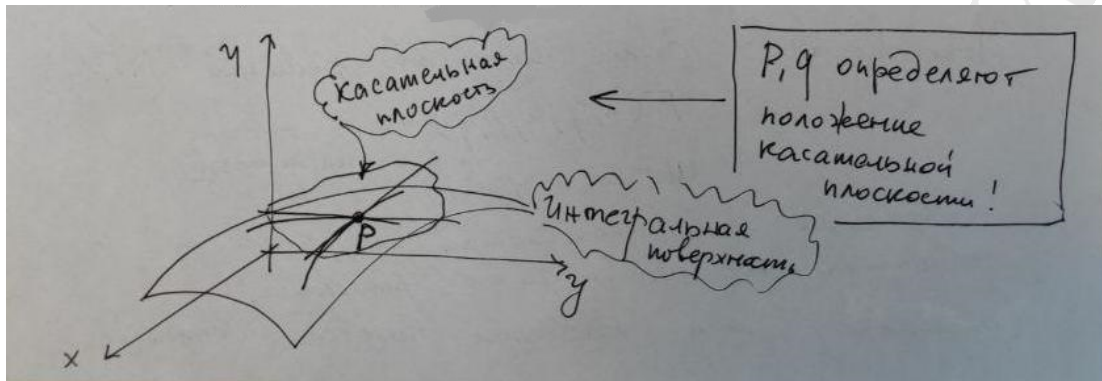


Рис. 6.3. Касательная плоскость к интегральной поверхности

В случае обыкновенного дифференциального уравнения мы имеем поле направлений, а в случае дифференциального уравнения в частных производных — поле конусов Монжа. Иллюстрация приведена на Рис. 6.4.

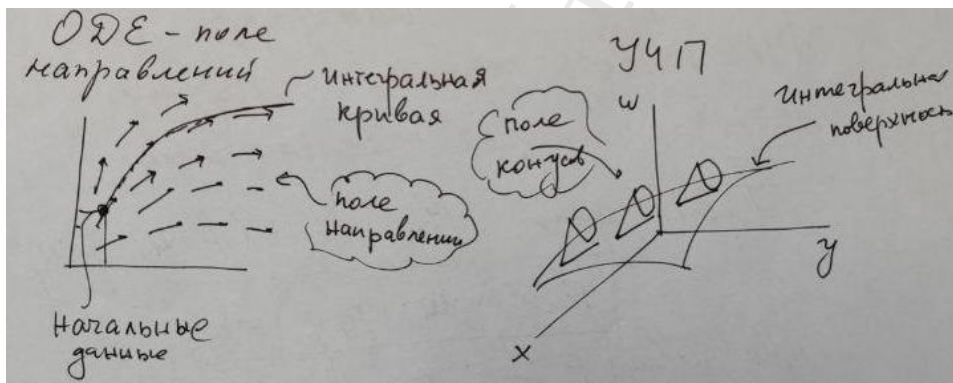


Рис. 6.4. Поле направлений vs поле конусов Монжа

Предложение 6.1. Если семейство $\omega = f(x, y; a)$ решений уравнения в частных производных $F(x, y; \omega; p, q) = 0$, зависящее от параметра a , имеет огибающую, то она — тоже решение³.

Как выразить огибающую аналитически? Если выразить a как функцию $a(x, y)$ из уравнения

$$f_a(x, y; a) = 0,$$

и подставить $a(x, y)$ в f ,

$$u = f(x, y; a(x, y)) = \psi(x, y),$$

³Поскольку она касается конуса Монжа.

то получим уравнение огибающей. Действительно,

$$\begin{aligned}\psi_x &= f_x + f_a a_x = u_x, \\ \psi_y &= f_y + f_a a_y = u_y.\end{aligned}$$

6. Полный интеграл

Пусть уравнение в частных производных

$$F(x, y; \omega; p, q) = 0,$$

имеет решение

$$u = \varphi(x, y; a, b),$$

где a и b — параметры. Это решение называется **полным интегралом**, если ранг матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_a & \varphi_{xa} & \varphi_{ya} \\ \varphi_b & \varphi_{xb} & \varphi_{yb} \end{pmatrix}$$

равен двум.

Замечание 6.2. Это означает, что φ **существенно** зависит от двух параметров и их нельзя заменить одним, $\gamma = \gamma(a, b)$.

Полный интеграл дает решение, зависящее от произвольной функции. Для этого следует связать два параметра (произвольной) функцией: $b = \omega(a)$ и построить огибающую.

Определим a :

$$\varphi_a + \varphi_b \omega'(a) = 0$$

и подставим его в решение:

$$u(x, y) = \varphi(x, y; a, \omega(a)) = \psi(x, y).$$

Пример 6.25. Пусть семейство функций соответствует множеству всех сфер единичного радиуса с центрами на плоскости xOy :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1.$$

Эти функции определяют полный интеграл уравнения в частных производных

$$u^2(1 + p^2 + q^2) = 1.$$

Если мы положим $b = \omega(a)$, то выделим из всех таких сфер однопараметрическое семейство, центры которого лежат на кривой $y = \omega(x)$. Огибающая этого семейства — поверхность, полученная исключением a из уравнений

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + (y - \omega(a))^2 + u^2 &= 1, \\ (x - a) + \omega'(y - \omega(a)) &= 0.\end{aligned}$$

Это — **трубчатая поверхность** с осью $y = \omega(x)$. Особые решения — плоскости $u = \pm 1$.

7. Преобразование Лежандра

Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}$ — координаты на плоскости, тогда уравнение плоскости в трехмерном пространстве имеет вид

$$\bar{u} - \xi\bar{x} - \eta\bar{y} + \omega = 0.$$

Здесь ξ, η, ω — «координаты» плоскости. Поскольку общее уравнение плоскости представлено выражением

$$\bar{u} - u - (\bar{x} - x)u_x - (\bar{y} - y)u_y = 0,$$

где (x, y, u) — точка касания (Рис. 6.5), то координаты плоскости представлены выражениями

$$\begin{aligned}\xi &= u_x, & \eta &= u_y, \\ \omega &= xu_x + yu_y - u.\end{aligned}$$

Рассмотрим обратную задачу: как определить координаты точки по координатам касательной плоскости?

Так как $\xi = u_x, \eta = u_y$, то

$$\omega_\xi = x + \xi x_\xi + \eta y_\xi - u_x x_\xi - u_y y_\xi = x.$$

Аналогично,

$$\omega_\eta = y.$$

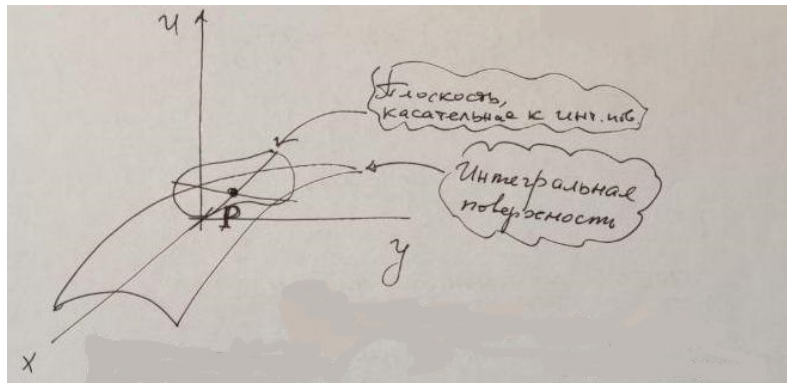


Рис. 6.5. Снова: интегральная поверхность и касательная плоскость

Таким образом, имеем преобразование

$$\begin{aligned}\omega(\xi, \eta) + u(x, y) &= x\xi + y\eta, \\ \xi &= u_x, \quad \eta = u_y, \\ x &= \omega_\xi, \quad y = \omega_\eta.\end{aligned}$$

Полученное преобразование называется **преобразованием Лежандра**.

Преобразование Лежандра невозможно, если

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0,$$

то есть, для разветвляющихся поверхностей⁴.

Для применения преобразования Лежандра к уравнению в частных производных второго порядка следует вычислить вторые производные. Дифференцируем: $\xi = u_x$, $\eta = u_y$,

$$\begin{aligned}1 &= u_{xx}\omega_{\xi\xi} + u_{xy}\omega_{\xi\eta}, \\ 0 &= u_{xy}\omega_{\xi\xi} + u_{yy}\omega_{\xi\eta}, \\ 0 &= u_{xx}\omega_{\xi\eta} + u_{xy}\omega_{\eta\eta}, \\ 1 &= u_{xy}\omega_{\xi\eta} + u_{yy}\omega_{\eta\eta},\end{aligned}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi\xi} & \omega_{\xi\eta} \\ \omega_{\xi\eta} & \omega_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

⁴Ибо для них нельзя единственным образом определить точку касания.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2 &= \frac{1}{\rho}, \\ u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 &= \rho,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \rho\omega_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= -\rho\omega_{\xi\eta}, \\ u_{yy} &= \rho\omega_{\xi\xi}.\end{aligned}$$

Уравнение

$$F(x, y; u; u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

с использованием преобразования Лежандра преобразуется в

$$\begin{aligned}G(\xi, \eta; \omega; \omega_\xi, \omega_\eta, \omega_{\xi\eta}, \omega_{\xi\xi}, \omega_{\eta\eta}) &= \\ = F(\omega_\xi, \omega_\eta; \xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta - \omega; \xi, \eta, \rho\omega_{\eta\eta}, -\rho\omega_{\xi\eta}, \rho\omega_{\xi\xi}) &= 0.\end{aligned}$$

Пример 6.26. Уравнение минимальной поверхности — это дифференциальное уравнение

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

Результат применения преобразования Лежандра:

$$(1 + \eta^2)\omega_{\eta\eta} + 2\xi\eta\omega_{\xi\eta} + (1 + \xi^2)\omega_{\xi\xi} = 0.$$

8. Уравнения в частных производных первого порядка

8.1. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных

Определение 6.4. Линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка — это уравнение вида

$$A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C_1(x, y)u = C_0(x, y),$$

где A, B, C_1, C_0 — вещественные функции двух вещественных переменных.

Определение 6.5. *Квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка* — это уравнение, имеющее вид

$$A(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y, u),$$

где A, B, C — вещественные функции.

Замечание 6.3. Любое линейное уравнение является квазилинейным, поскольку можно положить

$$C(x, y, u) = C_0(x, y) - C_1(x, y)u.$$

Начальные условия для рассматриваемых уравнений в частных производных задаются следующим образом:

$$u|_{\gamma} = u_0,$$

где γ — образ кривой на плоскости⁵ $0xy$, а u_0 — известная функция на γ .

Пример 6.27. • $u(x, 0) = x^2$ (γ — ось $0x$);

• $u(0, y) = y \sin y$ (γ — ось $0y$);

• $u(x, x^3 - x^2) = e^x$ (γ — график функции $x \mapsto y = x^3 - x^2$);

Может быть указана область определения решения, например, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < \infty, y > 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < y < \infty\}$ и т.д. Если же область определения не указана, то решение отыскивается в наибольшей из возможных.

Нашей целью является развитие техники преобразования уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Основная идея заключается в следующем. Решение $u(x, y)$ отождествляется с его графиком, который представляет собой поверхность в \mathbb{R}^3 , определяемую уравнением

$$z = u(x, y).$$

При этом:

⁵То есть, $\gamma = \chi(I)$, где $\chi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $I \subset \mathbb{R}$.

- Начальные данные вдоль γ определяют пространственную кривую Γ , которая должна лежать на поверхности (Γ — **начальная кривая** решения).
- Будем использовать уравнение в частных производных для того, чтобы построить оставшуюся часть решения, «выпуская» кривые из точек Γ (см. Рис. 6.6).

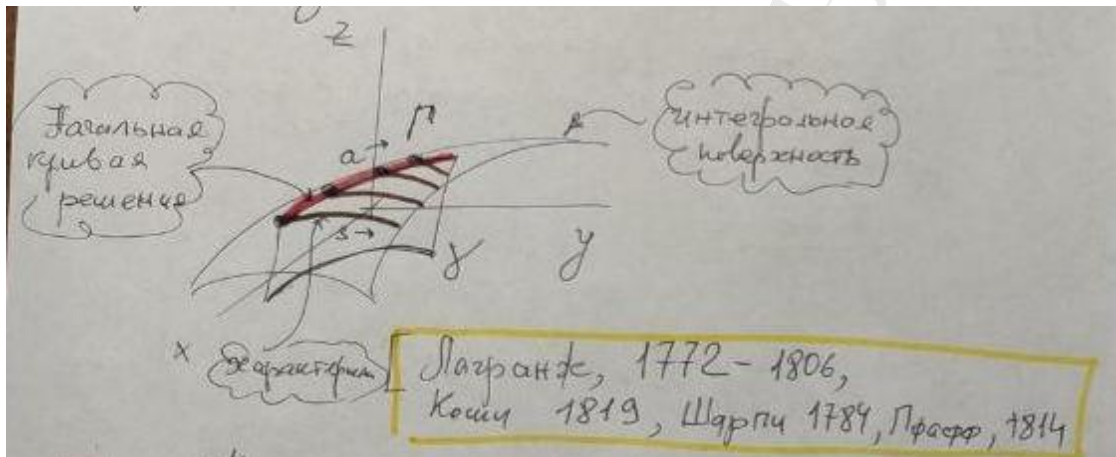


Рис. 6.6. Геометрическая идея

Перейдем к реализации геометрической идеи. Поверхность $z = u(x, y)$ может быть задана параметрически в виде $r(x, y) = (x, y, u(x, y))$. Векторы, касательные к поверхности, представлены в компонентах как

$$r_1 = \left(1, 0, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad r_2 = \left(0, 1, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

а нормаль N к поверхности имеет представление

$$N = (p, q, -1) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\right).$$

Определим векторное поле $F = (A, B, C)$. Тогда, скалярно перемножая F и N , получаем

$$F \cdot N = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} - C.$$

В этой связи, квазилинейное уравнение является эквивалентной формулировкой того, что

$$F \cdot N = 0,$$

то есть, что $F \perp N$. Это означает, что векторное поле F является касательным к $z = u(x, y)$. Таким образом,

- Поверхность решения $u(x, y)$ образуется интегральными кривыми векторного поля F .
- Для построения интегральной поверхности требуется определить интегральные кривые, проходящие через Γ .

Задача о решении квазилинейного уравнения, таким образом, эквивалентна решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений по следующему алгоритму:

(1) Параметризуем Γ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x = x_0(a), \\ y = y_0(a), \\ z = z_0(a), \end{cases}$$

где a — параметр, а x_0, y_0, z_0 — заданные функции.

(2) Для каждого значения a найдем интегральную кривую, проходящую через $\Gamma(a)$. Для этого требуется решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= A(x, y, z), & \frac{dy}{ds} &= B(x, y, z), & \frac{dz}{ds} &= C(x, y, z), \\ x(0) &= x_0(a), & y(0) &= y_0(a), & z(0) &= z_0(a), \end{aligned}$$

где $x = x(a, s)$, $y = y(a, s)$, $z = z(a, s)$.

(3) Разрешить эту систему относительно параметров a, s :

$$a = \Lambda(x, y), \quad s = S(x, y).$$

(4) Подставить a, s в решение:

$$u(x, y) = z(\Lambda(x, y), S(x, y)).$$

Рассмотрим примеры на применение алгоритма.

Пример 6.28. Квазилинейное уравнение и начальное условие имеют вид

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = u^2, \quad u(x, y) = x^3.$$

Коэффициенты этого уравнения, соответственно, равны

$$A(x, y, z) = x, \quad B(x, y, z) = -2y, \quad C(x, y, z) = z^2,$$

а кривая Γ определена формулой:

$$\Gamma : \begin{cases} x = a, \\ y = a, \\ z = a^3. \end{cases}$$

Приходим к следующей задаче Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= x, & \frac{dy}{ds} &= -2y, & \frac{dz}{ds} &= z^2, \\ x(0) &= a, & y(0) &= a, & z(0) &= a^3. \end{aligned}$$

Каждое уравнение системы — уравнение с разделяющимися переменными. Решения первых двух уравнений, соответственно, имеют вид

$$x(s) = ae^s, \quad y(s) = ae^{-2s}.$$

Для решения третьего уравнения, разделим переменные:

$$\frac{dz}{z^2} = ds,$$

что после интегрирования дает $-\frac{1}{z} = s + c$, где c — постоянная интегрирования. Выразая z , получаем $z = -\frac{1}{s + c}$. Используя начальное условие, запишем

$$z(0) = -\frac{1}{c} = a^3,$$

что дает значение $c = -\frac{1}{a^3}$. В этой связи,

$$z = \frac{a^3}{1 - sa^3}.$$

Следуя алгоритму, выразим a и s , используя решения первых двух уравнений. Из $x = ae^s$ мы получаем, что $\frac{x}{a} = e^s$. Тогда

$$y = ae^{-2s} = a(e^s)^{-2} = a\left(\frac{x}{a}\right)^{-2} = \frac{a^3}{x^2},$$

откуда

$$a = x^{2/3}y^{1/3}.$$

Возвращаясь к решению первого уравнения и используя установленное равенство для a , получим, что

$$e^s = \frac{x}{a} = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/3}.$$

Следовательно,

$$s = \frac{1}{3} \ln \frac{x}{y}.$$

Теперь мы можем записать решение исходного квазилинейного уравнения:

$$u(x, y) = \frac{x^2 y}{1 - \frac{1}{3} x^2 y \ln \frac{x}{y}}.$$

Замечание 6.4. Пример 6.28 показывает, что возможны две основных сложности:

- Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
- Выражение параметров в явном виде.

Пример 6.29. Рассмотрим следующую краевую задачу для линейного дифференциального уравнения в частных производных:

$$(x - y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad u(x, 0) = f(x).$$

В этом случае коэффициенты уравнения имеют вид

$$A = x - y, \quad B = 1, \quad C = x,$$

а кривая Γ имеет следующее параметрическое представление:

$$\Gamma : \begin{cases} x = a, \\ y = 0, \\ z = f(a). \end{cases}$$

Задача Коши в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= x - y, & \frac{dy}{ds} &= 1, & \frac{dz}{ds} &= x, \\ x(0) &= a, & y(0) &= 0, & z(0) &= f(a). \end{aligned}$$

Интегрируя второе уравнение системы, получаем, что $y(s) = s$. Подставляя полученное решение в первое уравнение системы, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{ds} - x = -s.$$

Интегрирующий множитель для полученного уравнения равен e^{-s} :

$$e^{-s} \left(\frac{dx}{ds} - x \right) = \frac{d}{ds} (xe^{-s}) - se^{-s}.$$

Интегрируя обе части уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} xe^{-s} &= - \int se^{-s} ds = \int sde^{-s} = \\ &= se^{-s} - \int e^{-s} ds = (s+1)e^{-s} + c, \end{aligned}$$

где c — постоянная интегрирования. Таким образом,

$$xe^{-s} = (s+1)e^{-s} + c,$$

откуда $x = s+1+ce^s$. Используя начальное условие, согласно которому $x(0) = 1+c = a$, получаем, что $c = a-1$. Следовательно,

$$x = s+1+(a-1)e^s.$$

Теперь решим третье уравнение. Используя уже полученные решения, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dz}{ds} = 1 + s + (a - 1)e^s, \quad z(0) = f(a).$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$z = s + \frac{s^2}{2} + (a - 1)e^s + c',$$

где c' — постоянная интегрирования. Используя начальное условие, получаем

$$z(0) = a - 1 + c' = f(a),$$

что дает $c' = f(a) - (a - 1)$. Таким образом,

$$z = s + \frac{s^2}{2} + (a - 1)(e^s - 1) + f(a).$$

Переходя к следующей части алгоритма, выразим s и a из решений первых двух уравнений. Для s имеем соотношение $s = y$, а для a :

$$x = y + 1 + (a - 1)e^y,$$

что дает

$$a = 1 + (x - y - 1)e^{-y}.$$

Таким образом, решение краевой задачи для исходного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид:

$$u(x, y) = y + \frac{y^2}{2} + (x - y - 1)e^{-y}(e^y - 1) + f(1 + (x - y - 1)e^{-y}).$$

Замечание 6.5. • Если уравнение в частных производных линейно, то характеристическое обыкновенное дифференциальное уравнение для x и y никогда не содержит z .

- Характеристическое обыкновенное дифференциальное уравнение для z всегда линейно.

Пример 6.30. Рассмотрим краевую задачу для квазилинейного уравнения:

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = e^u, \quad u(0, y) = y^2 - 1.$$

Сопоставляя с общим видом уравнения, получаем

$$A = y, \quad B = -x, \quad C = e^z.$$

Начальная кривая Γ имеет представление

$$\Gamma : \begin{cases} x = 0, \\ y = a, \\ z = a^2 - 1. \end{cases}$$

Задача Коши для характеристик имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= y, & \frac{\partial y}{\partial s} &= -x, & \frac{\partial z}{\partial s} &= e^z, \\ x(0) &= 0, & y(0) &= a, & z(0) &= a^2 - 1. \end{aligned}$$

Первые два уравнения связаны между собой. Чтобы их «развязать», продифференцируем обе части первого уравнения по s :

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{dy}{ds}.$$

Учитывая второе уравнение $\frac{\partial y}{\partial s} = -x$, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + x = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$r^2 + 1 = 0,$$

откуда $r = \pm i$. В этой связи, общее решение может быть представлено в форме

$$x(s) = c_1 \cos s + c_2 \sin s.$$

Подставляя полученное решение в первое уравнение системы, получаем

$$y(s) = -c_1 \sin s + c_2 \cos s.$$

Начальные условия $x(0) = 0$ и $y(0) = a$ дают, что $c_1 = 0$, а $c_2 = a$. В этой связи,

$$x(s) = a \sin s, \quad y(s) = a \cos s.$$

Следуя алгоритму, получим соотношения для a и s :

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{x}{y} = \operatorname{tg} s.$$

Получим решение третьего уравнения. Разделяя переменные, приходим к уравнению

$$\frac{dz}{e^z} = ds.$$

Интегрирование обеих частей уравнения дает

$$-e^{-z} = s + c,$$

где c — постоянная интегрирования. Отсюда получаем

$$z = -\ln(-s - c).$$

Используя начальные данные, определяем значение c :

$$z(0) = -\ln(-c) = a^2 - 1,$$

что дает $c = -e^{1-a^2}$. Таким образом, решение задачи Коши для z имеет вид

$$z = -\ln(e^{1-a^2} - s).$$

Используя соотношения для a и s , получаем решение квазилинейного уравнения:

$$u = -\ln\left(e^{1-x^2-y^2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right).$$

Замечание 6.6. Можно рассматривать решение первых двух характеристических уравнений как замену переменных

$$x = X(a, s), \quad y = Y(a, s).$$

Тогда Пример 6.30 соответствует переходу к полярной системе координат.

Пример 6.31. Рассмотрим следующую краевую задачу для квазилинейного уравнения:

$$(u + 2y) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, 1) = \frac{1}{x}.$$

Коэффициенты уравнения равны, соответственно,

$$A = u + 2y, \quad B = u, \quad C = 0,$$

а начальная кривая имеет представление

$$\Gamma : \begin{cases} x = a, \\ y = 1, \\ z = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Приходим к следующей задаче Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= z + 2y, & \frac{dy}{ds} &= z, & \frac{dz}{ds} &= 0, \\ x(0) &= a, & y(0) &= 1, & z(0) &= \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Сначала решим уравнение относительно z . Поскольку $\frac{dz}{ds} = 0$, то $z = \text{const}$. Из начального условия тогда следует, что

$$z = \frac{1}{a}.$$

Теперь решим оставшиеся уравнения. Уравнение $\frac{dy}{ds} = z = \frac{1}{a}$, вместе с начальным условием $y(0) = 1$, дает

$$y = \frac{s}{a} + 1.$$

Наконец, уравнение $\frac{dx}{ds} = z + 2y$, с учетом полученных соотношений для y и z , сводится к

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{a} + 2\frac{s}{a} + 2.$$

Выполняя интегрирование и учитывая начальное условие $x(0) = a$, приходим к соотношению

$$x = \frac{s}{a} + \frac{s^2}{a} + 2s + a.$$

Выразим s и a через x и y . Из равенства $y = \frac{s}{a} + 1$ следует, что

$$s = a(y - 1).$$

Подставляя полученное равенство в выражение для x , получаем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{s}{a} + \frac{s^2}{a} + 2s + a = \\ &= \frac{a(y-1)}{a} + \frac{a^2(y-1)^2}{a} + 2a(y-1) + a = ay^2 + y - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a = \frac{x + 1 - y}{y^2},$$

и мы получаем решение исходной задачи:

$$u = \frac{y^2}{x + 1 - y}.$$

8.2. Общий нелинейный случай уравнений в частных производных первого порядка

Общий вид уравнения в частных производных первого порядка:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Далее мы будем использовать символы p и q для обозначения частных производных u_x и u_y . В дальнейшем мы будем предполагать, что всюду выполняется **условие невырожденности**:

$$F_p^2 + F_q^2 \neq 0. \quad (6.8.1)$$

Замечание 6.7. Что будет, если $F_p^2 + F_q^2 = 0$? Из этого равенства получим, что $F_p^2 = -F_q^2$. Но это возможно лишь при $F_p = F_q = 0$. Таким образом, исчезает зависимость от p и q и уравнение становится нулевого порядка.

Если условие (6.8.1) выполнено, то в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , где $z_0 = u(x_0, y_0)$, уравнение $F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0$ можно разрешить относительно p по теореме о неявной функции: $q = q(p)$.

Пример 6.32. В квазилинейном случае, если $au_x + bu_y = c$, то $ap + bq = c$ и $q = \frac{c - ap}{b}$.

Уравнение касательной плоскости к графику $z = u(x, y)$, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и ортогональной вектору $(p, q, -1)$ имеет вид:

$$(p, q, -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

или

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(p)(y - y_0).$$

Это — касательная плоскость к возможным решениям. Огибающая всех таких плоскостей называется **конусом Монжа** (см. Рис. 6.7).

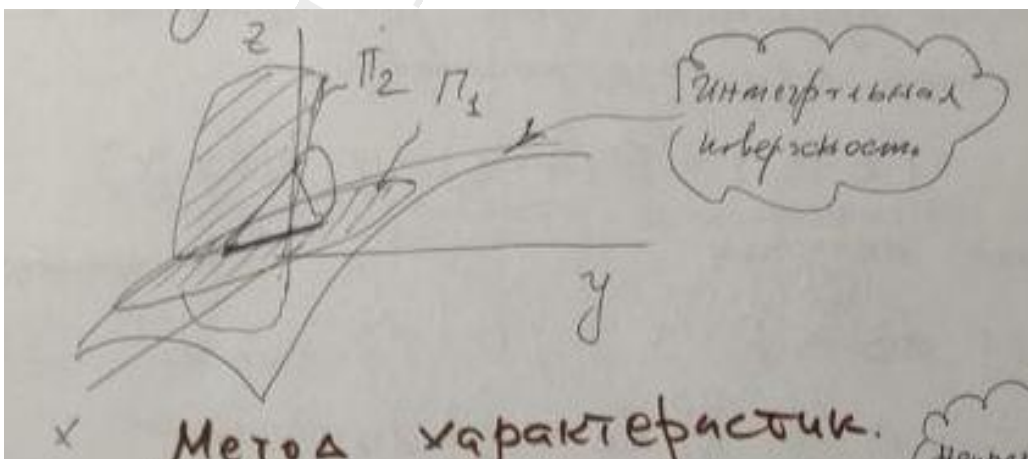


Рис. 6.7. Конус Монжа

Метод характеристик

Пусть S_a — однопараметрическое непрерывное семейство поверхностей в \mathbb{R}^3 , задаваемое функцией

$$z = \omega(x, y, a).$$

Здесь a — действительный параметр. Для двух близких элементов семейства:

$$\left. \begin{array}{l} \omega(x, y, a) = z, \\ \omega(x, y, a + \Delta) = z \end{array} \right\} \Rightarrow \omega(x, y, a + \Delta) - \omega(x, y, a) = 0.$$

Огибающая γ_a определяется системой уравнений

$$\begin{cases} z = \omega(x, y, a), \\ 0 = \partial_a \omega(x, y, a) \end{cases}$$

Как найти огибающую для плоскостей (конус Монжа) \mathcal{E} ?

(1) Нужно решить уравнение $\partial_a \omega(x, y, a) = 0$ относительно a :

$$a = f(x, y).$$

(2) Подставить результат в ω :

$$z = \omega(x, y, f(x, y)).$$

Замечание 6.8. Вдоль γ_a параметр $a = f(x, y) = \text{const}$ и

$$\begin{aligned} dz &= \omega_x dx + \omega_y dy, \\ 0 &= \omega_{ax} dx + \omega_{ay} dy. \end{aligned}$$

Если применить эти результаты к семейству плоскостей

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(p)(y - y_0),$$

где p — параметр, то получим

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q(p) dy, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial p} dx + \frac{\partial q}{\partial p} dy, \\ &= dx + \frac{dq}{dp} dy. \end{aligned} \tag{6.8.2}$$

Если продифференцировать

$$F(x, y, u, p, q) = 0,$$

по p , то придем к равенству

$$F_p + F_q \frac{dq}{dp} = 0. \quad (6.8.3)$$

Из (6.8.2) и (6.8.3) вытекает, что

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q}.$$

Тогда, в параметрической форме,

$$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q.$$

Получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящую из трех уравнений относительно пяти функций. **Она недоопределена!** Нужны еще два уравнения относительно p и q .

Продифференцировав по x уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0,$$

получим

$$F_x + F_z p + F_p p_x + F_q q_x = 0.$$

В полученном уравнении:

$$q_x = u_{yx} = u_{xy} = p_y.$$

Поскольку

$$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q,$$

то

$$F_x + F_z p + \underbrace{\frac{dx}{dt} p_x + \frac{dy}{dt} p_y}_{\frac{dp}{dt}} = 0.$$

Окончательно, мы приходим к следующему уравнению:

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - F_z p.$$

Аналогичным образом получается уравнение

$$\frac{dq}{dt} = -F_y - F_z q.$$

Получили полную систему из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q, \quad \frac{dp}{dt} = -F_x - F_z p, \quad \frac{dq}{dt} = -F_y - F_z q.$$

Ее решение называется **характеристической полосой** (см. Рис. 6.8).

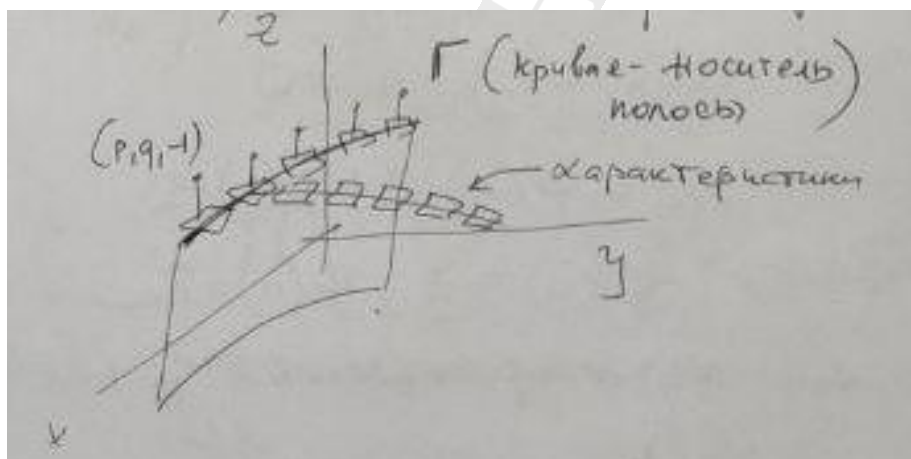


Рис. 6.8. Характеристическая полоса

Пример 6.33. Рассмотрим краевую задачу для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$u_x u_y = u, \quad u(0, y) = y^2.$$

Здесь: $F = pq - z = 0$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 0, \\ y = a, \\ z = a^2. \end{cases}$$

Требуется задать направления на касательной полосе!

$$\Gamma : (f(a), g(a), h(a), \Phi(a), \Psi(a)).$$

Касательная полоса должна изменяться непрерывно:

$$\frac{dz}{da} = p \frac{dx}{da} + q \frac{dy}{da}.$$

Следовательно,

$$h'(a) = \Phi(a)f'(a) + \Psi(a)g'(a).$$

В примере: $\Phi(a)\Psi(a) - a^2 = 0$, откуда

$$2a = \Phi(a)0 + \Psi(a)1.$$

В этой связи, $\Phi(a) = \frac{a}{2}$, $\Psi(a) = 2a$.

Система характеристических уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} = q, \quad \frac{dy}{ds} = p, \quad \frac{dz}{ds} = pq + qp = 2pq = 2z, \\ \frac{dp}{ds} = p, \quad \frac{dq}{ds} = q. \end{aligned}$$

Используя начальные данные, получаем:

$$\begin{aligned} z(a, s) = c_1(a)e^{2s} &\Rightarrow z(a, s) = a^2e^{2s}, \\ p(a, s) = c_2(a)e^s &\Rightarrow p(a, s) = \frac{a}{2}e^s, \\ q(a, s) = c_3(a)e^s &\Rightarrow q(a, s) = 2ae^s. \end{aligned}$$

Из уравнения $\frac{dx}{ds} = 2ae^s$ получаем $x(a, s) = 2ae^s + c_4(a)$. Условие $x|_{s=0} = 0$ приводит к равенству

$$x(a, s) = 2ae^s - 2a.$$

Уравнение $\frac{dy}{ds} = \frac{a}{2}e^s$ имеет общее решение $y(a, s) = \frac{a}{2}e^s + c_5(a)$. Начальное условие $y|_{s=0} = s$ дает

$$y(a, s) = \frac{a}{2}(e^s + 1).$$

Поскольку

$$\frac{x}{2} + 2y = 2ae^s,$$

то $\left(\frac{x}{4} + y\right)^2 = a^2 e^{2s} = z$. Окончательно, мы получаем следующее решение исходной краевой задачи:

$$u(x, y) = \left(\frac{x}{4} + y\right)^2.$$

Замечание 6.9. Функции Φ и Ψ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} F(f(a), g(a), h(a), \Phi(a), \Psi(a)) &= 0, \\ h'(a) &= \Phi(a)f'(a) + \Psi(a)g'(a), \end{aligned}$$

могут быть не единственными, или могут не существовать. Это означает, что начальная задача может не иметь решений, либо их может быть много. Вместе с тем, если Φ и Ψ зафиксированы, то интегральная поверхность всегда существует и определена однозначно — это следствие теоремы существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 6.34. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$u = u_x^2 - 3u_y^2, \quad u(x, 0) = x^2.$$

Здесь $F = p^2 - 3q^2 - u = 0$. Характеристическая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 2p, & \frac{dy}{ds} &= -6q, & \frac{dz}{ds} &= 2p^2 - 6q^2 = 2z, \\ & & \frac{dp}{ds} &= p, & \frac{dq}{ds} &= q. \end{aligned}$$

Параметризация начальной кривой имеет вид:

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(a) = a, \\ y = g(a) = 0, \\ z = h(a) = a^2. \end{cases}$$

Дополнительные условия для полосы представлены равенствами

$$\begin{cases} \Phi^2 - 3\Psi^2 = a^2, \\ \Phi = 2a, \end{cases}$$

что влечет $\Phi = 2a$ и $\Psi = \pm a$.

Если выбрать $\Psi(a) = a$, то

$$\begin{aligned} p(a, s) &= 2ae^s, & q(a, s) &= ae^s, \\ x(a, s) &= 4a(e^s - 1) + a, & y(a, s) &= -6a(e^s - 1), & z(a, s) &= a^2e^{2s}. \end{aligned}$$

Тогда

$$u(x, y) = \left(x + \frac{2}{y}\right)^2.$$

Если же выбрано $\Psi(a) = -a$, то аналогичными рассуждениями получается, что

$$u(x, y) = \left(x - \frac{2}{y}\right)^2.$$

9. Теорема Коши – Ковалевской

9.1. Аналитические функции

Напомним, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется **гладкой в точке** x_0 , если она дифференцируема в ней сколь угодно число раз. В этом случае пишут $f \in C^\infty(x_0)$. Если же f является гладкой во всех точках интервала $]a, b[$, то говорят, что f гладкая на $]a, b[$ и пишут $f \in C^\infty(]a, b[; \mathbb{R})$. Для таких функций может быть формально построен ряд Тейлора.

Определение 6.6. *Рядом Тейлора функции $f \in C^\infty(]a, b[; \mathbb{R})$ называется формальное выражение*

$$\tilde{f}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x_0 \in]a, b[. \quad (6.9.1)$$

«Формальное построение» оставляет открытыми два вопроса:

- 1) Сходится ли ряд (6.9.1)? И если сходится, то какова его область сходимости?

2) Если ряд (6.9.1) сходится в некоторой области, то сходится ли он к исходной функции f ?

Для ответа на первый вопрос достаточно осуществить оценку радиуса сходимости известными методами анализа. Второй вопрос более деликатный. Как показал Коши, существуют функции, дифференцируемые сколь угодно число раз в точке x_0 , такие, что их формально построенные ряды Тейлора не сходятся к значениям исходной функции в окрестности точки x_0 .

Пример 6.35. Пусть функция f задана равенством (Рис. 6.9)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда f является гладкой; ее производные представлены равенством

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{P_n(x)}{x^{2n}} f(x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

где $P_n(x)$ — многочлены степени $(n-1)$, определяемые следующим рекуррентным соотношением:

$$P_1(x) = 1, \quad P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - (2nx - 1)P_n(x).$$

Например, для $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-1/x}, \\ f''(x) &= \frac{1}{x^4} e^{-1/x} (1 - 2x), \\ f'''(x) &= \frac{1}{x^6} e^{-1/x} (6x^2 - 6x + 1), \\ &\dots \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = 0$ для $n \geq 0$, то

$$\forall n \geq 0 : f^{(n)}(0) = 0.$$

Следовательно, в окрестности 0 формальный ряд Тейлора (6.9.1) функции f определяет функцию, тождественно равную нулю: $\tilde{f}(x) \equiv 0$, поэтому

$$\tilde{f}(x) \neq f(x) \text{ в окрестности } 0.$$

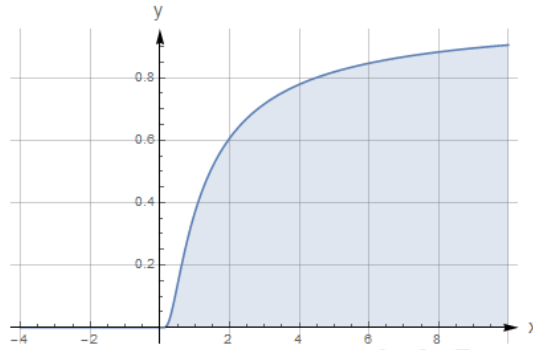


Рис. 6.9. Контрпример Коши: гладкая, но не аналитическая функция

Определим формальный ряд Тейлора для функций нескольких действительных переменных. Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет все частные производные в окрестности точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$.

Определение 6.7. *Рядом Тейлора функции f называется формальное выражение*

$$\tilde{f}(x) := \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} C_{n_1, n_2, \dots, n_m}^{f; x_0} (x^1 - x_0^1)^{n_1} (x^2 - x_0^2)^{n_2} \dots (x^m - x_0^m)^{n_m},$$

где $x = (x^1, \dots, x^m)$

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_m}^{f; x_0} = \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_m!} \frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_m}}{(\partial x^1)^{n_1} (\partial x^2)^{n_2} \dots (\partial x^m)^{n_m}} f(x_0).$$

Замечание 6.10. *Если использовать оператор ∇ для \mathbb{R}^m , то это выражение может быть записано в более лаконичном виде:*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \nabla^{\otimes n} f(x_0) \cdot^{(n)} (x - x_0)^{\otimes n},$$

или, раскрыв сумму,

$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} \nabla \otimes \nabla f(x_0) : (x - x_0) \otimes (x - x_0) + \dots$$

Определение 6.8. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — открытое подмножество \mathbb{R}^m . Функции из $C^\infty(D; \mathbb{R})$, такие, что их ряды Тейлора сходятся, причем, к самим этим функциям, называются **аналитическими**. Класс аналитических функций будем обозначать через $C^\omega(D; \mathbb{R})$. Пример Коши показывает, что

$$C^\omega(D; \mathbb{R}) \not\subset C^\infty(D; \mathbb{R}).$$

Обобщение понятия аналитичности на функции комплексного переменного приводит к определению функции, аналитичной в комплексном смысле, или **голоморфной** функции. Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция комплексного переменного:

$$f : D \ni x + iy \mapsto u + iv \in \mathbb{C}.$$

Если f удовлетворяет условиям Коши–Римана (предполагается, что производные существуют)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

в некоторой области D , то в точках $z_0 = x_0 + iy_0$ этой области может быть построен формальный ряд Тейлора

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

и этот ряд в окрестности D точки z_0 сходится к $f(z)$. В дальнейшем удобно будет считать эту окрестность диском, радиус которого будем называть **радиусом сходимости 6.10**.

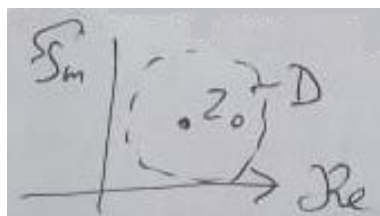


Рис. 6.10. Окрестность точки z_0

9.2. Метод мажорант Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Построение формального решения

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w), \quad (6.9.2)$$

в котором $z \in \mathbb{C}$ — независимая комплексная переменная, $w = w(z)$ — искомая функция $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\cdot, \cdot)$ — заданная комплекснозначная функция двух комплексных переменных $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Полагаем, что f — аналитическая функция в окрестности точки (z_0, w_0) . Требуется выяснить, существует ли аналитическое решение уравнения (6.9.2) в этой окрестности.

Прежде чем перейти к исследованию этого вопроса, упростим постановку задачи, перейдя к новым переменным $\hat{z} = z - z_0$, $\hat{w} = w - w_0$. В новых переменных решение отыскивается в окрестности нуля (то есть, точки $(0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$). Поскольку далее будем использовать только переменные \hat{z} , \hat{w} , то крышки в их обозначениях будем опускать.

Уточним условия для $f(z, w)$. Радиус области аналитичности относительно первого аргумента обозначим через a , а второго — через b . Кроме того, будем полагать, что функция f непрерывна на границах этих областей (окружности C и Γ на Рис. 6.11). Тогда существует такая константа $M > 0$, что

$$|f(z, w)| \leq M \text{ при } |z| \leq a, |w| \leq b.$$

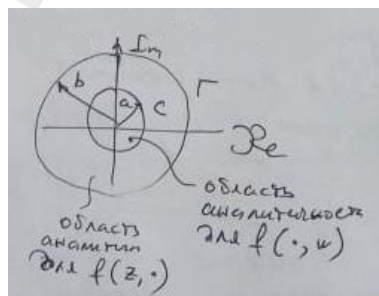


Рис. 6.11. Области аналитичности f

Идея, лежащая в основе метода построения решения уравнения (6.9.2) (метод пределов), состоит в следующем. Дифференцируя

уравнение (6.9.2), найдем последовательно производные

$$\frac{d^2 w}{dz^2}, \quad \frac{d^3 w}{dz^3}, \quad \dots$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dz}, \\ \frac{d^3 w}{dz^3} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w} \frac{dw}{dz} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{d^2 w}{dz^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Путем подстановок придем к выражениям, содержащим только значения функции f и ее производных:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= f, \\ \frac{d^2 w}{dz^2} &= \frac{\partial f}{\partial w} f + \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{d^3 w}{dz^3} &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + f \left(\left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w} + f \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \right), \\ &\dots \end{aligned}$$

Поскольку функция f задана, то все значения производных искомой функции w в точке $z = 0$, с учетом того, что $w(0) = 0$, могут быть найдены по этим формулам. Таким образом, может быть формально построен ряд Тейлора

$$\tilde{w} = \frac{dw}{dz} \Big|_{z=0} z + \frac{d^2 w}{dz^2} \Big|_{z=0} \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{d^n w}{dz^n} \Big|_{z=0} \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (6.9.3)$$

представляющий искомое решение. Для конкретных примеров сходимость ряда (6.9.3) может быть проверена непосредственно.

Пример 6.36. Рассмотрим задачу Коши

$$y' = yx + 1, \quad y(0) = 0.$$

Решение этой задачи может быть получено аналитически:

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (6.9.4)$$

где erf — функция ошибок. Применяя алгоритм, описанный выше, приходим к формальному ряду Тейлора, совпадающему с разложением (6.9.4). На Рис. 6.12 приведены графики аналитического решения и частичной суммы решения, полученного методом пределов.

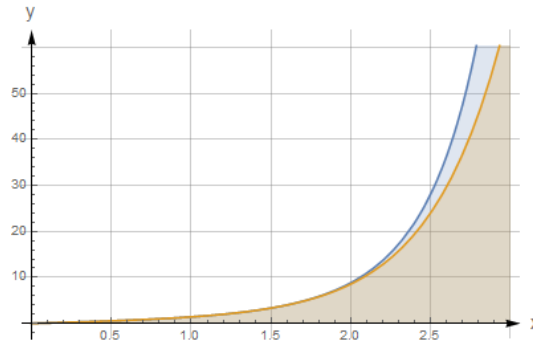


Рис. 6.12. Сравнение решения (6.9.4) (синяя кривая) с решением, полученным методом пределов (коричневая кривая)

Пример 6.37. Решение краевой задачи

$$y' = \sin yx + 1, \quad y(0) = 0, \quad (6.9.5)$$

не удается получить в аналитической форме. Вместе с тем, алгоритм, описанный выше, дает формальный ряд

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{50} - \frac{19x^9}{945} + \dots \quad (6.9.6)$$

На Рис. 6.13 показаны кривые, определяемые решением (6.9.5), полученным численно, и частичной суммой ряда (6.9.6).

Проверка в каждом конкретном случае, кроме того, что она является утомительной процедурой, не позволяет с общих позиций ответить на вопрос о существовании решения (6.9.2). Однако, поскольку для формального решения дан общий алгоритм, вопрос сводится к обоснованию сходимости формального ряда (6.9.3).

Метод мажорант

Для выяснения вопроса о сходимости ряда (6.9.3) и оценке радиуса его сходимости воспользуемся методом мажорант, предложенным Коши.

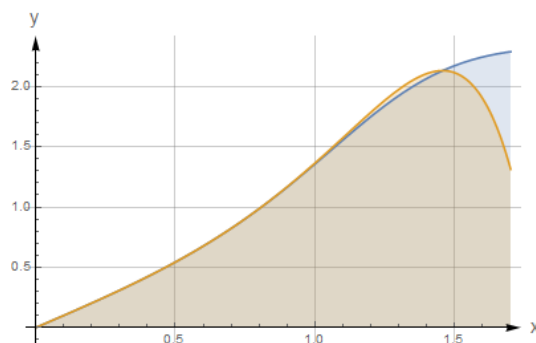


Рис. 6.13. Сравнение численного решения задачи (6.9.5) (синяя кривая) с решением, полученным методом пределов (коричневая кривая)

Идея метода заключается в построении ряда, мажорирующего (6.9.3), который был бы решением уравнения типа (6.9.2), но с функцией в правой части, допускающей построение точного аналитического решения.

Поскольку функция f аналитична, то она может быть представлена рядом Тейлора

$$f(z, w) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} A_{p,q} z^p w^q,$$

где

$$A_{p,q} = \frac{1}{p!q!} \left. \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial w^q} f \right|_{z=0, w=0}.$$

Но, поскольку при $|z| < a$ и $|w| < b$ справедливо неравенство $|f| < M$, то

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial w^q} f \right|_{z=0, w=0} < \frac{p!q!}{a^p b^q} M.$$

Следовательно,

$$|A_{p,q}| < \frac{M}{a^p b^q}.$$

Для построения функции, мажорирующей f , воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{q^n} = 1 + \frac{x}{q} + \frac{x^2}{q^2} + \frac{x^3}{q^3} + \dots, \quad (6.9.7)$$

и определим новую функцию $F(z, w)$ следующим образом:

$$F(z, w) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{M}{a^p b^q} z^p w^q. \quad (6.9.8)$$

При этом,

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial w^q} f \right|_{z=0, w=0} \leq \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial w^q} F \right|_{z=0, w=0}.$$

Кроме того, в силу (6.9.7), ряд (6.9.8) можно суммировать в конечном виде:

$$F(z, w) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right) \left(1 - \frac{w}{b}\right)}. \quad (6.9.9)$$

Если

$$W(z) = \frac{dW}{dz} \Big|_{z=0} z + \frac{d^2W}{dz^2} \Big|_{z=0} \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{d^n W}{dz^n} \Big|_{z=0} \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

является решением уравнения

$$\frac{dW}{dz} = F(z, W),$$

равным нулю при $z = 0$, то

$$\left| \frac{d^n w}{dz^n} \right|_{z=0} \leq \left| \frac{d^n W}{dz^n} \right|_{z=0},$$

поскольку последовательность значений $\left(\frac{d^n W}{dz^n} \Big|_{z=0}\right)$ образуется из коэффициентов $\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial w^q} F \Big|_{z=0, w=0}$ согласно тому же алгоритму, что использо-

вался для получения $\left(\frac{d^n w}{dz^n} \Big|_{z=0}\right)$ из коэффициентов $\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial w^q} f \Big|_{z=0, w=0}$.

Таким образом, ряд W мажорирует ряд w . Но для W может быть построено точное решение. Действительно, уравнение

$$\frac{dW}{dz} = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right) \left(1 - \frac{W}{b}\right)},$$

допускает разделение переменных

$$\left(1 - \frac{W}{b}\right) dW = \left(1 - \frac{z}{a}\right) dz.$$

Следовательно,

$$W - \frac{W^2}{2b} = M \int \frac{dz}{1 - \frac{z}{a}} = -Ma \int \frac{d\left(1 - \frac{z}{a}\right)}{1 - \frac{z}{a}} = -Ma \ln\left(1 - \frac{z}{a}\right) + C,$$

причем постоянную интегрирования C можно принять равной нулю, поскольку разложение ведется в окрестности нуля. Решая полученное таким образом квадратное уравнение

$$W^2 - 2bW + 2bMa \ln\left(1 - \frac{z}{a}\right) = 0,$$

и выбирая главное значение радикала, которое при $z = 0$ становится равным 1, приходим к выражению

$$W = b - b\sqrt{1 + 2\frac{a}{b}M \ln\left(1 - \frac{z}{a}\right)}.$$

Радиус сходимости $\rho > |z|$ определяется поэтому из уравнения

$$1 + 2\frac{a}{b}M \ln\left(1 - \frac{z}{a}\right) = 0,$$

то есть,

$$\rho = a\left(1 - \exp\left(-\frac{b}{2Ma}\right)\right).$$

Таким образом, формально построенный ряд абсолютно и равномерно сходится внутри круга $|z| = \rho$. Из единственности разложения аналитической функции следует единственность формального решения, которое теперь получает право называться истинным.

9.3. Теорема Коши – Ковалевской

Перейдем теперь к обсуждению уравнений с частными производными.

Нормальные системы уравнений

Системы уравнений с частными производными за счет замены зависимых и независимых переменных могут быть преобразованы к различным формам. В настоящем разделе нам понадобится нормальная форма

относительно некоторой выделенной независимой переменной, которую обозначим символом t .

Определение 6.9. Система уравнений с частными производными относительно p неизвестных функций, зависящих от $(n+1)$ переменных, **нормальна относительно t** , если ее можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial^{r_1} u_1}{\partial t^{r_1}} = F_1\left(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; \dots, \frac{\partial u_k}{\partial x_s}, \dots\right), \\ \frac{\partial^{r_2} u_2}{\partial t^{r_2}} = F_2\left(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; \dots, \frac{\partial u_k}{\partial x_s}, \dots\right), \\ \dots \\ \frac{\partial^{r_p} u_p}{\partial t^{r_p}} = F_p\left(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; \dots, \frac{\partial u_k}{\partial x_s}, \dots\right), \end{cases}$$

причем в правые части уравнений системы входят частные производные по выделенной переменной t порядка не старше $r_i - 1$, где i — номер уравнения, а по остальным переменным — не старше r_i .

Если существует такая замена переменных, в результате которой система преобразуется к нормальной форме относительно некоторой переменной, то говорят, что она **нормальна** относительно этой переменной.

В частности, нормальная относительно переменной t система первого порядка может быть записана в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = F_1\left(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial u_p}{\partial x_n}\right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = F_2\left(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial u_p}{\partial x_n}\right), \\ \dots \\ \frac{\partial u_p}{\partial t} = F_p\left(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial u_p}{\partial x_n}\right). \end{cases} \quad (6.9.10)$$

Пример 6.38. Уравнение одномерных колебаний (колебаний струны)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f(x, t)}{a^2}$$

может быть записано как в нормальной форме относительно переменной x ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(t, x, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \quad F\left(t, x, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{f(x, t)}{a^2},$$

так и в нормальной форме относительно переменной t :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(t, x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad F\left(t, x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

Таким образом, уравнение одномерных колебаний является нормальным относительно обеих переменных.

Пример 6.39. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

не является нормальным ни относительно x , ни относительно t .

Задача Коши

При постановке начальной задачи (или задачи Коши) требуется найти решения системы уравнений, удовлетворяющие начальным условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1|_{t=t_0} = \varphi_1^0(x_1, \dots, x_n), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \varphi_1^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial^{r_1-1} u_1}{\partial t^{r_1-1}} \Big|_{t=t_0} = \varphi_1^{r_1-1}(x_1, \dots, x_n), \\ u_2|_{t=t_0} = \varphi_2^0(x_1, \dots, x_n), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \varphi_2^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial^{r_2-1} u_2}{\partial t^{r_2-1}} \Big|_{t=t_0} = \varphi_2^{r_2-1}(x_1, \dots, x_n), \\ \dots, \\ u_p|_{t=t_0} = \varphi_p^0(x_1, \dots, x_n), \\ \frac{\partial u_p}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \varphi_p^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial^{r_p-1} u_p}{\partial t^{r_p-1}} \Big|_{t=t_0} = \varphi_p^{r_p-1}(x_1, \dots, x_n), \end{array} \right.$$

где $\varphi_i^j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 0, 1, \dots, r_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, p$, — заданные функции.

В случае системы первого порядка начальные условия принимают более простой вид:

$$\begin{cases} u_1|_{t=t_0} = \varphi_1^0(x_1, \dots, x_n), \\ u_2|_{t=t_0} = \varphi_2^0(x_1, \dots, x_n), \\ \dots, \\ u_p|_{t=t_0} = \varphi_p^0(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (6.9.11)$$

Теорема Коши – Ковалевской для систем первого порядка

Теорема 6.1. Пусть начальные условия (6.9.11) задачи Коши для нормальной системы уравнений (6.9.10) являются аналитическими функциями независимых переменных в окрестности точки $(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$. Тогда, если правые части уравнений являются аналитическими функциями всех своих аргументов в окрестности точки их числовых значений, соответствующих точке $(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ в силу начальных условий, то в окрестности этой точки существует аналитическое решение задачи Коши, и это решение будет единственным в классе аналитических функций.

Доказательство. Для построения формального ряда Тейлора, представляющего решение задачи Коши, может быть использован алгоритм метода пределов, описанный выше:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} C_{k_0, k_1, \dots, k_n}^1 (t - t^0)^{k_0} (x - x_1^0)^{k_1} \dots (x - x_n^0)^{k_n}, \\ u_2 &= \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} C_{k_0, k_1, \dots, k_n}^2 (t - t^0)^{k_0} (x - x_1^0)^{k_1} \dots (x - x_n^0)^{k_n}, \\ &\vdots \\ u_p &= \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} C_{k_0, k_1, \dots, k_n}^p (t - t^0)^{k_0} (x - x_1^0)^{k_1} \dots (x - x_n^0)^{k_n}, \end{aligned} \quad (6.9.12)$$

где $C_{k_0, k_1, \dots, k_n}^i$ — постоянные, которые определяются из выражений, содержащих значения функций φ_i^0 и F_i в точке $(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ и их производных. Если формальный ряд сходится, то решение задачи Коши единственно (в классе аналитических функций), поскольку алгоритм метода

пределов единственным образом определяет коэффициенты его разложения.

Для доказательства существования достаточно показать, что формальные ряды (6.9.12) сходятся. Для этой цели воспользуемся модификацией метода мажорант, который уже использовался выше для доказательства существования решения задачи Коши, определяемой обыкновенным дифференциальным уравнением.

Прежде, преобразуем задачу к более простой форме. Для этого введем новые независимые переменные

$$\hat{t} = t - t^0, \quad \hat{x}_1 = x_1 - x_1^0, \quad \dots, \quad \hat{x}_n = x_n - x_n^0,$$

и новые зависимые переменные (искомые функции)

$$\hat{u}_1 = u_1 - \varphi_1^0 - A_1 t, \quad \hat{u}_2 = u_2 - \varphi_2^0 - A_2 t, \quad \dots, \quad \hat{u}_p = u_p - \varphi_p^0 - A_p t,$$

где A_1, A_2, \dots, A_p — значения функций F_1, F_2, \dots, F_p в точке $(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$, то есть

$$A_i = F_i \left(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0; \varphi_1^0, \dots, \varphi_p^0; \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_0, \dots, \left. \frac{\partial u_p}{\partial x_n} \right|_0 \right).$$

Здесь $\left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_0, \dots, \left. \frac{\partial u_p}{\partial x_n} \right|_0$ — значения производных, вычисленных по алгоритму метода предела.

Далее будем работать только с новыми переменными, поэтому символы крышки над ними указывать не будем. Построим вспомогательную систему уравнений, правые части которых мажорируют заданные функции F_i . В качестве мажоранты, общей для всех F_i , возьмем функцию

$$\frac{M}{(1 - \frac{t}{\rho})(1 - \frac{x_1}{\rho}) \dots (1 - \frac{x_n}{\rho})(1 - \frac{u_1}{\rho}) \dots (1 - \frac{u_p}{\rho})(1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) \dots (1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_p}{\partial x_n})} - M,$$

где M — число, такое, что при всех значениях аргументов правых частей системы, $t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_p}{\partial x_n}$, по модулю не превосходящих некоторое положительное число ρ , все члены по модулю рядов разложений F_i не превосходят M . Ясно, что построенная таким образом мажоранта обобщает мажоранту (6.9.9), использованную ранее для обыкновенного дифференциального уравнения. Однако ее структура все

еще достаточно сложна для дальнейшего анализа, в частности, ввиду большего, чем в (6.9.9), количества сомножителей в знаменателе. Упрощение может быть достигнуто за счет неравенства, которое мы поясним, для краткости, только для двух сомножителей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)} &= \left(1 + \frac{t}{\rho} + \frac{t^2}{\rho^2} + \dots\right)\left(1 + \frac{x}{\rho} + \frac{x^2}{\rho^2} + \dots\right) = \\ &= 1 + \left(\frac{t}{\rho} + \frac{x}{\rho}\right) + \left(\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{tx}{\rho^2}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{\rho}(t+x) + \frac{1}{\rho^2}(t^2+x^2+tx) + \dots \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{\rho}(t+x) + \frac{1}{\rho^2}(t+x)^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^m}(t+x)^m. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)\left(1 - \frac{x_1}{\rho}\right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{\rho}\right)\left(1 - \frac{u_1}{\rho}\right) \dots \left(1 - \frac{u_p}{\rho}\right)} &\leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t+x_1+\dots+x_n+u_1+\dots+u_p)^m}{\rho^m} = \frac{1}{1 - \frac{t+x_1+\dots+x_n+u_1+\dots+u_p}{\rho}}. \end{aligned}$$

Заметим, что мы вновь воспользовались разложением (6.9.7). Рассуждая аналогичным образом, приходим к неравенству

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_p}{\partial x_n}\right)} \leq \frac{1}{1 - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_p}{\partial x_n}}{\rho}}.$$

Полученные неравенства позволяют построить более простую (но более грубую) мажоранту правых частей системы (6.9.10):

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{t+x_1+\dots+x_n+u_1+\dots+u_p}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_p}{\partial x_n}}{\rho}\right)} - M.$$

Еще более грубую, но, как будет показано далее, весьма полезную мажоранту можно записать, заменив t на t/α , где $0 < \alpha < 1$:

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{t/\alpha+x_1+\dots+x_n+u_1+\dots+u_p}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_p}{\partial x_n}}{\rho}\right)} - M.$$

Теперь все подготовлено для наиболее важного шага доказательства. Введем новую независимую переменную

$$x = t/\alpha + x_1 + \dots + x_n,$$

и рассмотрим систему уравнений относительно вспомогательных функций U_i , $i = 1, \dots, p$, правые части которых — полученные выше мажоранты:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+U_1+\dots+U_p}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial U_p}{\partial x_n}}{\rho}\right)} - M, \quad (6.9.13)$$

$i = 1, 2, \dots, p$. Поскольку уравнения отличаются друг от друга лишь индексами функций в левых частях, мы записали систему в краткой форме.

Решение вспомогательной системы будем искать в виде (все искомые функции равны и совпадают с функцией от x)

$$U_1(t, x_1, \dots, x_n) = U_2(t, x_1, \dots, x_n) = \dots = U_p(t, x_1, \dots, x_n) = U(x).$$

При этом, поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{dU}{dx},$$

то все уравнения совпадут с одним единственным:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dU}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+pU}{\rho}\right) \left(1 - \frac{np \frac{dU}{dx}}{\rho}\right)} - M. \quad (6.9.14)$$

В уравнении (6.9.14) переменные разделяются и оно может быть решено в замкнутом виде. Действительно, умножая левую и правую части уравнения на $\left(1 - \frac{np \frac{dU}{dx}}{\rho}\right)$, и перегруппировывая слагаемые, приходим к уравнению

$$\frac{dU}{dx} \left(\frac{1}{\alpha} - M \frac{np}{\rho} \right) = \frac{M}{1 - \frac{x+pU}{\rho}} - M + \frac{np}{\rho\alpha} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2. \quad (6.9.15)$$

Если выбрать α настолько малым, чтобы $\frac{1}{\alpha} - M\frac{np}{\rho} > 0$, то левую и правую части уравнения (6.9.15) можно разделить на это выражение и прийти к уравнению

$$\frac{dU}{dx} = A\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \Phi, \quad (6.9.16)$$

в котором

$$A = \frac{np}{\rho - M\alpha np}, \quad \Phi = M \frac{x + pU}{(\rho - x - pU)\left(\frac{1}{\alpha} - M\frac{np}{\rho}\right)}.$$

Решая квадратное уравнение (6.9.16) относительно $\frac{dU}{dx}$, получим

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2A} \pm \sqrt{\frac{1}{4A} - \frac{\Phi}{A}}. \quad (6.9.17)$$

Таким образом, мы пришли к обыкновенному дифференциальному уравнению (6.9.17), которое, будучи дополнено начальным условием, приводит к задаче Коши. Взяв в качестве начальных нулевые условия и выбрав знак «-» перед радикалом, получим задачу Коши

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f(U, x), \quad U|_{x=0} = 0,$$

где $f(U, x) = \frac{1}{2A} - \sqrt{\frac{1}{4A} - \frac{\Phi}{A}}$ — функция, аналитическая по обоим переменным, что следует из способа ее построения и аналитичности функций φ_i^0 и F_i , $i = 1, \dots, p$, входящих в исходные уравнения и начальные условия. Согласно теореме существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, эта задача имеет единственное решение $U(x)$. Осталось лишь показать, что оно мажорирует решения исходной системы (6.9.10) при нулевых начальных данных. Поскольку правые части вспомогательной системы мажорируют правые части исходных уравнений, то достаточно показать положительность начальных значений $U(x)|_{t=0} = U(0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. Это можно показать следующим образом.

Поскольку перед радикалом в (6.9.17) был выбран знак «−» и $\Phi|_{x=0, U=0} = 0$, то $\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0} = 0$. Кроме того, поскольку по (6.9.16),

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 2A \frac{dU}{dx} \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{dU}{dx},$$

то

$$\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} > 0.$$

Аналогичным образом можно проверить, что все коэффициенты разложения $U(x)$ в окрестности точки $x = 0$ положительны, и, в частности, функция $\tilde{U} = U|_{t=0} = U(0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ разлагается в ряд по степеням x_1, x_2, \dots, x_n с положительными коэффициентами. Это означает, что совокупность функций $U_1 = U_2 = \dots = U_p = U(t + x_1 + \dots + x_n)$ будет аналитическим решением вспомогательной системы уравнений (6.9.13) при таких начальных условиях, которые мажорируют начальные условия исходной системы, так как последние предполагались нулевыми. Следовательно, формально построенный ряд (6.9.12) сходится к некоторой аналитической функции. \square

10. Приведение квазилинейных систем к нормальному виду

10.1. Общий случай

Общий вид квазилинейной системы уравнений с p неизвестными функциями u_1, u_2, \dots, u_p относительно n независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n со старшими порядками производных r_1, r_2, \dots, r_p со-

ответственно, может быть записан следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p L_{1j}u_j + f_1 = 0, \\ \sum_{j=1}^p L_{2j}u_j + f_2 = 0, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p L_{pj}u_j + f_p = 0, \end{cases} \quad (6.10.1)$$

где

$$L_{ij} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=r_j} A_{ij}^{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{\partial^{r_j}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}},$$

$$A_{ij}^{k_1, k_2, \dots, k_n} = A_{ij}^{k_1, k_2, \dots, k_n} \left(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{r_i-1} u_p}{\partial x_n^{r_i-1}} \right),$$

а f_i — функции тех же переменных, то есть,

$$f_i = f_i \left(x_1, \dots, \frac{\partial^{r_i-1} u_p}{\partial x_n^{r_i-1}} \right).$$

В этих соотношениях индекс i изменяется от 1 до p .

Систему уравнений (6.10.1) можно преобразовать к иному виду, если ввести новые независимые переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, связанные со старыми переменными x_1, x_2, \dots, x_n соотношениями

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \xi_2 &= \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \xi_n &= \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (6.10.2)$$

где $\psi_k, k = 1, \dots, n$ — достаточное число раз дифференцируемые функции, такие, что якобиан преобразования $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_n)$ отличен от нуля в окрестности некоторой точки $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$, $\xi_k^0 = \psi_k(x_1^0, \dots, x_n^0), k = 1, \dots, n$. Среди всех преобразований (6.10.2) нас

интересуют те, что приводят систему (6.10.1) к нормальной форме относительно выбранной переменной, скажем, ξ_1 . Однако, в общем случае такие преобразования могут не существовать. В этой связи, возникает вопрос: может ли система (6.10.1) быть нормальной в окрестности точки $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ относительно переменной ξ_1 при *некотором* преобразовании (6.10.2)?

Для ответа на этот вопрос нужно осуществить замену переменных (6.10.2) в общем виде и разрешить получаемые в результате уравнения относительно *чистых* производных (то есть, не смешанных) по переменной ξ_1 порядков r_1, r_2, \dots, r_p соответственно. В результате замены переменных получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + c_{i,1}, \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + c_{i,1,2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{r_i} u_i}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} &= \frac{\partial^{r_i} u_i}{\partial \xi_1^{r_i}} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \right)^{k_n} + c_{i,k_1, \dots, k_n}, \end{aligned}$$

где $c_{i,1}, c_{i,1,2}, c_{i,k_1, \dots, k_n}$, соответственно, члены, не содержащие производной от u_i по ξ_1 , члены, не содержащие чистой производной второго порядка от u_i по ξ_1 и члены, не содержащие чистой производной порядка r_i от u_i по ξ_1 . В новых переменных система уравнений (6.10.1) принимает вид

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p \frac{\partial^{r_j} u_j}{\partial \xi_1^{r_j}} B_{1j} u_j + f_1 = 0, \\ \sum_{j=1}^p \frac{\partial^{r_j} u_j}{\partial \xi_1^{r_j}} B_{2j} u_j + f_2 = 0, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p \frac{\partial^{r_j} u_j}{\partial \xi_1^{r_j}} B_{pj} u_j + f_p = 0, \end{cases} \quad (6.10.3)$$

где

$$B_{ij} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=r_j} A_{ij}^{k_1, k_2, \dots, k_n} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \right)^{k_n},$$

причем функции $A_{ij}^{k_1, k_2, \dots, k_n}$ и f_i не зависят от старших чистых производных $\frac{\partial^{r_i} u_i}{\partial \xi_1^{r_i}}$. Как известно из курса линейной алгебры, для того, чтобы привести систему (6.10.3) к нормальному виду в точке $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ относительно переменной ξ_1 , необходимо и достаточно, чтобы значения функций B_{ij} в этой точке удовлетворяли условию

$$\begin{vmatrix} B_{11}^0 & B_{12}^0 & \dots & B_{1p}^0 \\ B_{21}^0 & B_{22}^0 & \dots & B_{2p}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{p1}^0 & B_{p2}^0 & \dots & B_{pp}^0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.10.4)$$

здесь

$$B_{ij}^0 = B_{ij} \Big|_{\xi_1=\xi_1^0, \xi_2=\xi_2^0, \dots, \xi_n=\xi_n^0}.$$

Если рассматривать значения производных $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}$ в точке $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ как числовые параметры:

$$\alpha_k = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \Big|_{\xi_1=\xi_1^0, \xi_2=\xi_2^0, \dots, \xi_n=\xi_n^0},$$

то их значения, в которых происходит нарушение условия (6.10.4), определяются как корни уравнения

$$\Delta(\alpha) = 0, \text{ где } \Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} B_{11}(\alpha) & \dots & B_{1p}(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{p1}(\alpha) & \dots & B_{pp}(\alpha) \end{vmatrix}, \quad (6.10.5)$$

при условии $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 1$. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Определение 6.10. Уравнение (6.10.5) называется *характеристическим*.

Определение 6.11. Если $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_n$ — корни характеристического уравнения, то плоскости

$$\sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i (x_i - x_i^0) = 0$$

называются **характеристическими направлениями**.

Характеристические направления определяют локальные условия нарушения неравенства (6.10.4) в заданной точке. Поверхности, касающиеся этих направлений в области, называются **характеристическими поверхностями** или **характеристиками**. Уравнение для характеристик может быть записано следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \sum_{k_1+\dots+k_n=r_1} A_{11}^{k_1, \dots, k_n} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\right)^{k_n} & \dots & \sum_{k_1+\dots+k_n=r_p} A_{1p}^{k_1, \dots, k_n} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\right)^{k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k_1+\dots+k_n=r_1} A_{p1}^{k_1, \dots, k_n} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\right)^{k_n} & \dots & \sum_{k_1+\dots+k_n=r_p} A_{pp}^{k_1, \dots, k_n} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\right)^{k_n} \end{vmatrix} = 0,$$

при условии

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right|^2 \neq 0.$$

Характеристические поверхности определяют варианты постановок задач Коши, для которых условия теоремы Коши – Ковалевской не выполняются и, следовательно, нельзя гарантировать существование их аналитического решения. Действительно, если поверхность

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \xi_1^0 = 0, \quad (6.10.6)$$

содержащая точку $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$, не является характеристикой, то есть, $\Delta(\Psi) \neq 0$ в окрестности этой точки, то система уравнений (6.10.1) приводится в ней к нормальному виду, и, при дополнительных условиях аналитичности функций, задающих правые части системы и начальные данные, в достаточно малой окрестности $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ существует аналитическое решение задачи Коши. В противном случае, то есть, когда поверхность (6.10.6) — характеристическая, левые части уравнений (6.10.3) в точке $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ оказываются линейно зависимыми. При этом оказываются возможны альтернативы:

- (1) Если правые части (то есть, функции f_1, \dots, f_p) системы уравнений (6.10.3) и начальные условия линейно независимы, то решение задачи Коши не существует.

(2) Если же правые части линейно зависимы, то существует бесконечно много решений.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 6.40. Пусть задача Коши определена такими уравнениями и начальными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial y} = 0, \quad u|_{x=0} = \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varphi_1(y). \quad (6.10.7)$$

Будем исследовать разрешимость этой задачи в точке $(x, y) = (0, 0)$. Корни характеристического уравнения

$$\Delta = \alpha_1 \alpha_2 = 0,$$

при условии $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$, определяют два характеристических направления $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Характеристики представляют собой прямые и совпадают с характеристическими направлениями. Таким образом, начальные условия заданы на характеристике $x = 0$.

Уравнение, рассматриваемое в этом примере, является настолько простым, что возможно сразу выписать его общее решение:

$$u(x, y) = \Phi(x) + \Psi(y),$$

которое, без потери общности, можно подчинить условию $\Phi(0) = 0$. Из первого начального условия (6.10.7) вытекает, что $\Psi(y) = \varphi(y)$, а из второго — $\frac{d\Phi(x)}{dx} = \varphi_1(x)$. Таким образом, если $\varphi_1(x) \neq \text{const}$, то решений не существует, а если $\varphi_1(x) = \text{const}$, то решений бесконечно много, поскольку $\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} \Big|_{x=0}$ может быть произвольным.

Наиболее простая замена переменных задается линейным преобразованием. Вместе с тем, такая замена позволяет ответить на вопрос о возможности преобразования исходной системы к нормальной форме в окрестности заданной точки и найти характеристические направления в ней. Пусть в систему (6.10.1) при помощи линейного невырожденного преобразования вводятся новые переменные:

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i, \quad \xi_2 = \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i, \quad \dots \quad \xi_n = \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i,$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда замена параметров в характеристическом определителе задается союзным преобразованием

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^n a_{k1} \lambda_k, \quad \alpha_2 = \sum_{k=1}^n a_{k2} \lambda_k, \quad \dots \quad \alpha_n = \sum_{k=1}^n a_{kn} \lambda_k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — новые параметры. При этом дифференциальные операторы принимают вид

$$L_{ij} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=r_j} A_{ij}^{k_1, k_2, \dots, k_n} \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)^{k_1} \cdots \left(\sum_{i=1}^n a_{in} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)^{k_n},$$

а элементы характеристического определителя записываются следующим образом:

$$B_{ij} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=r_j} A_{ij}^{k_1, k_2, \dots, k_n} \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} \lambda_i \right)^{k_1} \cdots \left(\sum_{i=1}^n a_{in} \lambda_i \right)^{k_n}.$$

Заметим, что закон преобразования операторов L_{ij} при замене переменных такой же, как и закон преобразования B_{ij} при союзной замене параметров. Это позволяет осуществить классификацию уравнений (в точке), опираясь на алгебраические свойства характеристического определителя следующим образом.

Определение 6.12. (1) Если посредством невырожденного линейного преобразования характеристический определитель $\Delta(\alpha)$ приводится к определителю, который зависит от числа параметров, меньших n , то система уравнений классифицируется как **параболическая** в данной точке, а характеристический определитель — как **вырожденный**.

(2) Если характеристический определитель невырожден, а все корни характеристического уравнения комплексны (при условии $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 1$), то уравнение в данной точке **эллиптическое**.

(3) Если характеристический определитель не является вырожденным и уравнение $\Delta(\alpha) = 0$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, сформулированное относительно некоторого α_j , при любых фиксированных значениях остальных α_i ($i \neq j$) имеет $N = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ вещественных корней, то уравнение классифицируется как **гиперболическое**.

Замечание 6.11. В общем случае коэффициенты характеристического определителя $\Delta(\alpha)$ зависят не только от независимых переменных x_1, \dots, x_n , но и от выбора решения! Вместе с тем, тип уравнения не зависит от выбора решения для линейных систем.

10.2. Линейные уравнения первого порядка

Линейная система уравнений первого порядка имеет вид

$$\sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^n A_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u_j + f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Здесь $f_i = \sum_{j=1}^p C_{ij} u_j + D_i$, а A_{ij}^k, C_{ij}, D_i — функции независимых переменных. В линейном случае характеристический определитель имеет вид

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n A_{11}^k \alpha_k & \dots & \sum_{k=1}^n A_{1p}^k \alpha_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{p1}^k \alpha_k & \dots & \sum_{k=1}^n A_{pp}^k \alpha_k \end{vmatrix}$$

10.3. Примеры

Пример 6.41. Квазилинейное уравнение первого порядка имеет вид (в обозначениях Монжа)

$$\sum_{i=1}^n a_i p_i - a = 0, \quad p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Ему соответствует уравнение характеристических переменных

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right|^2 \neq 0.$$

Характеристику $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ можно записать в параметрической форме

$$x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}),$$

где t_1, \dots, t_{n-1} — параметры. Тогда вектор $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)$ ортогонален (a_1, a_2, \dots, a_n) . Следовательно, вектор (a_1, a_2, \dots, a_n) лежит к касательной плоскости к характеристике, то есть, должен быть линейной комбинацией векторов $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_i}, \frac{\partial x_2}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \right)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 6.42. Трехмерное уравнение Пуассона в декартовых координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = f.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение $\Delta(\alpha) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$ и $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 = 1$. Уравнение характеристик:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^2 \neq 0.$$

Характеристики: $\varphi(x, y, z) = 0$. Вещественных характеристик нет (эллиптический тип).

Пример 6.43. Трехмерное уравнение теплопроводности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) u = f.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение $\Delta(\alpha) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$ с условием $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 = 1$. Им соответствуют соотношения для характеристик:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \neq 0.$$

Характеристики: $\varphi(x, y, z, t) = 0$. Вещественные характеристические направления: $t - t_0 = 0$ (параболический тип).

Пример 6.44. Трехмерное волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = f.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение $\Delta(\alpha) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = 0$ с условием $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 = 1$. Им соответствуют соотношения для характеристик:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = 0, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \neq 0.$$

Характеристики: $\varphi(x, y, z, t) = 0$. Характеристические направления: составляющие с осью t угол $\frac{\pi}{4}$ гиперплоскости и огибающие их гиперконусы с углом при вершине $\frac{\pi}{2}$ (гиперболический тип).

Пример 6.45. Дифференциальное уравнение

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

является гиперболическим, поскольку его характеристическое уравнение

$$\Delta(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 - \alpha_0^2 \right) \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 - 2\alpha_0^2 \right) = 0,$$

в котором параметру α_0 соответствует переменная t , при любых фиксированных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ будет иметь четыре (возможно, кратных) корня, если его рассматривать как алгебраическое уравнение относительно α_0 .

Пример 6.46. Небольшое изменение уравнения, рассмотренного выше, а именно,

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = 0,$$

приводит к случаю, который не может быть классифицирован ни как гиперболическое, ни как эллиптическое, ни как параболическое уравнение. Действительно, характеристическое уравнение

$$\Delta(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2\right)^2 - \alpha_0^4 = 0,$$

имеет лишь два, а не четыре действительных корня при фиксированных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Таким уравнения будем называть **уравнениями промежуточного типа**.

10.4. Линейные уравнения второго порядка

Общий вид:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f = 0,$$

где $f = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Bu + C$, а A_{ij}, B_i, B, C — функции независимых переменных. Характеристический определитель является однородной квадратичной формой:

$$\Delta(\alpha) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \alpha_i \alpha_j,$$

и приводится к каноническому виду

$$\Delta(\alpha) = \Delta(\lambda) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_i^2,$$

где

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0, \\ +1, \\ -1. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение:

- эллиптическое, если все $\varepsilon_i \neq 0$ и одного знака,
- гиперболическое, если все $\varepsilon_i \neq 0$ и все, кроме одного, одного знака,
- ультрагиперболическое, если все $\varepsilon_i \neq 0$, но разных знаков,
- параболическое, если существует $\varepsilon_i = 0$.

11. Приведение линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду в области

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка относительно функции $u(x, y)$:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f = 0, \quad (6.11.1)$$

где $f = D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G$, а A, B, \dots, G — функции x и y . Характеристический определитель $\Delta(\alpha)$ этого уравнения будет иметь вид

$$\Delta(\alpha) = A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1\alpha_2 + C\alpha_2^2.$$

В зависимости от значения дискриминанта δ ,

$$\delta = B^2 - AC,$$

уравнение (6.11.1) можно классифицировать в заданной точке как

- гиперболическое (при $\delta > 0$),

- параболическое (при $\delta = 0$),
- эллиптическое (при $\delta < 0$).

Как было показано ранее, приведение уравнения (6.11.1) к каноническому виду *в точке* осуществляется линейным преобразованием независимых переменных. Для уравнений общего вида процедура преобразования к каноническому виду в другой точке потребует построения иного линейного преобразования, то есть, в общем случае, приведение к канонической форме осуществляется локально. Однако, уравнения частного вида (6.11.1), а именно, линейные дифференциальные уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, допускают обобщение этой процедуры: для них преобразование к канонической форме может быть осуществлено *в области*. Рассмотрим процесс такого преобразования подробнее.

11.1. Случай $A = C = 0$

Вначале рассмотрим случай $A = C = 0$. Элементарные преобразования сразу приводят уравнение (6.11.1) к одной из канонических форм гиперболического уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \hat{f} = 0, \quad \hat{f} = \frac{f}{2B}. \quad (6.11.2)$$

Вторая каноническая форма может быть получена в результате замены переменных

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y.$$

В новых переменных уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \hat{f}_1 = 0, \quad \hat{f}_1(\xi, \eta) = \frac{f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)}{2B\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)}.$$

11.2. Случай $A \neq 0$

Рассмотрев отдельно случай $A = C = 0$, мы теперь можем полагать, что $A \neq 0$ (в уравнении (6.11.1) коэффициенты A и C всегда можно

поменять ролями, а случай $A = C = 0$ был разобран выше). Введем замену переменных общего вида:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

с условием, что якобиан преобразования $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ в рассматриваемой области отличен от нуля, то есть,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0.$$

Это условие обеспечивает существование обратного преобразования $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$. Используя правило дифференцирования сложной функции, преобразуем уравнение (6.11.1) к новым переменным:

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f_1 = 0, \quad (6.11.3)$$

где $f_1 = D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_1 u + G_1$, а A_1, B_1, \dots, G_1 определены равенствами

$$\begin{aligned} A_1 &= A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \Bigg|_{\substack{x=x(\xi, \eta), \\ y=y(\xi, \eta)}}, \\ B_1 &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \Bigg|_{\substack{x=x(\xi, \eta), \\ y=y(\xi, \eta)}}, \\ C_1 &= A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \Bigg|_{\substack{x=x(\xi, \eta), \\ y=y(\xi, \eta)}}, \\ D_1 &= A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \xi}{\partial x} + E \frac{\partial \xi}{\partial y} \Bigg|_{\substack{x=x(\xi, \eta), \\ y=y(\xi, \eta)}}, \\ E_1 &= A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D \frac{\partial \eta}{\partial x} + E \frac{\partial \eta}{\partial y} \Bigg|_{\substack{x=x(\xi, \eta), \\ y=y(\xi, \eta)}}, \\ F_1 &= F \Bigg|_{\substack{x=x(\xi, \eta), \\ y=y(\xi, \eta)}}, \quad G_1 = G \Bigg|_{\substack{x=x(\xi, \eta), \\ y=y(\xi, \eta)}}. \end{aligned} \quad (6.11.4)$$

Уравнение характеристических переменных может быть записано для уравнения (6.11.1) в виде

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (6.11.5)$$

при условии

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 \neq 0.$$

Для построения решения уравнения (6.11.5) рассмотрим его вначале как квадратное уравнение относительно $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Его решения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \left(-B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \pm \sqrt{B^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - AC \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} \right) \frac{1}{A} = \\ &= -\frac{B \pm \sqrt{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{A}, \quad \delta = B^2 - AC, \end{aligned}$$

приводят к двум уравнениям первого порядка:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\ A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(B - \sqrt{B^2 - AC} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (6.11.6)$$

Эти уравнения могут быть решены методом характеристик. Соответствующие им обыкновенные дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \end{aligned}$$

Решения полученных уравнений при $\delta = B^2 - AC > 0$ (гиперболический случай) определяют два семейства вещественных характеристик

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

а при $\delta = 0$ (параболический случай) — одно семейство

$$\xi = \varphi(x, y), \quad (6.11.7)$$

где φ, ψ — дважды непрерывно-дифференцируемые функции. Заметим, что якобиан преобразования, задаваемого этими функциями,

$$J = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

отличен от нуля, так как угловые коэффициенты характеристических кривых $\varphi(x, y) - \xi = 0$ и $\psi(x, y) - \eta = 0$, которые задаются соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\delta}}{A}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{\delta}}{A},$$

отличаются друг от друга на ненулевую величину. В этой связи, в гиперболическом случае для замены переменных можно использовать функции φ и ψ . При этом из сопоставления уравнения для характеристических переменных (6.11.5) и выражений для A_1 и C_1 (6.11.4) следует, что в новых переменных $A_1 = C_1 = 0$. При этом коэффициент B_1 не может тождественно равняться нулю в силу инвариантности порядка уравнения по отношению к замене независимых переменных. Таким образом, уравнение (6.11.3) после деления левой и правой его частей на $2B_1$ преобразуется к каноническому виду (6.11.2).

В случае параболического уравнения ($\delta = 0$) для замены переменных может быть использована функция φ (6.11.7) и произвольная дифференцируемая функция $\zeta(x, y)$, такая, что якобиан, определяемый двумя этими функциями, отличен от нуля:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \neq 0.$$

Таким образом, новые переменные задаются соотношениями

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \zeta(x, y).$$

Так же, как и в предыдущем случае, $A_1 = 0$. Коэффициент B_1 может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned} B_1 &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(A \frac{\partial \xi}{\partial x} + B \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(B \frac{\partial \xi}{\partial x} + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Но, поскольку $\delta = B^2 - AC = 0$, и, следовательно, $C = B^2/A$, то

$$A \frac{\partial \xi}{\partial x} + B \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0,$$

поскольку ξ удовлетворяет уравнению (6.11.6), и также

$$B \frac{\partial \xi}{\partial x} + C \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{B}{A} \left(A \frac{\partial \xi}{\partial x} + B \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0.$$

Таким образом, $B_1 = 0$ и уравнение (6.11.3), после деления его левой и правой частей на C_1 (отличный от нуля в силу инвариантности порядка уравнения относительно замены переменных) приводится к каноническому виду параболического уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{f} = 0,$$

где $\tilde{f} = \frac{f_1}{C_1} = \tilde{f}(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta})$.

Осталось рассмотреть случай эллиптического уравнения, то есть, когда $\delta < 0$. Уравнения (6.11.6) оказываются комплексно сопряженными и их решения могут быть найдены в форме

$$\varphi = \xi \pm i\eta,$$

где $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ — вещественные функции от x, y . Выделяя вещественную и мнимую части уравнений (6.11.6), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\frac{B}{A} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\sqrt{|\delta|}}{A} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{B}{A} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\sqrt{|\delta|}}{A} \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{aligned}$$

В силу этих уравнений якобиан функций $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ определяется равенством

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{|\delta|}}{A} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \neq 0.$$

Воспользуемся функциями $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ для замены переменных. Поскольку $\varphi = \xi \pm i\eta$ — решения уравнений (6.11.6), то, имея в виду (6.11.4), находим, что $A_1 = C_1$, $B_1 = 0$. Разделив обе части уравнения (6.11.3) на A_1 (отличный от нуля), получим каноническую форму эллиптического уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{f}_1 = 0,$$

где $\tilde{f}_1 = \frac{f_1}{A_1} = \tilde{f}_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta})$.

Пример 6.47. Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6.11.8)$$

Здесь $A = 1$, $B = 2$, $C = 0$. Дискриминант $\delta = B^2 - AC = 4 > 0$. Следовательно, уравнение (6.11.8) является гиперболическим, на всей плоскости Oxy . Уравнения характеристик:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + 4 \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

Их решения имеют вид

$$\xi = f(4x - y), \quad \eta = g(y),$$

где f и g — произвольные дифференцируемые функции. Выберем наиболее простой вариант:

$$\xi = 4x - y, \quad \eta = y.$$

В новых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 4 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 4 \left[\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = 16 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 4 \left[\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] = -4 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi \partial \eta}, \end{aligned}$$

где $\hat{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Таким образом, уравнение (6.11.8) преобразуется к виду

$$16 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + 4 \left(-4 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi \partial \eta} \right) + 4 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = 0,$$

или

$$16 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi \partial \eta} + 4 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = 0,$$

или, окончательно,

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = 0.$$

Пример 6.48. Рассмотрим уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

в правой полуплоскости, то есть, при $x > 0$. Коэффициенты при производных второго порядка имеют вид

$$A = x^2, \quad B = -xy, \quad C = y^2.$$

Тогда $\delta = B^2 - AC = (-xy)^2 - x^2 y^2 = 0$. Следовательно, уравнение параболическое. Уравнение характеристик имеет вид

$$x^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} - xy \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

или, поскольку $x \neq 0$,

$$x \frac{\partial \eta}{\partial x} - y \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Его решение, полученное методом характеристик, имеет вид

$$\eta = f(xy),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция. Вторая переменная может быть определена произвольной функцией, с тем лишь условием, чтобы якобиан полученного преобразования был отличен от 0. Для простоты возьмем $\xi = x$, $\eta = xy$. Якобиан этого преобразования

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = x > 0.$$

Пример 6.49. Дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0.$$

Коэффициенты при старших производных имеют вид:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = x.$$

Следовательно, $\delta = B^2 - AC = -x < 0$ и уравнение является эллиптическим на правой полуплоскости ($x > 0$). Уравнение характеристик имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\sqrt{x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Его решение — комплекснозначная функция

$$\Phi = x^{3/2} + i \frac{3y}{2}.$$

Мнимая и действительная части решения определяют функции перехода к новым переменным:

$$\xi = \operatorname{Re} \Phi = x^{3/2}, \quad \eta = \operatorname{Im} \Phi = \frac{3}{2}y.$$

В новых переменных производные имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{3}{2} \sqrt{x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{3}{2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} + \frac{9x}{4} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{9}{4} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в исходное уравнение дает

$$\left(\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} + \frac{9x}{4} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} \right) + x \left(\frac{9}{4} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2} \right),$$

или,

$$9x \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2} \right) + 3 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = 0,$$

или, вспоминая, что $\xi = x^{3/2}$,

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\xi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = 0.$$

12. Волновое уравнение

12.1. Задача Коши для волнового уравнения

Рассмотрим n -мерное волновое уравнение

$$\square u = -\frac{f}{a^2}, \quad (6.12.1)$$

где $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ — заданная функция n пространственных переменных x_1, x_2, \dots, x_n и времени t , $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ — искомая функция тех же переменных, $a^2 = \text{const}$ — параметр, характеризующий физические свойства системы, в которой распространяются волны,

$$\square := \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

дифференциальный оператор, называемый **волновым оператором** или **оператором Д'Аламбера**, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа.

Как было показано ранее, волновое уравнение (6.12.1) имеет гиперболический тип. В совокупности с начальными условиями

$$u|_{t=t_0} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \psi, \quad (6.12.2)$$

в которых $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — заданные функции пространственных переменных x_1, x_2, \dots, x_n , уравнение (6.12.1) определяет **задачу Коши**.

В одномерном случае (при $n = 1$) поставленную таким образом задачу Коши (6.12.1), (6.12.2), можно рассматривать как задачу о поперечных колебаниях бесконечной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \quad u|_{t=t_0} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \psi.$$

Здесь $u = u(x, t)$ — искомая функция пространственной переменной x и времени t , характеризующая уклонение струны от положения равновесия, $f = f(x, t)$ — заданная функция, посредством которой определяется поперечная нагрузка на струну, a — физический параметр, определяемый плотностью и усилием натяжения струны, $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ — заданные функции, первая из которых определяет начальные уклонения, а вторая — начальные скорости струны.

В двумерном случае (при $n = 2$) задача Коши (6.12.1), (6.12.2), характеризует поперечные колебания бесконечной мембраны, совпадающей в положении равновесия с плоскостью $0x_1x_2$, при условии, что в начальный момент времени заданы уклонения точек мембраны от плоскости равновесия и их скорости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \quad u|_{t=t_0} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \psi.$$

Здесь $u = u(x_1, x_2, t)$ — искомые уклонения точек мембраны, $f = f(x_1, x_2, t)$ — заданная поперечная нагрузка, $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $\psi = \psi(x_1, x_2)$ — заданные начальные уклонения и начальные скорости.

В случае трех изменений задача Коши (6.12.1), (6.12.2), может быть истолкована как задача об акустических колебаниях газа при условии, что в начальный момент времени во всем пространстве задан потенциал скорости движения частиц и их конденсация:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u|_{t=t_0} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \psi.$$

Здесь $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ — искомый потенциал скорости v акустических колебаний, то есть, $v = -\nabla u$, $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ — заданная функция, характеризующая начальные распределения скорости, $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$

— заданная функция, определяющая начальное распределение конденсации s :

$$s|_{t=t_0} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{a^2} \psi.$$

12.2. Начально – краевые задачи для волнового уравнения

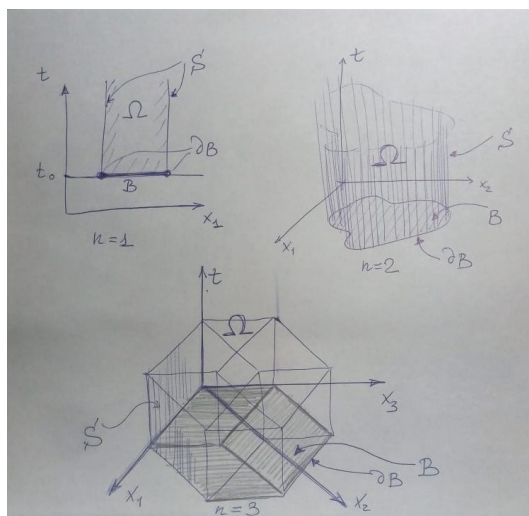
Рассмотренные выше задачи предполагают моделирование областей, не ограниченных по пространственным переменным. Изучение ограниченных областей предполагает задание условий на их границах. Такие условия называются **краевыми**, а задачи, в которых, наряду с начальными условиями, указываются краевые условия, называются **начально – краевыми**.

Начальные и краевые условия в совокупности удобно интерпретировать как соотношения, заданные на границе полуограниченной цилиндрической области Ω в $(n + 1)$ -мерном пространстве. Далее эту границу будем обозначать символом $\partial\Omega$. Первые n координат пространства, содержащего Ω , соответствуют пространственным переменным x_1, x_2, \dots, x_n , а последняя координата — времени t . Граница, $\partial\Omega$, является в нем цилиндрической гиперповерхностью с одним основанием. Образующие цилиндрической части S гиперповерхности $\partial\Omega$ — лучи, параллельные оси $0t$. Основание — n -мерная область B . Таким образом, $\partial\Omega = S \cup B$. На S задаются краевые условия, а на B — начальные. Заметим, что S можно рассматривать как совокупность лучей, выпущенных в положительном направлении t из точек границы B , то есть, из ∂B . Рис. 6.14 иллюстрирует все рассмотренные гиперповерхности для $n = 1, 2, 3$.

Из всех возможных способов задания краевых условий выделяют следующие типы:

1) Первая краевая задача:

$$\begin{aligned} \forall (x_1, \dots, x_n) \in B : u|_{t=t_0} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \psi, \\ \forall (x_1, \dots, x_n, t) \in S : u|_S = \Phi, \end{aligned}$$


 Рис. 6.14. Гиперповерхности при различных n

где функции $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, $\psi = \psi(x_1, \dots, x_n)$, определенные в области B , как и ранее, задают начальные значения искомой функции u и скорость ее изменения в момент $t = t_0$, а функция $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n, t)$, заданная на цилиндрической поверхности S , определяет граничные значения u .

2) Вторая краевая задача:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B : u|_{t=t_0} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \psi,$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n, t) \in S : \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \Phi.$$

В такой постановке на цилиндрической гиперповерхности S задается значение производной u по направлению внутренней нормали⁶ к S , которую можно вычислить как

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = (\nabla u | n)|_S,$$

где n — внутренняя нормаль к S . Функция $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n, t)$ задана на S .

⁶Использование внутренней нормали предполагает, что все направленные пределы вычисляются из внутренней части области, т.е. там, где поля определены.

3) Третья краевая задача:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B : u|_{t=t_0} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \psi,$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n, t) \in S : \left. \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha u \right) \right|_S = \Phi.$$

Здесь α — некоторый (положительный) параметр, а функция $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n, t)$, как и раньше, задана на S .

Если начальные условия, сформулированные для точек B , не противоречат краевым условиям, заданным на S , то говорят, что начальные и краевые условия **согласованы**. Например, для первой краевой задачи условия согласования могут быть записаны в виде

$$\varphi|_{\partial B} = \Phi|_{t=t_0}, \quad \psi|_{\partial B} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=t_0}.$$

Помимо перечисленных типов начально – краевых задач, могут быть сформулированы задачи **смешанного типа**, когда на различных частях S задаются краевые условия различных типов.

12.3. Единственность решений первой, второй и третьей начально – краевых задач

Докажем, что если решения первой, второй или третьей краевых задач существуют, то они единственны в классе дважды непрерывно-дифференцируемых функций, определенных на Ω . Для доказательства используем интегральное тождество, которое имеет место для решений однородного волнового уравнения:

$$I(t) = \frac{dE(t)}{dt}, \quad (6.12.3)$$

где

$$I(t) = - \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} dV^{(n-1)},$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_B \left((\nabla u | \nabla u) + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) dV^{(n)}.$$

Здесь u — решение однородного волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Это тождество для произвольного n является следствием обобщенной теоремы Стокса. В частных случаях,

- для $n = 3$,

$$I(t) = - \iint_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} dA,$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint_B \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) dV,$$

и тождество вытекает из теоремы Остроградского:

$$\begin{aligned} - \iint_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} dA &= \iiint_B \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \nabla u \right) dV = \\ &= \iiint_B \left[\left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot \nabla u + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta u \right] dV = \\ &= \iiint_B \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial t} \right) dV, \end{aligned}$$

- для $n = 2$,

$$I(t) = - \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma,$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \iint_B \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) dA,$$

и тождество является следствием формулы Грина:

$$\begin{aligned} - \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma &= \iint_B \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \nabla u \right) dA = \\ &= \iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t} \right) dA, \end{aligned}$$

- для $n = 1$,

$$\begin{aligned} I(t) &= - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=x_1} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=x_2} \right), \\ E(t) &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) dx, \end{aligned}$$

причем

$$\frac{\partial}{\partial n} \Big|_{x=x_1} = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{x=x_2} = - \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=x_2},$$

и тождество вытекает из следующего равенства:

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx.$$

Заметим, что в задачах о колебаниях величина $E(t)$, с точностью до множителя, определяет полную энергию системы.

Перейдем теперь к доказательству единственности. Допустим, что краевая задача, определяемая уравнением (6.12.1), начальными условиями (6.12.2) и какими-либо краевыми условиями типа 1), 2) или 3), имеет два решения u_1 и u_2 . Обозначим через u их разность: $u = u_1 - u_2$. В силу линейности уравнения и краевых (то есть, начальных и граничных условий), функция u будет решением краевой задачи для однородного уравнения и нулевых начальных и граничных условий:

$$\square u = 0, \quad u|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \mathcal{B}u = 0,$$

где $\mathcal{B}u = u|_S$ для первой, $\mathcal{B}u = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S$ для второй и $\mathcal{B}u = \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha u \right) \Big|_S = 0$ для третьей краевых задач.

В случаях первой и второй краевых задач левая часть равенства (6.12.3) будет равна нулю, в силу нулевых краевых условий (то есть, $I(t) \equiv 0$). Следовательно, $E(t) = \text{const}$. Кроме того, поскольку в силу нулевых начальных условий, $E|_{t=t_0} = 0$, то $E(t) \equiv 0$. Вспоминая о том, что подинтегральное выражение в $E(t)$ представляет собой сумму квадратов, приходим к выводу, что все частные производные функции u тождественно равны нулю. Кроме того, поскольку $u|_{t=t_0} = 0$, то $u \equiv 0$. Это означает, что решения первой и второй задач единственны.

В случае третьей задачи при постоянном α справедливо равенство

$$-\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha u \right) dV^{(n-1)} = \frac{dE(t)}{dt} + \alpha \int_{\partial B} u \frac{\partial u}{\partial t} dV^{(n-1)}.$$

Левая часть этого равенства равна нулю в силу нулевых начальных условий, следовательно,

$$E^*(t) = E(t) + \frac{1}{2} \int_{\partial B} \alpha u^2 dV^{(n-1)} = \text{const}.$$

Поскольку $u|_{t=t_0} = 0$, $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0$, то $E^*(t) \equiv 0$, и, так как $\alpha > 0$, то $E(t) \equiv 0$. Из этого тождества, с учетом того, что $u|_{t=t_0} = 0$, следует, что $u \equiv 0$. Это означает, что при $\alpha = \text{const} > 0$ решение третьей краевой задачи единственно.

12.4. Непрерывная зависимость решений первой, второй и третьей краевых задач от начальных условий

Вопрос о непрерывной зависимости решений от начальных условий рассмотрим для одномерного случая. Пусть заданы семейства функций

$$\tilde{\varphi}(x, \delta), \quad \tilde{\psi}(x, \delta), \quad \delta \in \mathbb{R}, \quad (6.12.4)$$

такие, что $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{\psi}(x, 0) = \psi(x)$, то есть, при обращении параметра δ семейства в нуль, эти функции совпадают с функциями, определяющими начальные условия (6.12.2). С помощью $\tilde{\varphi}(x, \delta)$ и $\tilde{\psi}(x, \delta)$ можно изменять (иногда говорят «возмущать») начальные условия и следить за изменением решений соответствующей начально – краевой задачи, которая теперь формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \quad u|_{t=t_0} = \tilde{\varphi}(x, \delta), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \tilde{\psi}(x, \delta), \quad \mathcal{B}u = 0.$$

Здесь $\mathcal{B}u$, как и ранее, обозначает краевые условия, которые могут быть первого, второго или третьего типов. Решения этой задачи так же зависят от δ и, следовательно, образуют семейство $\tilde{u}(x, t, \delta)$.

Будем полагать, что семейства (6.12.4) удовлетворяют условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 \forall \delta \in]-\Delta, \Delta[\forall x \in]x_1, x_2[:$$

$$|\tilde{\varphi}(x, \delta) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad |\tilde{\psi}(x, \delta) - \psi(x)| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}(x, \delta) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| < \varepsilon.$$

Наша цель — показать, что при *малом* изменении начальных условий решения так же изменяются мало. Для этого достаточно показать, что разность $u_0 = \tilde{u}(x, t, \delta) - u(x, t)$ может быть сделана сколь угодно малой за счет надлежащего выбора Δ . Заметим, что в силу линейности волнового уравнения функция u_0 удовлетворяет однородному уравнению и начально – краевым условиям:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0, \\ u_0|_{t=t_0} = \tilde{\varphi}(x, \delta) - \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u_0}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \tilde{\psi}(x, \delta) - \psi(x), \quad \mathcal{B}u_0 = 0.$$

Как было показано выше, решению задачи u_0 отвечает функция $E_0(t)$ (6.12.3), абсолютная величина которой, $|E_0(t)|$, может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора Δ . Действительно,

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{a^2} (\tilde{\psi} - \psi)^2 \right] dx + \int_{t_0}^t I_0 dt.$$

В случае первой и второй краевых задач $I_0(t) = 0$. Следовательно,

$$|E_0(t)| \leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1| \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{a^2}\varepsilon^2 \right) = \varepsilon_1.$$

В случае третьей краевой задачи,

$$\begin{aligned} I_0(t) &= - \left[\left(\alpha \frac{\partial u_0}{\partial t} u_0 \right) \Big|_{x=x_1} + \left(\alpha \frac{\partial u_0}{\partial t} u_0 \right) \Big|_{x=x_2} \right] = \\ &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[(\alpha u_0^2) \Big|_{x=x_1} + (\alpha u_0^2) \Big|_{x=x_2} \right], \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t I_0 dt &\leq \frac{1}{2} \left[(\alpha u_0^2) \Big|_{x=x_1} + (\alpha u_0^2) \Big|_{x=x_2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\alpha (\tilde{\psi} - \psi)^2 \right) \Big|_{x=x_1} + \left(\alpha (\tilde{\psi} - \psi)^2 \right) \Big|_{x=x_2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае $|E_0(t)|$ будет сколь угодно малой величиной.

Теперь дадим оценки для абсолютной величины решения u_0 . В случае первой краевой задачи, используя неравенство Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |u_0| &\leq \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \leq \sqrt{x_2 - x_1} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx} \leq \\ &\leq \sqrt{x_2 - x_1} \sqrt{2E(t)} < \varepsilon_2. \quad (6.12.5) \end{aligned}$$

Поскольку, за счет выбора Δ , значение $E(t)$ может быть сделано сколь угодно малым, то и $|u_0|$ так же будет малой величиной.

В случае второй и третьей краевых задач вместо (6.12.5) имеем

$$|u_0 - u_0|_{x=x_1} < \varepsilon_2.$$

В этих случаях для оценки $|u_0|$ следует получить оценку $u_0|_{x=x_1}$. Это можно сделать следующим образом:

$$\begin{aligned} u_0|_{x=x_1}(x_2 - x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} u \, dx + \int_{x_1}^{x_2} (u|_{x=x_1} - u) \, dx \leq \\ &\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} u \, dx \right| + \varepsilon_2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Учитывая неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} u \, dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \leq \sqrt{x_2 - x_1} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dx} \leq \\ &\leq a\sqrt{x_2 - x_1} \sqrt{2E(t)}, \end{aligned}$$

получаем

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} u \, dx \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} u|_{t=t_0} \, dx \right| + \left| \int_{t_0}^t a\sqrt{x_2 - x_1} \sqrt{2E(\tau)} \, d\tau \right|.$$

Следовательно, поскольку $|\tilde{\psi}(x, \delta) - \psi(x)| < \varepsilon$, то величина $\left| \int_{x_1}^{x_2} u \, dx \right|$, за счет выбора Δ , может быть сделана сколь угодно малой. Из этого вытекает, что и $|u|_{x=x_1}|$ может быть сделана сколь угодно малой, а, значит, то же можно сказать относительно $|u_0|$.

Таким образом, доказано, что для первой, второй и третьей краевых задач (при условии $\alpha = \text{const} > 0$) малые изменения начальных условий вызывают малые изменения решений. Это свойство называется **устойчивостью решений**.

12.5. Решение одномерного волнового уравнения для неограниченной области

Эту задачу можно истолковать как задачу о поперечных колебаниях неограниченной струны. Дифференциальное уравнение и начальные

условия формулируются следующим образом (без потери общности примем $t_0 = 0$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi. \quad (6.12.6)$$

Функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ заданы на всей числовой оси, функция $f = f(x, t)$ задана в полуплоскости $\mathbb{R} \times]0, \infty[$, искомая функция $u = u(x, t)$ также должна быть определена на $\mathbb{R} \times]0, \infty[$. Будем полагать, что функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а $\psi(x)$ имеет непрерывную производную.

Вначале рассмотрим однородное уравнение, $f \equiv 0$. Метод построения решения, который будет использован, называется **методом Д'Аламбера**, или **методом характеристических переменных**. Уравнение характеристик для (6.12.6) имеет вид

$$a^2 dt^2 - dx^2 = 0.$$

Его решения определяют два семейства характеристик:

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}.$$

Если использовать их в качестве новых (характеристических) переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

то уравнение из (6.12.6) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Общее решение этого уравнения дается суммой

$$u(\xi, \eta) = \vartheta(\xi) + \omega(\eta).$$

Здесь ϑ , ω — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. В исходных переменных x , t решение принимает вид

$$u(x, t) = \vartheta(x - at) + \omega(x + at).$$

Говорят, что первое слагаемое характеризует прямую волну, а второе — обратную. Это связано с тем, что решение $\vartheta(x - at)$ определяет распространение начального возмущения струны вдоль положительного направления оси $0x$.

Для того, чтобы найти явный вид функций ϑ , ω , подставим их в начальные условия:

$$\begin{cases} \vartheta(x) + \omega(x) = \varphi(x), \\ -a\vartheta'(x) + a\omega'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Интегрирование второго равенства дает

$$-a\vartheta(x) + a\omega(x) = \int_0^x \psi(y) dy + aC,$$

где C — постоянная интегрирования. Из полученных соотношений находим

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \frac{1}{2} \left[\varphi(x) - \frac{1}{a} \int_0^x \psi(y) dy - C \right], \\ \omega(x) &= \frac{1}{2} \left[\varphi(x) + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(y) dy + C \right]. \end{aligned}$$

Складывая полученные результаты, приходим к формуле для $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x - at) + \varphi(x + at) - \frac{1}{a} \int_0^{x-at} \psi(y) dy + \frac{1}{a} \int_0^{x+at} \psi(y) dy \right].$$

Объединяя два интеграла в один, получаем решение задачи для однородного одномерного волнового уравнения, называемое **интегралом Д'Аламбера**:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. \quad (6.12.7)$$

Заметим, что из способа его построения следует, что оно единственно и дважды непрерывно дифференцируемо. Кроме того, интегральная форма его представления показывает устойчивость решения, то есть, если функции φ и ψ изменяются на малую величину, то решение, полученное по формуле Д'Аламбера, также изменится на малую величину.

Теперь перейдем к построению решения неоднородного уравнения для произвольной правой части $f = f(x, t)$. В результате перехода к характеристическим переменным ξ, η , неоднородное уравнение (6.12.6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{4a^2} \tilde{f},$$

где $\tilde{f} = \tilde{f}(\xi, \eta) = f \Big|_{x=\frac{\xi+\eta}{2}, t=\frac{\eta-\xi}{2a}}$. Частное решение u_* этого уравнения может быть получено повторным интегрированием по переменным ξ и η :

$$u_* = -\frac{1}{4a^2} \int_0^\xi \int_0^\eta \tilde{f}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta}. \quad (6.12.8)$$

Однако определенное таким образом решение u_* не обращается в нуль при $t = 0$ и для построения задачи Коши с заданными начальными данными необходимо учитывать значения $u_*|_{t=0}$. Представление частного решения можно сделать более удобным, если изменить область интегрирования на плоскости x, t . Для построения частного решения, которое обращается в нуль вместе со своей производной по переменной t при $t = 0$, возьмем в качестве области интегрирования треугольник с основанием на оси t и сторонами на характеристиках. Тогда частное решение может быть записано в виде

$$u_* = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau, \quad (6.12.9)$$

а решение начальной задачи — в форме

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau.$$

Осуществим замену переменных в (6.12.9), определив новую переменную r как $r = a(t - \tau)$. Тогда выражение для u_* может быть записано в виде

$$u_* = \frac{1}{2a} \int_0^{at} dr \int_{x-r}^{x+r} f\left(y, t - \frac{r}{a}\right) dy.$$

Функция, определенная этим равенством, называется **запаздывающим потенциалом**, поскольку значения подинтегрального выражения при вычислении интеграла берутся в «прошедшие» моменты $t - \frac{r}{a}$.

Пример 6.50. Пусть $f(x, t) = x + t$. Тогда частное решение, вычисленное по формуле (6.12.8), имеет вид:

$$u_* = -\frac{1}{4a^2} \left\{ \int_0^\xi \int_0^\eta (x + t) \Big|_{x=\frac{\xi+\eta}{2}, t=\frac{\eta-\xi}{2a}} d\hat{\xi} d\hat{\eta} \right\} \Big|_{\substack{\xi=x-at, \\ \eta=x+at}} = \frac{(t+x)}{8a^2} (a^2 t^2 - x^2).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_* = -\frac{1}{a^2} (t + x).$$

Вместе с тем, при $t = 0$, u_* и его производная по t не обращаются в нуль:

$$u_*|_{t=0} = -\frac{x^3}{8a^2}, \quad \frac{\partial u_*}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{x^2}{8a^2}.$$

Эти значения необходимо учитывать при нахождении части решения, соответствующей однородной задаче. С другой стороны, формула (6.12.9) дает

$$u_* = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} (y + \tau) dy d\tau = \frac{1}{6} t^2 (t + 3x).$$

Это частное решение при $t = 0$ обращается в нуль вместе со своей производной:

$$u_*|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_*}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

12.6. Разрывные решения

До этого момента мы предполагали, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, определяющие начальные условия в (6.12.6), являются достаточно гладкими. Однако решение Д'Аламбера допускает обобщение, при котором эти функции и их производные могут иметь точки разрыва первого рода. В этих случаях формула Д'Аламбера так же дает решение, однако оно не будет дважды непрерывно дифференцируемым на характеристиках, проходящих через точки разрыва начальных данных. Если, например, $[\varphi]_\zeta$ представляет собой скачок начальной функции в точке $x = \zeta$, то, как следует из (6.12.7), решение $u(x, t)$ будет иметь скачок $\frac{[\varphi]_\zeta}{2}$ на характеристиках, выходящих из точки $x = \zeta$. Это означает, что в плоскости $0xt$ разрывы решений задачи Коши распространяются вдоль характеристик: скачок решения $u = u(x, t)$, который имел место в точке $x = \zeta$, «раздваивается» и распространяется вдоль оси $0x$ в обе стороны от ζ со скоростью a .

Соотношения для разрывов можно получить в явном виде. Для этого вычислим производные интеграла Д'Аламбера (6.12.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\varphi'(x-at) + \varphi'(x+at)}{2} + \frac{\psi(x+at) - \psi(x-at)}{2a}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= a \frac{\varphi'(x+at) - \varphi'(x-at)}{2} + \frac{\psi(x+at) + \psi(x-at)}{2}. \end{aligned}$$

Если рассматривать производные, входящие в эти соотношения, как односторонние, то в точках (конечных) разрывов получим **соотношения**

для разрывов на характеристике $\zeta = x + at$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\zeta} &= \frac{1}{2} [\varphi']_{\zeta} + \frac{1}{2a} [\psi]_{\zeta}, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\zeta} &= \frac{a}{2} [\varphi']_{\zeta} + \frac{1}{2} [\psi]_{\zeta}, \end{aligned}$$

и на характеристике $\xi = x - at$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\xi} &= \frac{1}{2} [\varphi']_{\xi} - \frac{1}{2a} [\psi]_{\xi}, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\xi} &= -\frac{a}{2} [\varphi']_{\xi} + \frac{1}{2} [\psi]_{\xi}. \end{aligned}$$

Пример 6.51. Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} h, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad \psi(x) \equiv 0,$$

где $h = \text{const} > 0$. Решение задачи Коши записывается в виде

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} = \begin{cases} \frac{h}{2}, & |x \pm at| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x \pm at| > \varepsilon. \end{cases}$$

Рис. 6.15 иллюстрирует это решение.

Пример 6.52. Пусть

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} h, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

где h , как и ранее, положительная постоянная. Решение задачи Коши дается интегралом Д'Аламбера в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy = \psi^*(x + at) - \psi^*(x - at),$$

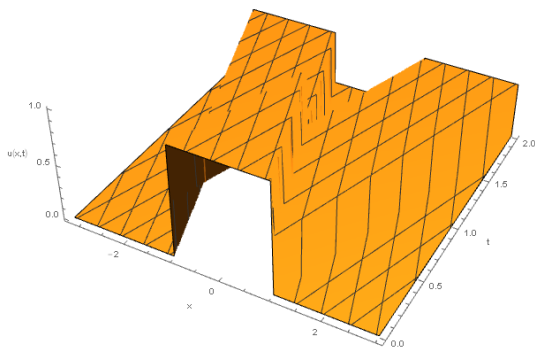


Рис. 6.15. Иллюстрация к Примеру 6.51

где

$$\psi^*(x) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^x \psi(y) dy = \begin{cases} 0, & x < -\varepsilon, \\ h(x + \varepsilon), & -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon, \\ 2\varepsilon h, & x > \varepsilon. \end{cases}$$

Рисунок 6.16 иллюстрирует это решение.

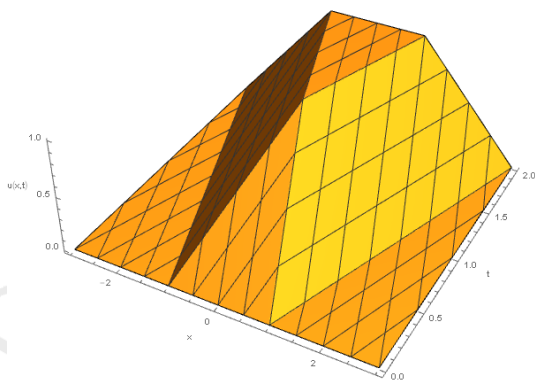


Рис. 6.16. Иллюстрация к Примеру 6.52

Пример 6.53. В этом примере будем истолковывать одномерное волновое уравнение как уравнение колебаний неограниченной струны. Пусть участку струны $|x - x_0| < \varepsilon$, которая находится в равновесии в момент времени t_0 , сообщена скорость h . Тогда, в соответствии с решением из предыдущего примера, уклонение точек струны от поло-

жениия равновесия определяется равенством

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} h dy, & |x - x_0| \leq a(t - t_0), \\ 0, & |x - x_0| > a(t - t_0). \end{cases}$$

С точки зрения физики можно полагать, что скорость h возникает за счет импульса I массовой силы $f(x, t)$, действующей на участке $|x - x_0| < \varepsilon$ в течение бесконечно малого промежутка времени от $t = t_0$ до $t = t_0 + \Delta t_0$:

$$I = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \rho f(y, t) dt dy = 2\varepsilon \rho h.$$

Плотность импульса (в силу теоремы о среднем) определяется соотношением:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I}{2\varepsilon} = \rho \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} f(x_0, t) dt = \rho h.$$

В частности,

$$h_{x_0, t_0} = f(x_0, t_0) \Delta t_0,$$

где h_{x_0, t_0} — скорость в точке x_0 , возникающая в момент времени t_0 за счет импульса, плотность которого определена выше. Соответствующее уклонение струны определяется интегралом Д'Аламбера следующим образом:

$$u_0(x, t, t_0) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-t_0)}^{x+a(t-t_0)} h_{y, t_0} dy = \frac{\Delta t_0}{2a} \int_{x-a(t-t_0)}^{x+a(t-t_0)} f(y, t_0) dy. \quad (6.12.10)$$

Это равенство позволяет «из физических соображений» найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения.

Если рассмотреть задачу Коши при нулевых начальных условиях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

и представить поперечную нагрузку (массовую силу) f как суперпозицию (наложение) непрерывно действующих импульсов, то искомое решение может быть найдено как суперпозиция решений (6.12.10), соответствующих различным значениям параметра t_0 , который изменяется от нуля до t . Записав сумму этих решений и переходя к пределу при $\Delta t_0 \rightarrow 0$, получим формулу, которая уже была выведена ранее другим способом:

$$u(x, t) = \int_0^t u_0(x, t, \tau_0) d\tau_0 = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau_0)}^{x+a(t-\tau_0)} f(y, \tau) dy d\tau.$$

В литературе такой способ вывода частного решения неоднородного одномерного уравнения называется **методом толчков**.

12.7. Решение трехмерного волнового уравнения

Перейдем теперь к обобщению одномерного решения Д'Аламбера на случай более высоких размерностей. Начнем с трехмерного случая, поскольку для него элементы решений имеют наглядную геометрическую интерпретацию, а двумерный случай разберем как следствие общих трехмерных решений.

Пусть $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция переменных x_1, x_2, x_3, t . Введем понятие **среднего значения** функции u относительно переменных x_1, x_2, x_3 :

$$Q(p, r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_{r,p}} u(y_1, y_2, y_3, t) d\sigma,$$

где $r > 0$, $p = (x_1, x_2, x_3)$, а $S_{r,p}$ — сфера радиуса r с центром в точке p . Установим некоторые свойства функции Q и ее производных.

Прежде всего отметим, что, в силу теоремы о среднем, и учитывая, что площадь сферы равна $4\pi r^2$,

$$Q|_{r=0} = u(x_1, x_2, x_3, t).$$

Первая производная функции Q может быть вычислена следующим об-

разом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial r} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{1,p}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial y_i} n_i d\sigma_1 = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_{r,p}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial y_i} n_i d\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{e_{r,p}} \Delta u dV. \end{aligned}$$

Здесь $S_{1,p}$ — сфера единичного радиуса, $d\sigma_1$ — элемент ее площади, n_1, n_2, n_3 — направляющие косинусы (компоненты единичной внешней нормали), $e_{r,p}$ — шар радиуса r с центром в точке p . Учитывая, что объем шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$, из последнего равенства получаем, что

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Еще раз выполняя операцию дифференцирования, приходим к выражению для второй производной Q :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} = -\frac{2}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_{r,p}} \Delta u d\sigma.$$

Лапласиан Q может быть вычислен следующим образом:

$$\Delta Q = \Delta \left(\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{1,p}} u d\sigma_1 \right) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_{1,p}} \Delta u d\sigma.$$

Учитывая все найденные производные, приходим к уравнению

$$\Delta Q - \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} = 0, \quad (6.12.11)$$

и условиям

$$Q|_{r=0} = u, \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Уравнение (6.12.11) называется **уравнением Дарбу**.

Пусть теперь $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi.$$

В силу этого уравнения, $\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, и, следовательно, среднее функции u удовлетворяет тому же соотношению:

$$\Delta Q = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}.$$

При этом уравнение (6.12.11) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} = 0,$$

и, после умножения на r , принимает форму одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2(rQ)}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2(rQ)}{\partial t^2} = 0.$$

Следовательно,

$$rQ(p, r, t) = \Phi(at + r) + \Psi(at - r),$$

где Φ и Ψ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Поскольку при $r = 0$ справедливо равенство $rQ = 0$, то

$$\Phi(at) + \Psi(at) = 0.$$

Таким образом, $\Phi(y) = -\Psi(y)$, и

$$Q(p, r, t) = \frac{1}{r} (\Phi(at + r) - \Phi(at - r)).$$

Теперь, учитывая, что $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial Q}{\partial r} = u$, получим

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = 2\Phi'(at).$$

Осталось лишь выразить $2\Phi'(at)$ через начальные условия, заданные для функции u . Поскольку

$$\begin{aligned}\frac{\partial(rQ)}{\partial r} &= \Phi'(at+r) + \Phi'(at-r), \\ \frac{\partial(rQ)}{\partial t} &= a(\Phi'(at+r) - \Phi'(at-r)),\end{aligned}$$

то, при $t=0$,

$$\begin{aligned}2\Phi'(r) &= \left(\frac{\partial(rQ)}{\partial r} + \frac{1}{a} \frac{\partial(rQ)}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{r,p}} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{r,p}} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} d\sigma \right) \Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

Таким образом, решение однородного трехмерного волнового уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, имеет следующий вид:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{at,p}} \frac{\varphi}{t} d\sigma + \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{at,p}} \frac{\psi}{t} d\sigma.$$

Перейдем теперь к построению решения неоднородного трехмерного волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi. \quad (6.12.12)$$

Поскольку уравнение (6.12.12) линейное, то его решение может быть представлено в виде суперпозиции некоторого частного решения u_* , соответствующего заданной правой части $-\frac{f}{a^2}$, и решения u_0 задачи Коши для однородного волнового уравнения, такой, что их сумма

$$u = u_* + u_0,$$

удовлетворяла бы заданным начальным условиям (6.12.12).

Предполагая, что f — дважды непрерывно дифференцируемая функция, будем отыскивать u_* в виде

$$u_* = \int_0^t \xi(p, t, \tau) d\tau, \quad p = (x_1, x_2, x_3), \quad (6.12.13)$$

где

$$\xi(p, t, \tau) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{a(t-\tau), p}} \frac{f(y_1, y_2, y_3, \tau)}{t - \tau} d\sigma.$$

Требуется показать, что u_* действительно является решением уравнения (6.12.12).

Заметим, что, поскольку функция $\xi(p, t, \tau)$ представлена в форме интеграла Пуассона, то она является дважды непрерывно дифференцируемым решением однородного волнового уравнения. Кроме того, из определения ξ следует, что

$$\xi(p, \tau, \tau) = 0, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{t=\tau} = f(p, \tau).$$

Следовательно,

$$u_*|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_*}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial \xi(p, t, \tau)}{\partial t} d\tau, \quad \left. \frac{\partial u_*}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Вычислим старшие производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_*}{\partial t^2} &= \frac{\partial \xi(p, t, \tau)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial^2 \xi(p, t, \tau)}{\partial t^2} d\tau = f(p, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 \xi(p, t, \tau)}{\partial t^2} d\tau, \\ \Delta u_* &= \int_0^t \Delta \xi(p, t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Используя полученные выражения, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \Delta u_* - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial t^2} &= \\ &= \int_0^t \left(\Delta \xi(p, t, \tau) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \xi(p, t, \tau)}{\partial t^2} \right) d\tau - \frac{1}{a^2} f(p, t) = -\frac{1}{a^2} f(p, t), \end{aligned}$$

поскольку выражение под знаком интеграла тождественно обращается в нуль (напомним, что $\xi(p, t, \tau)$ — решение однородного волнового уравнения). Таким образом, u_* удовлетворяет уравнению (6.12.12) и, кроме того, нулевым начальным условиям.

Полагая $\tau = t - \frac{r}{a}$, выражение для решения u_* (6.12.13) можно записать в форме запаздывающего потенциала

$$u_*(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{r < at} \frac{f(y_1, y_2, y_3, t - \frac{r}{a})}{r} dV,$$

где $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$. Итак, решение задачи Коши (6.12.12) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{at,p}} \frac{\varphi}{t} d\sigma + \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{at,p}} \frac{\psi}{t} d\sigma + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{r < at} \frac{f(y_1, y_2, y_3, t - \frac{r}{a})}{r} dV. \end{aligned}$$

12.8. Решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения

Решение неоднородного волнового уравнения для случая $n = 2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f(x_1, x_2, t)}{a^2},$$

может быть получено из построенного выше решения для $n = 3$ методом спуска. Для этого достаточно считать все функции, входящие в решение трехмерного волнового уравнения, функциями, зависящими только от двух пространственных переменных. В этом случае

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_{at,p}} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} dy_1 dy_2 + \\ & + \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_{at,p}} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} dy_1 dy_2 + \\ & + \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^{at} dr \iint_{\rho < r} \frac{f(y_1, y_2, t - \frac{r}{a})}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dy_1 dy_2, \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $K_{at,p}$ — круг радиуса at с центром в точке $p = (x_1, x_2)$.

Заметим, что если применить метод спуска еще раз, полагая, что решения зависят только от одной переменной x , то придем к полученному ранее решению Д’Аламбера неоднородного одномерного волнового уравнения.

12.9. Интегральные представления решений волнового уравнения

Решения волновых уравнений, построенные выше, предполагали весьма специальную форму области Ω в пространстве $n + 1$ измерений x_1, x_2, \dots, x_n, t , а именно, цилиндрическую (с образующими, параллельными оси $0t$). Теперь рассмотрим более общую ситуацию, не накладывая условия цилиндричности на Ω .

Итак, пусть Ω — произвольная область $(n + 1)$ -мерного пространства, ограниченная кусочно гладкой границей, которая, в свою очередь, представляет собой n -мерную гиперповерхность. Непосредственным вычислением легко убедиться в том, что для двух произвольных непрерывно дифференцируемых функций u, v выполняется тождество

$$v \square u - u \square v = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Это означает, что выражение $v \square u - u \square v$ представляет собой дивергенцию $(n + 1)$ -мерного векторного поля с компонентами

$$p_1 = v \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad p_n = v \frac{\partial u}{\partial x_n} - u \frac{\partial v}{\partial x_n}, \quad p_{n+1} = -v \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Применяя теорему Остроградского – Гаусса, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v \square u - u \square v) dx_1 \dots dx_n dt = \\ = - \int_{\partial \Omega} \left[\sum_{i=1}^n \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \nu_i - \left(v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) \nu_{n+1} \right] dS, \end{aligned} \quad (6.12.14)$$

где $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \nu_{n+1}$ — компоненты *внутренней* единичной нормали к гиперповерхности $\partial\Omega$. Поскольку последняя компонента, ν_{n+1} , отвечает оси $0t$ в $(n+1)$ -мерном пространстве, а производные по t входят в волновое уравнение со знаком минус, то соответствующие слагаемые в (6.12.14) так же отличаются знаком от остальных. В этой связи, для упрощения записи, наряду с внутренней нормалью введем понятие **внутренней конормали** N :

$$N_1 = \nu_1, \quad N_2 = \nu_2, \quad N_n = \nu_n, \quad N_{n+1} = -\nu_{n+1}.$$

Тогда формула (6.12.14) может быть записана более лаконично:

$$\int_{\Omega} (v \square u - u \square v) dx_1 \dots dx_n dt = - \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) dS. \quad (6.12.15)$$

Формула (6.12.15) позволяет получить интегральные представления для решений волнового уравнения при любых n . Рассмотрим ее более подробно для $n = 1, 2, 3$. Начнем с одномерного случая. Пусть область Ω ограничена двумя характеристиками и гладкой кривой, которая их пересекает в двух различных точках (Рис. 6.17). В качестве функции v

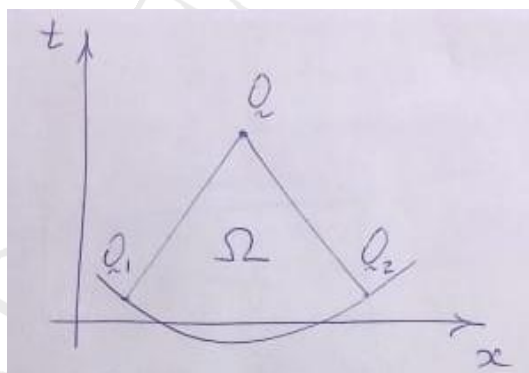


Рис. 6.17. Область Ω , ограниченная характеристиками

возьмем $v \equiv 1$. Тогда, учитывая, что $\square v = 0$, $\square u = -\frac{f}{a^2}$, получим

$$\iint_{\Omega} \left(-\frac{f(y, \tau)}{a^2} \right) dy d\tau = - \int_{Q_1 Q_2} \frac{\partial u}{\partial N} ds - \int_{Q_2 Q} \frac{\partial u}{\partial N} ds - \int_{Q Q_1} \frac{\partial u}{\partial N} ds, \quad (6.12.16)$$

где в правой части первый интеграл вычисляется по дуге Q_1Q_2 , а второй и третий — по отрезкам QQ_1 и Q_2Q , которые лежат на характеристиках. Поскольку на характеристиках направление конормали N совпадает с направлением векторов $\overrightarrow{QQ_1}$ и $\overrightarrow{Q_2Q}$, то

$$\int_{QQ_1} \frac{\partial u}{\partial N} ds = u(Q) - u(Q_1), \quad \int_{Q_2Q} \frac{\partial u}{\partial N} ds = u(Q) - u(Q_2).$$

Подставляя эти значения в правую часть (6.12.16), получим

$$u(Q) = \frac{u(Q_1) + u(Q_2)}{2} - \frac{1}{2} \int_{Q_1Q_2} \frac{\partial u}{\partial N} ds + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{f(y, \tau)}{a^2} dy d\tau. \quad (6.12.17)$$

Это представление решения является весьма общим. В частном случае, когда дуга лежит на оси $0x$, то

$$\left. \frac{\partial u}{\partial N} \right|_{t=0} = -\frac{1}{a} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0},$$

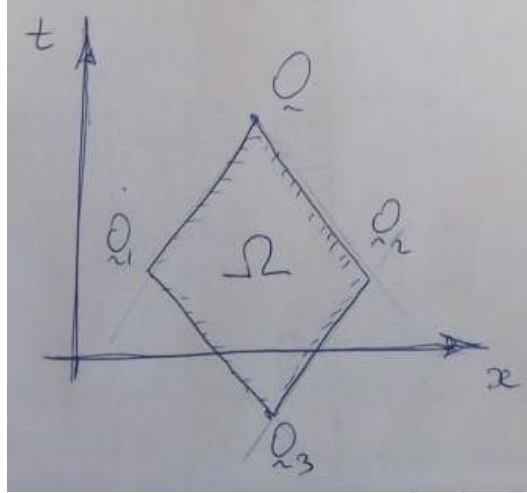
$$\iint_{\Omega} \frac{f(y, \tau)}{a^2} dy d\tau = \frac{1}{a^2} \int_0^{at} dr \int_{x-r}^{x+r} f(y, t - \frac{r}{a}) dy,$$

и выражение (6.12.17) принимает вид, ранее уже полученный другим способом:

$$u(x, t) = \frac{u(x - at) + u(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \left. \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} dy +$$

$$+ \frac{1}{2a^2} \int_0^{at} dr \int_{x-r}^{x+r} f(y, t - \frac{r}{a}) dy.$$

В другом частном случае, когда дуга Q_1Q_2 лежит на характеристиках, приходим к так называемой **характеристической задаче**, или **задаче Гурса**. В качестве примера рассмотрим область, изображенную на Рис. 6.18.

Рис. 6.18. Область Ω к задаче Гурса

В этом случае

$$\int_{Q_1 Q_2} \frac{\partial u}{\partial N} ds = \int_{Q_1 Q_3} \frac{\partial u}{\partial N} ds + \int_{Q_3 Q_2} \frac{\partial u}{\partial N} ds = u(Q_3) - u(Q_1) + u(Q_3) - u(Q_2),$$

и формула (6.12.17) принимает вид

$$u(Q) = u(Q_1) + u(Q_2) - u(Q_3) + \frac{1}{2a^2} \iint_{\Omega} f(y, \tau) dy d\tau.$$

Наконец, рассмотрим еще один частный случай, область Ω для которого представлена на Рис. 6.19.

Направления конормали N на характеристиках QQ_1 и QQ_2 совпадают, соответственно, с направлениями векторов $\overrightarrow{QQ_1}$ и $\overrightarrow{QQ_2}$. Поэтому,

$$\int_{Q_1 Q} \frac{\partial u}{\partial N} ds = \int_{QQ_1} \frac{\partial u}{\partial s} ds = u(Q_1) - u(Q),$$

$$\int_{Q_2 Q} \frac{\partial u}{\partial N} ds = \int_{QQ_2} \frac{\partial u}{\partial s} ds = u(Q_2) - u(Q).$$

При этом формула (6.12.17) принимает вид

$$u(Q) = \frac{u(Q_1) - u(Q_2)}{2} - \frac{1}{2} \int_{Q_1 Q_2} \frac{\partial u}{\partial N} ds - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{f(y, \tau)}{a^2} dy d\tau. \quad (6.12.18)$$

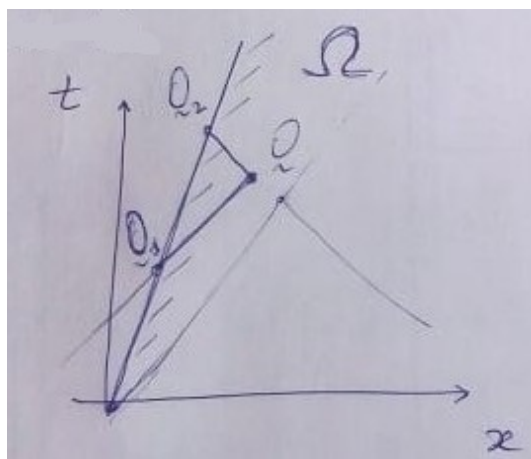


Рис. 6.19. Область Ω к задаче распространения возмущений

Частный случай полученного представления решения волнового уравнения поясняет известный физический эффект — **эффект Доплера**. Пусть $f(x, t) \equiv 0$, а начальные данные задаются соотношениями

$$u|_{x=\beta t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\beta t} = \cos \gamma t,$$

где $\gamma, \beta = \text{const}$ и $0 < \beta < 1$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{Q_1 Q_2} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{Q_1 Q_2} \nu_1, \quad \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{Q_1 Q_2} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{Q_1 Q_2} \cos \angle(N, \nu).$$

Но $\nu_1 = \cos \alpha$, $\cos \angle(N, \nu) = \cos 2(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos 2\alpha$, где α — угол, составленный прямой $t = \frac{x}{\beta}$ с осью $0x$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{Q_1 Q_2} &= -\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{Q_1 Q_2} \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{Q_1 Q_2} \frac{1 - \text{tg}^2 \alpha \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}}{1 + \text{tg}^2 \alpha \text{tg} \alpha} = \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{Q_1 Q_2} \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}}. \end{aligned}$$

Обозначим через t_{Q_1} и t_{Q_2} значения t , соответствующие точкам пересечения прямой $x = \beta t$ с характеристиками $(y - x) - a(t - \tau) = 0$ и $(y - x) + a(t - \tau) = 0$, проходящими через точку $Q(x, t)$. Тогда $t_{Q_1} = \frac{at-x}{1-\beta}$, $t_{Q_2} = \frac{at+x}{1+\beta}$.

Переходя в формуле (6.12.18) от интегрирования по дуге к интегрированию по переменной τ , получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t_{Q_1}}^{t_{Q_2}} (1 - \beta^2) \cos \gamma \tau \, d\tau = \\ = \frac{1 - \beta^2}{2\gamma} \left[\sin \frac{\gamma(at + x)}{1 + \beta} - \sin \frac{\gamma(at - x)}{1 - \beta} \right]. \quad (6.12.19)$$

Полученное равенство может быть истолковано с точки зрения физики как описание процесса распространения звуковых волн от точечного источника звука с частотой $\frac{\gamma}{2\pi}$, перемещающегося в направлении оси Ox с постоянной скоростью β . При этом соотношение (6.12.19) можно интерпретировать как наложение двух волн — прямой и обратной, распространяющихся с той же скоростью, что и в случае неподвижного источника звука, однако частота прямой волны увеличивается в отношении $\frac{1}{1-\beta}$, а частота обратной волны уменьшается в отношении $\frac{1}{1+\beta}$. Этот физический феномен известен под названием **эффект Доплера**. Гудок движущегося поезда является хорошим экспериментальным подтверждением этого эффекта.

Интегральное представление решения (6.12.17) может быть обобщено на многомерный случай. Кратко приведем основные результаты такого обобщения. Для упрощения записи будем полагать $a = 1$, чего всегда можно добиться за счет преобразования масштаба переменной t .

Рассмотрим случай $n = 2$. Напомним, что к числу вещественных характеристик двумерного волнового уравнения относится всякий круговой конус в трехмерном пространстве переменных x_1, x_2, t с осью, параллельной оси $0t$ и углом при вершине, обращенной в сторону положительной части оси $0t$, равным $\frac{\pi}{2}$. Такой конус будем называть **характеристическим конусом**. В качестве области Ω в пространстве x_1, x_2, t , будем рассматривать такую область, что характеристический конус с вершиной в любой ее точке Q , и поверхность S_Q , вырезаемая характеристическим конусом на поверхности S , ограничивают некоторую односвязную область Ω_Q , причем ось конуса пересекает S_Q в единственной точке. На Рис. 6.20 приведены примеры таких областей.

В области, ограниченной характеристическим конусом, зададим

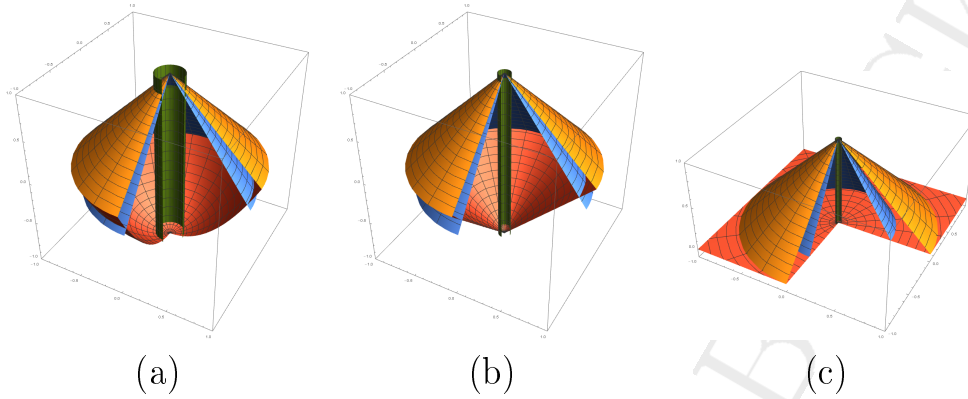


Рис. 6.20. Область, ограниченная характеристическим конусом, цилиндром, другой поверхностью

функцию

$$v = v(Q, Q') = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{t - t'}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{t - t'}{\rho}\right)^2 - 1} \right), \quad (6.12.20)$$

где $\rho = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}$. Непосредственным дифференцированием проверяется, что во всех точках указанной области, за исключением точек оси конуса, v является дважды непрерывно дифференцируемым решением однородного волнового уравнения. На оси характеристического конуса v обращается в бесконечность, а на самом конусе удовлетворяет условиям

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} = 0. \quad (6.12.21)$$

Наряду с характеристическим конусом рассмотрим конус с вершиной в той же точке Q , но с меньшим углом раствора. Такой конус может быть определен уравнением

$$\frac{t - t'}{\rho} = \operatorname{ctg} \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \eta,$$

где η — достаточно малое положительное число. Еще одним элементом построения будет круговой цилиндр, ось которого совпадает с осью кругового конуса (Рис. 6.20).

Вновь воспользуемся интегральным соотношением (6.12.15), взяв в качестве функции v решение однородного волнового уравнения (6.12.20),

а в качестве u — искомое решение неоднородного волнового уравнения:

$$\begin{aligned} \iiint_{\tilde{\Omega}} (-vf) dV &= - \iint_{\partial\tilde{\Omega}} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds = \\ &= - \iint_{\sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds - \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds - \\ &\quad - \iint_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds. \end{aligned} \quad (6.12.22)$$

Здесь $\tilde{\Omega}$ — область, ограниченная вспомогательным конусом, цилиндрической поверхностью и частью границы основного конуса, $\partial\tilde{\Omega}$ — граница области $\tilde{\Omega}$, которая может быть разделена на три непересекающиеся части: $\partial\tilde{\Omega} = \sigma \cup S \cup \Gamma$. При этом Γ представляет собой часть вспомогательного конуса, σ — часть цилиндрической поверхности, S — часть границы области Ω .

При $\eta \rightarrow 0$ поверхность Γ неограниченно приближается к характеристическому конусу, и, согласно (6.12.21), v равномерно стремится к нулю. Косинус конормальная производная, $\frac{\partial u}{\partial N}$, так же равномерно стремится к нулю, в чем можно убедиться с помощью следующих вычислений. Обозначим символом $\frac{\partial}{\partial s}$ дифференцирование вдоль образующих конуса, а символом l — расстояние от его вершины. Поскольку $v|_{\Gamma} = 0$, то, очевидно, $\frac{\partial v}{\partial s} \Big|_{\Gamma} = 0$. Вычислим конормальную производную $\frac{\partial v}{\partial N} \Big|_{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial N} \Big|_{\Gamma} &= \left[\frac{\partial v}{\partial s} \cos \angle(N, s) + \frac{\partial v}{\partial \nu} \cos \angle(N, \nu) \right] \Big|_{\Gamma} = \\ &= - \frac{1}{2\pi l} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \left(\operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 1} \right) \cos \angle(N, \nu) = \\ &= \frac{1}{2\pi l} \frac{\cos \angle(N, \nu)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 1}} \frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{2\pi l} \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 1}} \frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{2\pi l \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial v}{\partial N} \Big|_{\Gamma} = 0$. Поэтому при неограниченном приближении вспомогательного конуса к характеристическому, последний

интеграл в правой части (6.12.22) стремится к нулю.

Для вычисления первого интеграла в правой части равенства (6.12.22), который соответствует цилиндрической поверхности радиуса $\rho = \varepsilon$, найдем значения v и $\frac{\partial v}{\partial N}$ на ней:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{t-t'}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)^2 - 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} \left(t-t' + \sqrt{(t-t')^2 - \varepsilon^2} \right) = O\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial N} = \frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t-t'}{\rho}\right)^2 - 1}} \frac{t'-t}{2\pi\rho^2} = \frac{t'-t}{2\pi\rho\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}}.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\begin{aligned} -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds &= \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{t-\varepsilon} u \frac{(t-t')dt'}{2\pi\sqrt{(t-t')^2 - \varepsilon^2}} = -\int_0^t u(x_1, x_2, t') dt'. \end{aligned}$$

Учитывая все полученные результаты, запишем интегральное соотношение (6.12.22) при $\eta \rightarrow 0$ (то есть, при $\tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^t u(x_1, x_2, t') dt' &= \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N} \right) ds + \\ &+ \iiint_{\Omega} v(x_1, x_2, t; x'_1, x'_2, t') f(x'_1, x'_2, t') dx'_1 dx'_2 dt'. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное равенство по t , приходим к **основной ин-**

тегральной формуле:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N} \right) ds + \right. \\ \left. + \iiint_{\Omega} v(x_1, x_2, t; x'_1, x'_2, t') f(x'_1, x'_2, t') dx'_1 dx'_2 dt' \right].$$

Если поверхность S совпадает с плоскостью $t = 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial N} \Big|_{t'=0} = - \frac{\partial u}{\partial t'} \Big|_{t'=0}, \quad \frac{\partial v}{\partial N} \Big|_{t'=0} = - \frac{\partial v}{\partial t'} \Big|_{t'=0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - \rho^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S u \frac{\partial v}{\partial N} ds = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\rho < t} \frac{u(x'_1, x'_2, 0) dx'_1 dx'_2}{2\pi\sqrt{t^2 - \rho^2}},$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \iint_S v \frac{\partial u}{\partial N} ds = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\rho < t} v \frac{\partial u}{\partial t'} \Big|_{t'=0} dx'_1 dx'_2 =$$

$$= \iint_{\rho < t} \frac{\partial u(x'_1, x'_2, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{dx'_1 dx'_2}{2\pi\sqrt{t^2 - \rho^2}} + \int_{\rho=t} v \frac{\partial u}{\partial t'} \Big|_{t'=0} d\gamma,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} v f dx'_1 dx'_2 dt' =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t dt' \iint_{\rho < t} v(x_1, x_2, t; x'_1, x'_2, t') f(x'_1, x'_2, t') dx'_1 dx'_2.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x_1, x_2, t; x'_1, x'_2, t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}},$$

$$v|_{t'=0, \rho=t} = 0,$$

приходим к представлению решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения, которое уже получили ранее иным способом:

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \iint_{\rho < t} \frac{u(x'_1, x'_2, 0)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dx'_1 dx'_2 + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{\rho < t} \left. \frac{\partial u(x'_1, x'_2, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \frac{dx'_1 dx'_2}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint_{\rho < t'} \frac{f(x'_1, x'_2, t - t')}{\sqrt{(t')^2 - \rho^2}} dx'_1 dx'_2.
 \end{aligned}$$

Для построения решения трехмерного волнового уравнения область Ω следует рассматривать в четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, t . Огибающая характеристических направлений в этом случае представляет собой гиперконус с вершиной в точке (x_1, x_2, x_3, t) и осью, параллельной оси t . Уравнение гиперконуса может быть записано в виде

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 - (t - t')^2 = 0, \quad t > t'.$$

Пусть Ω — область, ограниченная гиперконусом и некоторой гиперповерхностью S , а $\tilde{\Omega}$ — вспомогательная область, $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, ограниченная вспомогательным гиперконусом с вершиной и осью теми же, что и основного конуса, но с углом раствора на η меньшим, и гиперцилиндром, ось которого совпадает с общей осью конусов, а радиус может быть сколь угодно малым.

Рассмотрим функцию

$$v(x_1, x_2, x_3, t; x'_1, x'_2, x'_3, t') = \frac{1}{4\pi r} \left(\frac{t - t'}{r} - 1 \right), \quad (6.12.23)$$

где $r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$. Непосредственным вычислением проверяется, что эта функция является дважды непрерывно дифференцируемым решением однородного трехмерного волнового уравнения. Кроме того, на характеристическом гиперконусе выполняются условия

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} = 0.$$

Пусть u — решение неоднородного волнового уравнения, а v — функция, определяемая равенством (6.12.23). Подстановка этих функций в интегральное соотношение (6.12.15) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} & - \int_{\tilde{\Omega}} v(x_1, x_2, x_3, t; x'_1, x'_2, x'_3, t') f(x'_1, x'_2, x'_3, t') dx'_1 dx'_2 dx'_3 dt' = \\ & = - \iiint_{\sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds - \iiint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds. \end{aligned} \quad (6.12.24)$$

На поверхности гиперцилиндра σ справедливо равенство $\cos \angle(\nu, t) = 0$, и конормальную производную $\frac{\partial v}{\partial N}$ удобно вычислить в сферических координатах с полюсом в точке x_1, x_2, x_3 :

$$\frac{\partial v}{\partial N} = \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{t-t'}{4\pi r^2}, \quad ds = r^2 d\theta d\varphi dt'.$$

Это равенство позволяет представить первый из интегралов в правой части (6.12.24) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$\begin{aligned} & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\sigma} \left[-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{t-t'}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{t-t'}{4\pi\varepsilon^2} \right] \varepsilon^2 d\theta d\varphi dt' = \\ & = - \int_0^t (t-t') u(x_1, x_2, x_3, t') dt'. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (6.12.24) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-t') u(x_1, x_2, x_3, t') dt' = - \iiint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds + \\ & + \int_{\Omega} v(x_1, x_2, x_3, t; x'_1, x'_2, x'_3, t') f(x'_1, x'_2, x'_3, t') dx'_1 dx'_2 dx'_3 dt'. \end{aligned}$$

Дифференцируя это равенство дважды по t , приходим к основной интегральной формуле для трехмерного волнового уравнения:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\iiint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N} \right) ds + \int_{\Omega} v(x_1, x_2, x_3, t; x'_1, x'_2, x'_3, t') f(x'_1, x'_2, x'_3, t') dx'_1 dx'_2 dx'_3 dt' \right]. \quad (6.12.25)$$

Явное выражение для u можно получить, подставив выражение для v (6.12.23) в (6.12.25). Учитывая, что

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_S v \frac{\partial u}{\partial N} ds &= \iiint_S \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial N} ds, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} v f dx'_1 dx'_2 dx'_3 dt' &= \int_{\Omega} \frac{f}{4\pi r} dx'_1 dx'_2 dx'_3 dt', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial N} &= -\frac{t-t'}{4\pi r^2} \left(\frac{x'_1 - x_1}{r} N_1 + \frac{x'_2 - x_2}{r} N_2 + \frac{x'_3 - x_3}{r} N_3 \right) + \frac{1}{4\pi r} \nu_4 = \\ &= -\frac{t-t'}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial \nu} + \frac{1}{4\pi r} \nu_4, \end{aligned}$$

где $N_i = \cos \angle(N, x_i)$, $i = 1, 2, 3$, $\nu_4 = \cos \angle(\nu, t)$, приходим к следующему соотношению:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_S u \left(\frac{1}{4\pi r} \cos \angle(\nu, t) - \frac{t-t'}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial \nu} \right) ds - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_S \frac{\partial u}{\partial N} ds + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{f(x'_1, x'_2, x'_3, t')}{4\pi r} dx'_1 dx'_2 dx'_3 dt'. \quad (6.12.26)$$

Если в качестве гиперповерхности S взять гиперплоскость, определяемую уравнением $t = 0$, то

$$\cos \angle(\nu, t)|_S = 1, \quad \frac{\partial r}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = - \frac{\partial u}{\partial t'} \Big|_S,$$

и соотношение (6.12.26) принимает вид

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{t,p}} \frac{u(x'_1, x'_2, x'_3, 0)}{4\pi t} ds + \\ & + \iint_{S_{t,p}} \frac{\partial u(x'_1, x'_2, x'_3, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{ds}{4\pi t} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t dt' \iiint_{r < t-t'} \frac{f(x'_1, x'_2, x'_3, t')}{4\pi r} dx'_1 dx'_2 dx'_3. \end{aligned}$$

Полагая $t - t' = \tau$, и используя преобразование

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t dt' \iiint_{r < t-t'} \frac{f(x'_1, x'_2, x'_3, t')}{4\pi r} dx'_1 dx'_2 dx'_3 &= \int_0^t dt' \iint_{S_{t-t',p}} \frac{f ds}{4\pi(t-t')} = \\ &= \int_0^t d\tau \iint_{S_{\tau,p}} \frac{f(x'_1, x'_2, x'_3, t-\tau)}{4\pi\tau} ds, \end{aligned}$$

приходим к решению задачи Коши для трехмерного волнового уравнения, уже полученного ранее другим способом:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{t,p}} \frac{u(x'_1, x'_2, x'_3, 0)}{4\pi t} ds + \\ & + \iint_{S_{t,p}} \frac{\partial u(x'_1, x'_2, x'_3, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{ds}{4\pi t} + \iiint_{r < t} \frac{f(x'_1, x'_2, x'_3, t-r)}{4\pi r} dx'_1 dx'_2 dx'_3. \end{aligned}$$

13. Ряды и интегралы Фурье

13.1. Кусочно непрерывные функции

Определение 6.13. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется **кусочно непрерывной** на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, если существует конечное множество точек

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

таких, что сужение функции f на каждый из интервалов $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, непрерывно и односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_i+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_i-0} f(x),$$

существуют для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Пример кусочно непрерывной функции иллюстрируется на Рис. 6.21. Функция задана равенством

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 0.2, \\ 1 - x^2, & 0.2 \leq x < 0.4, \\ 0.3, & 0.4 \leq x < 0.6, \\ -x^3, & 0.6 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

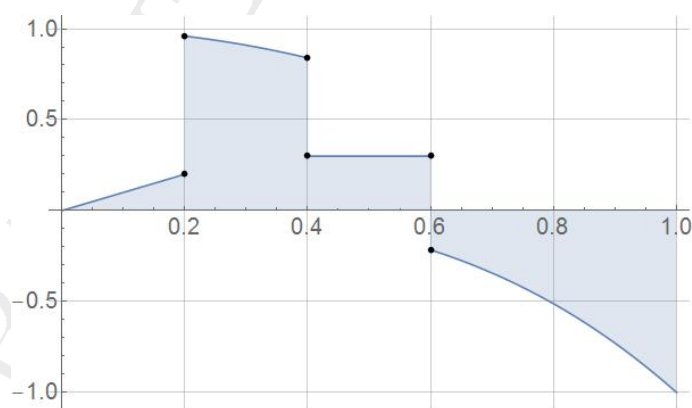


Рис. 6.21. Кусочно непрерывная функция

На Рис. 6.22 показаны графики функций, которые не являются кусочно непрерывными на $[0, 1]$. Функции, графики которых изображены

на Рис. 6.22а и 6.22с, не имеют конечных пределов в точках $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$. Функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, график которой изображен на Рис. 6.22b, является ограниченной, но не имеет предела при $x \rightarrow +0$. Наконец, функция, график которой изображен на Рис. 6.22d, имеет бесконечное множество интервалов, на которых она непрерывна.

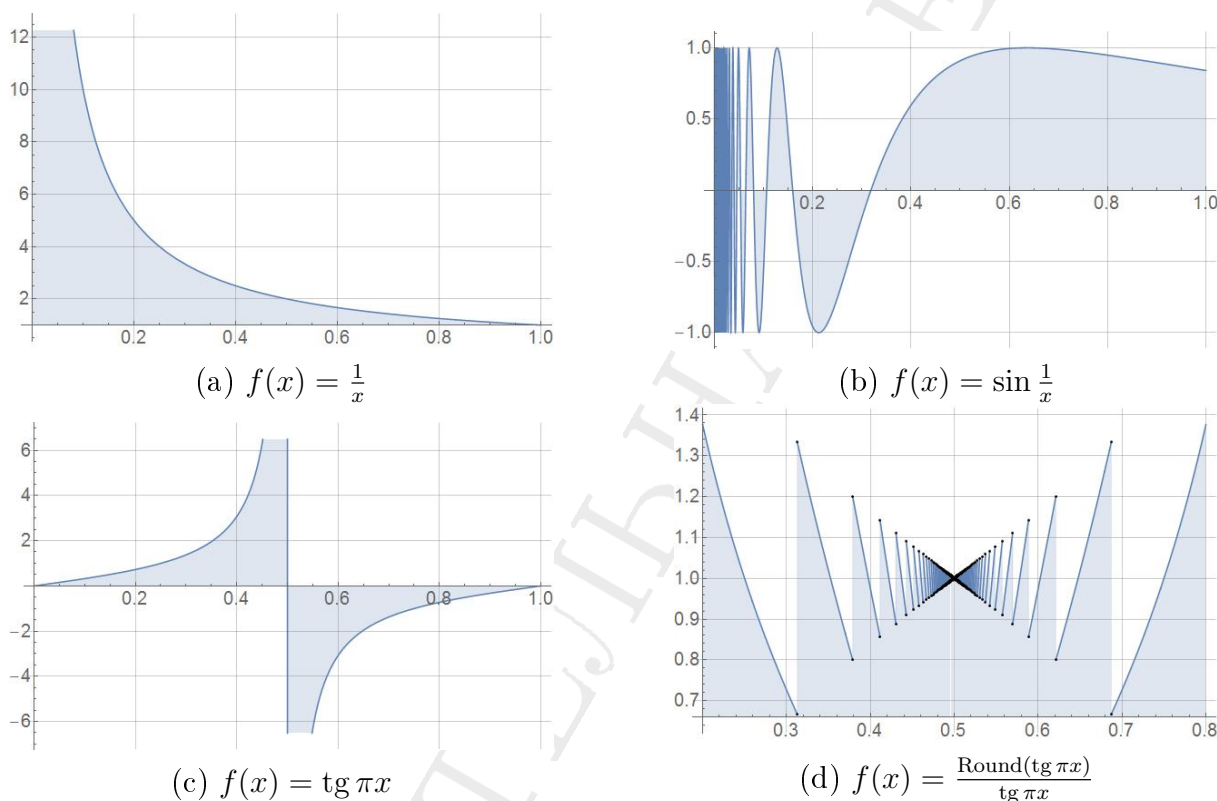


Рис. 6.22. Примеры функций, которые не являются кусочно непрерывными на отрезке $[0, 1]$

Если функция кусочно непрерывна на отрезке, то она ограничена и интегрируема на нём.

Сумма и произведение двух кусочно непрерывных функций, определённых над одним и тем же отрезком, являются кусочно непрерывными.

Определение 6.14. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется **кусочно непрерывно дифференцируемой** (порядка m) на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, если существует конечное множество точек

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

таких, что сужение функции f на каждый из интервалов $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, непрерывно дифференцируемы (порядка m) и односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_i + 0} f^{(k)}(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f^{(k)}(x),$$

существуют для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$, $k = 0, 1, \dots, m$.

На Рис. 6.23 показан график функции, не имеющей конечные производные в точках $x = 0$, $x = 1$, а потому не являющейся кусочно непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$.

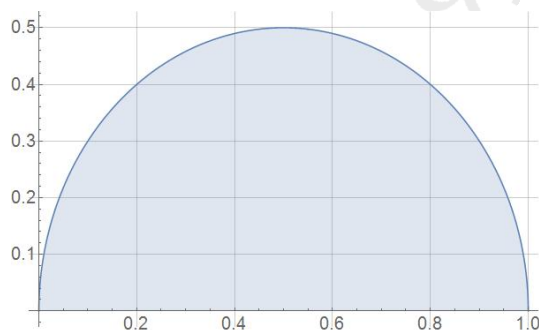


Рис. 6.23. Функция $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}$

Рис. 6.24 иллюстрирует пример функции, являющейся кусочно непрерывной на отрезке $[0, 1]$, но не кусочно непрерывно дифференцируемой на нем. На Рис. 6.24а изображена сама функция, а на Рис. 6.24b — ее производная.

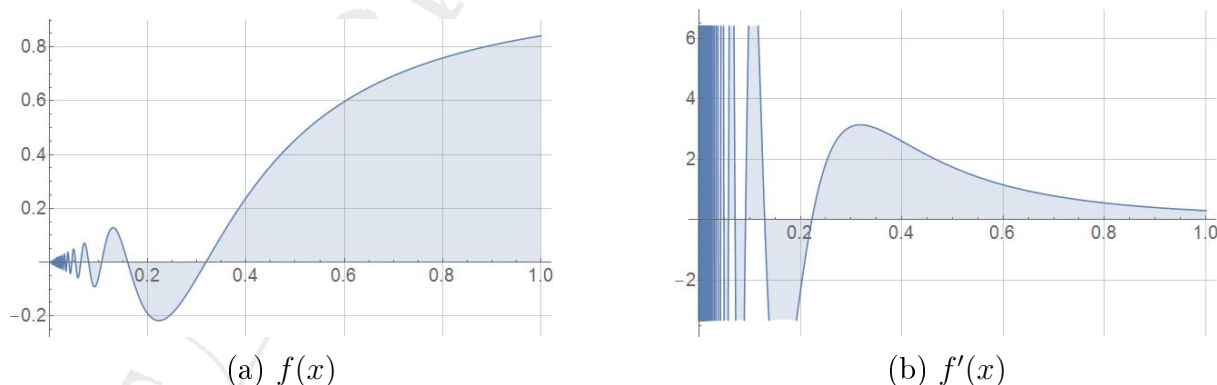


Рис. 6.24. Функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ и ее производная

13.2. Периодические функции

Определение 6.15. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *периодической* (с периодом $p \neq 0$), если

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x + p).$$

Период периодической функции определен неоднозначно. Действительно, если f – периодическая функция с периодом p , то

$$\begin{aligned} f(x + p) &= f(x), \\ f(x + 2p) &= f(x + p + p) = f(x + p) = f(x), \\ &\dots \\ f(x + np) &= f(x + (n - 1)p + p) = f(x + (n - 1)p) = \dots = f(x), \end{aligned}$$

для $n \in \mathbb{N}$. Далее,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - p + p) = f(x - p), \\ f(x) &= f(x - p) = f(x - 2p + p) = f(x - 2p), \\ &\dots \\ f(x) &= f(x - p) = f(x - 2p) = \dots = f(x - np), \end{aligned}$$

где также $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{Z} : f(x) = f(x + np),$$

и число np также является периодом функции f при любом $n \in \mathbb{Z}$. Если множество $\{p \in \mathbb{R} \mid p > 0, p \text{ — период } f\}$ периодов функции f имеет минимальный элемент, то он называется **фундаментальным периодом**.

Если функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – периодические, с одним и тем же периодом p , то их линейная комбинация будет периодической функцией:

$$F(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x), \quad F(x + p) = F(x).$$

Примеры периодических функций изображены на Рис. 6.25.

Широко известными примерами периодических функций являются тригонометрические функции $\sin x, \cos x$. Постоянная функция так же

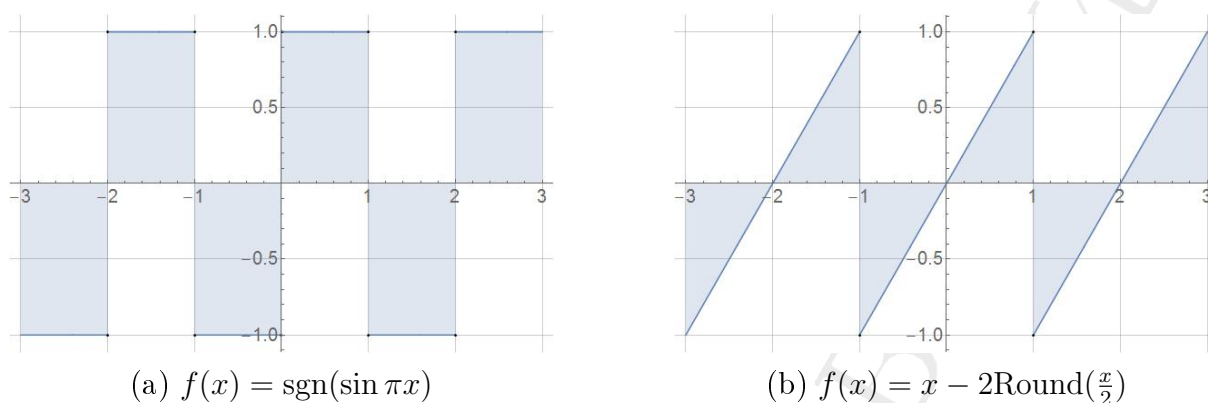


Рис. 6.25. Периодические функции

периодическая, причём любое число является её периодом. Ряды, образованные этими функциями

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots,$$

при условии, что они сходятся, представляют периодические функции (несмотря на то, что фундаментальные периоды у них различны, у членов ряда есть общий период — 2π). Такие ряды называют **тригонометрическими**. На Рис. 6.26 представлен график частичной суммы тригонометрического ряда.

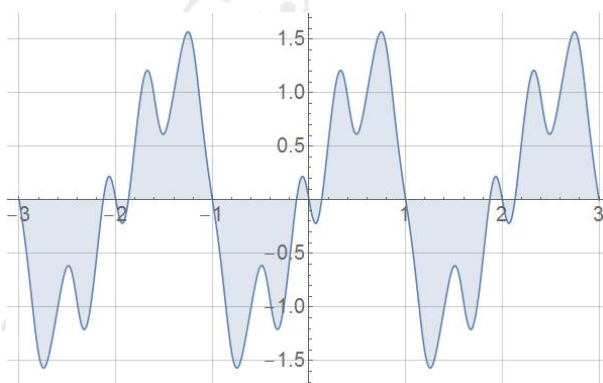


Рис. 6.26. Тригонометрический многочлен $f(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2 \sin k^2} \sin k\pi x$

13.3. Семейства ортогональных функций

Определение 6.16. Семейство $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ функций $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется **ортогональным** с весом $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

если

$$\forall m \neq n : \int_a^b f_m(x) f_n(x) q(x) dx = 0.$$

Для $m = n$ выражение

$$\|f_n\| = \left(\int_a^b f_n(x)^2 q(x) dx \right)^{1/2},$$

определяет **норму** элементов семейства $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Пример 6.54. $\{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ – семейство ортогональных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ с весом 1, так как

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Норма каждой функции из этого семейства равна $\sqrt{\pi}$.

Пример 6.55. $\{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ – семейство ортогональных функций на отрезке $[0, \pi]$ с весом 1, поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi/2, & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Норма каждой функции из этого семейства равна $\sqrt{\pi/2}$.

Пример 6.56. $\{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\cos nx\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{1\}$ – семейство ортогональных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ с весом 1, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0,$$

$$\forall m \in \mathbb{N} : \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot 1 \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot 1 \, dx = 0.$$

Нормы функций из этого семейства определяются соотношениями

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}, \quad \forall m \in \mathbb{N} : \|\sin mx\| = \|\cos mx\| = \sqrt{\pi}.$$

Пример 6.57. Многочлены Чебышёва первого рода $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, где

$$T_0(x) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} : T_n(x) = n \sum_{k=0}^n (-2)^k \frac{(k+n-1)!}{(2k)!(n-k)!} (1-x)^k,$$

образуют ортогональное семейство функций на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n = 0, \\ \pi/2, & m = n \neq 0. \end{cases}$$

Нормы элементов этого семейства

$$\|T_0(x)\| = \sqrt{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \|T_n(x)\| = \sqrt{\pi/2}.$$

Пример 6.58. *Полиномы Эрмита*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = \begin{cases} n! \sum_{l=0}^{n/2} \frac{(-1)^{n/2-l}}{(2l)!(\frac{n}{2}-l)!} (2x)^{2l}, & \text{для чётных } n, \\ n! \sum_{l=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^{(n-1)/2-l}}{(2l+1)!(\frac{n-1}{2}-l)!} (2x)^{2l+1}, & \text{для нечётных } n, \end{cases}$$

образуют ортогональное семейство на всей числовой оси $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ с весом e^{-x^2}

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \sqrt{\pi} n! 2^n, & m = n \end{cases}.$$

Нормы элементов семейства определяются формулой $\pi^{1/4} 2^{n/2} \sqrt{n!}$.

Определение 6.17. Семейство функций $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется **ортонормированным** с весом $q(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \int_a^b f_m(x) f_n(x) q(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Если элементы всех приведённых выше семейств разделить на соответствующие им нормы, то получим примеры ортонормированных семейств функций.

13.4. Ряды Фурье

Пусть $f(x)$ – кусочно непрерывная периодическая функция с периодом 2π . Мы можем формально ассоциировать с этой функцией тригонометрический ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где символ \sim означает некоторое единственным образом определённое соответствие между функцией $f(x)$ и семейством чисел

$$\{a_0\} \cup \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Для того, что бы предложить один из возможных способов установления такого соответствия, рассмотрим частичные суммы тригонометрического ряда

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Будем отыскивать такие значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, при которых частичная сумма оказалась бы наилучшей аппроксимацией заданной функции $f(x)$. Для оценки «качества» аппроксимации будем использовать интеграл

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx.$$

Вычисление первых производных дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_0} &= - \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \right\} dx, \\ \frac{\partial I}{\partial a_k} &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \right\} \cos kx dx, \\ \frac{\partial I}{\partial b_k} &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \right\} \sin kx dx. \end{aligned}$$

Из соотношений ортогональности получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial a_0} &= \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ \frac{\partial I}{\partial a_k} &= 2\pi a_k - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ \frac{\partial I}{\partial b_k} &= 2\pi b_k - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.\end{aligned}\tag{6.13.1}$$

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial b_k} = 0.$$

Следовательно, с учетом (6.13.1),

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.\end{aligned}\tag{6.13.2}$$

Вторые производные равны

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a_0^2} = \pi, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial a_k^2} = 2\pi, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial b_k^2} = 2\pi.$$

Все более старшие производные равны нулю. В этой связи, разложение I по формуле Тейлора имеет вид

$$I(a_0 + \delta a_0, a_1 + \delta a_1, \dots, b_n + \delta b_n) = I(a_0, a_1, \dots, b_n) + \delta I,$$

где

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 I}{\partial a_0^2} \delta a_0^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 I}{\partial a_k^2} \delta a_k^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial b_k^2} \delta b_k^2 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2!} \left\{ \pi \delta a_0^2 + \sum_{k=1}^n (2\pi \delta a_k^2 + 2\pi \delta b_k^2) \right\} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в точке, определенной равенствами (6.13.2), функционал I достигает минимума.

Пример 6.59. *Пример тригонометрических рядов, которые не являются рядами Фурье*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Для оценки сходимости воспользуемся неравенством

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| = \frac{|\sin \frac{n}{2} \sin \frac{n+1}{2}|}{\sin \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$$

которое доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin k &= \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{1}{2} \sin k = \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{1}{2} \cos \left(k + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \sin \left(k + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(k - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \\ &= \sin \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \sin \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n+1}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{n}{2} \sin \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \sin k = \frac{\sin \frac{n}{2} \sin \frac{n+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}}.$$

13.5. Сходимость рядов Фурье

Введем три различных определения сходимости:

1. Поточечная сходимость.
2. Равномерная сходимость.
3. Среднеквадратичная сходимость.

Определение 6.18. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится *поточечно* в интервале $a < x < b$ к функции $f(x)$, если для каждого значения переменной $x \in]a, b[$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - s_n(x)| = 0,$$

где $s_n(x)$ – частичная сумма ряда $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$.

Определение 6.19. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится *равномерно* на отрезке $a \leq x \leq b$ к функции $f(x)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - s_n(x)| = 0.$$

Очевидно, что из поточечной сходимости вытекает равномерная, но не наоборот.

Определение 6.20. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится в *среднеквадратичном* на отрезке $a \leq x \leq b$ к функции $f(x)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 dx = 0.$$

Заметим, что равномерная сходимость более сильная, чем поточечная и среднеквадратичная.

13.6. Неравенство Бесселя

Пусть $f(x)$ – непрерывная периодическая функция с периодом 2π . Очевидно, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx \geq 0.$$

Раскрывая скобки в подынтегральном выражении, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 dx.$$

Согласно определению коэффициентов Фурье,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\} dx = \\ &= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

В силу ортогональности,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\}^2 dx = \\ &= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \left\{ \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\} \geq 0.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx,$$

справедливому для любых n . Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

Это и есть **неравенство Бесселя**.

Поскольку левая часть неравенства не убывает с ростом n и, в силу неравенства Бесселя, ограничена сверху, то ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

сходится. Необходимыми условиями будут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

13.7. Равенство Парсеваля

Ряд Фурье сходится в среднеквадратичном к функции $f(x)$, если

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

Это равенство называется **равенством Парсеваля**. Оно может быть получено как следствие равномерной сходимости ряда Фурье к $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx &= \\ &= \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \frac{b_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right\} = \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

13.8. Лемма Римана – Лебега

Лемма 6.1. (Риман – Лебег) Если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

Доказательство. Предположим, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx. \quad (6.13.3)$$

Осуществим замену переменных $x = t + \pi/\lambda$. Тогда

$$\sin \lambda x = \sin \lambda(t + \pi/\lambda) = -\sin \lambda t,$$

и

$$I(\lambda) = - \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} f(t + \pi/\lambda) \sin \lambda t dt.$$

Поскольку t – переменная интегрирования, мы можем заменить её на x

$$I(\lambda) = - \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} f(x + \pi/\lambda) \sin \lambda x dx. \quad (6.13.4)$$

и сложить левые и правые части уравнений (6.13.3), (6.13.4). В итоге

получим

$$\begin{aligned}
 2I(\lambda) &= \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx - \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} f(x + \pi/\lambda) \sin \lambda x \, dx = \\
 &= - \int_{a-\pi/\lambda}^a f(x + \pi/\lambda) \sin \lambda x \, dx + \int_{b-\pi/\lambda}^b f(x) \sin \lambda x \, dx + \\
 &\quad + \int_a^{b-\pi/\lambda} \{f(x) - f(x + \pi/\lambda)\} \sin \lambda x \, dx.
 \end{aligned}$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нём, т.е. существует такое число M , что

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| < M.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{a-\pi/\lambda}^a f(x + \pi/\lambda) \sin \lambda x \, dx \right| &= \left| \int_a^{a+\pi/\lambda} f(x) \sin \lambda x \, dx \right| \leq \frac{\pi M}{\lambda}, \\
 \left| \int_{b-\pi/\lambda}^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| &\leq \frac{\pi M}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$|I(\lambda)| \leq \frac{\pi M}{\lambda} + \int_a^{b-\pi/\lambda} |f(x) - f(x + \pi/\lambda)| \, dx.$$

Поскольку $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нём, следовательно

$$\forall \lambda > \Lambda \forall x \in [a, b] : |f(x) - f(x + \pi/\lambda)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Возьмем в качестве Λ настолько большое число, что

$$\forall \lambda > \Lambda \forall x \in [a, b] : \frac{\pi M}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$|I(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Если функция кусочно непрерывна на отрезке, то процедуру доказательства следует повторить для каждого участка. \square

13.9. Теорема о поточечной сходимости

Теорема 6.2. Если функция $f(x)$ — кусочно непрерывно дифференцируемая и периодическая с периодом 2π , то для любой точки $x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x-0} f(y) + \lim_{y \rightarrow x+0} f(y) \right),$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Запишем частичные суммы в виде

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right\} f(t) \, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right\} f(t) \, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) \, dt, \end{aligned}$$

где функция $D_n(\theta)$ называется **ядром Дирихле**

$$D_n(\theta) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k\theta.$$

Из формулы Эйлера следует, что

$$D_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = e^{-in\theta} + \dots + 1 + \dots + e^{in\theta},$$

т.е. $D_n(\theta)$ — геометрическая прогрессия с первым членом $e^{-in\theta}$ и частным $e^{i\theta}$. Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, приходим к следующему выражению

$$D_n(\theta) = \frac{e^{-in\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{-(n+1/2)i\theta} - e^{(n+1/2)i\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \frac{\sin(n + 1/2)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}. \quad (6.13.5)$$

Возьмём $\theta = t - x$

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} D_n(\theta) f(x + \theta) d\theta.$$

Поскольку функции D_n и f имеют период 2π , то

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta) f(x + \theta) d\theta.$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} s_n(x) - \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x+0} f(y) + \lim_{y \rightarrow x-0} f(y) \right) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(\theta) \left(f(x + \theta) - \lim_{y \rightarrow x-0} f(y) \right) d\theta + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(\theta) \left(f(x + \theta) - \lim_{y \rightarrow x+0} f(y) \right) d\theta, \end{aligned}$$

которая, с учётом выражения (6.13.5) для ядра Дирихле, может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x+0} f(y) + \lim_{y \rightarrow x-0} f(y) \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 g_-(\theta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g_+(\theta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta d\theta, \end{aligned} \quad (6.13.6)$$

где

$$g_+(\theta) = \frac{f(x + \theta) - \lim_{y \rightarrow x+0} f(y)}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad g_-(\theta) = \frac{f(x + \theta) - \lim_{y \rightarrow x-0} f(y)}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Поскольку знаменатели этих выражений стремятся к нулю при $\theta \rightarrow 0$, то интегралы могут расходиться в этой точке. Однако, по предположению, функция $f(x)$ кусочно непрерывно дифференцируемая, следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} g_+(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(x + \theta) - f(x)}{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) = 2 \lim_{y \rightarrow x+0} f'(y), \\ \lim_{\theta \rightarrow -0} g_-(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow -0} \frac{f(x + \theta) - f(x)}{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) = 2 \lim_{y \rightarrow x-0} f'(y). \end{aligned}$$

Поскольку эти пределы существуют, то функции $g_+(\theta)$, $g_-(\theta)$ кусочно непрерывны на $] - \pi, \pi[$ и, следовательно, в силу леммы Римана-Лебега оба интеграла в (6.13.6) обращаются в ноль при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x-0} f(y) + \lim_{y \rightarrow x+0} f(y) \right),$$

и теорема доказана. □

Отметим, что в точке непрерывности кусочно непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ ряд Фурье сходится к значению функции в этой точке, а в точке конечного разрыва — к среднему её односторонних пределов.

Замечание 6.12. Для ядра Дирихле $D_n(\theta)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta) d\theta = 1.$$

13.10. Интеграл Фурье

Функции, которые не являются периодическими, не могут быть представлены рядами Фурье. Для них следует развить несколько иной подход, приводящий к интегралу Фурье.

Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[-l, l]$. Тогда она может быть представлена рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{l} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right) \right\},$$

где

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \left(\frac{k\pi x}{l} \right) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right) dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Подставляя выражения для коэффициентов в формулу для ряда, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-l}^l f(t) \cos \left(\frac{k\pi t}{l} \right) \cos \left(\frac{k\pi x}{l} \right) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-l}^l f(t) \sin \left(\frac{k\pi t}{l} \right) \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \left\{ \frac{k\pi}{l} (t - x) \right\} dt. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е. интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

сходится. Тогда величина

$$\frac{|a_0|}{2} = \frac{1}{2l} \left| \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

стремится к нулю при неограниченном увеличении l . Тогда, зафиксировав значение x и устремив l к бесконечности, $l \rightarrow \infty$, получим следующее выражение

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \left\{ \frac{k\pi}{l}(t-x) \right\} dt.$$

Пусть теперь

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда функция $f(x)$ может быть записана в виде

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} F(\alpha_k) \delta\alpha_k$$

где

$$F(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) \cos \{ \alpha(t-x) \} dt$$

Сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(\alpha_k) \delta\alpha$$

можно рассматривать как аппроксимацию площади, ограниченной кривой $y = F(\alpha)$. Формально сумма при $l \rightarrow \infty$, $\delta\alpha \rightarrow 0$ приближается к интегралу и мы приходим к формуле

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos (\alpha(t-x)) dt \right\} d\alpha,$$

которая определяет интегральное преобразование Фурье функции $f(x)$.

При получении этой формулы мы не основывались на строгих рассуждениях, и потому требуется её обоснование. Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 6.2. *Если функция $f(x)$ кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, b]$, то для любых $b > 0$*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +0} f(x).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_0^b f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx &= \\ &= \int_0^b \lim_{x \rightarrow +0} f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx + \int_0^b \frac{f(x) - \lim_{x \rightarrow +0} f(x)}{x} \sin \lambda x dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} f(x) \int_0^{\lambda b} \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^b \frac{f(x) - \lim_{x \rightarrow +0} f(x)}{x} \sin \lambda x dx. \end{aligned}$$

Поскольку $f(x)$ кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, b]$, то подынтегральное выражение в последнем интеграле ограничено при $\lambda \rightarrow \infty$ и, следовательно, в силу леммы Римана – Лебега этот интеграл стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +0} f(x),$$

поскольку

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

□

Теорема 6.3. Если $f(x)$ — кусочно непрерывно дифференцируемая функция на любом конечном отрезке и, кроме того, абсолютно интегрируема на $]-\infty, \infty[$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos k(t-x) dt \right\} dk = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow +0} f(x) + \lim_{x \rightarrow -0} f(x) \right).$$

Доказательство. Поскольку $|\cos k(t-x)| \leq 1$ и, по предположению об абсолютной интегрируемости,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt < \infty,$$

то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos k(t-x) dt < \infty$$

сходится для любых значений k и x . Следовательно, в повторном интеграле

$$I = \int_0^{\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos k(t-x) dt \right\} dk,$$

порядок интегрирования можно изменить. Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_0^{\lambda} \cos k(t-x) dk \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \lambda(t-x)}{t-x} dt = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{-M} + \int_{-M}^x + \int_x^M + \int_M^{\infty} \right\} f(t) \frac{\sin \lambda(t-x)}{t-x} dt \end{aligned}$$

Осуществляя подстановку $u = t - x$ приходим к интегралу

$$\int_x^M f(t) \frac{\sin \lambda(t-x)}{t-x} dt = \int_0^{M-x} f(u+x) \frac{\sin \lambda u}{u} du,$$

который стремится к

$$\frac{\pi}{2} \lim_{y \rightarrow x+0} f(y),$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ в силу доказанной выше леммы. Из аналогичных соображений следует, что второй интеграл при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к

$$\frac{\pi}{2} \lim_{y \rightarrow x-0} f(y).$$

Выбирая величину M достаточно большой, можно добиться того, что первый и последний интегралы окажутся меньше $\varepsilon/2$. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos k(t-x) dt \right\} dk = \frac{\pi}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x+0} f(y) + \lim_{y \rightarrow x-0} f(y) \right).$$

□

14. Разделение переменных

14.1. Идея метода разделения переменных

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A(\hat{x}, \hat{y}) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + B(\hat{x}, \hat{y}) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + C(\hat{x}, \hat{y}) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + D(\hat{x}, \hat{y}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + E(\hat{x}, \hat{y}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + F(\hat{x}, \hat{y}) \hat{u} = 0.$$

Ранее было показано, что за счёт замены переменных

$$x = \mathcal{X}(\hat{x}, \hat{y}), \quad y = \mathcal{Y}(\hat{x}, \hat{y}),$$

при условии

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\hat{x}, \hat{y})} \neq 0,$$

это уравнение может быть преобразовано к более простому (каноническому) виду

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u = 0, \quad (6.14.1)$$

причём, если в точке (x_0, y_0) ,

- $a(x_0, y_0) = -c(x_0, y_0)$, то уравнение имеет **гиперболический тип**,
- $a(x_0, y_0) = 0$ или $c(x_0, y_0) = 0$, то уравнение имеет **параболический тип**,
- $a(x_0, y_0) = c(x_0, y_0)$, то уравнение имеет **эллиптический тип**.

Предположим, что решение уравнения (6.14.1) можно представить в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0.$$

В результате подстановки такого представления для функции u в уравнение (6.14.1), оно преобразуется к виду

$$a(x, y)X''(x)Y(y) + c(x, y)X(x)Y''(y) + d(x, y)X'(x)Y(y) + e(x, y)X(x)Y'(y) + f(x, y)X(x)Y(y) = 0, \quad (6.14.2)$$

Если теперь предположить существование такой вещественнозначной функции $p(x, y)$, что $p > 0$ на всей области определения и

$$\begin{aligned} \frac{a(x, y)}{p(x, y)} &= a_1(x), & \frac{c(x, y)}{p(x, y)} &= b_1(y), & \frac{d(x, y)}{p(x, y)} &= a_2(x), \\ \frac{e(x, y)}{p(x, y)} &= b_2(y), & \frac{f(x, y)}{p(x, y)} &= a_3(x) + b_3(y), \end{aligned}$$

то уравнение (6.14.2) может быть записано следующим образом:

$$a_1(x)X''(x)Y(y) + b_1(y)X(x)Y''(y) + a_2(x)X'(x)Y(y) + b_2(y)X(x)Y'(y) + \{a_3(x) + b_3(y)\}X(x)Y(y) = 0.$$

Разделив полученное уравнение на $X(x)Y(y)$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \left\{ a_1(x) \frac{X''(x)}{X(x)} + a_2(x) \frac{X'(x)}{X(x)} + a_3(x) \right\} &= \\ &= - \left\{ b_1(y) \frac{Y''(y)}{Y(y)} + b_2(y) \frac{Y'(y)}{Y(y)} + b_3(y) \right\}, \quad (6.14.3) \end{aligned}$$

левая часть которого зависит только от переменной x , а правая — только от переменной y . Дифференцируя по x , приходим к равенству

$$\frac{d}{dx} \left\{ a_1(x) \frac{X''(x)}{X(x)} + a_2(x) \frac{X'(x)}{X(x)} + a_3(x) \right\} = 0.$$

Теперь интегрируем его по x . Имеем:

$$a_1(x) \frac{X''(x)}{X(x)} + a_2(x) \frac{X'(x)}{X(x)} + a_3(x) = \lambda,$$

где λ — константа, называемая **константой разделения**. Из уравнения (6.14.3) следует, что

$$b_1(y) \frac{Y''(y)}{Y(y)} + b_2(y) \frac{Y'(y)}{Y(y)} + b_3(y) = -\lambda.$$

Разделённые уравнения могут быть записаны в форме

$$a_1 X'' + a_2 X' + (a_3 - \lambda) X = 0,$$

и

$$b_1 Y'' + b_2 Y' + (b_3 + \lambda) Y = 0.$$

Замечание 6.13. При моделировании физических процессов решают не отдельные уравнения, а краевые задачи. В этой связи, помимо разделения переменных в уравнении, нужно также разделить переменные и в краевых условиях. Может случиться так, что констант интегрирования (в решениях соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений) будет больше, чем краевых условий для их определения. Тогда метод разделения переменных не приведет к желаемому результату.

14.2. Колебания ограниченной струны

Разделение переменных

Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0, \quad (6.14.4)$$

в области

$$0 < x < l, \quad t > 0,$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6.14.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6.14.6)$$

и краевыми условиями (**условия закрепления**)

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u(l, t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.14.7)$$

Используя метод разделения переменных, представим решение в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0.$$

Подстановка в волновое уравнение дает

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Следовательно, поскольку $XT \neq 0$,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Левая часть полученного равенства зависит только от x , а правая — от t , поэтому обе части являются постоянными. Приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad (6.14.8)$$

$$T'' - \lambda c^2 T = 0. \quad (6.14.9)$$

в которых λ — константа разделения. Разделение переменных в краевых условиях (6.14.7) дает

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0.$$

Поскольку для всех значений t функция $T(t)$ отлична от нуля, то

$$X(0) = 0.$$

Аналогично,

$$X(l) = 0.$$

Пришли к задаче на собственные значения (**задача Штурма – Лиувилля**)

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (6.14.10)$$

Для определения ее нетривиальных решений рассмотрим три случая:

$$\lambda > 0, \quad \lambda = 0, \quad \lambda < 0.$$

В первом случае общее решение дифференциального уравнения может быть представлено в виде

$$X(x) = C_1 e^{-x\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{x\sqrt{\lambda}},$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Для того, что бы удовлетворить краевым условиям, эти константы должны быть определены из системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-l\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{l\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы отличен от нуля, и потому система имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$. Поскольку нас интересуют только нетривиальные решения, то первый случай нам не подходит.

Во втором случае, при $\lambda = 0$, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 + C_2 x,$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Подстановка этого решения в краевые условия приводит к однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 + C_2 l = 0. \end{cases}$$

Вновь эта система имеет только тривиальные решения: $C_1 = C_2 = 0$.

Наконец, в третьем случае $\lambda < 0$ удобно ввести обозначение $\lambda = -\alpha^2$. Тогда общее решение дифференциального уравнения $X'' + \alpha^2 X = 0$ может быть представлено в виде

$$X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x.$$

Для выполнения краевого условия $X(0) = 0$ следует положить $C_1 = 0$. Второе условие приводит к уравнению относительно C_2 :

$$C_2 \sin \alpha l = 0.$$

Оно имеет нетривиальные решения ($C_2 \neq 0$), если

$$\sin \alpha l = 0.$$

Это — трансцендентное уравнение, которое имеет счётное множество корней

$$\alpha l = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

или

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

Величины λ_n называются **собственными значениями**, а функции

$$f_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

называются **собственными функциями**. Заметим, что отрицательным целым $m = -n$ будут соответствовать те же функции, что и n поскольку

$$\sin\left(\frac{-n\pi x}{l}\right) = -\sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Теперь решение задачи Штурма–Лиувилля (6.14.10) может быть записано в виде

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где A_n — некоторая константа.

Решение уравнения (6.14.9) может быть записано в следующей форме:

$$T_n(t) = B_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{l},$$

где B_n, D_n — некоторые константы.

Таким образом, функции

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(b_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + d_n \sin \frac{n\pi ct}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где $b_n = A_n B_n$, $d_n = A_n D_n$, удовлетворяют уравнениям (6.14.8), (6.14.9) и краевым условиям (6.14.7).

Поскольку уравнение (6.14.4) является линейным и однородным, то суммы

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(b_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + d_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

так же будут его решениями. Предельный переход $N \rightarrow \infty$ приводит к решению в форме ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + d_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (6.14.11)$$

которое будем называть **формальным решением** до тех пор, пока не доказана его сходимость и дифференцируемость. Подобное решение содержит счётный набор параметров $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Возможно ли распорядиться ими так, что бы удовлетворить начальным условиям? Для ответа на этот вопрос продифференцируем формальное решение по переменной t . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} \left(-b_n \sin \frac{n\pi ct}{l} + d_n \cos \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Подстановка полученных выражений в начальные условия приводит к следующим выражениям

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Эти равенства будут выполнены, если $f(x)$ и $g(x)$ можно представить рядами Фурье. Тогда

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad d_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Немного о физической терминологии. Каждый член записанного выше ряда может быть представлен в форме

$$u_n(x, t) = (b_n \cos \omega_n t + d_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{l},$$

которая называется ***n*-ой гармоникой**, соответствующей собственной **круговой частоте** ω_n . Совокупность всех частот образует дискретный спектр. Первая гармоника называется **фундаментальной**, а все последующие — **обертнами**. Круговая частота, отвечающая фундаментальной гармонике, определяется выражением

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{l}.$$

Ей соответствует угловая частота

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

где T — натяжение струны, а ρ — ее линейная плотность. Этот результат составляет фундаментальный закон музыкальных инструментов (**закон Мерсенна**, 1637 г.)

Если движение струны вызвано начальным отклонением от положения равновесия при нулевой начальной скорости (то есть, $f(x) \neq 0$, $g(x) \equiv 0$ в (6.14.5) и (6.14.6)), то решение представляется рядом, члены которого имеют вид

$$u_n(x, t) = b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Каждый такой член представляет **стоячую волну** с амплитудой $a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$, которая оказывается равной нулю в точках

$$x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, l.$$

Эти точки называются **узлами** *n*-ой гармоники. После элементарных тригонометрических преобразований гармоника может быть преобразована к форме

$$u_n(x, t) = \frac{b_n}{2} \left\{ \sin \frac{n\pi}{l} (x - ct) + \sin \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right\}.$$

Это означает, что стоячая волна может быть представлена как суперпозиция двух бегущих (в противоположных направлениях) волн, что соответствует решению Д'Аламбера.

В общем случае, при отличных от нуля начальном отклонении и скорости, выражение для гармоник может быть записано в виде

$$u_n(x, t) = e_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \left(\frac{n\pi ct}{l} - \varepsilon_n \right),$$

где

$$e_n = \sqrt{b_n^2 + d_n^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_n = \frac{d_n}{b_n}.$$

Полная энергия колеблющейся струны

Кинетическая энергия колеблющейся струны в момент времени t может быть определена интегрированием по x . В виду ортогональности системы $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, полная кинетическая энергия равна сумме значений энергии на каждой гармонике

$$K_n = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx,$$

где ρ — линейная плотность струны. Аналогично, **потенциальная энергия** определяется интегралом

$$V_n = \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 dx,$$

где T — натяжение струны. Подстановка явных выражений для гармоник и последующее интегрирование дают

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{1}{2} \rho \left(\frac{n\pi c e_n}{l} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi ct}{l} - \varepsilon_n \right) \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{\rho c^2 \pi^2}{4l} n^2 e_n^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi ct}{l} - \varepsilon_n \right) = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 e_n^2 \sin^2 (\omega_n t - \varepsilon_n), \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{l}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{1}{2}T \left(\frac{n\pi e_n}{l} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi ct}{l} - \varepsilon_n \right) \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \\
&= \frac{T\pi^2}{4l} n^2 e_n^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi ct}{l} - \varepsilon_n \right) = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 e_n^2 \cos^2 (\omega_n t - \varepsilon_n).
\end{aligned}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии определяет **полную энергию** для n -той гармоники

$$E_n = K_n + V_n = \frac{1}{4} \rho \omega_n^2 e_n^2 = \text{const.}$$

Полная энергия колеблющейся струны вычисляется как сумма

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n = \frac{\rho l}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 e_n^2,$$

которая так же оказывается постоянной, ибо $E_n = \text{const.}$

Обоснование формального решения

Отметим, что если в (6.14.6) положить $g(x) \equiv 0$, то решению (6.14.11) соответствует формальный ряд

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi ct}{l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

а если в (6.14.5) положить $f(x) \equiv 0$, то придем к формальному ряду

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

В силу линейности задачи сумма этих двух решений даёт общее решение.

Предположим, что $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, l]$ функция. Тогда её можно разложить в ряд Фурье, который равномерно сходится к $f(x)$ на $[0, l]$. С использованием тригонометрического тождества

$$\sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} = \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{l} (x - ct) + \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{l} (x + ct),$$

решение $u_1(x, t)$ может быть записано в виде

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}(x - ct) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}(x + ct).$$

Определим функцию

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

которая является нечётным продолжением функции $f(x)$ на всю числовую ось:

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, l] : F(x) &= f(x), \\ \forall x \in \mathbb{R} : F(-x) &= -F(x), \quad F(x \pm 2l) = F(x). \end{aligned}$$

Теперь функция $u_1(x, t)$ может быть записана в виде

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} (F(x - ct) + F(x + ct)).$$

Покажем, что $u_1(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям. Действительно,

$$u_1(0, t) = \frac{1}{2} \{F(-ct) + F(ct)\} = \frac{1}{2} \{-F(ct) + F(ct)\} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_1(l, t) &= \frac{1}{2} \{F(l - ct) + F(l + ct)\} = \frac{1}{2} \{F(-l - ct) + F(l + ct)\} = \\ &= \frac{1}{2} \{-F(l + ct) + F(l + ct)\} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\forall x \in [0, l] : u_1(x, 0) = \frac{1}{2} \{F(x) + F(x)\} = F(x) = f(x),$$

то начальные условия $u_1(x, 0) = f(x)$ также выполняются.

Поскольку, по условию, $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$, то производная $F'(x)$ существует и непрерывна на всей числовой оси. Следовательно,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \{-cF'(x - ct) + cF'(x + ct)\},$$

и

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \frac{1}{2} \{-cF'(x) + cF'(x)\} = 0.$$

Таким образом, начальное условие $\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0$ выполняется.

Осталось лишь показать, что $u_1(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению. Однако, для этого потребуется дополнительно предположить, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, l]$ и $f''(0) = f''(l) = 0$. Тогда функция $F''(x)$ непрерывна на всей числовой оси и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}c^2 \{F''(x - ct) + F''(x + ct)\}, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \{F''(x - ct) + F''(x + ct)\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

Теперь покажем, что второе формальное решение, $u_2(x, t)$, так же удовлетворяет краевым условиям, начальным данным, заданным для этого решения, и дифференциальному уравнению. Предположим, что функция, задающая начальные значения производных по t для $u_2(x, t)$, т.е. функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, l]$ и удовлетворяет условиям $g(0) = g(l) = 0$. Тогда её ряд Фурье сходится равномерно на $[0, l]$. Вводя новые обозначения для коэффициентов $c_n = \frac{n\pi c}{l}d_n$, запишем $u_2(x, t)$ в виде

$$u_2(x, t) = \frac{l}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \sin \frac{n\pi ct}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

В силу абсолютной сходимости, этот ряд можно почленно дифференцировать, следовательно,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi ct}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Из тригонометрического тождества следует, что

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l}(x - ct) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l}(x + ct).$$

Рассмотрим функцию $G(x)$:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Она является нечетным периодическим продолжением функции $g(x)$ на всю числовую ось. С помощью функции G производную u_2 по t можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2} \{G(x - ct) + G(x + ct)\}.$$

В результате интегрирования получим

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t G(x - c\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t G(x + c\tau) d\tau = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_2(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) &= G(x). \end{aligned}$$

Но, поскольку

$$\forall x \in [0, l] : G(x) = g(x),$$

то

$$\forall x \in [0, l] : u_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

Таким образом, функция u_2 удовлетворяет начальным условиям. То, что она удовлетворяет и краевым условиям, доказывается следующим образом

$$\begin{aligned} u_2(0, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t G(-c\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t G(c\tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t G(c\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t G(c\tau) d\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(l, t) &= \frac{1}{2} \int_0^l G(l - c\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t G(l + c\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^l G(-l - c\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t G(l + c\tau) d\tau = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^l G(l + c\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t G(l + c\tau) d\tau = 0.
 \end{aligned}$$

Наконец, покажем, что $u_2(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению. Поскольку, по условию, g' непрерывна на $[0, l]$, то G' существует, и

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{c}{2} \{-G'(x - ct) + G'(x + ct)\}.$$

Дифференцируя $u_2(x, t)$ по x , получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi ct}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} = \\
 &= \frac{1}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left\{ -\sin \frac{n\pi}{l}(x - ct) + \sin \frac{n\pi}{l}(x + ct) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2c} \{-G(x - ct) + G(x + ct)\}.
 \end{aligned}$$

Дифференцируя ещё раз, получим

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{1}{2c} \{-G'(x - ct) + G'(x + ct)\}.$$

Теперь очевидно, что

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

Единственность решения

Теорема 6.4. Если дважды непрерывно дифференцируемое по обоим переменным решение $u(x, t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

существует, то оно единственно.

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим существование двух различных непрерывно дифференцируемых решений u_1 и u_2 . Пусть $v = u_1 - u_2$. Тогда, в силу линейности волнового уравнения и однородности краевых условий, функция v должна удовлетворять однородной начально-краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(l, t) = 0, & t &\geq 0, \\ v(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0, & 0 &\leq x \leq l. \end{aligned}$$

Покажем, что $v(x, t) \equiv 0$. Для этого рассмотрим интеграл, характеризующий полную энергию струны:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ c^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right\} dx.$$

Поскольку, по предположению, функция $v(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема, то возможно найти производную $E(t)$ по t

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \left\{ c^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right\} dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^l c^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} dx = \left[c^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right]_0^l - \int_0^l c^2 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx.$$

В силу краевых условий, $v(0, t) = v(l, t) = 0$,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(l, t) = 0,$$

следовательно, выражение в квадратных скобках обращается в ноль, и

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx.$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

то

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad E(t) = \text{const.}$$

Так как $v(x, 0) = 0$, то

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, 0) = 0$$

и, следовательно,

$$E(0) = \text{const} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ c^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right\} dx = 0.$$

Таким образом, $E(t) \equiv 0$, а это возможно лишь если

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

В свою очередь, это возможно, если только $v(x, t) = \text{const}$. Учитывая начальные (либо краевые) условия, $v(x, 0) = 0$, приходим к заключению, что

$$v(x, t) = 0.$$

Следовательно, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$. □

14.3. Задача теплопроводности

Разделение переменных

Рассмотрим краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0, & t &\geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 &\leq x \leq l. \end{aligned} \quad (6.14.12)$$

Здесь $k > 0$ — постоянное число, называемое **коэффициентом теплопроводности**.

Замечание 6.14. *Температура u является не абсолютной, а относительной, поэтому она может равняться нулю.*

Для построения решения задачи (6.14.12) воспользуемся методом разделения переменных. Представим решение в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0.$$

Тогда подстановка в уравнение теплопроводности дает

$$XT' = kX''T.$$

Поскольку, по предположению, $XT \neq 0$, то разделив полученное уравнение на XT , придем к равенству

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT},$$

левая часть которого зависит только от x , а правая — только от t . В этой связи, обе части равны одной и той же константе λ и мы приходим к уравнениям

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T' - k\lambda T = 0.$$

Производя разделение переменных в краевых условиях $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, получаем

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0,$$

что, в силу отличия T от нуля, дает краевые условия

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Таким образом, приходим к задаче Штурма–Лиувилля, совпадающей с (6.14.10):

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Ее решение было получено нами ранее: $\lambda = -\alpha^2$,

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Решение второго уравнения, $T' + \alpha^2 k T = 0$, имеет вид

$$T(t) = C \exp(-\alpha^2 k t).$$

Подставляя $\alpha = \alpha_n$, получаем

$$T_n(t) = C_n \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 k t \right\}.$$

Таким образом, нетривиальное решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее заданным краевым условиям, определяется равенством

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = a_n \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 k t \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $a_n = B_n C_n$. Используя принцип суперпозиции, получаем формальное разложение

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 k t \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (6.14.13)$$

которое удовлетворяет начальной условию, если

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Это равенство выполняется, если $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье по синусам с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Таким образом, формальное решение задачи теплопроводности (6.14.12) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy \right] \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Обоснование формального решения

Докажем существование формального решения в предположении, что функция $f(x)$, определяющая начальное условие, непрерывна на $[0, l]$, удовлетворяет равенствам $f(0) = f(l) = 0$, а ее производная $f'(x)$ кусочно непрерывна на $]0, l[$. Поскольку f ограничена, то мы имеем оценку

$$|a_n| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right| \leq \frac{2}{l} \int_0^l |f(x)| dx \leq C,$$

где $C > 0$ — постоянная. Тогда, при любом $t_0 > 0$ для u_n получаем оценку:

$$|u_n(x, t)| = \left| a_n \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} \right| \leq C \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt_0 \right\},$$

при $t \geq t_0$. Ряд, общий член которого равен

$$\exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt_0 \right\},$$

является сходящимся в силу признака Д'Аламбера. Следовательно, по мажорантному признаку Вейерштрасса сходимости ряда, ряд (6.14.13) сходится равномерно по x и t для $t \geq t_0$ и $0 \leq x \leq l$.

Теперь покажем, что функция u , определяемая равенством (6.14.13), является решением уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Дифференцируя равенство (6.14.13) по t почленно, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 k \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (6.14.14)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left| -a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 k \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} \right| &\leq \\ &\leq C \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 k \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt_0 \right\}, \end{aligned}$$

при $t \geq t_0$, а ряд с общим членом

$$C \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 k \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt_0 \right\},$$

сходится по признаку Д'Аламбера. Следовательно, функция, определяемая равенством (6.14.14) сходится равномерно при $t \geq t_0$ и $0 \leq x \leq l$. Аналогичным образом, ряд (6.14.13) можно продифференцировать дважды по x и получить

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (6.14.15)$$

Из равенств (6.14.14) и (6.14.15) тогда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Таким образом, ряд (6.14.13) является решением одномерного уравнения теплопроводности в области $0 < x < l$, $t > 0$.

Покажем, что функция (6.14.13) удовлетворяет граничным условиям задачи (6.14.12). Прежде всего, заметим, что ряд, представляющий функцию u , сходится равномерно при $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$. Поскольку

функция, являющаяся суммой равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, непрерывна, то u непрерывна в точках $x = 0$ и $x = l$. Это влечет, что решение (6.14.13) удовлетворяет равенствам

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

для всех $t > 0$.

Осталось показать, что функция (6.14.13) удовлетворяет начальному условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

В силу определенных выше ограничений на функцию f , ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

сходится абсолютно и равномерно. В силу признака сходимости Абеля, ряд, образованный произведением членов равномерно сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

и равномерно ограниченной и монотонной последовательностью

$$\exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt \right\},$$

сходится равномерно относительно t . В этой связи,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 kt \right\} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

сходится равномерно при $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$. Рассуждениями, аналогичными тем, что выше, устанавливается, что тогда функция $u(x, t)$ непрерывна при $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$. Таким образом, начальное условие удовлетворяется и существование решения установлено.

Единственность решения

Теорема 6.5. Если непрерывно дифференцируемое по обеим переменным решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют два различных непрерывно дифференцируемых решения u_1 и u_2 . Пусть тогда $v = u_1 - u_2$. В силу линейности уравнения теплопроводности и однородности краевых условий, функция v должна удовлетворять однородной начально-краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(l, t) = 0, & t &\geq 0, \\ v(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Покажем, что $v(x, t) \equiv 0$.

Рассмотрим функцию, определенную интегралом

$$J(t) = \frac{1}{2k} \int_0^l v^2 dx.$$

Дифференцируя ее по t , имеем

$$J'(t) = \frac{1}{k} \int_0^l v \frac{\partial v}{\partial t} dx = \int_0^l v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx,$$

в силу уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\int_0^l v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \left[v \frac{\partial v}{\partial x} \right]_0^l - \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Поскольку $v(0, t) = v(l, t) = 0$, то

$$J'(t) = - \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \leq 0,$$

и функция $J(t)$ — невозрастающая. Далее, из условия $v(x, 0) = 0$ следует, что $J(0) = 0$. Таким образом,

$$\forall t \geq 0 : J(t) \leq 0.$$

Но, по определению J ,

$$\forall t \geq 0 : J(t) \geq 0.$$

В этой связи, $J(t) \equiv 0$. В силу непрерывности $v(x, t)$, отсюда получаем тогда, что

$$v(x, t) \equiv 0,$$

при $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$. Следовательно, $u_1 = u_2$ и решение единственно. \square

15. Функция Грина

15.1. Дельта-функция Дирака

Математические построения, приводящие к идее дельта-функции, были выполнены Фурье ещё в 1822 г. при формулировке интегральной теоремы Фурье, которая устанавливает справедливость формулы

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha f(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} dp \cos(px - p\alpha). \quad (6.15.1)$$

Формулу (6.15.1) можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha f(\alpha) \delta(x - \alpha),$$

где $\delta(x - \alpha)$ — **дельта-функция**, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \delta(x - \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \cos(px - p\alpha) = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A dp \cos(px - p\alpha) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi x} \sin Ax. \end{aligned}$$

Графики функций $\delta_A(x) = \frac{1}{\pi x} \sin Ax$ для различных значений A приведены на Рис. 6.27.

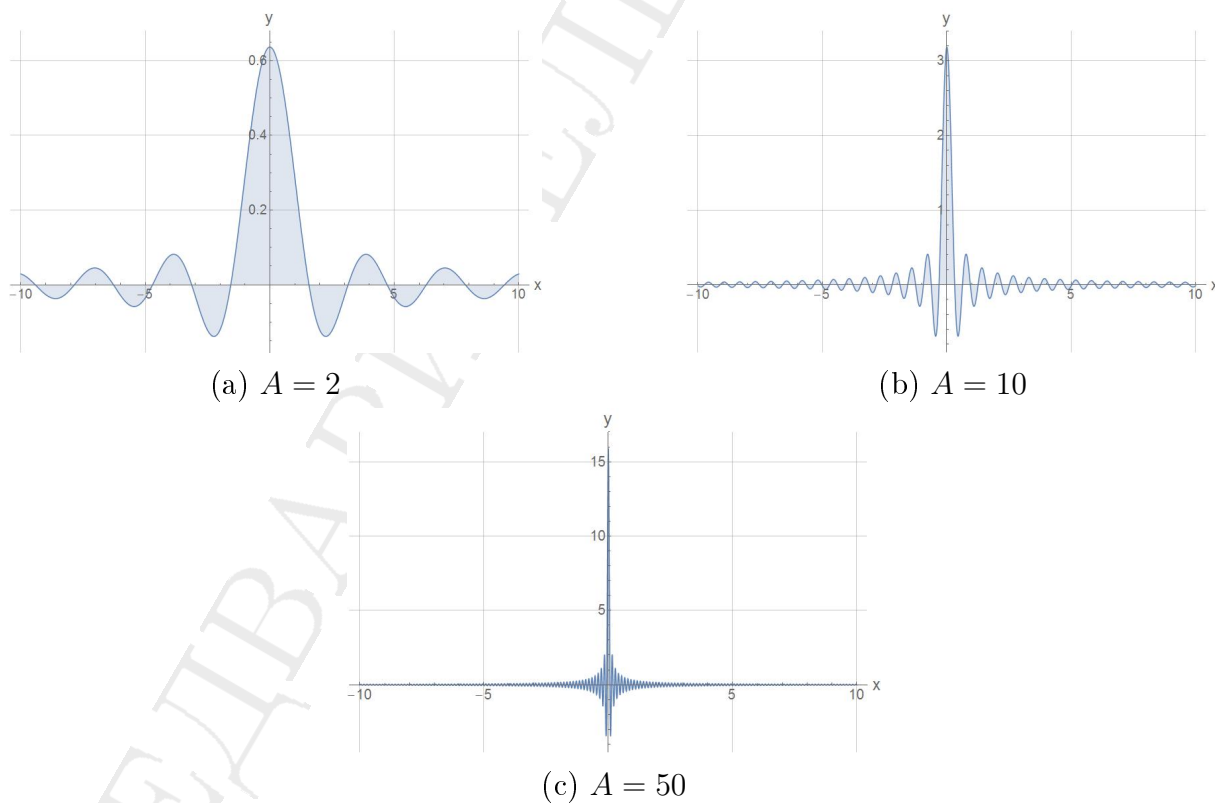


Рис. 6.27. Графики функции δ_A при различных значениях A

Интеграл⁷

$$\int_{-A}^A \delta_A(x) dx = \int_{-A}^A \frac{1}{\pi x} \sin Ax dx = \frac{2 \operatorname{Si}(A^2)}{\pi},$$

стремится к единице при неограниченном возрастании A , что проиллюстрировано на Рис. 6.28.

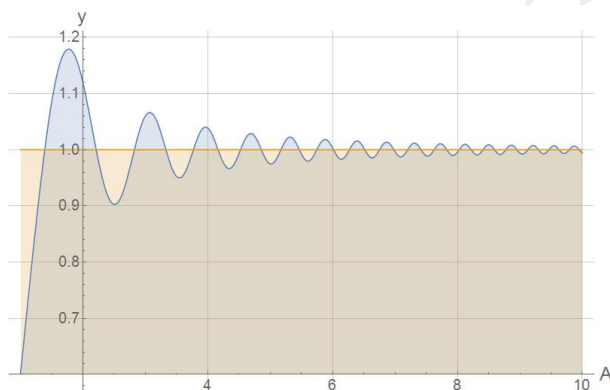


Рис. 6.28. Иллюстрация сходимости интеграла $\int_{-A}^A \delta_A(x) dx$ к единице при $A \rightarrow \infty$

Коши представил формулу (6.15.1) в экспоненциальной форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha f(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip(x-\alpha)},$$

что позволило выразить дельта-функцию как

$$\delta(x - \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip(x-\alpha)}.$$

Опираясь на идею локализации, П. Дирак ввёл дельта-функцию как предел последовательности функций, отличных от нуля на вложенных интервалах, стягиваемых к нулю. Можно построить разнообразные примеры таких последовательностей. Одна из них (Рис. 6.29):

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

⁷Здесь Si — интегральный синус, определяемый равенством $\operatorname{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

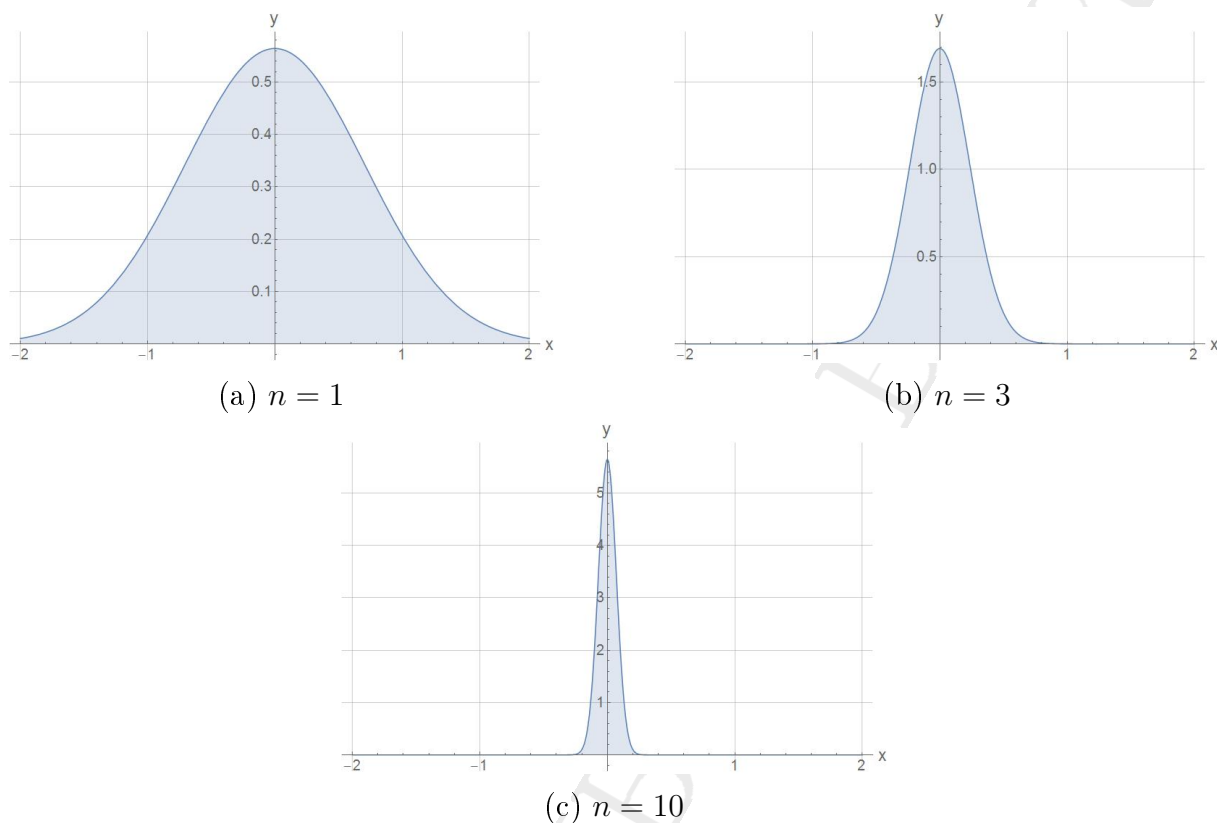


Рис. 6.29. Члены последовательности \mathcal{D}

Легко видеть, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_n dx = 1.$$

Однако,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_n^2 dx = \frac{n}{\sqrt{2\pi}},$$

т.е. интегралы от квадратов элементов этой последовательности неограниченно возрастают при увеличении n .

Определение дельта-функции, которое не является математически строгим, может быть дано следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{не существует,} & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Строгое определение даётся в рамках теории обобщённых функций как линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций. Следствием является «фильтрующее свойство»:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) f(x) dx = f(y).$$

Данное таким образом определение дельта-функции подразумевает действия с функциями, зависящими от одной переменной. Кратко рассмотрим обобщения для функций нескольких переменных. Вначале рассмотрим двумерный случай. Определим двумерную дельта-функцию следующим образом:

$$\delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \begin{cases} \text{не существует,} & (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2), \\ 0, & (x_1 \neq y_1) \vee (x_2 \neq y_2), \end{cases}$$

при условии

$$\iint_{R_\varepsilon} \delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2) dx_1 dx_2 = 1,$$

где

$$R_\varepsilon : (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < \varepsilon^2,$$

открытый диск радиуса ε с центром в (y_1, y_2) . Этому определению можно поставить в соответствие последовательность функций двух переменных (Рис. 6.30)

$$\mathcal{D}_n(x_1, x_2) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x_1^2 + x_2^2)}.$$

«Фильтрующее свойство» формулируется следующим образом:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x_1, x_2) \delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2) dx_1 dx_2 = F(y_1, y_2),$$

для любой непрерывной функции F .

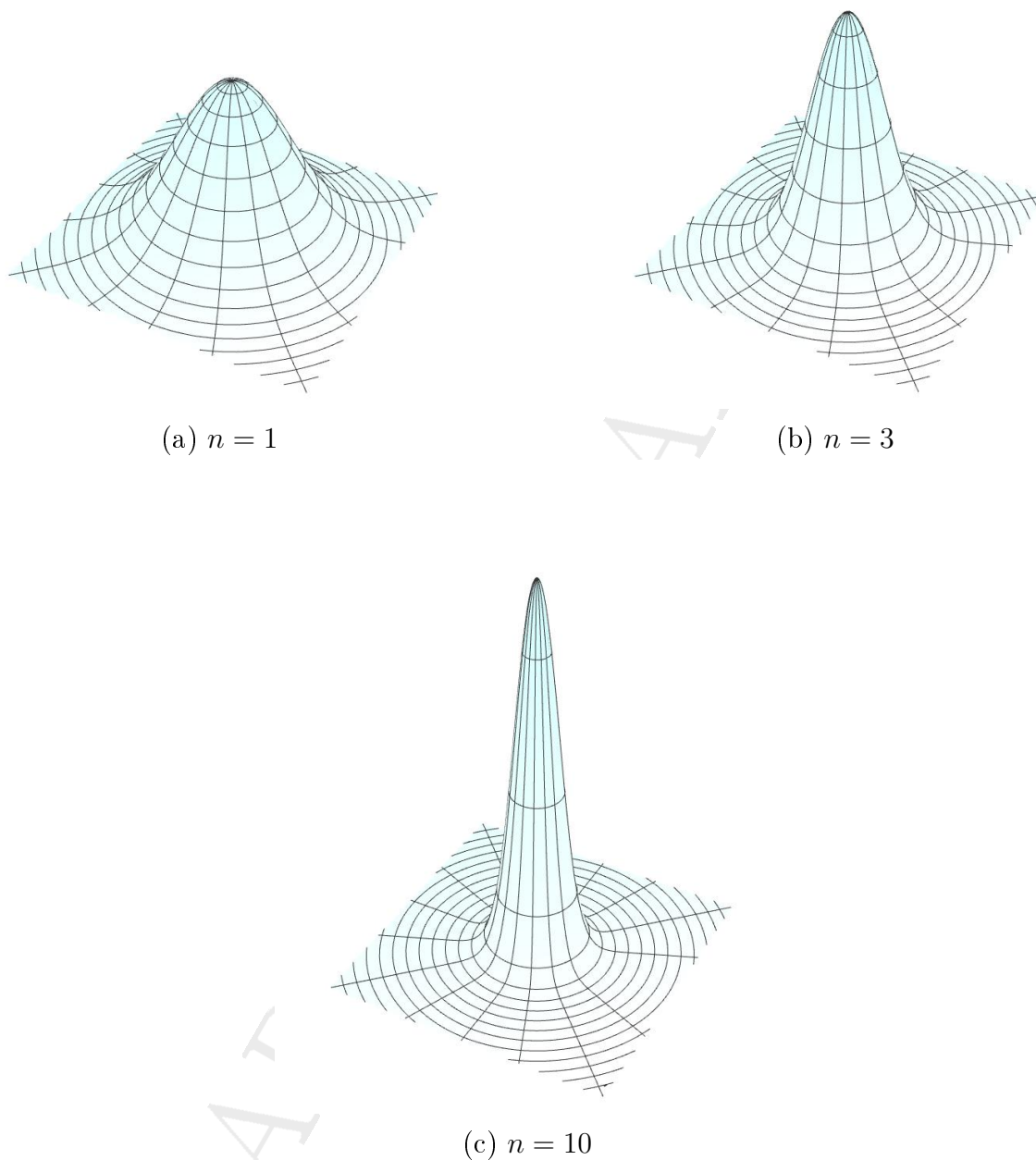


Рис. 6.30. Члены последовательности \mathcal{D}_n функций двух переменных

Если $\delta(z)$ — одномерная дельта-функция, то, учитывая, что координаты x_1, x_2 декартовы, и переходя от интеграла по области к повторному

интегралу, имеем

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x_1, x_2) \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) dx_1 dx_2 = F(y_1, y_2).$$

Следовательно, двумерная дельта-функция может быть представлена как произведение одномерных дельта-функций:

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(z_1) \delta(z_2).$$

Это соотношение обобщается на случай n измерений

$$\delta(z_1, z_2, \dots, z_n) = \delta(z_1) \delta(z_2) \cdots \delta(z_n).$$

В криволинейных координатах представления дельта-функции более сложные. Пусть криволинейные координаты α_1, α_2 связаны с декартовыми координатами x_1, x_2 соотношениями

$$x_1 = \mathcal{X}_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad x_2 = \mathcal{X}_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

где $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ — дифференцируемые функции. Переходя к криволинейным координатам, запишем «фильтрующее свойство» в виде

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} F(x_1, x_2) \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) dx_1 dx_2 &= \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} F(\mathcal{X}_1(\alpha_1, \alpha_2), \mathcal{X}_2(\alpha_1, \alpha_2)) \times \\ &\times \delta(\mathcal{X}_1(\alpha_1, \alpha_2) - \mathcal{X}_1(\beta_1, \beta_2)) \delta(\mathcal{X}_2(\alpha_1, \alpha_2) - \mathcal{X}_2(\beta_1, \beta_2)) |J| d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= F(\mathcal{X}_1(\beta_1, \beta_2), \mathcal{X}_2(\beta_1, \beta_2)), \end{aligned}$$

где

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Например, в полярных координатах $x_1 = x, x_2 = y, \alpha_1 = r, \alpha_2 = \theta$,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} = r,$$

обращается в нуль только в одной точке $r = 0$ и не зависит от θ . Следовательно,

$$\delta(x, y) = \frac{\delta(r)}{|J_1|} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r},$$

где

$$J_1 = \int_0^\pi J d\theta = 2\pi r.$$

Аналогично, в трёхмерных сферических координатах

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

где $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ и $0 \leq \phi \leq 2\pi$, якобиан имеет вид

$$J = r^2 \sin \theta.$$

Следовательно,

$$\delta(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{\delta(r)}{|J_2|} = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2},$$

где

$$J_2 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} J d\theta d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi r^2.$$

15.2. Наводящие соображения

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\mathcal{L}u = f, \tag{6.15.2}$$

где

- \mathcal{L} — дифференциальный оператор по переменным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, определённый в области $V \subset \mathbb{R}^n$,

- $u = u(\mathbf{x})$ — искомая функция,
- $f = f(\mathbf{x})$ — заданная функция.

Под **функцией Грина** будем понимать решение уравнения (6.15.2) для правой части специального вида:

$$\mathcal{L}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

где δ — дельта-функция Дирака. Умножим левую и правую части этого уравнения на $f(\mathbf{y})$ и проинтегрируем по V , используя в качестве переменных интегрирования \mathbf{y} , т.е. $dV(\mathbf{y}) = dy_1 \dots dy_n$:

$$\int_V \mathcal{L}G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}).$$

Изменяя порядок дифференцирования и интегрирования, приходим к равенству

$$\mathcal{L} \left[\int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) \right] = f(\mathbf{x}).$$

Таким образом, получаем формальное представление решения:

$$u(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})dV(\mathbf{y}).$$

Иначе, решение можно записать символически, в терминах обратного оператора \mathcal{L}^{-1} :

$$u(\mathbf{x}) = \mathcal{L}^{-1}(f(\mathbf{x})).$$

Следовательно,

$$u(\mathbf{x}) = \mathcal{L}^{-1}(f(\mathbf{x})) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})dV(\mathbf{y}).$$

Здесь функция $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ представляет ядро интегрального оператора, который, в свою очередь, определяет обратный оператор \mathcal{L}^{-1} .

15.3. Свойство функции Грина

Рассмотрим функцию Грина G оператора Лапласа в области V :

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.15.3)$$

Полагаем, что на границе ∂V области V функция G обращается в нуль:

$$G|_{\partial V} = 0.$$

Далее будем рассматривать случай двумерной области V .

Теорема 6.6. *Функция Грина оператора Лапласа симметрична:*

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = G(y_1, y_2, x_1, x_2).$$

Доказательство. Используя интегральную формулу Грина

$$\iint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dS = \int_{\partial V} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) ds,$$

и полагая $\phi = G(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $\psi = G(x_1, x_2, z_1, z_2)$, получим

$$\begin{aligned} & \iint_V \{ G(x_1, x_2, y_1, y_2) \nabla^2 G(x_1, x_2, z_1, z_2) - \\ & \quad - G(x_1, x_2, z_1, z_2) \nabla^2 G(x_1, x_2, y_1, y_2) \} dx dy = \\ & = \int_{\partial V} \left\{ G(x_1, x_2, y_1, y_2) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x_1, x_2, z_1, z_2) - \right. \\ & \quad \left. - G(x_1, x_2, z_1, z_2) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x_1, x_2, y_1, y_2) \right\} ds. \end{aligned}$$

Поскольку функции $G(x_1, x_2, y_1, y_2)$ и $G(x_1, x_2, z_1, z_2)$ обращаются в нуль на границе ∂V , то

$$\begin{aligned} & \iint_V \{ G(x_1, x_2, y_1, y_2) \nabla^2 G(x_1, x_2, z_1, z_2) - \\ & \quad - G(x_1, x_2, z_1, z_2) \nabla^2 G(x_1, x_2, y_1, y_2) \} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2), \\ \nabla^2 G(x_1, x_2, z_1, z_2) &= \delta(x_1 - z_1, x_2 - z_2), \\ \iint_V G(x_1, x_2, y_1, y_2) \delta(x_1 - z_1, x_2 - z_2) dx dy &= G(z_1, z_2, y_1, y_2), \\ \iint_V G(x_1, x_2, z_1, z_2) \delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2) dx dy &= G(y_1, y_2, z_1, z_2).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = G(y_1, y_2, x_1, x_2).$$

□

Теорема 6.7. Функция $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ имеет особую точку (y_1, y_2) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} ds = 1, \quad C_\varepsilon : (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = \varepsilon^2.$$

Доказательство. Пусть R_ε – область, ограниченная C_ε . Тогда, интегрируя левую и правую части уравнения (6.15.3), получим

$$\iint_{R_\varepsilon} \nabla^2 G dx dy = \iint_{R_\varepsilon} \delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2) dx dy = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{R_\varepsilon} \nabla^2 G dx dy = 1.$$

Используя теорему о дивергенции, получим тогда, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} ds = 1.$$

□

15.4. Построение функции Грина

Функция Грина, будучи решением линейного дифференциального уравнения, может быть представлена как сумма

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = F(x_1, x_2, y_1, y_2) + g(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad (6.15.4)$$

некоторого частного решения для дельтаобразной правой части:

$$\forall (x_1, x_2) \in V : \nabla^2 F = \delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2),$$

и решения однородного уравнения

$$\forall (x_1, x_2) \in V : \nabla^2 g = 0,$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$\forall (x_1, x_2) \in \partial V : g = -F.$$

Например, частное решение уравнения Лапласа

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0,$$

можно найти в виде

$$F = A + B \ln r.$$

Поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{B}{r} d\theta = 1,$$

то $B = \frac{1}{2\pi}$, а постоянную A можно выбирать произвольно. Положим для простоты $A = 0$. Тогда

$$F = \frac{1}{2\pi} \ln r.$$

15.5. Решение задачи Дирихле для оператора Лапласа методом функции Грина

Приступим к решению задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) \in V : \nabla^2 u &= h, \\ \forall (x_1, x_2) \in \partial V : u &= f. \end{aligned} \quad (6.15.5)$$

Осуществляя подстановку $\phi(y_1, y_2) = G(y_1, y_2, x_1, x_2)$ и $\psi(y_1, y_2) = u(y_1, y_2)$ в интегральное тождество Грина, получим

$$\begin{aligned} \iint_V \{G(y_1, y_2, x_1, x_2) \nabla^2 u - u(y_1, y_2) \nabla^2 G\} dy_1 dy_2 &= \\ &= \int_{\partial V} \left\{ G(y_1, y_2, x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u(y_1, y_2) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right\} ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \forall (y_1, y_2) \in V : \nabla^2 u(y_1, y_2) &= h(y_1, y_2), \\ \forall (y_1, y_2) \in V : \nabla^2 G(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \delta(y_1 - x_1, y_2 - x_2), \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \iint_V \{G(y_1, y_2, x_1, x_2) h(y_1, y_2) - u(y_1, y_2) \delta(y_1 - x_1, y_2 - x_2)\} dy_1 dy_2 &= \\ &= \int_{\partial V} \left\{ G(y_1, y_2, x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u(y_1, y_2) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right\} ds. \end{aligned}$$

Так как

$$G|_{\partial V} = 0, \quad u|_{\partial V} = f,$$

то, учитывая симметрию G , получим представление для решения задачи Дирихле (6.15.5):

$$u(x_1, x_2) = \iint_V G(x_1, x_2, y_1, y_2) h(y_1, y_2) dy_1 dy_2 + \int_{\partial V} f \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} ds. \quad (6.15.6)$$

Рассмотрим частный случай, когда область V — единичный круг. Задача Дирихле по определению функции g в разложении (6.15.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} \forall (y_1, y_2) \in V : \nabla^2 g &= \frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_2^2} = 0, \\ \forall (y_1, y_2) \in \partial V : g &= -F, \end{aligned}$$

где

$$F = \frac{1}{2\pi} \ln r,$$

является частным решением уравнения $\nabla^2 F = \delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$. Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \theta, & x_2 &= \rho \sin \theta, \\ y_1 &= \sigma \cos \beta, & y_2 &= \sigma \sin \beta. \end{aligned}$$

Тогда решение может быть представлено в виде

$$g(\sigma, \beta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n (a_n \cos n\beta + b_n \sin n\beta).$$

Коэффициенты a_n, b_n определяются из условия на ∂V :

$$g = -\frac{1}{4\pi} \ln \{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\beta - \theta)\}.$$

Используя соотношение

$$\ln(1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\beta - \theta)) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \cos n(\beta - \theta)}{n},$$

определим

$$a_n = \frac{\rho^n}{2\pi n} \cos n\theta, \quad b_n = \frac{\rho^n}{2\pi n} \sin n\theta.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} g(\rho, \theta, \sigma, \beta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma\rho)^n}{n} \cos n(\beta - \theta) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \ln \{1 + (\sigma\rho)^2 - 2(\sigma\rho) \cos(\beta - \theta)\}, \end{aligned}$$

и функция Грина может быть записана в виде

$$\begin{aligned} G(\rho, \theta, \sigma, \beta) &= \frac{1}{4\pi} \ln \{\sigma^2 + \rho^2 - 2\sigma\rho \cos(\beta - \theta)\} - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \ln \{1 + (\sigma\rho)^2 - 2\sigma\rho \cos(\beta - \theta)\}. \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial V} = \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=1} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\beta - \theta)}.$$

Если в (6.15.6) положить $h = 0$, то придем к знаменитой **формуле Пуассона**:

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\beta - \theta)} f(\beta) d\beta,$$

являющейся представлением решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге:

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) \in V : \nabla^2 u &= 0, \\ \forall (x_1, x_2) \in \partial V : u &= f. \end{aligned}$$

Библиография

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М. : Мир, 1964.
2. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. — М. : Высшая школа, 1964.

Задачи

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

Элементы теории меры и интеграла Лебега

Библиография

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1. Комплексное гильбертово пространство

Будем обозначать через H комплексное гильбертово пространство. Прежде всего, это множество, снабженное структурой векторного пространства над \mathbb{C} , т.е. на нем определены операции сложения и умножения:

$$+ : H \times H \rightarrow H, \quad \cdot : \mathbb{C} \times H \rightarrow H,$$

удовлетворяющие 8 аксиомам векторного пространства. Кроме того, определено отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ (полуторалинейная форма), удовлетворяющая условиям¹:

(a) $\langle \varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$, для любых $\varphi, \psi \in H$;

(b) $\langle \varphi, \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \rangle = \alpha\langle \varphi, \psi_1 \rangle + \beta\langle \varphi, \psi_2 \rangle$, для любых $\varphi, \psi_1, \psi_2 \in H$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(c) $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ для любого $\varphi \in H$ и $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$, если $\varphi = 0$.

¹Черта сверху означает комплексное сопряжение.

Наконец, пространство H является полным относительно нормы $\|\cdot\|$, определенной полуторалинейной формой²:

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}.$$

Полнота означает, что если $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > N \quad \|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon,$$

то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \in H$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \|\varphi - \varphi_n\| < \varepsilon.$$

Полуторалинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ имеет физический смысл энергии, вычисляемой на паре энергетически сопряженных величин.

Библиография

²То есть, гильбертово пространство — это банахово пространство, в котором норма порождена скалярным произведением.

1. Топологическое пространство

1.1. Аксиомы топологического пространства

Определение 9.1. Пусть X — множество. **Топологией** на X называется совокупность \mathcal{T} подмножеств X , удовлетворяющая условиям:

- (\mathcal{T}_1) X и \emptyset являются элементами \mathcal{T} .
- (\mathcal{T}_2) Если O_1, \dots, O_n — элементы \mathcal{T} , то пересечение $O_1 \cap \dots \cap O_n$ — элемент \mathcal{T} .
- (\mathcal{T}_3) Если $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ — любое (конечное или бесконечное) семейство элементов \mathcal{T} , то его объединение $\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ — элемент \mathcal{T} .

Пара (X, \mathcal{T}) , состоящая из множества X и топологии \mathcal{T} на X , называется **топологическим пространством**. В этом случае элементы X называются **точками**, а элементы \mathcal{T} — **открытыми подмножествами** X .

В дальнейшем, если никакой путаницы это не повлечет, мы будем писать « X — топологическое пространство», «открытое множество».

Близость (соседство) множеств и точек характеризуется с помощью окрестностей.

Определение 9.2. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство. Множество $U \subset X$ называется **окрестностью множества** $A \subset X$, если оно открыто и содержит A . То есть,

$$U \text{ — окрестность } A \Leftrightarrow (U \in \mathcal{T}) \wedge (A \subset U).$$

Окрестностью точки $p \in X$ называется окрестность одноточечного множества $\{p\}$.

Таким образом,

$$U \text{ — окрестность точки } p \in X \Leftrightarrow (U \in \mathcal{T}) \wedge (p \in U).$$

В дальнейшем, множество всех окрестностей точки $p \in X$ обозначается через \mathcal{M}_p .

Пример 9.1. (Тривиальная и дискретная топологии) Пусть X — множество. На нем всегда можно ввести любую из двух следующих топологий.

- (a) Пусть $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$. Тогда \mathcal{T}_1 — топология на X , называемая **тривиальной топологией на X** .
- (b) Положим $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X)$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств X . Множество \mathcal{T}_2 — топология на X , называемая **дискретной топологией на X** ; пространство (X, \mathcal{T}_2) называется **дискретным пространством**. В такой топологии любое подмножество X является открытым.

Дискретная и тривиальная топологии связаны отношением включения: $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Пример 9.2. (Топологии на двухточечных множествах) Рассмотрим всевозможные топологии на двухточечном множестве. Пусть $X = \{1, 2\}$. На X можно ввести следующие топологии:

- (a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ — тривиальная топология,
- (b) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$ — дискретная топология,

(с) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$, $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{2\}\}$ — топологии, «промежуточные» в том смысле, что

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_2, \quad \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_2.$$

Пример 9.3. (Топологии на трехточечном множестве) Пусть $X = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим некоторые топологии на X .

(а) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ — тривиальная топология,

(б) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ — дискретная топология,

(с) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$,

(д) $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}$,

(е) $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

Пример 9.4. Пусть (X, d) — произвольное метрическое пространство, а \mathcal{T} — совокупность всех подмножеств X , открытых в смысле метрического пространства (см. главу 3, раздел 1.5.). Из Предложения 3.6 следует, что \mathcal{T} — топология, называемая **метрической топологией** на X , или **топологией, порожденной d** .

Множество \mathbb{R}^n с функцией расстояния

$$d : (x, y) \mapsto d(x, y) := \|x - y\|$$

является топологическим пространством. Будем называть его **евклидовым пространством**, а функцию d — **евклидовой**. Если $X \subset \mathbb{R}^n$, то $(X, d|_{X \times X})$ — тоже метрическое пространство. В дальнейшем, если не сказано иное, подмножества \mathbb{R}^n рассматриваются с евклидовой метрикой. Типовые пространства:

- **Единичный интервал** — это подмножество $I \subset \mathbb{R}$, определенное как

$$I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

- Для $n \geq 0$ **единичным открытым шаром размерности n** назовем подмножество $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из всех векторов, длина которых строго меньше 1:

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}.$$

В случае $n = 2$ иногда будем называть \mathbb{B}^2 **единичным открытым диском**.

- **Единичным замкнутым шаром размерности n** назовем подмножество $\overline{\mathbb{B}}^n \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из всех векторов, длина которых не больше 1:

$$\overline{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

В случае $n = 2$ иногда будем называть $\overline{\mathbb{B}}^2$ **единичным замкнутым диском**.

- **Единичная окружность** — это подмножество $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из всех единичных векторов на плоскости:

$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}.$$

Часто бывает удобно отождествить плоскость \mathbb{R}^2 с множеством \mathbb{C} комплексных чисел в силу соответствия $(x, y) \leftrightarrow x + iy$ и рассматривать окружность как множество комплексных чисел с единичным модулем:

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

- **Единичная n -мерная сфера** — это подмножество $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, состоящее из единичных векторов в \mathbb{R}^{n+1} :

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

Не всякая топология может быть порождена метрикой. Топологическое пространство X называется **метризуемым**, если его топология порождается некоторой функцией расстояния на X . Как уже отмечалось в Главе 3, если X метризуемо, то функция расстояния, порождающая его топологию, определяется не единственным образом. Предложение 3.7 дает необходимое и достаточное условие того, что две функции расстояния порождают одну и ту же топологию.

В Примере 9.1 (b) была определена дискретная топология. Она является метризуемой, как показывает следующее Предложение.

Предложение 9.1. Пусть X — множество. Дискретная топология на X совпадает с топологией, порожденной дискретной метрикой на X , то есть функцией $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, такой, что

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть \mathcal{T}_d — топология, порожденная метрикой d . Мы должны показать, что $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$. Поскольку $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{P}(X)$, то нужно лишь показать, что $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{T}_d$.

Вначале докажем вспомогательное утверждение. Пусть $x \in X$, тогда $B_1(x) = \{x\}$, то есть, открытый шар радиуса 1 есть в точности синглетон. Поскольку $x \in B_1(x)$, то $\{x\} \subset B_1(x)$. Обратно, пусть $y \in B_1(x)$. Тогда $d(x, y) < 1$. Но метрика d принимает всего два значения: 0 и 1, откуда следует, что $d(x, y) = 0$, то есть, что $y = x$. Таким образом, мы установили обратное включение $B_1(x) \subset \{x\}$.

Вернемся к доказательству исходного утверждения. Пусть $A \in \mathcal{P}(X)$. Тогда, для любого $x \in A$, имеем $B_1(x) = \{x\} \subset A$, что влечет $A \in \mathcal{T}_d$. Итак, мы установили включение $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{T}_d$, а вместе с ним и равенство $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$. \square

Топология на множестве индуцирует топологию на любом его открытом подмножестве.

Предложение 9.2. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство, а $Y \subset X$ — открытое множество. Тогда совокупность

$$\mathcal{T}_Y = \{A \in \mathcal{P}(Y) \mid A \in \mathcal{T}\}$$

подмножеств Y , открытых в X , является топологией на Y .

Доказательство. Достаточно проверить выполнение всех аксиом (\mathcal{T}_1) – (\mathcal{T}_3) топологии. Поскольку $\emptyset, Y \in \mathcal{P}(Y)$ и $\emptyset, Y \in \mathcal{T}$, то $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$. Свойство (\mathcal{T}_1) удовлетворяется.

Пусть $U, V \in \mathcal{T}_Y$. Тогда $U, V \in \mathcal{P}(Y)$ и $U, V \in \mathcal{T}$. Отсюда следует, что $U \cap V \in \mathcal{P}(Y)$ и $U \cap V \in \mathcal{T}$. В этой связи, $U \cap V \in \mathcal{T}_Y$. Отсюда индукцией устанавливается справедливость свойства (\mathcal{T}_2) .

Наконец, пусть $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство элементов из \mathcal{T}_Y . Тогда $U_\alpha \in \mathcal{P}(Y)$ и $U_\alpha \in \mathcal{T}$, для всех $\alpha \in A$. Следовательно, $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{P}(Y)$ и $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$, что влечет $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}_Y$. Свойство (\mathcal{T}_3) удовлетворяется. Поскольку множество \mathcal{T}_Y удовлетворяет всем свойствам (\mathcal{T}_1) – (\mathcal{T}_3) , то оно является топологией. \square

В дальнейшем, если Y — открытое подмножество пространства X , то в случае необходимости мы рассматриваем его как топологическое пространство с топологией (Предложение 9.2)

$$\mathcal{T}_Y = \{A \in \mathcal{P}(Y) \mid A \text{ открыто в } X\}.$$

1.2. Замкнутые подмножества

В определении топологического пространства открытые множества приняты в качестве первичных объектов в силу их важности для определения понятия окрестности. Вместе с тем, имеется дополнительное к открытому множеству понятие.

Определение 9.3. Пусть X — топологическое пространство. Множество $F \subset X$ называется **замкнутым подмножеством** X , если его дополнение, $X \setminus F$, является открытым подмножеством X .

Если X и его топология ясны из контекста, то замкнутые подмножества X часто называются **замкнутыми множествами**. Совокупность всех замкнутых подмножеств X будем обозначать через \mathcal{C} . Переходя в аксиомах (\mathcal{T}_1) – (\mathcal{T}_3) к дополнениям, получаем следующие свойства \mathcal{C} :

- (\mathcal{C}_1) X и \emptyset являются элементами \mathcal{C} .
- (\mathcal{C}_2) Если $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ — произвольное семейство элементов \mathcal{C} , то его пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ — элемент \mathcal{C} .
- (\mathcal{C}_3) Если F_1, \dots, F_n — элементы \mathcal{C} , то их объединение $F_1 \cup \dots \cup F_n$ — элемент \mathcal{C} .

Топология на X может быть определена посредством совокупности \mathcal{C} всех замкнутых множеств, удовлетворяющей свойствам (\mathcal{C}_1) – (\mathcal{C}_3) . Открытые множества, в этом случае, — это те множества, дополнения которых замкнуты.

Пример 9.5. (Замкнутые подмножества)

- (а) Любой замкнутый интервал $[a, b] \subset \mathbb{R}$ является замкнутым подмножеством \mathbb{R} , также как полубесконечные интервалы $[a, +\infty[$ и $]-\infty, b]$.
- (б) Любой замкнутый шар в метрическом пространстве является замкнутым множеством.
- (в) Любое подмножество дискретного пространства замкнуто.
- (д) В трехточечном пространстве $\{1, 2, 3\}$ с топологией из примера 9.3 (д) замкнутыми подмножествами являются:

$$\emptyset, \{3\}, \{2, 3\} \text{ и } \{1, 2, 3\}.$$

Замечание 9.1. Отметим, что «замкнутый» не является синонимом к «не открытый». Множество может быть открытым и замкнутым, или не открытым и не замкнутым. Например, в любом топологическом пространстве X множества X и \emptyset являются одновременно открытыми и замкнутыми подмножествами X . С другой стороны, полуоткрытый интервал $[0, 1[$ не открыт и не замкнут в \mathbb{R} .

1.3. Внутренность, внешность, замыкание и граница множества

Определение 9.4. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство, $A \subset X$ — некоторое подмножество. Тогда

- **Замыканием** A в X называется множество

$$\bar{A} := \bigcap \{F \in \mathcal{C} \mid F \supset A\},$$

то есть, пересечение всех замкнутых подмножеств X , содержащих A .

- **Внутренностью** A называется множество

$$\text{Int } A := \bigcup \{O \in \mathcal{T} \mid O \subset A\},$$

то есть, объединение всех открытых подмножеств X , содержащихся в A .

- *Внешностью* A называется множество

$$\text{Ext } A := X \setminus \bar{A}.$$

- *Границей* A называется множество

$$\partial A := X \setminus (\text{Int } A \cup \text{Ext } A).$$

Из определения следует, что множество \bar{A} замкнуто, а $\text{Int } A$ открыто. Таким образом, \bar{A} — наименьшее замкнутое подмножество X , содержащее A , а $\text{Int } A$ — наибольшее открытое подмножество X , содержащееся в A . Для любого $A \subset X$ имеем разложение

$$X = \text{Int } A \cup \text{Ext } A \cup \partial A.$$

Замыкание, внутренность, внешность и граница могут быть охарактеризованы в терминах окрестностей. Эти и ряд других свойств устанавливаются в следующем Предложении.

Предложение 9.3. Пусть X — топологическое пространство, а $A \subset X$ — некоторое множество. Тогда

- Точка принадлежит $\text{Int } A$ в том и только в том случае, когда она имеет окрестность, содержащуюся в A .
- Точка принадлежит $\text{Ext } A$ в том и только в том случае, когда она имеет окрестность, содержащуюся в $X \setminus A$.
- Точка принадлежит ∂A в том и только в том случае, когда любая ее окрестность содержит как точку из A , так и точку из $X \setminus A$.
- Точка принадлежит \bar{A} в том и только в том случае, когда любая ее окрестность содержит точку из A .
- $\bar{A} = A \cup \partial A = \text{Int } A \cup \partial A$.
- $\text{Int } A$ и $\text{Ext } A$ открыты в X , а \bar{A} и ∂A замкнуты в X .
- Следующие утверждения равносильны:
 - A открыто в X .

- $A = \text{Int } A$.
- A не содержит точек из ∂A .
- Любая точка A имеет окрестность, содержащуюся в A .

(h) Следующие утверждения равносильны:

- A замкнуто в X .
- $A = \bar{A}$.
- A содержит ∂A .
- Любая точка из $X \setminus A$ имеет окрестность, содержащуюся в $X \setminus A$.

Доказательство. (a) (\Rightarrow) Пусть $p \in \text{Int } A$. Тогда, согласно определению внутренности, $p \in C$, где $C \subset A$ — некоторое открытое подмножество X . Таким образом, множество C является окрестностью точки p , содержащейся в A .

(\Leftarrow) Пусть $U \subset A$ — окрестность точки $p \in X$. Тогда U открыто, по определению окрестности. Следовательно, $U \subset \text{Int } A$. В этой связи, $p \in \text{Int } A$.

(b) (\Rightarrow) Пусть $p \in \text{Ext } A$, тогда $p \notin \bar{A}$. Это означает, что существует множество $B \subset X$, такое, что

$$A \subset B, \quad B \text{ — замкнуто,} \quad p \notin B.$$

Следовательно, $p \in U = X \setminus B$, где U является открытым множеством, содержащимся в $X \setminus A$. Таким образом, мы нашли окрестность точки p , содержащуюся в $X \setminus A$.

(\Leftarrow) Пусть U — окрестность точки $p \in X$, содержащаяся в $X \setminus A$. Тогда множество $B = X \setminus U$ является замкнутым подмножеством X , содержащим A . Кроме того, $p \notin B$. В этой связи, $p \notin \bar{A}$, и мы приходим к включению $p \in \text{Ext } A$.

(c) (\Rightarrow) Пусть $p \in \partial A$. Тогда, по определению ∂A , приходим к соотношениям $p \notin \text{Int } A$ и $p \notin \text{Ext } A$.

Поскольку $p \notin \text{Int } A$, то, в силу (a), любая окрестность p не содержится в A , то есть, содержит точку из $X \setminus A$. Аналогично, поскольку $p \notin \text{Ext } A$, то в силу (b) заключаем, что любая окрестность p не содержится в $X \setminus A$, то есть, содержит точку из A . Таким образом, любая окрестность точки p содержит как точку из A , так точку из $X \setminus A$.

(\Leftarrow) Обратно, пусть любая окрестность точки $p \in X$ содержит как точку из A , так и точку из $X \setminus A$. В силу (a), тогда $p \notin \text{Int } A$, а в силу (b), $p \notin \text{Ext } A$. Таким образом, $p \notin \text{Int } A \cup \text{Ext } A$, и мы получили, что $p \in \partial A$.

(d) (\Rightarrow) Пусть $p \in \bar{A}$. Будем рассуждать «от противного». Предположим, что существует окрестность U точки p , не имеющая точек из A . Тогда $U \subset X \setminus A$, и, согласно (b), $p \in \text{Ext } A = X \setminus \bar{A}$. Но тогда $p \notin \bar{A}$. Противоречие с исходным предположением. В этой связи, любая окрестность p имеет хотя бы одну точку из A .

(\Leftarrow) Пусть любая окрестность точки $p \in X$ содержит точку из A . Рассуждая «от противного», предположим, что $p \notin \bar{A}$. В этом случае, $p \in \text{Ext } A$. Согласно (b), тогда точка p имеет окрестность U , содержащуюся в $X \setminus A$. То есть, у точки p существует окрестность U , которая не имеет точек из A , что противоречит исходному предположению. Полученное противоречие означает, что $p \in \bar{A}$.

(e) Будем использовать то, что $\text{Int } A \subset A \subset \bar{A}$.

Покажем, что $\bar{A} \subset \text{Int } A \cup \partial A$. Пусть $p \in \bar{A}$. Поскольку $\text{Int } A \subset \bar{A}$, то возможны два случая: 1) $p \in \text{Int } A$ и 2) $p \notin \text{Int } A$. В случае 1) мы имеем, что $p \in \text{Int } A \cup \partial A$. Рассмотрим теперь случай 2). В этом случае, согласно (a), любая окрестность точки p пересекается с $X \setminus A$. Вместе с тем, по условию, $p \in \bar{A}$, поэтому та же окрестность пересекается и с A . В этой связи, согласно (c), $p \in \partial A$. Тогда, как и в предыдущем случае, $p \in \text{Int } A \cup \partial A$. Итак, мы показали, что независимо от того, какой случай реализуется, $p \in \text{Int } A \cup \partial A$. В силу произвольности точки p , имеем тогда, что

$$\bar{A} \subset \text{Int } A \cup \partial A.$$

Поскольку $\text{Int } A \subset A$, то $\text{Int } A \cup \partial A \subset A \cup \partial A$, и мы приходим к включению

$$\bar{A} \subset A \cup \partial A.$$

Теперь покажем, что $A \cup \partial A \subset \bar{A}$. Пусть $p \in A \cup \partial A$. Тогда или $p \in A$, или $p \in \partial A$. В первом случае, поскольку $A \subset \bar{A}$, мы получаем, что $p \in \bar{A}$. Рассмотрим второй случай. Так как $p \in \partial A$, то любая окрестность точки p , в силу (c), содержит точки как из A , так и из $X \setminus A$. Отсюда, и из (d), следует, что $p \in \bar{A}$. Таким образом, независимо от того, какой случай реализуется, $p \in \bar{A}$. В силу произвольности p , тогда

$$A \cup \partial A \subset \bar{A},$$

и мы приходим к первому желаемому равенству $\bar{A} = A \cup \partial A$. Поскольку $\text{Int } A \cup \partial A \subset A \cup \partial A$, то

$$\text{Int } A \cup \partial A \subset \bar{A},$$

и мы получаем второе равенство $\bar{A} = \text{Int } A \cup \partial A$.

(f) Поскольку $\text{Int } A$ является объединением открытых множеств, то оно является открытым подмножеством X . В связи с тем, что \bar{A} является пересечением замкнутых множеств, это — замкнутое подмножество X . Поскольку $\text{Ext } A$ является дополнением замкнутого множества, то оно открыто в X . Наконец, ∂A , будучи дополнением объединения открытых множеств, является замкнутым подмножеством X .

(g) Достаточно доказать следующие утверждения:

- (i) A открыто в X тогда и только тогда, когда $A = \text{Int } A$.
- (ii) A не содержит точек из ∂A в том и только в том случае, когда любая точка A имеет окрестность, содержащуюся в A .
- (iii) $A = \text{Int } A$ в том и только в том случае, когда любая точка A имеет окрестность, содержащуюся в A .

Доказательство:

(i) (\Rightarrow) Пусть A открыто. Если $p \in A$, то, согласно (a), поскольку A является окрестностью p , содержащейся в A , получаем включение $p \in \text{Int } A$. В силу произвольности p , заключаем отсюда, что $A \subset \text{Int } A$. Поскольку, по определению внутренней, $\text{Int } A \subset A$, то окончательно получаем, что $A = \text{Int } A$.

(\Leftarrow) Пусть $A = \text{Int } A$. Согласно (f), множество $\text{Int } A$ является открытым. В этой связи, A также открыто.

(ii) (\Rightarrow) Предположим, «от противного», что $p \in A$ — точка, такая, что любая ее окрестность не содержится в A . Иными словами, любая окрестность точки p содержит точку из $X \setminus A$. Поскольку $p \in A$, то любая окрестность p содержит как точку из A , так точку из $X \setminus A$. Согласно (c), тогда $p \in \partial A$. Но это противоречит исходному условию.

(\Leftarrow) Рассуждая «от противного», предположим, что $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Тогда, пусть $p \in A \cap \partial A$ — некоторая точка. Согласно (c), любая

окрестность p содержит как точку из A , так точку из $X \setminus A$. Таким образом, любая окрестность p не содержится в A . Но это противоречит тому, что точка p , являясь точкой A , имеет окрестность, содержащуюся в A .

(iii) (\Rightarrow) Если $A = \text{Int } A$, то, поскольку множество $\text{Int } A$, согласно (f), открыто, множество A открыто. Следовательно, любая точка A имеет окрестность, содержащуюся в A . Таковой является само множество A .

(\Leftarrow) Пусть $p \in A$. Тогда она имеет окрестность, содержащуюся в A . Согласно (a), это означает, что $p \in \text{Int } A$ и мы получаем, в силу произвольности p , что $A \subset \text{Int } A$. Поскольку обратное включение верно по определению внутренности, то мы приходим к равенству $A = \text{Int } A$.

Пункт (g) доказан.

(h) Достаточно доказать следующие утверждения:

(i) A замкнуто в X тогда и только тогда, когда $A = \bar{A}$.

(ii) A замкнуто в X тогда и только тогда, когда любая точка из $X \setminus A$ имеет окрестность, содержащуюся в $X \setminus A$.

(iii) $A = \bar{A}$ в том и только в том случае, когда A содержит ∂A .

Доказательство:

(i) (\Rightarrow) Пусть A замкнуто. Поскольку $A \subset \bar{A}$, то $\bar{A} \subset A$. С другой стороны, по определению замыкания, $A \subset \bar{A}$. В этой связи, $A = \bar{A}$.

(\Leftarrow) Пусть $A = \bar{A}$. Согласно (f), множество \bar{A} замкнуто. Следовательно, A также замкнуто.

(ii) (\Rightarrow) Пусть A замкнуто. Тогда $X \setminus A$ открыто. По доказанному из (g), любая точка $X \setminus A$ имеет окрестность, содержащуюся в $X \setminus A$.

(\Leftarrow) Согласно (g), множество $X \setminus A$ открыто. Следовательно, A замкнуто.

(iii) (\Rightarrow) Поскольку, согласно (e), $\bar{A} = A \cup \partial A$, то $\partial A \subset \bar{A}$. Но тогда равенство $A = \bar{A}$ влечет, что $\partial A \subset A$.

(\Leftarrow) Если $\partial A \subset A$, то, согласно (e),

$$\bar{A} = A \cup \partial A = A.$$

Пункт (h) доказан, а вместе с ним завершено доказательство Предложения. \square

Следствие 9.1. $\text{Ext } A = \text{Int } (X \setminus A)$.

Доказательство. $p \in \text{Ext } A \Leftrightarrow p$ имеет окрестность, содержащуюся в $X \setminus A \Leftrightarrow p \in \text{Int } (X \setminus A)$. \square

Определение 9.5. Пусть X — топологическое пространство, а $A \subset X$ — некоторое множество. Говорят, что точка $p \in X$ является **предельной точкой** A , если любая окрестность p содержит точку из A , отличную от p .

Точка $p \in A$ называется **изолированной точкой** A , если существует окрестность U точки p в X , такая, что $U \cap A = \{p\}$.

Таким образом, любая точка A является либо предельной точкой A , либо изолированной. Например, если $X = \mathbb{R}$ и $A =]0, 1[$, то любая точка $[0, 1]$ является предельной для A . Если положить $B = \{1/n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, то 0 — единственная предельная точка B , а каждая точка B является изолированной.

Свойство замкнутости множества можно связать с понятием предельной точки следующим образом:

Предложение 9.4. Пусть X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ замкнуто в том и только в том случае, когда оно содержит все свои предельные точки.

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть A замкнуто. Рассуждая «от противного», предположим, что $p \in X$ — предельная точка A , не содержащаяся в A . Поскольку $X \setminus A$ — открытое множество, то оно является окрестностью точки p . Значит, $X \setminus A$ должно содержать точку из A , что невозможно. Следовательно, если $p \in X$ — предельная точка A , то она содержится в A .

(\Leftarrow) Пусть A содержит все свои предельные точки. Допустим, «от противного», что A не замкнуто. Тогда, в силу Предложения 9.3 (h),

$\bar{A} \not\subset A$, и, следовательно, существует точка $p \in \bar{A}$, такая, что $p \notin A$. Согласно Предложению 9.3 (d), любая окрестность p содержит точку из A . Эта точка не совпадает с $p \notin A$. В этой связи, p является предельной точкой A . Мы вступили в противоречие с тем, что A содержит все свои предельные точки. Следовательно, $\bar{A} \subset A$ и A замкнуто. \square

Определение 9.6. Пусть X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется **плотным** в X , если $\bar{A} = X$.

Предложение 9.5. Множество $A \subset X$ плотно в X в том и только в том случае, когда любое непустое открытое подмножество X содержит точку из A .

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть $\bar{A} = X$, а $O \subset X$ — произвольное непустое открытое подмножество X . Поскольку O непусто, то в нем есть хотя бы одна точка p . Она принадлежит \bar{A} , поскольку $O \subset X = \bar{A}$. Но тогда любая окрестность p содержит точку из A . В частности, O содержит точку из A .

(\Leftarrow) «От противного», предположим, что $X \neq \bar{A}$. Тогда $O = X \setminus \bar{A}$ является непустым открытым подмножеством X . Кроме того, поскольку $A \subset \bar{A}$, то $O \subset X \setminus A$. Это означает, что O не содержит ни одной точки из A . Мы вступаем в противоречие с тем, что любое непустое открытое множество содержит точку из A . Следовательно, $X = \bar{A}$. \square

2. Сходимость и непрерывность

2.1. Сходимость последовательности

В метрическом пространстве для формализации понятия близости используется функция расстояния. В топологическом пространстве для формализации близости используются окрестности.

Определение 9.7. Пусть X — топологическое пространство. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек X **сходится к точке** $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $n \geq N$ имеем $x_n \in U$. Символически это обозначается либо как $x_n \rightarrow x$, либо как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. В этом случае говорят, что x — **предел последовательности** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Таким образом,

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right) := \forall U \in \mathcal{N}_x \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \in U.$$

Будем называть определение предела последовательности 3.3, использующее функцию расстояния, **метрическим определением предела последовательности**, а определение предела последовательности 9.7, использующее окрестности, — **топологическим**. Тогда справедливо следующее Предложение.

Предложение 9.6. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Тогда топологическое определение предела последовательности равносильно метрическому.

Доказательство. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек X , а $x \in X$.

(\Rightarrow) Предположим, что $x_n \rightarrow x$ в топологическом смысле. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $B_\varepsilon(x)$ — открытый шар — является открытым подмножеством X , содержащим x , то есть, является окрестностью точки x . В этой связи, существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \in B_\varepsilon(x)$ для любого $n \geq N$. Но включение $x_n \in B_\varepsilon(x)$ влечет неравенство $d(x_n, x) < \varepsilon$, что, в силу произвольности ε , означает сходимость последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ к x в метрическом смысле.

(\Leftarrow) Предположим теперь, что $x_n \rightarrow x$ в метрическом смысле. Пусть U — окрестность точки x . Тогда U является открытым множеством, и, в этой связи, существует $\varepsilon > 0$, такое, что $B_\varepsilon(x) \subset U$. Для ε найдется $N \in \mathbb{N}$, такой, что $d(x_n, x) < \varepsilon$, для $n \geq N$. Но неравенство $d(x_n, x) < \varepsilon$ влечет включение $x_n \in B_\varepsilon(x) \subset U$. По этой причине, $x_n \in U$ для всех $n \geq N$. Это доказывает, что $x_n \rightarrow x$ в топологическом смысле. \square

Среди всех возможных последовательностей рассмотрим последовательность простейшего вида.

Определение 9.8. Пусть X — множество. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек X **финально постоянна**, если существуют точка $x \in X$ и номер N , такие, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n = x.$$

В частном случае, когда $N = 1$, последовательность называется **постоянной**.

Мы можем расширить пункт (а) Предложения 3.2 следующим образом.

Предложение 9.7. Пусть X — топологическое пространство. Тогда

- (а) Финально постоянная последовательность сходится.
 (б) Если X — дискретное пространство, то любая сходящаяся последовательность финально постоянна.

Доказательство. (а) Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — финально постоянная последовательность точек X . Тогда существуют $x \in X$ и $N \in \mathbb{N}$, такие, что $x_n = x$ для всех $n \geq N$. Пусть U — окрестность точки x . Тогда $x_n = x \in U$ для всех $n \geq N$ и это означает, что $x_n \rightarrow x$.

(б) Пусть X — дискретное пространство, а $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек X , сходящаяся к точке $x \in X$. Поскольку синглетон $\{x\}$ является окрестностью точки x , то для него существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \in \{x\}$ для всех $n \geq N$. Но $y \in \{x\}$ влечет $y = x$. Следовательно, $x_n = x$ для всех $n \geq N$ и мы показали, что $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — финально постоянная последовательность. \square

Также справедлив пункт (с) Предложения 3.2. Вместе с тем, пункты (b) и (d), в общем случае, неверны. В случае пункта (b), в произвольном топологическом пространстве не определено понятие ограниченности. В случае пункта (d), имеются примеры топологических пространств, в которых последовательность может иметь более одного предела.

Пример 9.6. Рассмотрим множество $\{1, 2, 3\}$ с топологией из Примера 9.3 (d). В этом пространстве точки 1 и 2 не имеют непересекающихся окрестностей, поскольку любое открытое множество, содержащее 2, также содержит и 1. В этой связи, постоянная последовательность $(2, 2, 2, \dots)$ сходится к 2 и 3.

Рассмотрим утверждение, связывающее пределы последовательности и точки замыкания

Предложение 9.8. Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, а $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек A , сходящаяся к $x \in X$. Тогда $x \in \bar{A}$.

Доказательство. Для того, чтобы доказать включение $x \in \bar{A}$ нам, в силу Предложения 9.3 (d), достаточно показать, что любая окрестность x содержит точку из A . Пусть U — окрестность x . По определению предела

последовательности, найдется номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \in U$ для всех $n \geq N$. То есть, U содержит хотя бы одну точку из A . В силу произвольности U , приходим к включению $x \in \bar{A}$. \square

2.2. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы

Теорема 3.2 служит отправной точкой для переноса понятия непрерывного отображения с метрических пространств на топологические.

Определение 9.9. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **непрерывным**, если для любого открытого множества $U \subset Y$, его прообраз $f^{-1}(U)$ является открытым подмножеством X .

Замечание 9.2. Критерий непрерывности в терминах открытых подмножеств метрического пространства (см. Теорему 3.2) утверждает, что отображение между метрическими пространствами непрерывно в смысле Определения 9.9 тогда и только тогда, когда оно непрерывно в смысле ε - δ определения. В этой связи, все отображения, про которые из курса анализа известно, что они непрерывны, являются непрерывными как отображения топологических пространств. Среди них — полиномиальные функции из \mathbb{R} в \mathbb{R} , линейные отображения из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^k , и, более общо, любое отображение подмножества \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^k , компоненты которого непрерывны в обычном смысле, будь то полиномы, экспоненциальные, рациональные, логарифмические функции, модуль и тригонометрические функции (там, где определены), и функции, построенные из перечисленных с помощью операции композиции.

Для определения непрерывности также можно использовать замкнутые множества.

Предложение 9.9. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества является замкнутым множеством.

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть f непрерывно, а $F \subset Y$ — замкнутое множество. Поскольку $U = Y \setminus F$ является открытым множеством, то,

по определению непрерывности, $f^{-1}(U)$ является открытым подмножеством X . Поскольку

$$f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(F),$$

то $f^{-1}(F)$ замкнуто.

(\Leftarrow) Предположим, что f таково, что прообраз каждого замкнутого множества является замкнутым множеством. Пусть $U \subset Y$ является открытым множеством, тогда $Y \setminus U$ — замкнутое подмножество Y . В этой связи, $f^{-1}(Y \setminus U)$ замкнуто в X . В силу равенства

$$f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U),$$

мы получаем, что $f^{-1}(U)$ является открытым множеством. В силу произвольности U , мы имеем отсюда тогда, что f — непрерывное отображение. \square

Следующее Предложение содержит элементарные свойства непрерывных отображений.

Предложение 9.10. Пусть X, Y, Z — топологические пространства. Тогда

- (a) Любое постоянное отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно.
- (b) Тождественное отображение $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ непрерывно.
- (c) Если отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то ограничение f на открытое подмножество X также непрерывно.
- (d) Если отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ непрерывны, то их композиция $g \circ f : X \rightarrow Z$ также непрерывна.

Доказательство. (a) Поскольку f является постоянным, то существует точка $c \in Y$, такая, что $f(x) = c$ для всех $x \in X$. Пусть $U \subset Y$ — открытое множество. Рассмотрим два случая.

1. Пусть точка c не принадлежит U . Предположим, что при этом, множество $f^{-1}(U)$ непусто. В этом случае, найдется $x \in X$, такой, что $x \in f^{-1}(U)$. Следовательно, $c = f(x) \in U$, что противоречит $c \notin U$. В этой связи, $f^{-1}(U) = \emptyset$.

2. Пусть точка c принадлежит U . В этом случае $\{c\} \subset U$ и мы имеем

$$X = f^{-1}(\{c\}) \subset f^{-1}(U) \subset X,$$

откуда следует, что $f^{-1}(U) = X$.

Таким образом, $f^{-1}(U)$ есть либо пустое множество, либо X . В этой связи, $f^{-1}(U)$ — открытое множество. В силу произвольности U отсюда следует непрерывность f .

(b) Пусть $U \subset X$ — открытое множество. Тогда $\text{Id}_X^{-1}(U) = U$ — открытое множество. Следовательно, Id_X является непрерывным отображением.

(c) Пусть $O \subset X$ — открытое множество. Покажем, что отображение $f|_O : O \rightarrow Y$ непрерывно. Пусть $U \subset Y$ — открытое множество, тогда

$$(f|_O)^{-1}(U) = O \cap f^{-1}(U).$$

Поскольку f непрерывно, то множество $f^{-1}(U)$ открыто в X . В этой связи, прообраз $(f|_O)^{-1}(U)$ открыт в X . Поэтому, будучи подмножеством O , множество $(f|_O)^{-1}(U)$, в силу определения топологии на O (Предложение 9.2), является открытым подмножеством O . В силу произвольности U отсюда следует, что отображение $f|_O$ непрерывно.

(d) Пусть U — открытое подмножество Z . Нужно показать, что $(g \circ f)^{-1}(U)$ является открытым подмножеством X . Из теории множеств известна формула

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Поскольку g непрерывно, то множество $g^{-1}(U)$ открыто в Y . Аналогично, поскольку f непрерывно, то множество $f^{-1}(g^{-1}(U))$ открыто в X . В этой связи, множество $(g \circ f)^{-1}(U)$ открыто в X . В силу произвольности U , отображение $g \circ f$ непрерывно. \square

В метрических пространствах, как правило, сначала определяется **непрерывность отображения в точке** (см. Определение 3.5). Затем, **непрерывное отображение** определяется как отображение, непрерывное в каждой точке. В топологических пространствах понятие непрерывности в точке используется нечасто. Вместе с тем, непрерывность является локальным свойством в том смысле, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в окрестности каждой точки. Точная формулировка дана в следующем Предложении.

Предложение 9.11. (Критерий локальной непрерывности)
Отображение $f : X \rightarrow Y$ топологических пространств непрерывно

в том и только в том случае, когда любая точка X имеет окрестность, такую, что ограничение f на эту окрестность непрерывно¹.

Доказательство. (\Rightarrow) Если f непрерывно, то в качестве окрестности можно взять X .

(\Leftarrow) Пусть f непрерывно в окрестности каждой точки X , а $U \subset Y$ — открытое множество. Мы должны показать, что $f^{-1}(U)$ является открытым подмножеством X . Пусть $x \in f^{-1}(U)$. Для точки x найдется окрестность V_x , такая, что отображение $f|_{V_x} : V_x \rightarrow Y$ непрерывно. Непрерывность отображения $f|_{V_x}$ означает, что множество $(f|_{V_x})^{-1}(U)$ является открытым подмножеством V_x , а значит, является открытым подмножеством X . Раскрывая определения, мы видим, что

$$(f|_{V_x})^{-1}(U) = \{y \in V_x \mid f(y) \in U\} = V_x \cap f^{-1}(U),$$

поэтому $(f|_{V_x})^{-1}(U)$ является окрестностью точки x , содержащейся в $f^{-1}(U)$. В силу произвольности x , согласно Предложению 9.3 (g), множество $f^{-1}(U)$ открыто в X . Наконец, в силу произвольности U , отображение f непрерывно. \square

Определение 9.10. Пусть X и Y — топологические пространства. **Гомеоморфизм из X в Y** — это биективное отображение $\varphi : X \rightarrow Y$, такое, что как φ , так и φ^{-1} являются непрерывными отображениями.

Если существует гомеоморфизм из X в Y , то говорят, что X и Y **гомеоморфны**, или **топологически эквивалентны**. При этом используется обозначение $X \approx Y$.

Предложение 9.12. Отношение гомеоморфности является отношением эквивалентности на классе всех топологических пространств.

Доказательство. Нужно показать, что если X, Y, Z — топологические пространства, то:

- (i) $X \approx X$,
- (ii) если $X \approx Y$, то $Y \approx X$,
- (iii) если $X \approx Y$ и $Y \approx Z$, то $X \approx Z$.

¹При этом окрестность рассматривается в топологии, построенной в Предложении 9.2.

Пусть X — топологическое пространство. Отображение

$$\text{Id}_X : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x,$$

является биекцией, обратная биекция к которой равна $\text{Id}_X^{-1} = \text{Id}_X$. Согласно Предложению 9.10 (b), как Id_X , так и Id_X^{-1} непрерывны. В этой связи, Id_X является гомеоморфизмом. Значит, $X \approx X$ и (i) доказано.

Пусть $X \approx Y$. Тогда существует гомеоморфизм $\varphi : X \rightarrow Y$. Отображение $\psi = \varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ биективно и непрерывно вместе со своей обратной биекцией. В этой связи, ψ является гомеоморфизмом и $Y \approx X$. Пункт (ii) доказан.

Пусть $X \approx Y$ и $Y \approx Z$. Тогда существуют гомеоморфизмы $\varphi_1 : X \rightarrow Y$ и $\varphi_2 : Y \rightarrow Z$. Композиция $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 : X \rightarrow Z$ биективна, обратной биекцией к ней является композиция $\varphi^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1} : Z \rightarrow X$. Поскольку отображения $\varphi_i, \varphi_i^{-1}, i = 1, 2$, непрерывны, то в силу Предложения 9.10 (d), как φ , так и φ^{-1} непрерывны. Следовательно, φ — гомеоморфизм и $X \approx Z$.

Таким образом, мы установили справедливость утверждений (i)–(iii). Это означает, что отношение \approx является отношением эквивалентности. \square

Отношение гомеоморфности является фундаментальным в топологии. Будем использовать следующую терминологию. **Топологическим свойством** называется свойство пространства, сохраняющееся при гомеоморфизмах.

Гомеоморфизм топологических пространств можно эквивалентно определить как биективное отображение, сохраняющее топологическую структуру. Иными словами, это такое отображение, которое, вместе с обратной биекцией, переводит открытые множества в открытые множества. Более точно это формулируется в следующем Предложении.

Предложение 9.13. Пусть (X_1, \mathcal{T}_1) и (X_2, \mathcal{T}_2) — топологические пространства, а $f : X_1 \rightarrow X_2$ — биективное отображение. Отображение f является гомеоморфизмом в том и только в том случае, когда $f(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2$, то есть, когда

$$\forall U \in \mathcal{P}(X_1) : U \in \mathcal{T}_1 \Leftrightarrow f(U) \in \mathcal{T}_2.$$

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть f — гомеоморфизм, $U \in \mathcal{T}_1$. Тогда $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{T}_2$, ибо f^{-1} является непрерывным отображением.

Обратно, пусть $f(U) \in \mathcal{T}_2$. Тогда $U = f^{-1}(f(U)) \in \mathcal{T}_1$, поскольку f непрерывно.

(\Leftarrow) Пусть известно, что $U \in \mathcal{T}_1 \Leftrightarrow f(U) \in \mathcal{T}_2$. Покажем, что в таком случае отображение f является непрерывным. Пусть $O \in \mathcal{T}_2$. Обозначим $U = f^{-1}(O)$. Тогда $f(U) = O$ и, в этой связи, $f(U) \in \mathcal{T}_2$. Но тогда $U \in \mathcal{T}_1$. Следовательно, $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_1$. В силу произвольности O , получаем отсюда, что f является непрерывным отображением.

Теперь покажем, что отображение f^{-1} является непрерывным. Пусть $O \in \mathcal{T}_1$, тогда $(f^{-1})^{-1}(O) = f(O) \in \mathcal{T}_2$. В силу произвольности O это означает непрерывность f^{-1} . Поскольку f и f^{-1} являются непрерывными отображениями, то мы показали, что f — гомеоморфизм. \square

Следующее Предложение говорит о том, что сужение гомеоморфизма на открытое множество есть гомеоморфизм.

Предложение 9.14. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, а $U \subset X$ — открытое множество. Тогда $f(U)$ открыто в Y и ограничение $f|_U$ есть гомеоморфизм из U в $f(U)$.

Доказательство. Поскольку f — гомеоморфизм, а $U \subset X$ открыто, то, согласно Предложению 9.13, $f(U)$ также открыто. Остается проверить, что отображение

$$f|_U : U \rightarrow f(U), \quad f|_U(x) = f(x),$$

является гомеоморфизмом топологических пространств U и $f(U)$.

Сначала покажем, что $f|_U$ биективно. Достаточно в явном виде предъявить обратную биекцию. Определим отображение

$$f^{-1}|_{f(U)} : f(U) \rightarrow U, \quad f^{-1}|_{f(U)}(y) = f^{-1}(y).$$

Тогда, если $x \in U$, то

$$f^{-1}|_{f(U)} \circ f|_U(x) = f^{-1}|_{f(U)}(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

откуда вытекает равенство $f^{-1}|_{f(U)} \circ f|_U = \text{Id}_U$. Аналогично, для $y \in f(U)$ имеем

$$f|_U \circ f^{-1}|_{f(U)}(y) = f|_U(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y,$$

что влечет $f|_U \circ f^{-1}|_{f(U)} = \text{Id}_{f(U)}$. Тем самым мы показали, что $f|_U$ биективно, и что

$$(f|_U)^{-1} = f^{-1}|_{f(U)}.$$

Теперь покажем, что $f|_U$ непрерывно. Пусть V — открытое подмножество $f(U)$. Тогда V открыто в Y . Поскольку

$$(f|_U)^{-1}(V) = U \cap f^{-1}(V),$$

где U и $f^{-1}(V)$ открыты в X , то множество $(f|_U)^{-1}(V)$ открыто в X , а, значит, и в U . В силу произвольности V , получаем отсюда, что $f|_U$ непрерывно.

Наконец, покажем, что $(f|_U)^{-1}$ непрерывно. Пусть V — открытое подмножество U . Тогда V открыто в X . Поскольку

$$[(f|_U)^{-1}]^{-1}(V) = f(U) \cap f(V),$$

где $f(U)$ и $f(V)$ открыты в Y , то множество $[(f|_U)^{-1}]^{-1}(V)$ открыто в $f(U)$. Следовательно, $(f|_U)^{-1}$ непрерывно, и мы показали, что отображение $f|_U : U \rightarrow f(U)$ является гомеоморфизмом. \square

Иногда бывает полезно сравнить различные топологии на одном и том же множестве.

Определение 9.11. Пусть $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ — топологии на X . Говорят, что \mathcal{T}_1 *тоньше*, чем \mathcal{T}_2 , если $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$, и *грубее*, чем \mathcal{T}_2 , если $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Топологии, заданные на одном и том же множестве, можно сравнить, используя в качестве индикатора тождественное отображение одного топологического пространства в другое. Если тождественное отображение непрерывно, то топология области определения тоньше топологии области прибытия. Если же тождественное отображение является гомеоморфизмом, то топологии совпадают. Таким образом, справедливо следующее Предложение.

Предложение 9.15. Пусть $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ — топологии на X . Тогда

- (а) Тождественное отображение $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ непрерывно как отображение из (X, \mathcal{T}_1) в (X, \mathcal{T}_2) в том и только в том случае, когда \mathcal{T}_1 тоньше, чем \mathcal{T}_2 .

(b) Тожественное отображение $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ является гомеоморфизмом из (X, \mathcal{T}_1) в (X, \mathcal{T}_2) тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Доказательство. (a) (\Rightarrow) Пусть Id_X — непрерывное отображение. Если $O \in \mathcal{T}_2$, то $\text{Id}_X^{-1}(O) \in \mathcal{T}_1$. Вместе с тем, $\text{Id}_X^{-1}(O) = O$, поэтому $O \in \mathcal{T}_1$. Следовательно, $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

(\Leftarrow) Предположим, что $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Нам нужно показать, что Id_X является непрерывным отображением, то есть, что прообраз каждого элемента \mathcal{T}_2 является элементом \mathcal{T}_1 . Пусть $O \in \mathcal{T}_2$. Тогда $\text{Id}_X^{-1}(O) = O \in \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. То есть, $\text{Id}_X^{-1}(O) \in \mathcal{T}_1$. В силу произвольности O , это означает непрерывность Id_X .

(b) (\Rightarrow) Пусть Id_X — гомеоморфизм. Тогда Id_X и $\text{Id}_X^{-1} = \text{Id}_X$ являются непрерывными как отображения из (X, \mathcal{T}_1) в (X, \mathcal{T}_2) и из (X, \mathcal{T}_2) в (X, \mathcal{T}_1) соответственно. Согласно (a), в этом случае справедливы включения $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, что влечет $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(\Leftarrow) Если $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, то $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Согласно (a), это означает, что Id_X и Id_X^{-1} непрерывны. Следовательно, Id_X — гомеоморфизм. \square

Рассмотрим несколько примеров гомеоморфизмов.

Пример 9.7. Любой открытый шар в \mathbb{R}^n гомеоморфен любому другому открытому шару; гомеоморфизм представлен композицией трансляций $x \mapsto x + x_0$ и гомотетий $x \mapsto cx$. Аналогично, все сферы в \mathbb{R}^n гомеоморфны между собой. Пример иллюстрирует, что «размер» — не топологическое свойство.

Пример 9.8. Пусть $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ — единичный шар. Определим отображение $F : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством

$$F(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}.$$

Прямым вычислением можно показать, что отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, определенное равенством

$$G(y) = \frac{y}{1 + \|y\|},$$

является обратным к F . Тогда F биективно, и, поскольку F и $F^{-1} = G$ непрерывны, F является гомеоморфизмом. Следовательно, \mathbb{R}^n гомеоморфно \mathbb{B}^n и «ограниченность» не является топологическим свойством.

Пример 9.9. Пусть S^2 — сфера в \mathbb{R}^3 , а

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$$

является поверхностью куба со стороной 2 и центром в 0. Пусть $\varphi : C \rightarrow S^2$ — отображение, которое проектирует каждую точку C на сферу S^2 вдоль радиуса. Более точно, если $p \in C$, то $\varphi(p)$ — единичный вектор в направлении p . Таким образом,

$$\varphi(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\max\{|x|, |y|, |z|\}}.$$

Отображение φ непрерывно на C , а φ^{-1} непрерывно на S^2 . Следовательно, φ — гомеоморфизм. Этот пример демонстрирует, что наличие «углов» — не топологическое свойство.

Вернемся к определению 9.10 гомеоморфизма φ . Биjectивность φ гарантирует существование обратного отображения φ^{-1} . Вместе с тем, непрерывность φ^{-1} не получается автоматически, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 9.10. Пусть $X = [0, 1[\subset \mathbb{R}$, а S^1 — единичная окружность (оба множества рассматриваются в евклидовой топологии). Отображение $a : X \rightarrow S^1$, действующее по правилу

$$a(s) = e^{2\pi i s} = \cos 2\pi s + i \sin 2\pi s,$$

является непрерывным и биективным. Вместе с тем, a^{-1} не является непрерывным. В этой связи, a — не гомеоморфизм.

Если отображение непрерывно, то прообраз открытого множества является открытым множеством. Вместе с тем, образ открытого множества не обязательно будет открытым множеством. Выделим класс отображений, для которых последнее справедливо.

Определение 9.12. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ (непрерывное, или нет) называется **открытым отображением**, если для любого открытого множества

$U \subset X$ его образ $f(U)$ открыт в Y . Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **замкнутым отображением**, если для любого замкнутого множества $U \subset X$ его образ $f(U)$ замкнут в Y .

Связь открытых отображений и гомеоморфизмов устанавливается в следующем Предложении.

Предложение 9.16. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — биективное непрерывное отображение. Следующие утверждения эквивалентны:

(a) f — гомеоморфизм.

(b) f открыто.

(c) f замкнуто.

Доказательство. Достаточно убедиться в справедливости следующих утверждений:

(i) (a) \Leftrightarrow (b),

(ii) (a) \Leftrightarrow (c).

(i) (\Rightarrow) Пусть f — гомеоморфизм. Если $U \subset X$ — открытое множество, то, согласно Предложению 9.13, $f(U)$ является открытым множеством. Следовательно, f — открытое отображение.

(\Leftarrow) Пусть f — открытое отображение. Тогда, если $U \subset X$ открыто, то $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ открыто. В силу произвольности U , отображение f^{-1} непрерывно. Следовательно, f — гомеоморфизм.

(ii) (\Rightarrow) Пусть f — гомеоморфизм. Тогда f^{-1} является непрерывным отображением. Согласно Предложению 9.9, если $F \subset X$ замкнуто, то $(f^{-1})^{-1}(F)$ замкнуто. Но $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ и в этой связи, $f(F)$ замкнуто. В силу произвольности F , заключаем, что f — замкнутое отображение.

(\Leftarrow) Пусть f является замкнутым отображением. Если F — замкнутое подмножество X , то $f(F)$ замкнуто. Поскольку $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$, то $(f^{-1})^{-1}(F)$ замкнуто. Согласно Предложению 9.9, это означает непрерывность отображения f^{-1} . В этой связи, f — гомеоморфизм. \square

Непрерывные, открытые и замкнутые отображения можно эквивалентно определить с помощью композиции отображения с операциями взятия внутренности и замыкания.

Предложение 9.17. Пусть X и Y — топологические пространства, а $f : X \rightarrow Y$ — отображение. Тогда

(a) f непрерывно в том и только в том случае, когда

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

для любого $A \subset X$.

(b) f замкнуто в том и только в том случае, когда

$$f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$$

для любого $A \subset X$.

(c) f непрерывно в том и только в том случае, когда

$$f^{-1}(\text{Int } B) \subset \text{Int } f^{-1}(B)$$

для любого $B \subset Y$.

(d) f открыто в том и только в том случае, когда

$$f^{-1}(\text{Int } B) \supset \text{Int } f^{-1}(B)$$

для любого $B \subset Y$.

Доказательство. (a) (\Rightarrow) Пусть f непрерывно, $A \subset X$ — произвольное множество. Согласно определению операции замыкания, $f(A) \subset \overline{f(A)}$. По этой причине,

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}),$$

откуда $A \subset \overline{f^{-1}(f(A))}$. Поскольку множество $\overline{f(A)}$ замкнуто, то, в силу Предложения 9.9, его прообраз $f^{-1}(\overline{f(A)})$ является замкнутым множеством. В этой связи, $\overline{A} \subset \overline{f^{-1}(f(A))}$. Отсюда следует, что

$$f(\overline{A}) \subset f(\overline{f^{-1}(f(A))}) \subset \overline{f(A)},$$

и мы окончательно получаем желаемое включение

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

(\Leftarrow) Предположим теперь, что $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ для любого множества $A \subset X$. Для того, чтобы показать, что отображение f непрерывно, нам, в силу Предложения 9.9, достаточно установить, что прообраз любого замкнутого множества замкнут. Пусть $F \subset Y$ — замкнутое множество. Покажем, что $A = f^{-1}(F)$ является замкнутым подмножеством X . Для этого достаточно показать, что $A = \overline{A}$, или, поскольку $A \subset \overline{A}$ всегда верно, то достаточно показать, что $\overline{A} \subset A$.

Поскольку $f(A) \subset F$, а $F = \overline{F}$, то $\overline{f(A)} \subset F$. По предположению, справедливо включение $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. В этой связи, $f(\overline{A}) \subset F$. Переходя к прообразам, приходим к включениям

$$\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset A,$$

что влечет $\overline{A} \subset A$, то есть, что $A = \overline{A}$. Таким образом, мы показали, что множество $f^{-1}(F)$ замкнуто. В силу произвольности F , получаем отсюда, что отображение f непрерывно.

(b) (\Rightarrow) Пусть отображение f замкнуто, $A \subset X$. Тогда, поскольку множество \overline{A} замкнуто, то его образ $f(\overline{A})$ — замкнутое множество. Из включения $A \subset \overline{A}$ следует включение $f(A) \subset f(\overline{A})$. В этой связи, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

(\Leftarrow) Предположим, что $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ для любого множества $A \subset X$. Покажем, что f — замкнутое отображение. Пусть $F \subset Y$ — замкнутое множество. Тогда $F = \overline{F}$. Следовательно, $\overline{f(F)} \subset f(\overline{F}) = f(F)$. Поскольку $f(F) \subset \overline{f(F)}$, то мы приходим к равенству $f(F) = \overline{f(F)}$, означающему, что множество $f(F)$ замкнуто. По этой причине, в силу произвольности F , отображение f является замкнутым.

(c) (\Rightarrow) Пусть отображение f является непрерывным, $B \subset Y$. Поскольку множество $\text{Int } B$ открыто, то его прообраз $f^{-1}(\text{Int } B)$ является открытым множеством. Из включения $\text{Int } B \subset B$ следует включение $f^{-1}(\text{Int } B) \subset f^{-1}(B)$. По этой причине, $f^{-1}(\text{Int } B) \subset \text{Int } f^{-1}(B)$.

(\Leftarrow) Предположим, что $f^{-1}(\text{Int } B) \subset \text{Int } f^{-1}(B)$ для любого множества $B \subset Y$. Покажем, что в таком случае отображение f является непрерывным. Пусть $V \subset Y$ — открытое множество. В этом случае, $V = \text{Int } V$ и

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\text{Int } V) \subset \text{Int } f^{-1}(V),$$

что влечет $f^{-1}(V) \subset \text{Int } f^{-1}(V)$. Поскольку справедливо обратное включение, то $f^{-1}(V) = \text{Int } f^{-1}(V)$. В этой связи, множество $f^{-1}(V)$ открыто. В силу произвольности V , это означает, что отображение f непрерывно.

(d) (\Rightarrow) Пусть отображение f является открытым, $B \subset Y$. Поскольку множество $\text{Int } f^{-1}(B)$ открыто в X , то его образ $f(\text{Int } f^{-1}(B))$ открыт в Y . Далее, из включения $\text{Int } f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B)$ следуют включения

$$f(\text{Int } f^{-1}(B)) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

По этой причине, $f(\text{Int } f^{-1}(B)) \subset B$. Из определения операции внутренности тогда следует, что $f(\text{Int } f^{-1}(B)) \subset \text{Int } B$. Переходя к прообразам, получаем

$$\text{Int } f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(\text{Int } f^{-1}(B))) \subset f^{-1}(\text{Int } B),$$

что, в свою очередь, влечет $\text{Int } f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\text{Int } B)$.

(\Leftarrow) Предположим, что $\text{Int } f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\text{Int } B)$ для любого множества $B \subset Y$. Покажем, что в таком случае отображение f является открытым. Пусть $O \subset X$ — открытое множество. Тогда, поскольку $O \subset f^{-1}(f(O))$, то $O \subset \text{Int } f^{-1}(f(O))$. По предположению,

$$\text{Int } f^{-1}(f(O)) \subset f^{-1}(\text{Int } f(O)),$$

откуда $O \subset f^{-1}(\text{Int } f(O))$. Переходя к образам, получим включения

$$f(O) \subset f(f^{-1}(\text{Int } f(O))) \subset \text{Int } f(O),$$

из которых следует, что $f(O) \subset \text{Int } f(O)$. Поскольку справедливо обратное включение, то мы приходим к равенству $f(O) = \text{Int } f(O)$, означающему, что $f(O)$ — открытое множество. В силу произвольности O , отображение f является открытым. \square

3. База топологии и база системы окрестностей

3.1. База топологии

В метрических пространствах не все открытые множества созданы одинаковым образом. Среди всех открытых множеств открытые шары являются первичными (будучи определенными с использованием метрики), а остальные открытые множества определены посредством шаров.

Как следствие, большинство определений и доказательств в теории метрических пространств использует открытые шары, а не произвольные открытые множества. Например, определение предельных точек в рамках метрических пространств обычно формулируется следующим образом: если A является подмножеством метрического пространства M , то точка x является предельной точкой A , если каждый открытый шар с центром в x содержит точку из A , отличную от x .

Большинство топологических пространств не снабжено «специальными» открытыми множествами наподобие открытых шаров в метрическом пространстве. Вместе с тем, во многих частных ситуациях удается выделить совокупность определенных открытых множеств так, что все остальные открытые множества являются объединениями выбранных.

Определение 9.13. Пусть X — топологическое пространство. Совокупность \mathcal{B} подмножеств X называется **базой топологии на X** , если выполнены два условия:

- (i) Каждый элемент \mathcal{B} является открытым подмножеством X .
- (ii) Каждое открытое подмножество X является объединением некоторой совокупности элементов \mathcal{B} .

Замечание 9.3. Пустое множество является объединением пустой совокупности элементов \mathcal{B} :

$$\emptyset = \bigcup_{U \in \emptyset} U.$$

Если топология на X ясна из контекста, то мы будем говорить, что \mathcal{B} является **базой X** .

Использование базы топологии позволяет проверить, является ли рассматриваемое множество открытым. Справедливо следующее Предложение.

Предложение 9.18. Пусть X — топологическое пространство, а \mathcal{B} — база его топологии. Множество $U \subset X$ открыто в том и только в том случае, когда оно удовлетворяет условию:

$$\forall p \in U \exists B \in \mathcal{B} : p \in B \subset U. \quad (9.3.1)$$

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть $U \subset X$ — открытое множество, а $p \in U$. По определению базы топологии, существует множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$, такое, что $U = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B$. Тогда, согласно определению операции объединения, $p \in B$ для некоторого $B \in \mathcal{V} \subset \mathcal{B}$. Таким образом,

$$p \in B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B = U.$$

(\Leftarrow) Предположим, что для множества $U \subset X$ верно (9.3.1). Для каждого $p \in U$ найдем $B_p \in \mathcal{B}$ со свойством

$$p \in B_p \subset U.$$

Тогда $\{p\} \subset B_p \subset U$ и

$$U = \bigcup_{p \in U} \{p\} \subset \bigcup_{p \in U} B_p \subset U,$$

откуда $U = \bigcup_{p \in U} B_p$. Правая часть полученного равенства является объединением открытых множеств. В этой связи, множество U открыто в X . \square

Если множество $U \subset X$ удовлетворяет (9.3.1), то говорят, что оно удовлетворяет **критерию базы** по отношению к \mathcal{B} .

Пример 9.11. (Базы для ранее определенных топологий)

- Пусть M — метрическое пространство. Каждый открытый шар в M является открытым подмножеством M и каждое открытое множество является объединением открытых шаров. В этой связи, совокупность всех открытых шаров в M является базой метрической топологии.
- Если X — множество с дискретной топологией, то совокупность всех одноточечных подмножеств X является базой его топологии.
- Если X — множество с тривиальной топологией, то одноэлементное множество $\mathcal{B} = \{X\}$ является базой его топологии.

Пример 9.12. (Базы евклидовой топологии)

Каждая из совокупностей \mathcal{B}_i является базой евклидовой топологии \mathbb{R}^n :

- $\mathcal{B}_1 = \{C_s(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ и } s > 0\}$, где $C_s(x)$ — открытый куб со стороной s и центром x :

$$C_s(x) = \{y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n \mid |x^i - y^i| < s/2, i = 1, \dots, n\}.$$

- $\mathcal{B}_2 = \{B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_+, \text{ а } x \text{ имеет рациональные координаты}\}.$

Если известна база топологии на Y , то достаточно (и часто гораздо проще) установить непрерывность отображений со значениями в Y , используя только элементы базы. Это показывает следующее предложение.

Предложение 9.19. Пусть X и Y — топологические пространства и пусть \mathcal{B} — база Y . Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в том и только в том случае, когда для любого $B \in \mathcal{B}$ множество $f^{-1}(B)$ открыто в X .

Доказательство. (\Rightarrow) Если f непрерывно, то прообраз любого открытого подмножества, а значит, и элемента базы, \mathcal{B} , открыт.

(\Leftarrow) Пусть для любого элемента $B \in \mathcal{B}$ множество $f^{-1}(B)$ открыто. Пусть $U \subset Y$ — открытое множество, $x \in f^{-1}(U)$. Поскольку $f(x) \in U$, то существует $B \in \mathcal{B}$, такой, что $f(x) \in B \subset U$, в силу критерия базы. Но тогда $x \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(U)$. Следовательно, множество $f^{-1}(B)$ является окрестностью x , содержащейся в $f^{-1}(U)$. Поскольку $x \in f^{-1}(U)$ произвольно, то, в силу Предложения 9.3 (g), множество $f^{-1}(U)$ открыто в X . В силу произвольности U , отображение f непрерывно. \square

3.2. Построение топологии по базе

Теперь предположим, что имеется множество X , не снабженное топологией. Часто бывает удобно определить топологию на X , начиная с некоторой системы открытых множеств, а затем определяя все остальные открытые множества как объединения первоначально заданных. Именно так определяются открытые подмножества в метрическом пространстве: сначала посредством метрики определяются открытые шары,

а затем открытые множества определяются как объединения открытых шаров. Иными словами, мы определили топологию, используя базу.

Не всякая совокупность множеств может быть базой некоторой топологии. Следующее Предложение дает необходимые и достаточные условия того, что совокупность подмножеств X является базой некоторой топологии на X .

Предложение 9.20. Пусть X — множество, а \mathcal{B} — совокупность подмножеств X . Тогда \mathcal{B} является базой некоторой топологии на X в том и только в том случае, когда она удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(i) \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X.$$

(ii) Если $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и $x \in B_1 \cap B_2$, то существует элемент $B_3 \in \mathcal{B}$, такой, что $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Если \mathcal{B} удовлетворяет (i) и (ii), то существует единственная топология на X , для которой \mathcal{B} является базой. Эта топология называется *топологией, порожденной \mathcal{B}* .

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть \mathcal{B} является базой для некоторой топологии. Поскольку X является открытым множеством, то существует совокупность $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$, такая, что $X = \bigcup_{B \in \mathcal{U}} B$. Но тогда $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$, и условие (i) выполнено. Далее, пусть $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и $x \in B_1 \cap B_2$. Поскольку множества B_1, B_2 открыты, то их пересечение $B_1 \cap B_2$ также открыто. По этой причине, согласно критерию базы, существует элемент $B_3 \in \mathcal{B}$, такой, что $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Условие (ii) выполнено.

(\Leftarrow) Пусть множество \mathcal{B} удовлетворяет (i) и (ii) и пусть \mathcal{T} — совокупность всевозможных объединений элементов \mathcal{B} :

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{U}} B \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\}.$$

Во-первых, мы должны показать, что \mathcal{T} удовлетворяет трем определяющим свойствам топологии. Условие (i) влечет, что $X \in \mathcal{T}$. Поскольку $\emptyset \subset \mathcal{B}$, то $\emptyset \in \mathcal{T}$. Объединение элементов \mathcal{T} есть объединение объединений элементов \mathcal{B} и, поэтому, само является объединением элементов

\mathcal{B} . Таким образом, \mathcal{T} замкнуто относительно произвольных объединений.

Для того, чтобы показать, что \mathcal{T} замкнуто относительно пересечения конечного числа множеств, предположим сначала, что $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Тогда для любого $x \in U_1 \cap U_2$ определение \mathcal{T} влечет, что существуют элементы $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, такие, что

$$x \in B_1 \subset U_1 \text{ и } x \in B_2 \subset U_2.$$

Условие (ii) гарантирует, что существует $B_3 \in \mathcal{B}$, такой, что

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2.$$

Меняя x , мы получаем, что пересечение $U_1 \cap U_2$ есть объединение всех таких B_3 . В этой связи, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Это показывает, что \mathcal{T} замкнуто относительно попарных пересечений, а замкнутость относительно пересечения конечного числа множеств следует отсюда по индукции. Этим заканчивается доказательство того, что \mathcal{T} — топология.

Для того, чтобы увидеть, что \mathcal{B} — база \mathcal{T} , достаточно заметить, что каждый элемент \mathcal{B} принадлежит \mathcal{T} (являясь объединением одного элемента \mathcal{B}), а каждый элемент \mathcal{T} является объединением элементов \mathcal{B} , по определению. Согласно определению базы топологии, ясно, что \mathcal{T} — единственная топология, для которой \mathcal{B} — база. \square

3.3. База системы окрестностей

Определение 9.14. Пусть X — топологическое пространство, а $p \in X$. Совокупность \mathcal{B}_p окрестностей точки p называется **базой системы окрестностей в точке p** , если каждая окрестность p содержит некоторый элемент $B \in \mathcal{B}_p$.

4. Аксиомы отделимости и счетности

4.1. Аксиома Хаусдорфа

Определение топологического пространства является удивительно гибким и может быть использовано для описания широкого набора концепций «пространства». Вместе с тем, без дополнительных ограниче-

ний, произвольное топологическое пространство является слишком общим для большинства целей, поскольку оно может быть пространством, свойства которого противоречат многим из свойств нашей базовой пространственной интуиции.

Например, в пространствах, с которыми мы наиболее знакомы, такими, как евклидовы пространства, синглетон $\{p\}$ всегда замкнут, поскольку вокруг каждой точки, отличной от p , можно описать шар, не содержащий p . Более общо, две различные точки в метрическом пространстве всегда имеют непересекающиеся окрестности. Вместе с тем, эти свойства не всегда выполняются в топологических пространствах. Точки 1 и 2 множества $\{1, 2, 3\}$ с топологией из Примера 9.3 (d) не имеют непересекающихся окрестностей. Более того, множество $\{1\}$ не замкнуто, поскольку его дополнение не открыто. Согласно Примеру 9.6, в этом пространстве можно выбрать последовательность, имеющую два предела.

Проблема с рассмотренными примерами заключается в том, что имеется слишком мало открытых множеств, и окрестности не имеют того интуитивного смысла, которым они обладали в метрическом пространстве. Для исключения таких «патологических» пространств примем следующее определение.

Определение 9.15. *Топологическое пространство X называется хаусдорфовым пространством, если для любой пары различных точек $p_1, p_2 \in X$ существуют окрестности U_1 точки p_1 и U_2 точки p_2 , такие, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Свойство произвольных различных точек иметь непересекающиеся окрестности называется **аксиомой Хаусдорфа** или **свойством отделимости** и резюмируется фразой: «точки могут быть отделены друг от друга открытыми множествами». Топология в хаусдорфовом пространстве называется **хаусдорфовой топологией**.

Пример 9.13. *(Хаусдорфовы пространства)*

- Любое метрическое пространство хаусдорфово: если p_1 и p_2 различны, то положим $r = d(p_1, p_2)$; тогда открытые шары радиуса $r/2$ с центрами в p_1 и p_2 не пересекаются в силу неравенства треугольника.

- Любое дискретное пространство хаусдорфово, поскольку $\{p_1\}$ и $\{p_2\}$ являются непересекающимися открытыми множествами в том случае, когда $p_1 \neq p_2$.
- Любое открытое подмножество хаусдорфова пространства хаусдорфово: если $V \subset X$ открыто в хаусдорфовом пространстве X , а p_1, p_2 — различные точки V , то в X существуют открытые множества U_1, U_2 , отделяющие p_1 и p_2 друг от друга; тогда множества $U_1 \cap V, U_2 \cap V$ открыты в V , не пересекаются и содержат p_1 и p_2 соответственно.

Пример 9.14. (Нехаусдорфовы пространства)

Тривиальная топология на любом множестве, состоящем из более чем одного элемента — не хаусдорфова. Топология на множестве $\{1, 2, 3\}$ из Примера 9.3 (d) — не хаусдорфова. Поскольку любое метрическое пространство хаусдорфово, то эти топологические пространства не метризуемы.

Хаусдорфово пространство обладает многими из свойств метрического пространства. Среди этих свойств — замкнутость конечного множества и единственность предела.

Предложение 9.21. Пусть X — хаусдорфово пространство. Тогда

- (a) Любое конечное подмножество X замкнуто.
- (b) Если последовательность (x_n) точек X сходится к точке $x \in X$, то этот предел единственный.

Доказательство. (a) Сначала рассмотрим множество $\{p_0\}$, состоящее из одной точки. Если $p \neq p_0$, то свойство отделимости говорит о том, что существуют непересекающиеся окрестности U точки p и V точки p_0 . Следовательно, $U \subset X \setminus \{p_0\}$. Согласно Предложению 9.3 (h), множество $\{p_0\}$ замкнуто. Конечные множества являются объединениями конечного числа одноточечных множеств и, в этой связи, они замкнуты.

(b) Предположим, «от противного», что последовательность (x_n) имеет два различных предела x и x' . Согласно свойству отделимости, существуют непересекающиеся окрестности U точки x и U' точки x' . По определению сходимости последовательности, существуют номера

$N, N' \in \mathbb{N}$, такие, что $n \geq N$ влечет $x_n \in U$, а $n \geq N'$ влечет $x_n \in U'$. По этой причине, если $n \geq \max\{N, N'\}$, то $x_n \in U \cap U' = \emptyset$. Противоречие. \square

Если множество конечно, то среди всевозможных топологий на нем хаусдорфовой будет только одна — дискретная, что утверждается в следующем Предложении.

Предложение 9.22. *Пусть X — конечное множество, на котором задана хаусдорфова топология. Тогда эта топология является дискретной.*

Доказательство. Сначала покажем, что все одноточечные подмножества X открыты. Пусть $p \in X$. Поскольку X — конечное множество, то $X \setminus \{p\}$ — конечно (в частности, пусто). Согласно Предложению 9.21 (а), множество $X \setminus \{p\}$ замкнуто. По этой причине, множество $\{p\}$ открыто.

Пусть теперь $O \subset X$ — произвольное множество. Поскольку $O = \bigcup_{p \in O} \{p\}$, то множество O открыто как объединение открытых множеств. Мы показали, что любое подмножество X открыто. Но это как раз означает, что топология на X является дискретной. \square

Согласно Определению 9.5, предельная точка множества — это такая точка объемлющего пространства, что любая ее окрестность содержит точку из данного множества. В хаусдорфовых пространствах предельные точки можно охарактеризовать следующим образом.

Предложение 9.23. *Пусть X — хаусдорфово пространство, $A \subset X$. Если $p \in X$ — предельная точка A , то любая окрестность p содержит бесконечное множество точек из A .*

Доказательство. Пусть U — окрестность точки p . Она содержит точку $q_1 \in A$, не совпадающую с p . Тогда p и q_1 отделимы друг от друга окрестностями $V_p^{(1)}$ и V_{q_1} , поскольку X является хаусдорфовым пространством. Множества

$$U_p^{(1)} = U \cap V_p^{(1)}, \quad U_{q_1} = U \cap V_{q_1},$$

являются непересекающимися окрестностями точек p и q_1 . Множество $U_p^{(1)}$ содержит точку $q_2 \in A$, не совпадающую ни с p , ни с q_1 . Таким образом, множество U содержит точки $q_1, q_2 \in A$, не совпадающие ни с друг другом, ни с p .

Точки p и q_2 отделимы друг от друга окрестностями $V_p^{(2)}$ и V_{q_2} . Тогда множества

$$U_p^{(2)} = U_p^{(1)} \cap V_p^{(2)}, \quad U_{q_2} = U_p^{(1)} \cap V_{q_2},$$

являются непересекающимися окрестностями точек p и q_2 . Множество $U_p^{(2)}$ содержит точку $q_3 \in A$, не совпадающую ни с p , ни с q_2 . Поскольку $U_p^{(2)} \subset U_p^{(1)}$, то $q_3 \neq q_1$. Итак, множество U содержит точки $q_1, q_2, q_3 \in A$, не совпадающие друг с другом.

На шаге с номером n получаем окрестности $U_p^{(n)}$ и U_{q_n} точек p и q_n , такие, что $U_p^{(n)}, U_{q_n} \subset U_p^{(n-1)}$ и $U_p^{(n)} \cap U_{q_n} = \emptyset$. Множество $U_p^{(n)}$ содержит точку $q_{n+1} \in A$, не совпадающую с p . Она же, по построению, не равна q_n . Кроме того, q_{n+1} не совпадает с точками q_{n-1}, \dots, q_1 , поскольку $U_p^{(n)} \subset U_p^{(n-1)} \subset \dots \subset U_p^{(1)}$.

В итоге, приходим к последовательности $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ точек A , где $q_n \neq q_k$ для всех n, k . Тем самым мы показали, что любая окрестность p содержит бесконечное множество точек из A . \square

4.2. Аксиомы счетности

В то время как аксиома отделимости гарантирует, что топологическое пространство имеем достаточно открытых множеств для того, чтобы соответствовать нашей пространственной интуиции, для большинства целей (включая изучение многообразий), удобно ограничиться пространствами, которые не имеют «чересчур много» открытых множеств. Было бы слишком ограничительным требовать наличия не более чем счетной совокупности открытых множеств, поскольку даже \mathbb{R} имеет несчетное множество их. Но оказывается, что баланс достигается за счет требования существования не более чем счетной базы.

Имеется несколько удобных аксиом счетности. Мы начнем со слабойшей из них.

Определение 9.16. *Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, если для каждой его точки существует не более, чем счетная база системы окрестностей.*

Пример 9.15. *Если X — метрическое пространство, а $p \in X$, то множество шаров $B_r(p)$ с рациональными радиусами образует базу си-*

стемы окрестностей в точке p . По этой причине, каждое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Для многих целей удобно работать с базой системы окрестностей, обладающей свойством вложенности.

Определение 9.17. Если X — топологическое пространство, а $p \in X$, то последовательность $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ окрестностей p называется **базой вложенных окрестностей в точке p** , если $U_{n+1} \subset U_n$ для любого натурального n , и каждая окрестность p содержит U_n для некоторого n .

В пространстве, удовлетворяющем первой аксиоме счетности, каждая точка обладает базой вложенных окрестностей, о чем утверждает следующая Лемма.

Лемма 9.1. (Лемма о базе вложенных окрестностей) Пусть X — пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Тогда для каждой точки $p \in X$ существует база вложенных окрестностей в точке p .

Доказательство. Если база системы окрестностей в точке p конечна, $\{V_1, \dots, V_k\}$, то положим $U_n = V_1 \cap \dots \cap V_k$ для всех n . Иначе, если база системы окрестностей счетна, $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, то положим $U_n = V_1 \cap \dots \cap V_n$ для всех n . \square

Наиболее важной чертой пространств с первой аксиомой счетности является то, что с помощью последовательностей можно устанавливать многие топологические свойства. Следующие Предложения придают сказанному точный смысл.

Определение 9.18. Если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек в топологическом пространстве X и $A \subset X$, то говорят, что эта последовательность **финально в A** , если $x_n \in A$ для всех n , за исключением, быть может, конечного их числа.

Предложение 9.24. Пусть X — топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, A — подмножество X , а x — точка X . Тогда

- (a) $x \in \bar{A}$ тогда и только тогда, когда x является пределом последовательности точек из A .
- (b) $x \in \text{Int } A$ тогда и только тогда, когда любая последовательность точек X , сходящаяся к x , финально в A .
- (c) A замкнуто в X если и только если A содержит все пределы всех последовательностей точек A .
- (d) A открыто в X если и только если каждая последовательность в X , сходящаяся к точке из A , финально в A .

Доказательство. (a) (\Rightarrow) Пусть $x \in \bar{A}$. Для точки x существует база $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ вложенных окрестностей. Поскольку $x \in \bar{A}$, то любая окрестность x содержит точку из A . Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество U_n содержит некоторый элемент из A . Обозначим его через x_n . Приходим к последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек из A , таких, что $x_n \in U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь V — произвольная окрестность точки x . Поскольку $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ — база системы окрестностей точки x , то существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $U_N \subset V$. Поскольку при $n \geq N$ справедливо включение $U_n \subset U_N$, то мы получаем, что $x_n \in V$ для всех $n \geq N$. В силу произвольности V это означает, что $x_n \rightarrow x$.

(\Leftarrow) Пусть² $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек из A , сходящаяся к точке $x \in X$. Пусть V — произвольная окрестность точки x . По определению предела последовательности, она содержит все члены последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, за исключением конечного их числа. Но каждый член последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ есть точка из A . По этой причине, мы можем заключить, что V содержит хотя бы одну точку из A . В силу произвольности V , отсюда следует, что $x \in \bar{A}$.

(b) (\Rightarrow) Если $x \in \text{Int } A$, то существует окрестность V точки x , содержащаяся в A . Если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек X , сходящаяся к x , то по определению сходимости последовательности, V содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа. Отсюда следует, что и A содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа. В этой связи, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ финально в A .

²Для полноты изложения мы повторяем доказательство Предложения 9.8. Заметим, что первая аксиома счетности в этом случае не используется.

(\Leftarrow) Будем доказывать «от противного». Предположим, что $x \notin \text{Int } A$. Тогда любая окрестность точки x содержит точку из $X \setminus A$. По этой причине, $x \in \overline{X \setminus A}$. Согласно (а), существует последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек из $X \setminus A$, сходящаяся к x . Таким образом, мы нашли последовательность, сходящуюся к x , члены которой не принадлежат A . Но это противоречит тому, что любая последовательность, сходящаяся к x , финально в A . В этой связи, $x \in \text{Int } A$.

(с) (\Rightarrow) Пусть A замкнуто, тогда $A = \overline{A}$. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек A , сходящаяся к точке $x \in X$. Согласно (а), тогда будет $x \in \overline{A}$, то есть, что $x \in A$.

(\Leftarrow) Будем доказывать «от противного». Предположим, что $A \neq \overline{A}$. Тогда существует $x \in \overline{A}$, такой, что $x \notin A$. Поскольку $x \in \overline{A}$, то, в силу (а), существует последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек из A , сходящаяся к x . Поскольку x — предел последовательности точек из A , то $x \in A$. Мы получили, что одновременно $x \in A$ и $x \notin A$. Противоречие. Таким образом, $A = \overline{A}$, и, следовательно, множество A замкнуто.

(d) (\Rightarrow) Пусть множество A открыто в X , тогда $A = \text{Int } A$. Пусть $x \in A$, а $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек X , сходящаяся к x . Поскольку $x \in \text{Int } A$, то $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, согласно (b), финально в A .

(\Leftarrow) Будем доказывать «от противного». Предположим, что $\text{Int } A \neq A$. Тогда существует точка $x \in A$, такая, что $x \notin \text{Int } A$. По условию, последовательность, сходящаяся к x , финально в A . В силу (b) мы имеем тогда, что $x \in \text{Int } A$. В этой связи, $x \in \text{Int } A$ и $x \notin \text{Int } A$. Противоречие. Таким образом, $A = \text{Int } A$ и множество A открыто в X . \square

Следующее Предложение обобщает Предложение 3.3 на топологические пространства.

Предложение 9.25. Пусть X и Y — топологические пространства. Тогда

- (а) Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ является непрерывным, а последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек X сходится к точке $x \in X$. Тогда последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ точек Y сходится к точке $f(x) \in Y$.
- (б) Если X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то справедливо обратное к (а) утверждение: если отображение $f : X \rightarrow Y$ таково, что $x_n \rightarrow x$ в X влечет $f(x_n) \rightarrow f(x)$ в Y , то f — непрерывное отображение.

Доказательство. (а) Пусть V — окрестность точки $f(x)$. Тогда, в силу непрерывности f , ее прообраз $f^{-1}(V)$ является окрестностью точки x . По условию, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к x . По этой причине, существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \in f^{-1}(V)$ для всех $n \geq N$. Но тогда $f(x_n) \in V$ для всех $n \geq N$. В силу произвольности V , заключаем отсюда, что $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

(б) Пусть $A \subset X$ — произвольное множество. Если мы покажем, что $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, то на основании Предложения 9.17 можно заключить, что отображение f является непрерывным.

Пусть $y \in f(\overline{A})$, тогда существует $x \in \overline{A}$, такой, что $f(x) = y$. Поскольку X является пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности, то по Лемме 9.24 (а) существует последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек A , сходящаяся к x . По условию, тогда последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ точек $f(A)$ сходится к $f(x) = y$. Согласно Предложению 9.8, отсюда следует, что $y \in \overline{f(A)}$. В силу произвольности y , приходим к включению $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, и мы получаем, что отображение f непрерывно. \square

Для изучения многообразий мы будем использовать более сильное свойство счетности.

Определение 9.19. *Топологическое пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, если его топология обладает не более, чем счетной базой.*

Пример 9.16. *Евклидово пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Для формулировки некоторых следствий из второй аксиомы счетности нам понадобится следующее определение.

Определение 9.20. *Если X — топологическое пространство, то совокупность \mathcal{U} его подмножеств называется **покрытием** X , если каждая точка X содержится, по меньшей мере, в одном из элементов \mathcal{U} . Покрытие \mathcal{U} называется **открытым**, если каждый элемент \mathcal{U} открыт в X , и **замкнутым**, если каждый элемент \mathcal{U} замкнут в X .*

Подпокрытием покрытия \mathcal{U} называется подмножество $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, которое также покрывает X .

Теорема 9.1. (Свойства пространств со второй аксиомой счетности) Пусть X — пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Тогда

- (a) X удовлетворяет первой аксиоме счетности.
- (b) X содержит не более, чем счетное плотное подмножество.
- (c) Любое открытое покрытие X содержит не более, чем счетное подпокрытие.

Доказательство. Пусть \mathcal{B} — не более, чем счетная база X .

(a) Для любой точки $p \in X$ элементы \mathcal{B} , содержащие p , образуют не более, чем счетную базу системы окрестностей точки p . Действительно, определим множество

$$\mathcal{B}_p = \{B \in \mathcal{B} \mid p \in B\}.$$

По построению, каждый элемент \mathcal{B}_p является окрестностью p и \mathcal{B}_p — не более, чем счетное множество. Пусть U — окрестность точки p . Поскольку $x \in U$, то в силу критерия базы существует элемент $B \in \mathcal{B}$, такой, что $p \in B \subset U$. Отсюда следует, что $B \in \mathcal{B}_p$ и что \mathcal{B}_p — база системы окрестностей точки p .

(b) Предположим, что \mathcal{B} не содержит пустое множество в качестве своего элемента. В противном случае, исключим его. Пусть $\mathcal{B} = (B_n)_{n=1}^{\infty}$ и $B_n \neq \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для каждого n выберем в B_n некоторый элемент и обозначим его через x_n . Совокупность $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является не более, чем счетным подмножеством X . Для того, чтобы доказать равенство $\overline{A} = X$, мы воспользуемся Предложением 9.5.

Пусть $O \subset X$ — непустое открытое множество. Раз оно непусто, то в нем есть некоторая точка p . Согласно критерию базы, существует номер $n \in \mathbb{N}$, такой, что $p \in B_n \subset O$. По этой причине, $x_n \in O$, и мы показали, что O содержит точку из A . В силу произвольности O мы заключаем, что A плотно в X .

(c) Пусть \mathcal{U} — произвольное открытое покрытие X . Определим подмножество $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, требуя, что $B \in \mathcal{B}'$ в том и только в том случае, когда B полностью содержится в некотором элементе \mathcal{U} . Поскольку любое подмножество не более, чем счетного множества не более, чем счетно, то множество \mathcal{B}' является не более, чем счетным множеством.

Теперь, для каждого элемента $B \in \mathcal{B}'$ выберем элемент $U_B \in \mathcal{U}$, такой, что $B \subset U_B$ (это возможно в силу определения \mathcal{B}'). Совокупность

$$\mathcal{U}' = \{U_B \mid B \in \mathcal{B}'\}$$

является не более, чем счетным подмножеством \mathcal{U} ; утверждение будет доказано, если мы покажем, что \mathcal{U}' покрывает X .

Если $x \in X$, то $x \in U_0$ для некоторого $U_0 \in \mathcal{U}$. Согласно критерию базы, найдется $B \in \mathcal{B}$, такой, что $x \in B \subset U_0$. Это означает, в частности, что $B \in \mathcal{B}'$ и потому для множества $U_B \in \mathcal{U}'$ справедливы включения $x \in B \subset U_B$. Это показывает, что \mathcal{U}' — покрытие X . \square

Определение 9.21. Топологическое пространство X называется *сепарабельным*, если оно содержит не более, чем счетное плотное множество, и оно называется *лиindelефовым пространством*, если каждое открытое покрытие X содержит не более, чем счетное подпокрытие.

Мы определили четыре различных свойства счетности, которыми топологическое пространство может обладать: первая и вторая аксиомы счетности, сепарабельность и свойство Линделефа. Теорему 9.1 можно резюмировать следующим образом: любое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, является пространством с первой аксиомой счетности, сепарабельным и лиindelефовым. Вместе с тем, ни одно из этих следствий обратимо и ни одно из трех более слабых свойств счетности не влечет любое из остальных (более того, предположения о выполнении всех трех более слабых свойств свойств недостаточно для выполнения второй аксиомы счетности). Однако, для метрических пространств все гораздо проще: каждое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, а вторая аксиома счетности, сепарабельность и лиindelефовость эквивалентны.

Предложение 9.26. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a) (M, d) удовлетворяет второй аксиоме счетности;
- (b) (M, d) сепарабельно;
- (c) (M, d) лиindelефово.

Доказательство. (a) \Rightarrow (b) и (a) \Rightarrow (c), согласно Теореме 9.1.

Докажем импликацию (b) \Rightarrow (a). Пусть (b) справедливо. Тогда существует не более, чем счетное множество A , такое, что $\bar{A} = X$. Положим

$$\mathcal{B} = \{B_{1/n}(x) \mid x \in A, n \in \mathbb{N}\}.$$

Множество \mathcal{B} не более, чем счетно. Покажем, что оно является базой метрической топологии. Прежде всего, любой элемент \mathcal{B} открыт в M . Далее, пусть U — открытое подмножество M . Если оно пусто, то доказывать нечего. Пусть оно не пусто. Выберем произвольную точку $y \in U$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$, такое, что $B_\varepsilon(y) \subset U$. По принципу Архимеда, существует число $n \in \mathbb{N}$, такое, что $\frac{2}{n} < \varepsilon$. В этой связи, $B_{2/n}(y) \subset U$. По определению A , существует $x \in A$, такой, что $x \in B_{1/n}(y)$.

Покажем, что $y \in B_{1/n}(x) \subset U$. Прежде всего, поскольку $d(x, y) < \frac{1}{n}$, то мы имеем, что $y \in B_{1/n}(x)$. Далее, для $z \in B_{1/n}(x)$ справедливы неравенства

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n},$$

поэтому $z \in B_{2/n}(y)$, откуда, в силу произвольности z , следует, что $B_{1/n}(x) \subset B_{2/n}(y)$. Таким образом, $B_{1/n}(x) \subset U$.

В силу произвольности y мы получаем, что U является объединением элементов \mathcal{B} . Следовательно, \mathcal{B} — база и пространство (M, d) удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Докажем импликацию (c) \Rightarrow (a). Пусть (c) справедливо. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$\{B_{2^{-n}}(x) \mid x \in M\}$$

является открытым покрытием M . В этой связи, оно содержит не более, чем счетное подпокрытие \mathcal{B}_n . Пусть

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n.$$

Множество \mathcal{B} является не более, чем счетным, состоящим из открытых подмножеств M . Покажем, что \mathcal{B} — база метрической топологии M .

Пусть U — непустое открытое подмножество M . Выберем произвольную точку $x \in U$. Мы должны показать, что имеется некоторый элемент

$B \in \mathcal{B}$, такой, что $x \in B \subset U$. Поскольку $x \in U$, а U открыто, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что $B_\varepsilon(x) \subset U$. Выберем настолько большой номер $n \in \mathbb{N}$, что $2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку \mathcal{B}_n покрывает M , то найдется элемент $B_{2^{-n}}(y) \in \mathcal{B}_n$, такой, что $x \in B_{2^{-n}}(y)$. Покажем, что $B_{2^{-n}}(y) \subset U$.

Пусть $z \in B_{2^{-n}}(y)$, тогда $d(z, y) < 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Также, $d(x, y) < 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Согласно неравенству треугольника,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon,$$

откуда следует, что $z \in B_\varepsilon(x) \subset U$, и, в этой связи, $B_{2^{-n}}(y) \subset U$.

Мы показали, что U является объединением элементов из \mathcal{B} . В силу произвольности U заключаем, что \mathcal{B} — база M .

Поскольку (с) \Rightarrow (а) и (а) \Rightarrow (b), то (с) \Rightarrow (b). Аналогично, поскольку (b) \Rightarrow (а) и (а) \Rightarrow (с), то (b) \Rightarrow (с). \square

Предложение 9.27. Пусть X — пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, а $U \subset X$ — непустое открытое множество. Тогда пространство U также удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Доказательство. По условию, X имеет не более, чем счетную базу \mathcal{B} . Пусть

$$\mathcal{B}_U = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset U\}.$$

По построению, множество \mathcal{B}_U является не более, чем счетным множеством, элементы которого открыты в U . Покажем, что \mathcal{B}_U является базой в U .

Пусть $O \subset U$ — открытое подмножество U . Тогда, по определению топологии на U , множество O открыто в X . Следовательно, $O = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B$, где $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$. Пусть $B \in \mathcal{V}$, тогда $B \subset O \subset U$, и это означает, что $B \in \mathcal{B}_U$. В этой связи, $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}_U$. Мы показали, что O является объединением элементов из \mathcal{B}_U . По этой причине, в силу произвольности O , множество \mathcal{B}_U является базой топологии на U . Мы показали, тем самым, что пространство U удовлетворяет второй аксиоме счетности. \square

5. Подпространство и произведение пространств

5.1. Подпространство

Мы видели примеры топологических пространств, являющихся подмножествами \mathbb{R}^n , с топологией, индуцированной евклидовой метрикой. Мы также видели, что открытые подмножества топологического пространства наследуют топологию объемлющего пространства. В настоящем разделе мы покажем, что произвольные подмножества топологических пространств также могут быть рассмотрены как топологические пространства.

Пусть (X, \mathcal{T}_X) — топологическое пространство, а $S \subset X$ — множество. Определим совокупность \mathcal{T}_S равенством

$$\mathcal{T}_S = \{U \in \mathcal{P}(S) \mid \exists V \in \mathcal{T}_X : U = S \cap V\}. \quad (9.5.1)$$

Предложение 9.28. *Множество \mathcal{T}_S является топологией на S .*

Доказательство. Необходимо проверить выполнение аксиом (\mathcal{T}_1) – (\mathcal{T}_3) топологии.

(\mathcal{T}_1) Поскольку

$$S = S \cap X \quad \text{и} \quad \emptyset = S \cap \emptyset,$$

где $X, \emptyset \in \mathcal{T}_X$, то $S, \emptyset \in \mathcal{T}_S$.

(\mathcal{T}_2) Пусть $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_S$. Тогда существуют множества $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{T}_X$, такие, что $U_i = S \cap V_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда

$$U_1 \cap \dots \cap U_n = (S \cap V_1) \cap \dots \cap (S \cap V_n) = S \cap (V_1 \cap \dots \cap V_n).$$

Поскольку $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{T}_X$, то $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}_S$.

(\mathcal{T}_3) Пусть, наконец, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство элементов \mathcal{T}_S . Тогда для каждого $\alpha \in A$ существует множество $V_\alpha \in \mathcal{T}_X$, такое, что $U_\alpha = S \cap V_\alpha$. В этой связи,

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (S \cap V_\alpha) = S \cap \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha,$$

где $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{T}_X$. По этой причине, $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}_S$.

Мы установили выполнение всех аксиом топологии для множества \mathcal{T}_S и тем самым показали, что оно является топологией. \square

Определение 9.22. Топология \mathcal{T}_S , определенная равенством (9.5.1), называется *индуцированной топологией* (или *наследственной топологией*) на S . Структура (S, \mathcal{T}_S) называется *подпространством* (X, \mathcal{T}_X) .

Иными словами, открытыми подмножествами S являются всевозможные пересечения S с открытыми подмножествами X .

В дальнейшем, говоря о подмножестве топологического пространства, мы всегда рассматриваем его как топологическое пространство с индуцированной топологией, если не указано иное.

Открытое подмножество S , по определению, является пересечением S и некоторого открытого подмножества X . Из этого вытекает, что замкнутое подмножество S является пересечением S и замкнутого подмножества X .

Предложение 9.29. Пусть S — подпространство X . Множество $B \subset S$ замкнуто в S тогда и только тогда, когда оно является пересечением S с некоторым замкнутым подмножеством X .

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть $B \subset S$ замкнуто в S . Тогда множество $S \setminus B$ открыто в S . По определению индуцированной топологии, существует открытое множество $V \subset X$, такое, что

$$S \setminus B = S \cap V.$$

Множество $X \setminus V$ замкнуто в X . Покажем, что справедливо равенство

$$B = S \cap (X \setminus V). \quad (9.5.2)$$

Пусть $x \in B$, тогда $x \in S$ и $x \notin S \setminus B$. Следовательно, $x \notin V$. По этой причине, $x \in X \setminus V$, и $x \in S \cap (X \setminus V)$. Таким образом, $B \subset S \cap (X \setminus V)$. Обратно, пусть $x \in S \cap (X \setminus V)$. Тогда $x \in S$ и $x \notin V$. В этой связи, $x \notin S \setminus B$ и мы имеем тогда, что $x \in B$. Следовательно, $S \cap (X \setminus V) \subset B$, и равенство (9.5.2) доказано. Оно означает, что B является пересечением S и некоторого замкнутого подмножества X .

(\Leftarrow) Пусть для $B \subset S$ существует замкнутое множество $F \subset X$, такое, что

$$B = S \cap F.$$

Покажем, что тогда B замкнуто в S . Для этого достаточно показать, что $S \setminus B$ открыто в S . Покажем, что справедливо равенство

$$S \setminus B = S \cap (X \setminus F). \quad (9.5.3)$$

Поскольку $X \setminus F$ открыто в X , то справедливость этого равенства дает желаемый результат.

Пусть $x \in S \setminus B$, тогда $x \in S$ и $x \notin B$. В этой связи, $x \notin F$, а потому $x \in X \setminus F$. По этой причине, $x \in S \cap (X \setminus F)$ и $S \setminus B \subset S \cap (X \setminus F)$. Обратно, пусть $x \in S \cap (X \setminus F)$. Тогда $x \in S$ и $x \notin F$. Следовательно, $x \notin B$. В этой связи, $x \in S \setminus B$ и, таким образом, $S \cap (X \setminus F) \subset S \setminus B$. Равенство (9.5.3) доказано.

Множество $S \setminus B$ является пересечением S и некоторого открытого подмножества X , поэтому $S \setminus B$ открыто в S . Значит, B замкнуто в S . \square

Если (X, d) — метрическое пространство, то метрика на подмножестве $S \subset X$ задается сужением исходной метрики на S . Такая индуцированная метрика задает метрическую топологию на S . Вместе с тем, на S можно индуцировать исходную метрическую топологию. Оба способа приводят к одной и той же топологии, как показывает Предложение 3.11.

Термин «подпространство» встречается в теории векторных пространств, где лишь некоторые подмножества (те, которые замкнуты относительно сложения векторов и умножения на скаляр) являются подпространствами. В противоположность этому, в топологии нет ограничений на типы множеств, рассматриваемых как подпространства: любое подмножество топологического пространства является его подпространством, если снабдить его индуцированной топологией.

Необходимо помнить о том, что свойства «открытый» и «замкнутый» не являются свойствами самого множества; это свойства множества по отношению к топологическому пространству. Если S — подпространство X , то подмножество S может быть открытым или замкнутым в S , но не в X , что показывает следующий пример.

Пример 9.17. Рассмотрим подпространства $S_1 = [0, 1] \cup]2, 3[$ и $S_2 = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства \mathbb{R} . Интервал $[0, 1]$ не является открытым подмножеством \mathbb{R} , но он же является открытым подмножеством S_1 , поскольку

$$[0, 1] = S_1 \cap]-1, 2[.$$

В S_2 одноточечные множества $\{1/n\}$ открыты, так как

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = S_2 \cap \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} \right[,$$

поэтому индуцированная топология на S_2 дискретна.

Для ясности, если S является подпространством X , то иногда говорят, что множество $U \subset S$ *относительно открыто* или *относительно замкнуто* в S , чтобы подчеркнуть, что множество U открыто или замкнуто в индуцированной топологии S , а не в топологии X . Аналогично, если x — точка S , то окрестность x в S в топологии подпространства иногда называется *относительной окрестностью* x . Следующее Предложение связывает открытые и относительно открытые множества.

Предложение 9.30. Пусть S — подпространство топологического пространства X .

- (а) Если $U \subset S \subset X$, U открыто в S , а S открыто в X , то U открыто в X . То же самое будет истинно, если всюду «открытый» заменить на «замкнутый».
- (б) Если U — подмножество S , которое либо открыто, либо замкнуто в X , то оно, соответственно, также открыто, либо замкнуто в S .

Доказательство. (а) *Случай открытых множеств.* Поскольку U открыто в S , то $U = S \cap V$, для некоторого открытого множества $V \subset X$. Но S также открыто в X , поэтому $S \cap V$ открыто в X . В этой связи, U открыто в X .

Случай замкнутых множеств. Если U замкнуто в S , то, в силу Предложения 9.29, оно представимо в виде $U = S \cap V$, для некоторого замкнутого множества $V \subset X$. Поскольку S также замкнуто в X , то пересечение $S \cap V$ замкнуто в X . По этой причине, U замкнуто в X .

(б) Пусть U открыто в X . Поскольку $U = S \cap V$, где $V = U$ — открыто в X , то U открыто в S . Аналогично, если U замкнуто в X , то из равенства $U = S \cap V$, в котором $V = U$, следует, что U замкнуто в S . \square

Ранее в Предложении 9.2 мы определили топологию на открытом подмножестве. Покажем, что она совпадает с индуцированной топологией.

Предложение 9.31. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство, а $S \subset X$ — открытое множество. Индуцированная топология на S совпадает с топологией, определенной в Предложении 9.2.

Доказательство. Пусть \mathcal{T}_S — индуцированная топология на S , а $\mathcal{T}_S^{\text{old}}$ — «старая» топология на S , то есть,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_S &= \{U \in \mathcal{P}(S) \mid \exists V \in \mathcal{T} : U = S \cap V\}, \\ \mathcal{T}_S^{\text{old}} &= \{U \in \mathcal{P}(S) \mid U \in \mathcal{T}\}.\end{aligned}$$

Покажем, что $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_S^{\text{old}}$.

Пусть $U \in \mathcal{T}_S$. Мы находимся в условиях Предложения 9.30 (а), поэтому U открыто в X . Таким образом, $U \in \mathcal{T}_S^{\text{old}}$ и, в силу произвольности U , заключаем отсюда, что $\mathcal{T}_S \subset \mathcal{T}_S^{\text{old}}$.

Обратно, пусть $U \in \mathcal{T}_S^{\text{old}}$. Тогда U открыто в X . В силу Предложения 9.30 (б), тогда $U \in \mathcal{T}_S$. По этой причине, в силу произвольности U , мы имеем включение $\mathcal{T}_S^{\text{old}} \subset \mathcal{T}_S$. Таким образом, мы показали, что $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_S^{\text{old}}$. \square

Если X — топологическое пространство, а $U \subset S \subset X$, то возникает неоднозначность в термине «замыкание U », поскольку, в общем случае, замыкание U в S (в индуцированной топологии) может не совпадать с его замыканием в X . То же относится и к «внутренности U ». В этом случае, обозначения \bar{U} и $\text{Int } U$ будут всегда означать замыкание U в X и внутренность U в X соответственно.

Предложение 9.32. Пусть X — топологическое пространство и $U \subset S \subset X$. Тогда

- (а) Замыкание U в S равно $\bar{U} \cap S$.
- (б) Внутренность U в S содержит $\text{Int } U$.

Доказательство. (а) Пусть \bar{U}^S обозначает замыкание U в S . Нужно показать, что

$$\bar{U}^S = S \cap \bar{U}.$$

Пусть $x \in \bar{U}^S$, тогда $x \in S$. Возьмем произвольную окрестность V точки x в X . Покажем, что V содержит точку из U . Действительно, множество $O = S \cap V$ открыто в S и содержит x , то есть, является окрестностью x в S . В этой связи, найдется точка $y \in U$, такая, что $y \in O$. Следовательно, $y \in V$, и мы показали, тем самым, что $x \in \bar{U}$. Таким образом, $x \in S \cap \bar{U}$, что влечет включение $\bar{U}^S \subset S \cap \bar{U}$.

Обратно, пусть $x \in S \cap \bar{U}$, тогда $x \in S$. Выберем произвольную окрестность O точки x в S и покажем, что она содержит точку из U . По определению индуцированной топологии, существует открытое множество $V \subset X$, такое, что $O = S \cap V$. Множество V является окрестностью x в X и, поскольку $x \in \bar{U}$, существует точка $y \in U$, такая, что $y \in V$. Поскольку $U \subset S$, то $y \in S$ и потому $y \in O$. Таким образом, $x \in \bar{U}^S$ и, в этой связи, $S \cap \bar{U} \subset \bar{U}^S$. Окончательно, приходим к равенству $\bar{U}^S = S \cap \bar{U}$.

(b) Пусть $\text{Int}_S U$ обозначает внутренность U в S . Нужно показать, что

$$\text{Int } U \subset \text{Int}_S U.$$

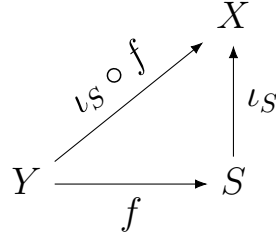
Пусть $x \in \text{Int } U$. Тогда существует окрестность $V \subset X$ точки x , такая, что $V \subset U$. Из включения $U \subset S$ следует, что $V \subset S$, поэтому V открыто в S (Предложение 9.30 (b)). В этой связи, V является окрестностью x в S , лежащей в U . Это означает, что $x \in \text{Int}_S U$ и включение $\text{Int } U \subset \text{Int}_S U$ доказано.

Обратное включение, в общем случае, неверно. Пусть $X = \mathbb{R}$, а $S = [0, 1] \cup]2, 3[$. Положим $U = [0, 1]$. Поскольку U открыто в S (см. Пример 9.17), то $\text{Int}_S U = [0, 1]$. Вместе с тем, $\text{Int } U =]0, 1[$. В этой связи, $\text{Int } U \neq \text{Int}_S U$. \square

Если $S \subset X$, то **канонической инъекцией** называется отображение $\iota_S : S \hookrightarrow X$, действующее по правилу $p \mapsto p$. Следующее свойство индуцированной топологии полностью характеризует индуцированную топологию среди всех возможных топологий на подмножестве [1].

Теорема 9.2. (Характеристическое свойство индуцированной топологии) Пусть X — топологическое пространство, а $S \subset X$ — подпространство. Для любого топологического пространства Y , отображение $f : Y \rightarrow S$ непрерывно тогда и только тогда, когда компози-

ция $\iota_S \circ f : Y \rightarrow X$ непрерывна:



Доказательство. В доказательстве используется соотношение $\iota_S^{-1}(V) = S \cap V$, справедливое для любого множества $V \subset X$.

(\Rightarrow) Пусть отображение f непрерывно. Для любого открытого множества $V \subset X$ имеем

$$(\iota_S \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(\iota_S^{-1}(V)) = f^{-1}(S \cap V).$$

Правая часть полученного равенства открыта в Y , поскольку множество $S \cap V$ открыто в S . В этой связи, множество $(\iota_S \circ f)^{-1}(V)$ открыто в Y и тем самым мы показали, что отображение $\iota_S \circ f$ непрерывно.

(\Leftarrow) Предположим, что отображение $\iota_S \circ f$ непрерывно. Если U является открытым подмножеством S , то $U = S \cap V$, для некоторого открытого множества $V \subset X$. Тогда

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(S \cap V) = f^{-1}(\iota_S^{-1}(V)) = (\iota_S \circ f)^{-1}(V),$$

где правая часть открыта в Y по предположению. Но тогда и множество $f^{-1}(U)$ открыто в Y , что и означает непрерывность f . \square

Характеристическое свойство имеет ряд полезных следствий. Первое из них является довольно простым и может быть легко доказано без апелляции к Теореме 9.2. Вместе с тем, полезно знать, что оно напрямую вытекает из характеристического свойства.

Следствие 9.2. Если S — подпространство топологического пространства X , то каноническая инъекция $\iota_S : S \hookrightarrow X$ непрерывна.

Доказательство. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow \iota_S & \uparrow \iota_S \\
 S & \xrightarrow{\text{Id}_S} & S
 \end{array}$$

Поскольку тождественное отображение всегда непрерывно, то из характеристического свойства следует, что ι_S также непрерывно. \square

Характеристическое свойство используется для того, чтобы показать что сужение и расширение области прибытия, также как и сужение области определения (конечно, область определения не может быть расширена без распространения отображения, которое в результате может не быть непрерывным) не влияют на непрерывность отображения. Точные утверждения приведены в Следствии.

Следствие 9.3. Пусть X и Y — топологические пространства, а $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение.

- (a) **Сужение области определения:** ограничение f на любое подпространство $S \subset X$ непрерывно.
- (b) **Сужение области прибытия:** если T — подпространство Y , содержащее $f(X)$, то $f : X \rightarrow T$ непрерывно.
- (c) **Расширение области прибытия:** если Z — подпространство Y , то $f : X \rightarrow Z$ непрерывно.

Доказательство. Пункт (a) вытекает из Следствия 9.2, поскольку $f|_S = f \circ \iota_S$. Пункт (b) вытекает из характеристического свойства, примененного к подпространству $T \subset Y$. Наконец, (c) вытекает из рассмотрения композиции f с канонической инъекцией $Y \hookrightarrow Z$. \square

При выборе топологии на подмножестве $S \subset X$ мы имеем две конкурирующие ситуации: мы хотели бы, чтобы каноническая инъекция $S \hookrightarrow X$ была непрерывной (тогда сужение на S любого непрерывного

отображения $f : X \rightarrow Y$ было бы непрерывным), и мы хотели бы, чтобы непрерывные отображения в X , образы которых лежат в S , были бы непрерывны как отображения в S . Для удовлетворения первому требованию S должно иметь достаточно много открытых множеств, а для второго — должно иметь не слишком много. Индуцированная топология выбрана как оптимальный компромисс между этими требованиями.

Естественные топологии, такие, как индуцированная топология, обычно могут быть охарактеризованы в терминах того, какие отображения непрерывны относительно них. Вот почему «характеристическое свойство» индуцированной топологии (Теорема 9.2) так важно. Следующая теорема придает этому точный смысл.

Теорема 9.3. (Единственность индуцированной топологии)

Пусть S — подмножество топологического пространства X . Индуцированная топология на S — единственная топология, для которой выполняется характеристическое свойство.

Доказательство. Пусть на S определена некоторая топология, удовлетворяющая характеристическому свойству. В доказательстве через S_g обозначается множество S с этой топологией, а через S_s — множество S с индуцированной топологией. Для того, чтобы показать, что заданная топология равна индуцированной топологии, достаточно показать, что тождественное отображение S является гомеоморфизмом между S_g и S_s (Предложение 9.15 (b)).

Сначала заметим, что каноническая инъекция $S_s \hookrightarrow X$ непрерывна в силу Следствия 9.2. Поскольку доказательство этого следствия использовало только характеристическое свойство, такое же рассуждение показывает, что каноническая инъекция $S_g \hookrightarrow X$ является непрерывным отображением.

Рассмотрим две композиции

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow \iota_g \circ \text{Id}_{sg} & \uparrow \iota_g \\
 S_s & \xrightarrow{\text{Id}_{sg}} & S_g
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow \iota_s \circ \text{Id}_{gs} & \uparrow \iota_s \\
 S_g & \xrightarrow{\text{Id}_{gs}} & S_s
 \end{array}$$

Здесь Id_{sg} и Id_{gs} обозначают тождественное отображение Id_S из пространства S_s в пространство S_g (соответственно, из пространства S_g в пространство S_s), а ι_g и ι_s — каноническую инъекцию ι_S из пространства S_g (соответственно, из пространства S_s); мы снабдили отображения индексами только с целью обсуждения их непрерывности.

Заметим, что в силу нейтральности тождественного отображения относительно операции композиции, $\iota_g \circ \text{Id}_{sg} = \iota_s$, а $\iota_s \circ \text{Id}_{gs} = \iota_g$, и обе канонических инъекции непрерывны. Применяя характеристическое свойство к каждой из композиций, заключаем, что отображение Id_{sg} и его обратное, Id_{gs} , непрерывны. В этой связи, Id_{sg} — гомеоморфизм. \square

Предложение 9.33. (*Другие свойства индуцированной топологии*) Пусть S — подпространство топологического пространства X .

(а) Если $R \subset S$ — подпространство S , то R — подпространство X ; иными словами, индуцированные топологии, которые R наследует от S и X , совпадают.

(б) Если \mathcal{B} — база топологии на X , то совокупность

$$\mathcal{B}_S = \{B \cap S \mid B \in \mathcal{B}\},$$

является базой топологии на S .

(с) Если (x_n) — последовательность точек S и $x \in S$, то $x_n \rightarrow x$ в S тогда и только тогда, когда $x_n \rightarrow x$ в X .

(д) Любое подпространство хаусдорфова пространства хаусдорфово.

(е) Любое подпространство пространства с первой аксиомой счетности удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(ф) Любое подпространство пространства со второй аксиомой счетности удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Доказательство. (а) Пусть $U \subset R$ — произвольное множество. Предположим сначала, что U открыто в топологии, индуцированной на R из S . Это означает, что $U = R \cap V$ для некоторого открытого множества $V \subset S$. В свою очередь, то, что V открыто в S , означает, что $V = S \cap W$ для некоторого открытого множества $W \subset X$. Таким образом,

$$U = (W \cap S) \cap R = R \cap W,$$

что влечет открытость U в топологии, индуцированной на R из X .

Обратно, если U открыто в топологии, индуцированной на R из X , то $U = W \cap R$ для некоторого открытого множества $W \subset X$; отсюда следует, что U является пересечением R с множеством $V = W \cap S$, открытым в S . В этой связи, U открыто в топологии, индуцированной на R из S .

(b) Сначала заметим, что каждый элемент \mathcal{B}_S открыт в S по определению индуцированной топологии; таким образом, достаточно показать, что каждое (относительно) открытое подмножество удовлетворяет критерию базы относительно \mathcal{B}_S . Пусть U — открытое подмножество S . По определению, это означает, что $U = S \cap V$ для некоторого открытого множества $V \subset X$. Поскольку \mathcal{B} — база X , то для любой точки $p \in U$ существует элемент $B \in \mathcal{B}$, такой, что $p \in B \subset V$. Отсюда тогда следует, что $p \in B \cap S \subset U$, где $B \cap S \in \mathcal{B}_S$.

(c) Предположим сначала, что $x_n \rightarrow x$ в топологии на S . Пусть V — окрестность точки x в X . Тогда $U = S \cap V$ открыто в S и содержит x , то есть, является окрестностью x в S . Для U существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \in U$ для всех $n \geq N$. В этой связи, $x_n \in V$ для всех $n \geq N$ и мы получаем, что $x_n \rightarrow x$ в X .

Обратно, пусть $x_n \rightarrow x$ в топологии на X . Пусть U — окрестность точки x в S . Тогда U открыто в S и содержит x . Таким образом, $U = S \cap V$, где $V \subset X$ — открытое множество. Поскольку V содержит x , то V является окрестностью x в X . Существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \in V$ для всех $n \geq N$. Но тогда $x_n \in U$ для $n \geq N$, что означает сходимость последовательности (x_n) к x в S .

(d) Пусть X — хаусдорфово пространство, а $S \subset X$ — его подпространство. Пусть $p_1, p_2 \in S$ — различные точки. Тогда существуют окрестности V_1 и V_2 точек p_1 и p_2 в X , такие, что $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Но тогда множества $U_1 = S \cap V_1$, $U_2 = S \cap V_2$ открыты в S , содержат p_1 и p_2 соответственно и не пересекаются:

$$U_1 \cap U_2 = (S \cap V_1) \cap (S \cap V_2) = S \cap (V_1 \cap V_2) = S \cap \emptyset = \emptyset.$$

Таким образом, для p_1 и p_2 нашли непересекающиеся окрестности в S . По этой причине, топология на S хаусдорфова.

(e) Докажем вспомогательное утверждение. Пусть S — подпространство X , $p \in S$, а \mathcal{B}_p — база системы окрестностей точки p в X . Тогда

$$\mathcal{B}_p^S = \{B \cap S \mid B \in \mathcal{B}_p\},$$

является базой системы окрестностей точки p в S . Действительно, множество $B \cap S$, $B \in \mathcal{B}_p$, открыто в S и содержит p , то есть, является окрестностью p в S . Пусть теперь U — окрестность p в S . Тогда $p \in U$ и U открыто в S . Следовательно, существует открытое множество $V \subset X$, такое, что $U = S \cap V$. Поскольку $p \in V$, то V является окрестностью p в X и по этой причине существует множество $B \in \mathcal{B}_p$, такое, что $B \subset V$. Но тогда $B \cap S \in \mathcal{B}_p^S$ и

$$B \cap S \subset V \cap S = U.$$

Тем самым мы показали, что \mathcal{B}_p^S — база системы окрестностей точки p в S .

Пусть X — пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Тогда для точки $p \in S$ существует не более, чем счетная база \mathcal{B}_p системы окрестностей p в X . Но тогда и \mathcal{B}_p^S — не более, чем счетное множество. Следовательно, S также является пространством с первой аксиомой счетности.

(f) Если X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то в нем есть не более, чем счетная база \mathcal{B} . Пусть S — подпространство X , тогда, как показано в (b), множество \mathcal{B}_S является базой его топологии. Но тогда эта база не более, чем счетна. По этой причине, пространство S удовлетворяет второй аксиоме счетности. \square

Следующая Лемма позволяет из семейства непрерывных отображений, заданных на элементах покрытия пространства, склеить единое непрерывное отображение.

Лемма 9.2. (Лемма о склейке) Пусть X и Y — топологические пространства, а $\{A_i\}$ — либо произвольное открытое покрытие X , либо конечное замкнутое покрытие X . Пусть заданы непрерывные отображения $f_i : A_i \rightarrow Y$, согласованные на пересечениях:

$$f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}.$$

Тогда существует единственное непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$, ограничение которого на A_i совпадает с f_i .

Доказательство. Из теоретико-множественных соображений следует, что существует единственное отображение $f : X \rightarrow Y$, такое, что

$f|_{A_i} = f_i$. Корректность определения следует из условия согласования на пересечениях. Если множества A_i открыты, то непрерывность f следует из Предложения 9.11. С другой стороны, пусть $\{A_1, \dots, A_k\}$ — конечное замкнутое покрытие X . Для того, чтобы показать, что f непрерывно, нужно показать, что прообраз любого замкнутого множества $K \subset Y$ замкнут. Легко показать, что для каждого i , $f^{-1}(K) \cap A_i = f_i^{-1}(K)$, и $f^{-1}(K)$ есть объединение этих множеств для $i = 1, \dots, k$:

$$f^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap X = f^{-1}(K) \cap \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k f_i^{-1}(K).$$

Поскольку $f_i^{-1}(K)$ замкнуто в A_i , в силу непрерывности f_i , A_i замкнуто в X , то по Предложению 9.30 (а) множество $f_i^{-1}(K)$ замкнуто в X . Таким образом, $f^{-1}(K)$ — объединение конечного числа замкнутых множеств и поэтому замкнуто. \square

5.2. Топологические вложения

Выделим специальный класс отображений.

Определение 9.23. *Инъективное непрерывное отображение, являющееся гомеоморфизмом на свой образ (в индуцированной топологии), называется **топологическим вложением** (или просто **вложением**).*

Если $f : A \rightarrow X$ — топологическое вложение, то образ $f(A)$ можно рассматривать как гомеоморфную копию A внутри X .

Простейшим примером топологического вложения является каноническая инъекция, о чем утверждается в следующем Предложении.

Предложение 9.34. *Пусть X — топологическое пространство, а S — подпространство X . Тогда каноническая инъекция $\iota_S : S \hookrightarrow X$ является топологическим вложением.*

Доказательство. Отображение ι_S инъективно в силу определения. Его непрерывность вытекает из Следствия 9.2. Остается показать, что ι_S — гомеоморфизм на свой образ. Действительно, отображение

$$\widehat{\iota}_S : S \rightarrow \iota_S(S) = S, \quad p \mapsto p,$$

совпадает с Id_S , где последнее отображение является гомеоморфизмом. По этой причине, $\widehat{\iota}_S$ — гомеоморфизм и ι_S — топологическое вложение. \square

Рассмотрим примеры.

Пример 9.18. Пусть $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — инъективное непрерывное отображение $F(s) = (s, s^2)$. Его образом является парабола P , определенная уравнением $y = x^2$. Как отображение из \mathbb{R} в P , F биективно и непрерывно по Следствию 9.3 (b). Обратное отображение к F представлено соответствием $\pi|_P$, где $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — проекция $\pi(x, y) = x$; поскольку π непрерывно, то его ограничение на P непрерывно в силу Следствия 9.3 (a). В этой связи, F — топологическое вложение.

Пример 9.19. Пусть $a : [0, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ — отображение $a(s) = e^{2\pi i s}$ (Пример 9.10). Оно не является гомеоморфизмом на свой образ в метрической топологии (которая совпадает с индуцированной топологией), поэтому это пример непрерывного инъективного отображения, не являющегося вложением. Вместе с тем, ограничение a на любой интервал $[0, b[$ при $0 < b < 1$ есть вложение, также как и ограничение на интервал $]0, 1[$.

Как показывают рассмотренные примеры, непрерывное инъективное отображение может быть или не быть вложением. Не всегда легко показать, что рассматриваемое отображение является / не является вложением. Следующее Предложение дает два достаточных (но не необходимых) условия, которые легче проверить.

Предложение 9.35. Непрерывное инъективное отображение, которое либо открыто, либо замкнуто, является топологическим вложением.

Доказательство. Пусть X и Y — топологические пространства, а $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда f определяет биективное отображение из X в $f(X)$, непрерывное в силу Следствия 9.3 (b). Для того, чтобы показать, что это отображение является гомеоморфизмом, достаточно показать, в силу Предложения 9.16, что f открыто или замкнуто как отображение из X в $f(X)$.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ является открытым отображением и пусть A — открытое подмножество X . Тогда $f(A)$ открыто в Y и из Предложения 9.30

(b) вытекает, что $f(A)$ также открыто в $f(X)$. В этой связи, f открыто как отображение из X в $f(X)$.

Для случая, когда $f : X \rightarrow Y$ замкнуто, доказательство аналогично. \square

Доказанное Предложение дает лишь достаточные условия того, что отображение является вложением.

Пример 9.20. Пусть $J =]0, 1[$, а $f : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение $f(x) = (x, 0)$. Соответствие f непрерывно и инъективно. Обратное отображение к $f : J \rightarrow f(J)$ совпадает с ограничением проекции $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x, y) = x$, которое непрерывно. Следовательно, f является вложением. Вместе с тем, J открыто и замкнуто в J , а $f(J)$ не открыто и не замкнуто в \mathbb{R}^2 . По этой причине, f не открыто и не замкнуто.

Как показывает следующее Предложение, если вложение сюръективно, то оно является гомеоморфизмом.

Предложение 9.36. Сюръективное топологическое вложение является гомеоморфизмом.

Доказательство. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — сюръективное топологическое вложение. Тогда $f : X \rightarrow f(X)$ — гомеоморфизм. Но $f(X) = Y$, поэтому $f : X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм. \square

5.3. Произведение пространств

Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ — произвольные топологические пространства. Определим совокупность

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \in \mathcal{T}_i, i = 1, \dots, n\}. \quad (9.5.4)$$

Предложение 9.37. Множество \mathcal{B} , определенное равенством (9.5.4), является базой для некоторой топологии.

Доказательство. Будем использовать Предложение 9.20. Нужно проверить, что

(i) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X_1 \times \dots \times X_n$,

(ii) если $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и $x \in B_1 \cap B_2$, то существует элемент $B_3 \in \mathcal{B}$, такой, что $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

По определению \mathcal{B} , произведение $X_1 \times \cdots \times X_n$ принадлежит \mathcal{B} . По этой причине, условие (i) выполнено. Пусть, далее, $U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{B}$, $V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{B}$ и пусть $x \in (U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n)$.

Установим справедливость равенства

$$(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n).$$

Действительно, пусть $(z_1, \dots, z_n) \in (U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n)$, тогда $z_i \in U_i$ и $z_i \in V_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. По этой причине, $z_i \in U_i \cap V_i$ для $i = 1, \dots, n$ и в этой связи $(z_1, \dots, z_n) \in (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n)$, что влечет включение $(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) \subset (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n)$. Обратно, если $(z_1, \dots, z_n) \in (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n)$, то $z_i \in U_i \cap V_i$ для $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $z_i \in U_i$, что влечет $(z_1, \dots, z_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$ и $z_i \in V_i$, что влечет $(z_1, \dots, z_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$. В этой связи, $(z_1, \dots, z_n) \in (U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n)$ и тогда $(U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n) \subset (U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n)$. Равенство доказано.

Итак, мы имеем равенство $(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n)$. Но $U_i \cap V_i \subset X_i$ открыто в X_i , поэтому $(U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n) \in \mathcal{B}$. Следовательно, в качестве B_3 достаточно взять пересечение $(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n)$. Условия Предложения 9.20 выполнены и \mathcal{B} — база для некоторой топологии. \square

Определение 9.24. Топология на $X_1 \times \cdots \times X_n$, базой которой является совокупность \mathcal{B} , определенная равенством (9.5.4), называется **топологией произведения**, а множество $X_1 \times \cdots \times X_n$ с такой топологией — **произведением пространств**.

Например, на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ топология порождается множествами вида $I \times J$, где I и J — открытые подмножества \mathbb{R} . Типичное открытое множество — открытый прямоугольник. Более, общо, топология произведения согласована с произведением метрических пространств, что следует из Предложений 3.12 и 3.13.

Топология произведения обладает характеристическим свойством. Оно связывает непрерывность отображения в произведение пространств с непрерывностью его компонент. В частном случае отображения из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n это сводится к известному результату из математического анализа.

Теорема 9.4. (Характеристическое свойство топологии произведения) Пусть $X_1 \times \cdots \times X_n$ — произведение пространств. Для любого топологического пространства Y , отображение $f : Y \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ непрерывно тогда и только тогда, когда каждая из его компонент $f_i = \pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ непрерывна; здесь $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_i$ — каноническая проекция:

$$\begin{array}{ccc} & X_1 \times \cdots \times X_n & \\ & \nearrow f & \downarrow \pi_i \\ Y & \xrightarrow{f_i} & X_i \end{array}$$

Доказательство. 1. Докажем вспомогательное равенство. Пусть $U_1 \times \cdots \times U_n \subset X_1 \times \cdots \times X_n$, тогда

$$f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n) = f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n). \quad (9.5.5)$$

Действительно, если $y \in f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n)$, то $f(y) \in U_1 \times \cdots \times U_n$. Следовательно, $f(y) = (z_1, \dots, z_n)$, где $z_i \in U_i$ для $i = 1, \dots, n$. Далее,

$$f_i(y) = \pi_i \circ f(y) = \pi_i(z_1, \dots, z_n) = z_i,$$

поэтому $f_i(y) \in U_i$. В этой связи, $y \in f_i^{-1}(U_i)$ для всех $i = 1, \dots, n$ и, таким образом, $y \in f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n)$. Тем самым мы показали, что $f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n) \subset f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n)$. Обратно, пусть $y \in f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n)$. Тогда $f_i(y) \in U_i$, $i = 1, \dots, n$. Поскольку $f(y) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, то $f(y) = (z_1, \dots, z_n)$ для некоторых $z_i \in X_i$. Так как

$$z_i = \pi_i(z_1, \dots, z_n) = \pi_i \circ f(y) = f_i(y),$$

то мы получаем отсюда, что $z_i \in U_i$ для $i = 1, \dots, n$. По этой причине, $f(y) \in U_1 \times \cdots \times U_n$ и $y \in f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n)$. Включение $f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n) \subset f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n)$ доказано, что влечет справедливость равенства (9.5.5). Теперь перейдем к доказательству теоремы.

2. (\Rightarrow) Пусть f непрерывно. Выберем $i \in \{1, \dots, n\}$ и пусть U открыто в X_i . Согласно равенству (9.5.5),

$$f^{-1}(X_1 \times \cdots \times U \times \cdots \times X_n) = f_1^{-1}(X_1) \cap \cdots \cap f_i^{-1}(U) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(X_n).$$

Но $f_j^{-1}(X_j) = Y$, поэтому

$$f^{-1}(X_1 \times \cdots \times U \times \cdots \times X_n) = Y \cap \cdots \cap f_i^{-1}(U) \cap \cdots \cap Y = f_i^{-1}(U).$$

Поскольку, в силу непрерывности f , множество $f^{-1}(X_1 \times \cdots \times U \times \cdots \times X_n)$ открыто в Y , то множество $f_i^{-1}(U)$ также открыто в Y . В этой связи, f_i непрерывно.

(\Leftarrow) Пусть каждое из отображений f_i непрерывно. Для того, чтобы показать, что f непрерывно, достаточно показать, что прообраз каждого элемента $U_1 \times \cdots \times U_n$ базы \mathcal{B} открыт (Предложение 9.19). Но из доказанного равенства (9.5.5) и из того, что пересечение $f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n)$ открытых множеств открыто, следует, что множество $f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n)$ открыто в Y , что влечет непрерывность f . \square

Следствие 9.4. Если X_1, \dots, X_n — топологические пространства, то каждая каноническая проекция $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_i$ непрерывна относительно топологии произведения.

Доказательство. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & X_1 \times \cdots \times X_n \\ & \nearrow \text{Id}_{X_1 \times \cdots \times X_n} & \downarrow \pi_i \\ X_1 \times \cdots \times X_n & \xrightarrow{\pi_i} & X_i \end{array}$$

коммутативна. Поскольку тождественное отображение $\text{Id}_{X_1 \times \cdots \times X_n}$ непрерывно, то

$$\pi_i = \pi_i \circ \text{Id}_{X_1 \times \cdots \times X_n}$$

также непрерывно в силу характеристического свойства (Теорема 9.4). \square

Теорема 9.5. (Единственность топологии произведения) Пусть X_1, \dots, X_n — топологические пространства. Топология произведения на $X_1 \times \cdots \times X_n$ — единственная топология, для которой выполняется характеристическое свойство.

Доказательство. Пусть \mathcal{T}_g — топология на $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, удовлетворяющая характеристическому свойству, а \mathcal{T}_p — топология произведения на X . Поскольку доказательство непрерывности канонической проекции использует только характеристическое свойство, то $\pi_i^g : X \rightarrow X_i$ и $\pi_i^p : X \rightarrow X_i$ — непрерывные отображения. Здесь и далее индексы g и p означают, что соответствующее отображение рассматривается в топологии \mathcal{T}_g или \mathcal{T}_p .

Рассмотрим композиции:

$$\begin{array}{ccc}
 & X_p & \\
 \text{Id}_{gp} \nearrow & & \downarrow \pi_i^p \\
 X_g & \xrightarrow{\pi_i^p \circ \text{Id}_{gp}} & X_i
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & X_g & \\
 \text{Id}_{pg} \nearrow & & \downarrow \pi_i^g \\
 X_p & \xrightarrow{\pi_i^g \circ \text{Id}_{pg}} & X_i
 \end{array}$$

На диаграммах: символ X_p обозначает множество X с топологией \mathcal{T}_p , а символ X_g — множество X с топологией \mathcal{T}_g . Отображения Id_{gp} и Id_{pg} являются тождественными отображениями, рассматриваемыми в топологиях \mathcal{T}_g и \mathcal{T}_p . Первое отображает точку пространства с топологией \mathcal{T}_g в точку пространства с топологией \mathcal{T}_p , а второе, наоборот, отображает точку пространства с топологией \mathcal{T}_p в точку пространства с топологией \mathcal{T}_g . Поскольку тождественное отображение является нейтральным элементом относительно композиции, то выполняются равенства

$$\begin{aligned}
 \pi_i^g &= \pi_i^p \circ \text{Id}_{gp} = (\text{Id}_{gp})_i^g, \\
 \pi_i^p &= \pi_i^g \circ \text{Id}_{pg} = (\text{Id}_{pg})_i^p.
 \end{aligned}$$

Из непрерывности канонических проекций π_i^g и π_i^p следует непрерывность компонент отображений Id_{gp} и Id_{pg} . В этой связи, сами отображения Id_{gp} и Id_{pg} также непрерывны в силу характеристического свойства. Согласно Предложению 9.15 (b) это означает равенство $\mathcal{T}_g = \mathcal{T}_p$. \square

Предложение 9.38. (Другие свойства топологии произведения)
Пусть X_1, \dots, X_n — топологические пространства.

(a) Топология произведения «ассоциативна» в том смысле, что три топологии на множестве $X_1 \times X_2 \times X_3$, полученные рассмотре-

нием его как $X_1 \times X_2 \times X_3$, $(X_1 \times X_2) \times X_3$, или $X_1 \times (X_2 \times X_3)$, совпадают.

- (b) Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ и любых точек $x_j \in X_j$, $j \neq i$, отображение $f : X_i \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$, заданное равенством

$$f(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

является топологическим вложением X_i в произведение пространств.

- (c) Каждая каноническая проекция $\pi_i : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$ является открытым отображением.

- (d) Если для каждого i совокупность \mathcal{B}_i является базой топологии на X_i , то множество

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times \dots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_i\},$$

является базой топологии произведения на $X_1 \times \dots \times X_n$.

- (e) Если S_i — подпространство X_i для $i = 1, \dots, n$, то топология произведения и индуцированная топология на $S_1 \times \dots \times S_n \subset X_1 \times \dots \times X_n$ совпадают.

- (f) Если каждое из X_i хаусдорфово, то $X_1 \times \dots \times X_n$ хаусдорфово.

- (g) Если каждое из X_i удовлетворяет первой аксиоме счетности, то $X_1 \times \dots \times X_n$ также удовлетворяет первой аксиоме счетности.

- (h) Если каждое из X_i удовлетворяет второй аксиоме счетности, то это же верно и для $X_1 \times \dots \times X_n$.

Доказательство. (a) Согласно теории множеств, множества $U_1 \times U_2 \times U_3$, $(U_1 \times U_2) \times U_3$ и $U_1 \times (U_2 \times U_3)$ отождествляются в силу биекций $(x_1, x_2, x_3) \mapsto ((x_1, x_2), x_3)$ и $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, (x_2, x_3))$. Этим мы будем пользоваться в доказательстве. Ограничимся доказательством равенства топологий на $X_1 \times X_2 \times X_3$ и $(X_1 \times X_2) \times X_3$. Случай равенства топологий на $X_1 \times X_2 \times X_3$ и $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ рассматривается аналогично. Отметим, что эти равенства выполняются с точностью до указанного отождествления множеств.

Обозначим через \mathcal{B} и \mathcal{T} — базу и топологию произведения на $X_1 \times X_2 \times X_3$, \mathcal{B}_{12} и \mathcal{T}_{12} — базу и топологию произведения на $X_1 \times X_2$ и, наконец, через $\mathcal{B}_{12;3}$ и $\mathcal{T}_{12;3}$ — базу и топологию произведения на $(X_1 \times X_2) \times X_3$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{U_1 \times U_2 \times U_3 \mid U_i \text{ открыто в } X_i, i = 1, 2, 3\}, \\ \mathcal{B}_{12} &= \{U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ открыто в } X_i, i = 1, 2\}, \\ \mathcal{B}_{12;3} &= \{V_1 \times U_3 \mid V_1 \text{ открыто в } X_1 \times X_2, U_3 \text{ открыто в } X_3\}.\end{aligned}$$

Покажем, что $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{12;3}$. Пусть $O \in \mathcal{T}$, тогда существует множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$, такое, что

$$O = \bigcup_{U_1 \times U_2 \times U_3 \in \mathcal{V}} U_1 \times U_2 \times U_3.$$

Используя соглашение об отождествлении множеств $U_1 \times U_2 \times U_3$ и $(U_1 \times U_2) \times U_3$, получаем

$$O = \bigcup_{(U_1 \times U_2) \times U_3 \in \mathcal{V}} (U_1 \times U_2) \times U_3.$$

Здесь $U_1 \times U_2 \in \mathcal{T}_{12}$, поэтому справедливо включение $(U_1 \times U_2) \times U_3 \in \mathcal{B}_{12;3}$. Следовательно, $O \in \mathcal{T}_{12;3}$ и мы получаем, что $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{12;3}$.

Обратно, пусть $O \in \mathcal{T}_{12;3}$, тогда существует множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}_{12;3}$, такое, что

$$O = \bigcup_{V_1 \times U_3 \in \mathcal{V}} V_1 \times U_3.$$

Если $V_1 \times U_3 \in \mathcal{V}$, то V_1 открыто в $X_1 \times X_2$ и потому имеет вид

$$V_1 = \bigcup_{U_1 \times U_2 \in \mathcal{V}_{V_1}} U_1 \times U_2,$$

где $\mathcal{V}_{V_1} \subset \mathcal{B}_{12}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}O &= \bigcup_{V_1 \times U_3 \in \mathcal{V}} \left(\bigcup_{U_1 \times U_2 \in \mathcal{V}_{V_1}} U_1 \times U_2 \right) \times U_3 = \\ &= \bigcup_{V_1 \times U_3 \in \mathcal{V}} \bigcup_{U_1 \times U_2 \in \mathcal{V}_{V_1}} (U_1 \times U_2) \times U_3 = \bigcup_{V_1 \times U_3 \in \mathcal{V}} \bigcup_{U_1 \times U_2 \in \mathcal{V}_{V_1}} U_1 \times U_2 \times U_3.\end{aligned}$$

По этой причине, $O \in \mathcal{T}$ и мы показали, что $\mathcal{T}_{12;3} \subset \mathcal{T}$. Равенство $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{12;3}$ доказано.

(b) Нужно показать, что

- 1) f инъективно,
- 2) f непрерывно,
- 3) f является гомеоморфизмом на свой образ.

1) Пусть $x, y \in X_i$, где $x \neq y$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1, \dots, x, \dots, x_n), \\ f(y) &= (x_1, \dots, y, \dots, x_n). \end{aligned}$$

В силу свойства равенства кортежей, $f(x) \neq f(y)$. Следовательно, f инъективно.

2) Рассмотрим компоненты отображения f :

$$f_k = \pi_k \circ f : X_i \rightarrow X_k,$$

для $k = 1, \dots, n$. При $k = i$ имеем отображение $f_i : X_i \rightarrow X_i$, такое, что при $x \in X_i$,

$$f_i(x) = \pi_i \circ f(x) = \pi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = x.$$

Таким образом, $f_i = \text{Id}_{X_i}$ и в этой связи f_i — непрерывное отображение. Пусть теперь $k \neq i$, тогда отображение $f_k : X_i \rightarrow X_k$ таково, что для $x \in X_i$,

$$f_k(x) = \pi_k \circ f(x) = \pi_k(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_k.$$

Это означает, что f_k — постоянное отображение. В этой связи, f_k непрерывно.

Во всех случаях мы установили, что f_k — непрерывное отображение. В силу характеристического свойства топологии произведения отсюда тогда вытекает, что отображение f непрерывно.

3) Обозначим

$$Y_i = \{x_1\} \times \dots \times \{x_{i-1}\} \times X_i \times \{x_{i+1}\} \times \dots \times \{x_n\}.$$

Тогда $f(X_i) = Y_i$. Действительно, если $y \in f(X_i)$, то $y = f(x)$, для некоторого $x \in X_i$. Это влечет включение $y \in Y_i$. Таким образом, $f(X_i) \subset Y_i$. Обратное, если $y \in Y_i$, то существует $x \in X_i$, такой, что $y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Но, по определению f , это означает, что $y = f(x)$. В этой связи, $y \in f(X_i)$ и обратное включение доказано.

Покажем, что отображение

$$\hat{f}: X_i \rightarrow Y_i, \quad \hat{f}(x) = f(x),$$

является гомеоморфизмом на свой образ. Прежде всего, \hat{f} непрерывно как сужение исходного непрерывного отображения f (Следствие 9.3). Теперь покажем, что отображения \hat{f} и $\pi_i|_{Y_i}$ взаимно обратны. Для $x \in X_i$ имеем

$$\pi_i|_{Y_i} \circ \hat{f}(x) = \pi_i|_{Y_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = x,$$

и тогда $\pi_i|_{Y_i} \circ \hat{f} = \text{Id}_{X_i}$. Если $y \in Y_i$, то существует $x \in X_i$, такой, что $y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Тогда

$$\hat{f} \circ \pi_i|_{Y_i}(y) = f(x) = y,$$

и $\hat{f} \circ \pi_i|_{Y_i} = \text{Id}_{Y_i}$. Тем самым мы показали, что отображения \hat{f} и $\pi_i|_{Y_i}$ взаимно обратны. Это влечет биективность \hat{f} и равенство

$$\hat{f}^{-1} = \pi_i|_{Y_i}.$$

Но $\pi_i|_{Y_i}$ — непрерывное отображение, будучи сужением непрерывного отображения. В этой связи, отображение \hat{f}^{-1} непрерывно и \hat{f} — гомеоморфизм. Этим завершается доказательство того, что f является топологическим вложением X_i в $X_1 \times \dots \times X_n$.

(с) Вначале покажем, что если U_i открыты в X_i для всех $i = 1, \dots, n$, то множество $\pi_i(U_1 \times \dots \times U_n)$ открыто в X_i . Но $\pi_i(U_1 \times \dots \times U_n) = U_i$. Действительно, если $y \in \pi_i(U_1 \times \dots \times U_n)$, то $y = \pi_i(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $(x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$. Тогда, по определению канонической проекции π_i , $y = x_i \in U_i$. Тем самым мы доказали справедливость включения $\pi_i(U_1 \times \dots \times U_n) \subset U_i$. Обратное, пусть $y \in U_i$. Выберем произвольные $x_j \in U_j$, $j \neq i$, тогда $\pi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) = y$ и мы получаем, что $y \in \pi_i(U_1 \times \dots \times U_n)$. Обратное включение доказано, а вместе с ним и равенство. Поскольку U_i открыто в X_i , то образ $\pi_i(U_1 \times \dots \times U_n)$ также открыт в X_i .

Пусть $O \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ — открытое множество. Тогда, если \mathcal{B} — база (9.5.4) топологии произведения, то существует множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$, такое, что

$$O = \bigcup_{U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{V}} U_1 \times \cdots \times U_n.$$

Поскольку

$$\pi_i(O) = \pi_i\left(\bigcup_{U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{V}} U_1 \times \cdots \times U_n\right) = \bigcup_{U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{V}} \pi_i(U_1 \times \cdots \times U_n),$$

то $\pi_i(O)$ является объединением открытых в X_i множеств. В этой связи, $\pi_i(O)$ открыто в X_i и отображение π_i является открытым.

(d) Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\text{prod}} &= \{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \text{ открыты в } X_i, i = 1, \dots, n\}, \\ \mathcal{B}_{\text{new}} &= \{B_1 \times \cdots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_i\}. \end{aligned}$$

Покажем, что \mathcal{B}_{new} — база топологии, порождаемой $\mathcal{B}_{\text{prod}}$. Пусть $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}_{\text{new}}$. Поскольку каждое B_i открыто в X_i , то $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}_{\text{prod}}$. В этой связи, множество $B_1 \times \cdots \times B_n$ открыто в $X_1 \times \cdots \times X_n$. Далее, пусть множество $O \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ открыто в топологии произведения. Пусть, далее, $(x_1, \dots, x_n) \in O$. Согласно критерию базы (Предложение 9.18), существует элемент $U_1 \times \cdots \times U_n$ базы $\mathcal{B}_{\text{prod}}$, такой, что

$$(x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n \subset O.$$

Поскольку $x_i \in U_i$ для каждого i , то, снова применяя критерий базы, получаем, что существуют $B_i \in \mathcal{B}_i$, такие, что $x_i \in B_i \subset U_i$. Тогда

$$(x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n \subset U_1 \times \cdots \times U_n,$$

что влечет

$$(x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n \subset O,$$

причем, $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}_{\text{new}}$, и мы показали, что множество O представимо в виде объединения элементов \mathcal{B}_{new} . Следовательно, \mathcal{B}_{new} является базой топологии произведения.

(e) Пусть $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ обозначает топологию произведения на $S_1 \times \cdots \times S_n$, а \mathcal{T}_{sub} — топологию на $S_1 \times \cdots \times S_n$, индуцированную из $X_1 \times \cdots \times X_n$. Нужно показать, что

$$\mathcal{T}_{\text{prod}} = \mathcal{T}_{\text{sub}}.$$

В ходе доказательства будем применять равенство

$$(S_1 \times \cdots \times S_n) \cap (U_1 \times \cdots \times U_n) = (S_1 \cap U_1) \times \cdots \times (S_n \cap U_n),$$

справедливое для любых $U_i \subset X_i$.

Пусть $O \in \mathcal{T}_{\text{prod}}$, тогда $O = \bigcup_{V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{V}} V_1 \times \cdots \times V_n$, где \mathcal{V} — подмножество базы (9.5.4) $\mathcal{T}_{\text{prod}}$. Поскольку V_i открыто в S_i , то существует открытое множество $U_{V_i} \subset X_i$, такое, что $V_i = S_i \cap U_{V_i}$. Тогда

$$\begin{aligned} O &= \bigcup_{V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{V}} (S_1 \cap U_{V_1}) \times \cdots \times (S_n \cap U_{V_n}) = \\ &= \bigcup_{V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{V}} (S_1 \times \cdots \times S_n) \cap (U_{V_1} \times \cdots \times U_{V_n}) = (S_1 \times \cdots \times S_n) \cap O', \end{aligned}$$

где $O' = \bigcup_{V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{V}} U_{V_1} \times \cdots \times U_{V_n}$ — открытое подмножество $X_1 \times \cdots \times X_n$. Таким образом, $O \in \mathcal{T}_{\text{sub}}$ и $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subset \mathcal{T}_{\text{sub}}$.

Обратно, пусть $O \in \mathcal{T}_{\text{sub}}$, тогда $O = (S_1 \times \cdots \times S_n) \cap O'$, где O' открыто в $X_1 \times \cdots \times X_n$. Для O' , в силу определения топологии произведения, справедливо представление $O' = \bigcup_{U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{V}} U_1 \times \cdots \times U_n$, в котором \mathcal{V} — некоторое подмножество базы (9.5.4) $X_1 \times \cdots \times X_n$. Приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} O &= (S_1 \times \cdots \times S_n) \cap \bigcup_{U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{V}} U_1 \times \cdots \times U_n = \\ &= \bigcup_{U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{V}} (S_1 \cap U_1) \times \cdots \times (S_n \cap U_n). \end{aligned}$$

Здесь $S_i \cap U_i = V_{U_i}$ — открытое подмножество S_i . Таким образом, $O = \bigcup_{U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{V}} V_{U_1} \times \cdots \times V_{U_n}$ и поэтому $O \in \mathcal{T}_{\text{prod}}$, что влечет $\mathcal{T}_{\text{sub}} \subset \mathcal{T}_{\text{prod}}$. Следовательно, $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \mathcal{T}_{\text{sub}}$.

(f) Пусть X_i — хаусдорфовы пространства для каждого $i = 1, \dots, n$. Возьмем различные точки $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. Поскольку эти точки различны, то существует индекс $i \in \{1, \dots, n\}$, такой, что $x_i \neq y_i$. Из того, что пространство X_i удовлетворяет аксиоме Хаусдорфа, вытекает существование окрестностей U и V точек x_i и y_i со свойством: $U \cap V = \emptyset$. Множества $X_1 \times \cdots \times U \times \cdots \times X_n$ и $X_1 \times \cdots \times V \times \cdots \times X_n$ (U и V стоят на i -м месте) открыты в $X_1 \times \cdots \times X_n$ и

содержат точки (x_1, \dots, x_n) и (y_1, \dots, y_n) соответственно. Кроме того,

$$\begin{aligned} (X_1 \times \dots \times U \times \dots \times X_n) \cap (X_1 \times \dots \times V \times \dots \times X_n) &= \\ &= X_1 \times \dots \times (U \cap V) \times \dots \times X_n = \emptyset. \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство того, что пространство $X_1 \times \dots \times X_n$ хаусдорфово.

(g) Вначале докажем вспомогательное утверждение. Пусть \mathcal{B}_{x_i} — база системы окрестностей точки $x_i \in X_i$, тогда множество

$$\mathcal{B}_{(x_1, \dots, x_n)} = \{B_1 \times \dots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_{x_i}, i = 1, \dots, n\},$$

является базой системы окрестностей точки $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$. Действительно, каждый элемент $B_1 \times \dots \times B_n \in \mathcal{B}_{(x_1, \dots, x_n)}$ открыт в $X_1 \times \dots \times X_n$ и содержит точку (x_1, \dots, x_n) . Таким образом, $\mathcal{B}_{(x_1, \dots, x_n)}$ — множество окрестностей точки (x_1, \dots, x_n) . Далее, пусть $O \subset X_1 \times \dots \times X_n$ — некоторая окрестность точки (x_1, \dots, x_n) . Тогда O открыто в $X_1 \times \dots \times X_n$. Согласно критерию базы,

$$(x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \dots \times U_n \subset O,$$

для некоторого элемента $U_1 \times \dots \times U_n$ базы (9.5.4) топологии произведения. Множество U_i открыто в X_i и содержит x_i , то есть, является окрестностью x_i . В этой связи, существует элемент $B_i \in \mathcal{B}_{x_i}$, такой, что

$$x_i \in B_i \subset U_i.$$

Но тогда мы получаем, что

$$(x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \dots \times B_n \subset O,$$

где $B_1 \times \dots \times B_n \in \mathcal{B}_{(x_1, \dots, x_n)}$. Итак, $\mathcal{B}_{(x_1, \dots, x_n)}$ — база системы окрестностей точки (x_1, \dots, x_n) .

Пусть теперь каждое из пространств X_i удовлетворяет первой аксиоме счетности и $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$. Для каждой точки $x_i \in X_i$ существует не более, чем счетная база \mathcal{B}_{x_i} системы окрестностей. Тогда $\mathcal{B}_{(x_1, \dots, x_n)}$ является не более, чем счетной базой системы окрестностей точки (x_1, \dots, x_n) . В этой связи, пространство $X_1 \times \dots \times X_n$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(h) Пусть каждое из пространств X_i удовлетворяет второй аксиоме счетности и \mathcal{B}_i — не более, чем счетная база топологии на X_i . Тогда совокупность

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times \cdots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_i\},$$

является базой топологии произведения на $X_1 \times \cdots \times X_n$, как показано в (d), причем, не более, чем счетной. По этой причине, пространство $X_1 \times \cdots \times X_n$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. \square

Декартово произведение множеств позволяет по заданным отображениям между множествами определить новое отображение между произведениями этих множеств.

Определение 9.25. Пусть $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ — отображения (непрерывные или нет), $i = 1, \dots, k$, тогда их **произведением** называется отображение

$$f_1 \times \cdots \times f_k : X_1 \times \cdots \times X_k \rightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_k,$$

определенное равенством

$$f_1 \times \cdots \times f_k(x_1, \dots, x_k) := (f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)).$$

В следующей Лемме устанавливается связь между прообразом произведения и произведением прообразов.

Лемма 9.3. Пусть $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ — отображения, $i = 1, \dots, k$, а $U_i \subset Y_i$ — некоторые множества. Тогда справедливо равенство

$$(f_1 \times \cdots \times f_k)^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_k) = f_1^{-1}(U_1) \times \cdots \times f_k^{-1}(U_k). \quad (9.5.6)$$

Доказательство. Пусть $(x_1, \dots, x_k) \in (f_1 \times \cdots \times f_k)^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_k)$, тогда $f_1 \times \cdots \times f_k(x_1, \dots, x_k) \in U_1 \times \cdots \times U_k$. Согласно определению произведения отображений, $f_1 \times \cdots \times f_k(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1), \dots, f_k(x_k))$, поэтому мы получаем, что $f_i(x_i) \in U_i$ для всех $i = 1, \dots, k$. Это, в свою очередь, равносильно включению $x_i \in f_i^{-1}(U_i)$. Тогда $(x_1, \dots, x_k) \in f_1^{-1}(U_1) \times \cdots \times f_k^{-1}(U_k)$ и мы приходим ко включению $(f_1 \times \cdots \times f_k)^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_k) \subset f_1^{-1}(U_1) \times \cdots \times f_k^{-1}(U_k)$.

Обратно, пусть $(x_1, \dots, x_k) \in f_1^{-1}(U_1) \times \cdots \times f_k^{-1}(U_k)$. Тогда $x_i \in f_i^{-1}(U_i)$ для $i = 1, \dots, k$, что влечет включение $f_i(x_i) \in U_i$. В этой связи, $(f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)) \in U_1 \times \cdots \times U_k$. Но по определению произведения

$f_1 \times \cdots \times f_k$ это значит, что $f_1 \times \cdots \times f_k(x_1, \dots, x_k) \in U_1 \times \cdots \times U_k$. Следовательно, $(x_1, \dots, x_k) \in (f_1 \times \cdots \times f_k)^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_k)$, и мы установили включение $f_1^{-1}(U_1) \times \cdots \times f_k^{-1}(U_k) \subset (f_1 \times \cdots \times f_k)^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_k)$. Равенство (9.5.6) доказано. \square

Произведение биективных отображений биективно, причем обратное к нему является произведением отображений, обратных к исходным.

Лемма 9.4. Пусть $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ — биективные отображения, $i = 1, \dots, k$. Тогда их произведение $f_1 \times \cdots \times f_k$ биективно, причем

$$(f_1 \times \cdots \times f_k)^{-1} = f_1^{-1} \times \cdots \times f_k^{-1}. \quad (9.5.7)$$

Доказательство. Для установления биективности отображения $f_1 \times \cdots \times f_k$ и формулы (9.5.7) достаточно доказать равенства

$$\begin{aligned} (f_1^{-1} \times \cdots \times f_k^{-1}) \circ (f_1 \times \cdots \times f_k) &= \text{Id}_{X_1 \times \cdots \times X_k}, \\ (f_1 \times \cdots \times f_k) \circ (f_1^{-1} \times \cdots \times f_k^{-1}) &= \text{Id}_{Y_1 \times \cdots \times Y_k}. \end{aligned}$$

Пусть $(x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k$, тогда

$$\begin{aligned} (f_1^{-1} \times \cdots \times f_k^{-1}) \circ (f_1 \times \cdots \times f_k)(x_1, \dots, x_k) &= \\ &= (f_1^{-1} \times \cdots \times f_k^{-1})(f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)) = \\ &= (f_1^{-1} \circ f_1(x_1), \dots, f_k^{-1} \circ f_k(x_k)) = (x_1, \dots, x_k), \end{aligned}$$

что влечет равенство $(f_1^{-1} \times \cdots \times f_k^{-1}) \circ (f_1 \times \cdots \times f_k) = \text{Id}_{X_1 \times \cdots \times X_k}$. Пусть теперь $(y_1, \dots, y_k) \in Y_1 \times \cdots \times Y_k$, тогда в этом случае

$$\begin{aligned} (f_1 \times \cdots \times f_k) \circ (f_1^{-1} \times \cdots \times f_k^{-1})(y_1, \dots, y_k) &= \\ &= (f_1 \times \cdots \times f_k)(f_1^{-1}(y_1), \dots, f_k^{-1}(y_k)) = \\ &= (f_1 \circ f_1^{-1}(y_1), \dots, f_k \circ f_k^{-1}(y_k)) = (y_1, \dots, y_k). \end{aligned}$$

Тем самым показана справедливость равенства $(f_1 \times \cdots \times f_k) \circ (f_1^{-1} \times \cdots \times f_k^{-1}) = \text{Id}_{Y_1 \times \cdots \times Y_k}$ и доказательство Леммы завершено. \square

Если каждое из f_i непрерывно (является гомеоморфизмом), то, как показывает следующее Предложение, произведение отображений непрерывно (является гомеоморфизмом).

Предложение 9.39. *Произведение непрерывных отображений непрерывно. Произведение гомеоморфизмов — гомеоморфизм.*

Доказательство. Покажем, что если отображения f_1, \dots, f_k непрерывны, то произведение $f_1 \times \dots \times f_k$ также непрерывно. В силу Предложения 9.19, достаточно показать, что прообраз каждого элемента базы (9.5.4) открыт. Пусть U_1, \dots, U_k — открытые подмножества Y_1, \dots, Y_k соответственно. Тогда для каждого $i = 1, \dots, k$ множество $f_i^{-1}(U_i)$ открыто в X_i и, по определению топологии произведения, множество $f_1^{-1}(U_1) \times \dots \times f_k^{-1}(U_k)$ открыто в $X_1 \times \dots \times X_k$. В силу равенства (9.5.6) это означает, что множество $(f_1 \times \dots \times f_k)^{-1}(U_1 \times \dots \times U_k)$ открыто в $X_1 \times \dots \times X_k$. Этим доказывается непрерывность отображения $f_1 \times \dots \times f_k$.

Пусть отображения f_1, \dots, f_k являются гомеоморфизмами. Тогда, по доказанному, из непрерывности f_1, \dots, f_k следует непрерывность произведения $f_1 \times \dots \times f_k$. Далее, из непрерывности $f_1^{-1}, \dots, f_k^{-1}$ следует непрерывность произведения $f_1^{-1} \times \dots \times f_k^{-1}$. В силу формулы (9.5.7) отсюда следует непрерывность обратного отображения $(f_1 \times \dots \times f_k)^{-1}$. В этой связи, отображение $f_1 \times \dots \times f_k$ — гомеоморфизм. \square

Рассмотрим связь свойства непрерывности и арифметических операций.

Определение 9.26. *Пусть $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а X — множество. Если $f_1 : X \rightarrow \mathbb{F}$ и $f_2 : X \rightarrow \mathbb{F}$ — некоторые функции, то их **поточечная сумма** $f_1 + f_2 : X \rightarrow \mathbb{F}$ и **поточечное произведение** $f_1 f_2 : X \rightarrow \mathbb{F}$ есть \mathbb{F} -значные функции, определенные равенствами*

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(x) &:= f_1(x) + f_2(x), \\ (f_1 f_2)(x) &:= f_1(x) f_2(x).\end{aligned}$$

В правых частях этих равенств используются арифметические операции из поля \mathbb{F} .

Предложение 9.40. *Пусть X — топологическое пространство, а $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда, если отображения $f_1 : X \rightarrow \mathbb{F}$ и $f_2 : X \rightarrow \mathbb{F}$ непрерывны, то их поточечные сумма и произведение также непрерывны.*

Доказательство. Отображения $f_1 + f_2 : X \rightarrow \mathbb{F}$ и $f_1 f_2 : X \rightarrow \mathbb{F}$ могут

быть представлены в виде следующих композиций:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= + \circ (f_1 \times f_2) \circ g, \\ f_1 f_2 &= \cdot \circ (f_1 \times f_2) \circ g. \end{aligned}$$

Здесь $+$: $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ и \cdot : $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ — операции сложения и умножения в \mathbb{F} , а $g : X \rightarrow X \times X$ — отображение, заданное равенством $g(x) := (x, x)$. Действительно, например, для первого из отображений мы имеем

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) = +(f_1(x), f_2(x)) = \\ &= + \circ (f_1 \times f_2)(x, x) = + \circ (f_1 \times f_2) \circ g(x). \end{aligned}$$

Согласно курсу Анализа, отображения $+$: $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ и \cdot : $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ непрерывны (теоремы о пределе суммы и произведения). Из Предложения 9.39 следует, что отображение $f_1 \times f_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ непрерывно. Наконец, отображение g непрерывно в силу характеристического свойства топологии произведения, поскольку его компоненты g_1 и g_2 есть тождественное отображение: $g_1 = g_2 = \text{Id}_X$, которое непрерывно. По этой причине, функции $f_1 + f_2$ и $f_1 f_2$ непрерывны как композиции непрерывных отображений. \square

6. Многообразия

6.1. Локально евклидовы пространства

Мы почти готовы дать определение многообразия. Но вначале, дадим вспомогательное определение, отражающее интуитивную идею топологического пространства, локально выглядящего как евклидово пространство.

Определение 9.27. *Топологическое пространство M называется локально евклидовым, размерности n , если любая точка M имеет окрестность в M , гомеоморфную некоторому открытому подмножеству \mathbb{R}^n .*

Таким образом, M — локально евклидово пространство размерности n , если для каждой точки $p \in M$ можно указать:

- окрестность U точки p в M ;

- открытое множество O в \mathbb{R}^n ;
- гомеоморфизм $\varphi : U \rightarrow O$.

В некоторых случаях удобно конкретизировать вид открытых подмножеств \mathbb{R}^n , используемых для описания локально евклидовых пространств. Следующая Лемма показывает, что мы можем заменить «открытое подмножество» на открытый шар или само \mathbb{R}^n .

Лемма 9.5. *Топологическое пространство M локально евклидово, размерности n , тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих свойств:*

- (a) *Каждая точка M имеет окрестность, гомеоморфную открытому шару в \mathbb{R}^n*
- (b) *Каждая точка M имеет окрестность, гомеоморфную \mathbb{R}^n .*

Доказательство. Если пространство M удовлетворяет свойству (a) или (b), то оно локально евклидово, размерности n , поскольку формулировки (a) и (b) содержат частные случаи открытых множеств. Обратно, пусть M локально евклидово, размерности n . Поскольку любой открытый шар в \mathbb{R}^n гомеоморфен \mathbb{R}^n (Пример 9.8), то свойства (a) и (b) эквивалентны. Таким образом, нам достаточно установить справедливость (a).

Пусть $p \in M$ — произвольная точка. Для нее существуют окрестность U и гомеоморфизм $\varphi : U \rightarrow V$, где V — открытое подмножество \mathbb{R}^n . То, что V открыто в \mathbb{R}^n , означает, что существует открытый шар B с центром в $\varphi(p)$, содержащийся в V . Тогда, согласно Предложению 9.14, множество $\varphi^{-1}(B)$ является окрестностью p , гомеоморфной B . \square

Пусть M — локально евклидово пространство размерности n . Если $U \subset M$ — открытое множество, гомеоморфное некоторому открытому подмножеству \mathbb{R}^n , то U называется **координатной областью**, а любой гомеоморфизм φ из U в открытое подмножество \mathbb{R}^n называется **координатным отображением**.

Определение 9.28. *Пара (U, φ) , в которой U — координатная область, а φ — координатное отображение, называется **координатной картой** (или просто **картой**) M . Совокупность \mathcal{A} всех карт M , координатные области которых в совокупности покрывают M , называется **атласом** M .*

Координатная область, гомеоморфная шару в \mathbb{R}^n , называется **координатным шаром** (Когда M имеет размерность 2, мы иногда используем термин **координатный диск**). Доказанная Лемма показывает, что любая точка в локально евклидовом пространстве содержится в координатном шаре. Если $p \in M$, а U — координатная область, содержащая p , то мы будем говорить, что U — **координатная окрестность** p или **евклидова окрестность** p .

Определение локально евклидова пространства имеет смысл даже когда $n = 0$. Поскольку \mathbb{R}^0 состоит из одной точки, то Лемма 9.5 (b) влечет, что пространство локально евклидово размерности 0 тогда и только тогда, когда каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную одноточечному пространству, или, другими словами, тогда и только тогда, когда пространство дискретно.

6.2. Локальные координаты

Атлас \mathcal{A} осуществляет арифметизацию локально евклидова пространства M . Действительно, каждая точка $p \in M$ содержится в координатной области U некоторой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Арифметизация определяется координатным отображением φ , которое снабжает точку p кортежем $(x^1, \dots, x^n) = \varphi(p)$, из n элементов, представляющим координаты p . Точки, «соседние» с p в том смысле, что они принадлежат тому же множеству U , обладают координатами, порожденными тем же гомеоморфизмом φ . Вместе с тем, если точка лежит вне множества U , то ее координаты определяются посредством другого гомеоморфизма. В этой связи, используется термин «локальные координаты».

Предположим, что координатные области карт $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ имеют непустое пересечение: $U \cap V \neq \emptyset$. Точки p из множества U имеют локальные координаты $(x^1, \dots, x^n) = \varphi(p)$, а точки q из множества V имеют локальные координаты $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) = \psi(q)$. Точкам пересечения $U \cap V$ соответствуют пары координатных кортежей (x^1, \dots, x^n) и $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$, связанных гомеоморфизмом

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V), \quad (9.6.1)$$

который будем называть **гомеоморфизмом пересчета** или **функцией замены координат**. В координатном представлении,

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \tilde{x}^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

6.3. Координатное представление отображений

Поскольку структура локально евклидова пространства определяет аналитическое описание его точек, то отображения, заданные на таком пространстве, могут быть представлены как отображения из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^k , изучаемые в анализе. Действительно, пусть M — локально евклидово пространство размерности n , а $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторое отображение (скалярное поле). Выберем произвольный атлас \mathcal{A} . Если $p \in M$, то тогда p является элементом координатной области U некоторой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Отображение

$$\tilde{f}_\varphi = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (9.6.2)$$

действует на открытом множестве $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \varphi^{-1} \uparrow & \nearrow \tilde{f}_\varphi & \\ \varphi(U) & & \end{array}$$

Будем называть отображение \tilde{f}_φ открытого подмножества \mathbb{R}^n в \mathbb{R} **координатным представлением** f .

Непрерывность отображения f связана с непрерывностью его координатного представления.

Предложение 9.41. Пусть M — локально евклидово пространство размерности n . Отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно тогда и только тогда, когда существует атлас \mathcal{A} , такой, что координатное представление \tilde{f}_φ непрерывно для любой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть \mathcal{A} — произвольный атлас M . Если $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, то координатное представление (9.6.2), будучи композицией двух непрерывных отображений, является непрерывным отображением. Таким образом, необходимость доказана для любого атласа.

(\Leftarrow) Пусть \mathcal{A} — такой атлас M , что координатное представление \tilde{f}_φ непрерывно для любой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Любая точка $p \in M$ принадлежит координатной области U некоторой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. По условию, отображение \tilde{f}_φ непрерывно. Но тогда и композиция $\tilde{f}_\varphi \circ \varphi = f|_U$ также

является непрерывным отображением. Мы показали, что каждая точка M имеет окрестность, сужение f на которую непрерывно. В силу Предложения 9.11 это влечет непрерывность отображения f . \square

Пусть $\chi : \mathbb{I} \rightarrow M$ — непрерывное отображение интервала $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ в локально евклидово пространство M размерности n . Такое отображение будем называть **кривой**. Пусть $t_0 \in \mathbb{I}$. Выберем карту $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, такую, что $\chi(t_0) \in U$. Положим $\mathbb{I}_{t_0} = \chi^{-1}(U)$, тогда отображение

$$\tilde{\chi}_\varphi := \varphi \circ \chi|_{\mathbb{I}_{t_0}} : \mathbb{I}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

является непрерывной функцией вещественного переменного, принимающей значения в множестве \mathbb{R}^n ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}_{t_0} & \xrightarrow{\chi} & U \\ & \searrow \chi_\varphi & \downarrow \varphi \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Будем называть отображение $\tilde{\chi}_\varphi$ **координатным представлением кривой** χ .

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть M и N — локально евклидовы пространства размерностей n и k соответственно, а $\varkappa : M \rightarrow N$ — непрерывное отображение. Выберем карту (U, φ) на M . Можно найти, по меньшей мере, одну карту (V, ψ) на N , такую, что множество $W = U \cap \varkappa^{-1}(V)$ не пусто. В силу непрерывности \varkappa , множество W открыто в U и, в этой связи, множество $\varphi(W)$ открыто в \mathbb{R}^n . Отображение

$$\tilde{\varkappa}_{\varphi, \psi} = \psi \circ \varkappa \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \psi(V) \quad (9.6.3)$$

является непрерывным отображением открытых подмножеств \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^k ,

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varkappa} & \varkappa(W) \\ \varphi^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(W) & \xrightarrow{\tilde{\varkappa}_{\varphi, \psi}} & \psi(V) \end{array}$$

и называется **координатным представлением** \mathcal{K} в картах (U, φ) и (V, ψ) .

6.4. Топологические многообразия

Все готово для того, чтобы сформулировать основное определение настоящей главы.

Определение 9.29. *n -мерное топологическое многообразие — это хаусдорфово топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности и являющееся локально евклидовым, размерности n .*

В настоящей главе мы рассматриваем только топологические многообразия, поэтому будем употреблять термины « n -мерное многообразие», « n -многообразие», или даже «многообразие», если размерность ясна из контекста или не имеет значения.

Часто используется сокращение «пусть M^n — многообразие» для обозначения того, что M является многообразием размерности n . Верхний индекс n не является частью обозначения многообразия и, как правило, опускается после того, как многообразие определено. Нужно соблюдать осторожность и отличать эту запись от произведения $M^n = M \times \dots \times M$, но, как правило, из контекста ясно, что подразумевается. Такое сокращение в книге не используется.

Наиболее очевидный пример n -многообразия — это само \mathbb{R}^n . Более общо, любое открытое подмножество \mathbb{R}^n — или, любого n -многообразия — снова является n -многообразием, как показывает следующее Предложение.

Предложение 9.42. *Любое открытое подмножество n -многообразия является n -многообразием.*

Доказательство. Пусть пространство M является n -многообразием, а V — открытым подмножеством M . Любая точка $p \in V$ имеет окрестность (в M), гомеоморфную открытому подмножеству \mathbb{R}^n ; пересечение этой окрестности с V по-прежнему открыто, по-прежнему гомеоморфно открытому подмножеству \mathbb{R}^n и содержится в V . По этой причине, V

является локально евклидовым пространством размерности n . Согласно Примеру 9.13, множество V , являясь открытым подмножеством хаусдорфова пространства, само хаусдорфово. Наконец, в силу Предложения 9.27, пространство V удовлетворяет второй аксиоме счетности. В этой связи, пространство V является n -многообразием. \square

По исходным многообразиям можно построить новое многообразие — их произведение.

Предложение 9.43. *Если M_1, \dots, M_k — многообразия размерностей n_1, \dots, n_k соответственно, то произведение $M_1 \times \dots \times M_k$ является многообразием размерности $n_1 + \dots + n_k$.*

Доказательство. Согласно Предложению 9.38, произведение $M_1 \times \dots \times M_k$ является хаусдорфовым пространством, удовлетворяющим второй аксиоме счетности. Остается проверить только свойство локальной евклидовости. Пусть $p = (p_1, \dots, p_k) \in M_1 \times \dots \times M_k$, тогда для каждого $i = 1, \dots, k$ существуют окрестность U_i точки p_i и гомеоморфизм φ_i из U_i на открытое подмножество \mathbb{R}^{n_i} . Множество $U_1 \times \dots \times U_k$ является окрестностью точки p . В силу Предложения 9.39, произведение $\varphi_1 \times \dots \times \varphi_k$ является гомеоморфизмом $U_1 \times \dots \times U_k$ на открытое подмножество $\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_k}$. \square

Мы можем генерировать множество примеров многообразий как подпространств евклидова пространства. В частности, поскольку аксиома Хаусдорфа и вторая аксиома счетности автоматически наследуются подпространствами (благодаря п. (d) и (f) Предложения 9.33), для того, чтобы показать, что подпространство \mathbb{R}^n является многообразием, достаточно проверить, что оно локально евклидово.

Пример 9.21. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ — непрерывное отображение. Тогда **графиком** f называется подмножество $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+k}$, определенное равенством*

$$\Gamma(f) = \{(x, y) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^k) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid x \in U \text{ и } y = f(x)\},$$

с индуцированной топологией, унаследованной от \mathbb{R}^{n+k} . Для проверки того, что $\Gamma(f)$ является многообразием, мы покажем, что оно гомеоморфно U . Пусть $\Phi_f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ — непрерывное инъективное отображение

$$\Phi_f(x) = (x, f(x)).$$

Как в Примере 9.18, Φ_f определяет непрерывную биекцию из U в $\Gamma(f)$, а ограничение на $\Gamma(f)$ проекции $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является непрерывной обратной биекцией для нее. В этой связи, Φ_f — топологическое вложение, а $\Gamma(f)$, таким образом, гомеоморфно U .

Пример 9.22. Напомним, что единичная n -сфера — это множество \mathbb{S}^n единичных векторов \mathbb{R}^{n+1} . Легко представить сферы малых размерностей: \mathbb{S}^0 — двухточечное дискретное пространство $\{\pm 1\} \subset \mathbb{R}$, \mathbb{S}^1 — единичная окружность на плоскости, а \mathbb{S}^2 — знакомая сферическая поверхность радиуса 1 в \mathbb{R}^3 . Для того, чтобы показать, что \mathbb{S}^n является многообразием, нужно показать, что каждая его точка имеет евклидову окрестность. Прямой путь заключается в том, чтобы показать, что каждая точка имеет окрестность в \mathbb{S}^n , являющуюся графиком непрерывной функции. Для каждого $i = 1, \dots, n+1$ пусть U_i^+ обозначает открытое подмножество \mathbb{R}^{n+1} , состоящее из точек с $x^i > 0$, а U_i^- — множество точек с $x^i < 0$. Если $x \in \mathbb{S}^n$, то хотя бы одна координата x^i должна быть ненулевой, поэтому множества $U_1^\pm, \dots, U_{n+1}^\pm$ покрывают \mathbb{S}^n . На U_i^\pm мы можем решить уравнение $\|x\| = 1$ относительно x^i и получить, что $x \in \mathbb{S}^n \cap U_i^\pm$ если и только если

$$x^i = \pm \sqrt{1 - (x^1)^2 - \dots - (x^{i-1})^2 - (x^{i+1})^2 - \dots - (x^{n+1})^2}.$$

Другими словами, пересечение \mathbb{S}^n с U_i^\pm является графиком непрерывной функции, и потому локально евклидово. Этим доказывается, что \mathbb{S}^n является n -многообразием.

Имеется другой удобный способ показать, что \mathbb{S}^n является многообразием. Пусть $N = (0, \dots, 0, 1)$ — «северный полюс» \mathbb{S}^n . Определим **стереографическую проекцию** как отображение $\sigma : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, сопоставляющее точке $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ точку $u \in \mathbb{R}^n$, выбранную так, что $U = (u, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ — точка, в которой прямая, проходящая через N и x пересекает подпространство $x^{n+1} = 0$. Для нахождения формулы для σ , заметим, что $u = \sigma(x)$ характеризуется векторным уравнением

$$U - N = \lambda(x - N),$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Это приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} u^i &= \lambda x^i, \quad i = 1, \dots, n, \\ -1 &= \lambda(x^{n+1} - 1). \end{aligned} \tag{9.6.4}$$

Решая последнее уравнение, определим λ и подставим в остальные. Придем к равенству

$$\sigma(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, \dots, x^n)}{1 - x^{n+1}}.$$

Обратное к нему может быть найдено из (9.6.4):

$$x^i = \frac{u^i}{\lambda}, \quad x^{n+1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}. \quad (9.6.5)$$

Точка $x = \sigma^{-1}(u)$ характеризуется этими уравнениями а также тем, что $x \in \mathbb{S}^n$. Подставляя (9.6.5) в $\|x\|^2 = 1$ и решая относительно λ , получаем

$$\lambda = \frac{\|u\|^2 + 1}{2}.$$

Подстановка в (9.6.5) приводит к формуле

$$\sigma^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \frac{(2u^1, \dots, 2u^n, \|u\|^2 - 1)}{\|u\|^2 + 1}.$$

Поскольку это непрерывное обратное для σ , то отсюда следует, что $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ гомеоморфно \mathbb{R}^n . В частности, это дает евклидову окрестность каждой точки \mathbb{S}^n , за исключением N , и аналогичная проекция из южного полюса работает в окрестности N .

Пример 9.23. Рассмотрим **поверхность пончика**, являющуюся поверхностью вращения $D \subset \mathbb{R}^3$, полученной вращением окружности $(x-2)^2 + z^2 = 1$ (порождающей окружности) на плоскости Oxz вокруг оси Oz . Поверхность пончика характеризуется уравнением $(r-2)^2 + z^2 = 1$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и может быть параметризована двумя углами θ (отсчитываемого вокруг оси Oz от плоскости Oxz) и φ (отсчитываемого вокруг порождающей окружности от горизонтального внешнего направления). Для вычислений удобно сделать подстановки $\varphi = 2\pi u$ и $\theta = 2\pi v$ и определить отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow D$ формулой

$$F(u, v) = ((2 + \cos 2\pi u) \cos 2\pi v, (2 + \cos 2\pi u) \sin 2\pi v, \sin 2\pi u). \quad (9.6.6)$$

Оно отображает плоскость на D , но не инъективно, поскольку $F(u+k, v+l) = F(u, v)$ для любой пары целых чисел (k, l) . Вместе с тем, F

инъективно, если ограничить его на достаточно малую окрестность точки (u_0, v_0) . Прямые вычисления показывают, что локально обратное отображение в окрестности (u_0, v_0) определяется формулами

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{z}{r-2} + \frac{k}{2}, & v &= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} + \frac{l}{2}, \\ u &= \frac{1}{2\pi} \cot^{-1} \frac{r-2}{z} + \frac{k}{2}, & v &= \frac{1}{2\pi} \cot^{-1} \frac{x}{y} + \frac{l}{2}, \end{aligned}$$

при подходящем выборе целых k, l . Таким образом, D является 2-многообразием.

Определение 9.30. Произведение $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ (n раз) называется n -тором. В частности, 2-тор называется **тором**.

Согласно Предложению 9.43, n -тор \mathbb{T}^n является n -мерным многообразием. Поскольку \mathbb{S}^1 является подпространством \mathbb{R}^2 , то тор \mathbb{T}^2 может быть рассмотрен как подпространство \mathbb{R}^4 , в силу Предложения 9.38 (е): это множество точек $(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4$, таких, что $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ и $(x^3)^2 + (x^4)^2 = 1$. Как показывает следующее Предложение, тор \mathbb{T}^2 гомеоморфен поверхности пончика.

Предложение 9.44. Тор \mathbb{T}^2 гомеоморфен поверхности пончика D из Примера 9.23.

Доказательство. Геометрическая идея доказательства заключается в том, что для параметризации обеих поверхностей используются два угла. Для D углами являются $\varphi = 2\pi u$ и $\theta = 2\pi v$, как в 9.6.6; для \mathbb{T}^2 это углы в двух окружностях. Хотя при использовании углов нужно соблюдать осторожность, поскольку они не определены непрерывно на всей окружности, их можно исключить и получить явно формулы, связывающие непрерывные отображения.

Имея это в виду, запишем $x^1 = \cos \theta$, $x^2 = \sin \theta$, $x^3 \cos \varphi$ и $x^4 = \sin \varphi$. Подстановка в 9.6.6 дает отображение $G: \mathbb{T}^2 \rightarrow D$,

$$G(x^1, x^2, x^3, x^4) = ((2 + x^3)x^1, (2 + x^3)x^2, x^4).$$

Отображение G является ограничением непрерывного отображения и, в этой связи, оно непрерывно. Проверим, что оно действительно принимает значения в D : если $(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{T}^2$, то

$$x = (2 + x^3)x^1, \quad y = (2 + x^3)x^2, \quad z = x^4. \quad (9.6.7)$$

Тогда

$$r^2 = x^2 + y^2 = (2 + x^3)^2,$$

и

$$(r - 2)^2 + z^2 = (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1,$$

что влечет $(x, y, z) \in D$.

Отображение G обратимо. Действительно, выражая (x^1, x^2, x^3, x^4) из (9.6.7), получаем, что отображение $G^{-1} : D \rightarrow \mathbb{T}^2$, имеет вид

$$G^{-1}(x, y, z) = (x/r, y/r, r - 2, z),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Это отображение непрерывно и поэтому G — гомеоморфизм. \square

Следующее Предложение позволяет классифицировать все 0-многообразия.

Предложение 9.45. *Топологическое пространство является 0-многообразием тогда и только тогда, когда оно является не более, чем счетным дискретным пространством.*

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть M является 0-многообразием, а $p \in M$ — произвольной точкой. Тогда существует окрестность U точки p , гомеоморфная $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Так как $p \in U$, а множества \mathbb{R}^0 и U равномощны, то $U = \{p\}$. Итак, множество $\{p\}$ открыто в M и мы показали, что все одноточечные подмножества открыты в M . В этой связи, M является дискретным пространством.

Пусть \mathcal{B} — не более, чем счетная база M . Для любой точки $p \in M$, согласно критерию базы, существует элемент $B \in \mathcal{B}$, такой, что

$$p \in B \subset \{p\}.$$

Из двойного включения следует, что $B = \{p\}$. Таким образом, мы показали, что

$$\{\{p\} \mid p \in M\} \subset \mathcal{B}.$$

По этой причине, множество $\{\{p\} \mid p \in M\}$ не более, чем счетно. Поскольку M равномощно этому множеству, то оно также не более, чем счетно.

(\Leftarrow) Пусть M является не более, чем счетным дискретным пространством. Тогда M хаусдорфово, а не более, чем счетное множество

$$\mathcal{B} = \{\{p\} \mid p \in M\}$$

является базой M . Кроме того, для $p \in M$ отображение

$$\varphi : \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0, \quad \varphi(p) = 0,$$

является гомеоморфизмом. В этой связи, пространство M является 0-многообразием. \square

Важно держать в голове примеры пространств, не являющихся многообразиями. Двумя простыми примерами являются объединение осей $0x$, $0y$ в \mathbb{R}^2 и коническая поверхность в \mathbb{R}^3 , определенная равенством $x^2 + y^2 = z^2$; обе — с евклидовой топологией. В каждом из этих случаев точка 0 не имеет евклидовой окрестности.

6.5. Замечания, касающиеся определения многообразий

Имеется несколько замечаний, связанных с определением топологического многообразия. Во-первых, определение многообразия требует, чтобы многообразие имело особую, корректно определенную размерность. Это исключает, например, такие пространства, как дизъюнктное объединение прямой и плоскости в \mathbb{R}^3 , в котором каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную некоторому евклидову пространству; при этом, размерности могут быть разными для разных точек. В этой связи, возникает вопрос: Является ли размерность многообразия внутренним топологическим свойством? Или, иначе, может ли топологическое пространство быть одновременно n -многообразием и многообразием другой размерности? Ответ — нет.

Теорема 9.6. (Инвариантность размерности) *Если $t \neq n$, то непустое топологическое пространство не может быть одновременно t - и n -многообразием.*

Доказательство теоремы см. в [1].

Теорема об инвариантности размерности сформулирована только для непустых пространств, поскольку пустое множество удовлетворяет определению n -многообразия для любого n . Хотя пустое множество не является интересным многообразием, иногда пустые многообразия удобно принимать во внимание. В этой связи, мы примем соглашение, согласно которому пустое множество является многообразием любой размерности.

Второе замечание связано с вопросом: Имеются ли топологические пространства, которые удовлетворяют определению многообразия и не реализуемы как локально евклидовы подмножества \mathbb{R}^k ? Ответ — нет, мы не определили новые объекты, поскольку можно показать, что каждое топологическое многообразие гомеоморфно некоторому подмножеству евклидова пространства.

Хотя абстрактное определение многообразия как топологического пространства не увеличивает класс многообразий, определяемых как подмножества евклидова пространства, оно упрощает жизнь, поскольку мы можем вводить новые многообразия, не представляя их как подмножества евклидова пространства.

6.6. Многообразия с краем

Интуитивно очевидно (хотя непросто доказать), что замкнутый шар в \mathbb{R}^n не является многообразием, поскольку точка на его границе не обладает евклидовой окрестностью. Тем не менее, замкнутые шары и пространства, подобные им, имеют важное применение в теории многообразий. В этой связи, удобно рассмотреть класс пространств, более широкий, чем класс многообразий, элементы которого обладают, в некотором смысле, «границей».

Вблизи своих «границ» пространства нового класса моделируются посредством **замкнутого n -мерного верхнего полупространства** $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$, определенного как

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}.$$

Определение 9.31. *n -мерное многообразие с краем — это хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную либо открытому подмножеству \mathbb{R}^n , либо открытому подмножеству \mathbb{H}^n .*

В определении подразумевается, что пространство \mathbb{H}^n рассматривается в евклидовой топологии. Несмотря на терминологию, многообразия с краем не обязательно являются многообразиями.

Если M является n -многообразием с краем, то **координатной картой** M называется пара (U, φ) , где $U \subset M$ — открытое множество, а φ — гомеоморфизм из U в открытое подмножество либо \mathbb{R}^n , либо \mathbb{H}^n . Как и в случае многообразий, множество U называется **координатной областью**, а φ — **координатным отображением**.

Мы используем обозначение $\partial\mathbb{H}^n$ для границы \mathbb{H}^n и $\text{Int } \mathbb{H}^n$ — для внутренности \mathbb{H}^n , рассматривая \mathbb{H}^n как подмножество \mathbb{R}^n . Для $n > 0$ это означает

$$\begin{aligned}\partial\mathbb{H}^n &= \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}, \\ \text{Int } \mathbb{H}^n &= \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}.\end{aligned}$$

Когда $n = 0$, то $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$, поэтому $\text{Int } \mathbb{H}^0 = \mathbb{H}^0$, а $\partial\mathbb{H}^0 = \emptyset$. В этой связи, 0-мерные многообразия с краем неотличимы от 0-многообразий.

Когда необходимо сделать различие, то говорят, что (U, φ) — **карта внутренности**, если $\varphi(U)$ является открытым подмножеством \mathbb{R}^n (что включает случай, когда $\varphi(U)$ открыто в \mathbb{H}^n и содержится в $\text{Int } \mathbb{H}^n$), и **картой края**, если $\varphi(U)$ открыто в \mathbb{H}^n и $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$.

Пример 9.24. (Многообразия с краем)

Верхнее полупространство \mathbb{H}^n само есть n -многообразие с краем, где тождественное отображение играет роль глобального координатного отображения. Аналогично, любой замкнутый или полуоткрытый интервал в \mathbb{R} является 1-многообразием с краем. Другим важным примером является замкнутый единичный шар $\bar{\mathbb{B}}^n$ с евклидовой топологией. Пространство $\bar{\mathbb{B}}^n$ является n -многообразием с краем.

Если M является n -многообразием с краем, то точка $p \in M$ называется **точкой внутренности** M , если она принадлежит координатной области некоторой карты внутренности; и она называется **точкой края** M , если она принадлежит координатной области карты края, переводящей p в некоторую точку из $\partial\mathbb{H}^n$. **Край** M , обозначаемый через ∂M , есть множество всех точек края M , а **внутренность** M , обозначаемая через $\text{Int } M$, есть множество всех точек внутренности M . Каждая точка M есть либо точка внутренности, либо точка края: если $p \in M$ принадлежит области карты внутренности, то это точка внутренности; с другой

стороны, если она принадлежит области карты края, то это точка внутренности, если ее образ лежит в $\text{Int } \mathbb{H}^n$, и точка края, если ее образ лежит в $\partial \mathbb{H}^n$.

Замечание 9.4. Заметим, что мы получили новый смысл для терминов «край» (граница) и «внутренность». Если M — многообразие с краем, то его край может быть непуст независимо от того, имеет ли оно граничные точки будучи подмножеством объемлющего пространства.

Например, диск $\overline{\mathbb{B}^2}$ является многообразием с краем, где край — окружность. Его топологическая граница, как подмножества \mathbb{R}^2 , есть также окружность. Однако, если мы рассмотрим $\overline{\mathbb{B}^2}$ как топологическое пространство в себе, то оно будет иметь пустую границу. А если мы будем думать об $\overline{\mathbb{B}^2}$ как о подмножестве \mathbb{R}^3 (отождествляя \mathbb{R}^2 с плоскостью xy), то его границей будет весь диск.

Как отмечалось ранее, многообразие с краем не обязательно является многообразием, поскольку точки края не имеют евклидовых окрестностей. Более того, многообразие с краем может иметь пустой край: в определении не сказано, что край обязан быть непустым. С другой стороны, каждое n -многообразие автоматически является многообразием с краем, каждая точка которого является точкой внутренности.

Хотя термин «многообразие с краем» также охватывает многообразия, для того, чтобы избежать путаницы, мы будем использовать многословные термины, такие, как **многообразие без края**, для обозначения многообразия в смысле определения 9.29, и **многообразие с краем или без** для обозначения многообразия с краем, подчеркивая, при этом, что край может быть пуст. Термин «многообразие» без дальнейших уточнений всегда будет обозначать многообразие без края.

Предложение 9.46. Если M является n -мерным многообразием с краем, то $\text{Int } M$ — открытое подмножество M , являющееся n -мерным многообразием без края.

Доказательство. 1) Покажем, что $\text{Int } M$ является открытым подмножеством M . Пусть $p \in \text{Int } M$. По определению, существует карта (U, φ) , такая, что $p \in U$, а $\varphi(U)$ открыто в \mathbb{R}^n . Пусть $q \in U$. Тогда U — окрестность q , причем, U является координатной областью внутренней карты.

Таким образом, q является точкой внутренности. В силу произвольности q , приходим ко включению $U \subset \text{Int } M$. В этой связи, множество $\text{Int } M$ открыто в M .

2) Поскольку множество $\text{Int } M$ является открытым, то оно хаусдорфово, со второй аксиомой счетности. Покажем, что оно является локально евклидовым пространством размерности n . Пусть $p \in \text{Int } M$, тогда существует внутренняя карта (U, φ) , такая, что $p \in U$. Мы уже знаем, что $U \subset \text{Int } M$. В этой связи, пара (U, φ) является картой на $\text{Int } M$. Тем самым завершено доказательство того, что $\text{Int } M$ является n -многообразием. \square

В определениях внутренности и края есть тонкость, которая не может быть очевидной сразу. Хотя внутренность и край M являются корректно определенными подмножествами, объединение которых есть M , и может показаться интуитивно очевидным, что они не пересекаются друг с другом, у нас в данный момент нет способа доказать, что точка $p \in M$ не может одновременно быть точкой края и внутренности. Иными словами, невозможна такая ситуация, при которой имеется одна карта внутренности, область которой содержит p , и другая карта края, отображающая p в точку из $\partial \mathbb{H}^n$.

Теорема 9.7. (Инвариантность края) *Если M является многообразием с краем, то точка M не может одновременно быть точкой края и внутренности. Таким образом, ∂M и $\text{Int } M$ являются непересекающимися подмножествами, объединение которых есть M .*

Следствие 9.5. *Если M является непустым n -мерным многообразием с краем, то множество ∂M замкнуто в M , и M является n -многообразием в том и только в том случае, когда $\partial M = \emptyset$.*

Доказательство. Поскольку, согласно Предложению 9.46, $\text{Int } M$ открыто в M то из Теоремы 9.7 следует, что множество $\partial M = M \setminus \text{Int } M$ замкнуто. Если M является многообразием, то каждая его точка принадлежит области внутренней карты, поэтому $M = \text{Int } M$. Из Теоремы 9.7 следует тогда, что $\partial M = \emptyset$. Обратно, если $\partial M = \emptyset$, то $M = \text{Int } M$, где $\text{Int } M$ является многообразием в силу Предложения 9.46. \square

7. Топологические группы и действия групп

7.1. Топологические группы

При соединении топологических концепций с теорией групп получается богатый источник интересных топологических пространств.

Определение 9.32. *Топологическая группа* — это группа G , снабженная такой топологией, что отображения $m : G \times G \rightarrow G$ и $i : G \rightarrow G$, определенные равенствами

$$m(g_1, g_2) := g_1 g_2, \quad i(g) := g^{-1},$$

являются непрерывными. Здесь операции произведения и обращения взяты из групповой структуры G . (Конечно, непрерывность m понимается относительно топологии произведения на $G \times G$.)

Пример 9.25. (Топологические группы) Каждая из следующих структур является топологической группой:

- вещественная прямая \mathbb{R} с аддитивной групповой структурой и евклидовой топологией,
- множество $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ненулевых вещественных чисел с операцией произведения и евклидовой топологией,
- множество $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ненулевых комплексных чисел с операцией произведения и евклидовой топологией,
- **общая линейная группа** $GL(n, \mathbb{R})$, являющаяся множеством $n \times n$ обратимых вещественных матриц с операцией матричного умножения и топологией, индуцированной из \mathbb{R}^{n^2} (где мы отождествляем $n \times n$ матрицу с точкой из \mathbb{R}^{n^2} , используя элементы матрицы как координаты),
- **комплексная общая линейная группа** $GL(n, \mathbb{C})$, являющаяся множеством $n \times n$ обратимых комплексных матриц с операцией матричного умножения,
- любая группа с дискретной топологией (такая группа называется **дискретной группой**).

Предложение 9.47. *Любая подгруппа топологической группы является топологической группой с индуцированной топологией. Любое произведение конечного числа топологических групп является топологической группой со структурой прямого произведения и топологией произведения.*

Доказательство. Пусть G — группа, а $H \subset G$ — ее подгруппа. Рассмотрим H в индуцированной топологии. Поскольку H — подпространство G , то произведение $H \times H$ является подпространством $G \times G$. Поскольку отображения $m : G \times G \rightarrow G$ и $i : G \rightarrow G$ непрерывны в силу определения топологической группы, то их сужения $m|_{H \times H}$ и $i|_H$ также непрерывны. В этой связи, H является топологической группой.

Второе утверждение Предложения достаточно доказать для случая двух групп. Пусть (G_1, m_1) и (G_2, m_2) — группы, тогда структура (G, m) , где $G = G_1 \times G_2$, а отображение $m : G \times G \rightarrow G$ определено равенством

$$(g, h)(g', h') := (gg', hh'),$$

также является группой. Выразим m через m_1 и m_2 :

$$m((g, h), (g', h')) = (m_1(g, g'), m_2(h, h')) = m_1 \times m_2((g, g'), (h, h')).$$

Пусть $\pi_1 : G \rightarrow G_1$, $\pi_2 : G \rightarrow G_2$ — канонические проекции, тогда

$$\begin{aligned} \pi_1 \times \pi_1((g, h), (g', h')) &= (g, g'), \\ \pi_2 \times \pi_2((g, h), (g', h')) &= (h, h'). \end{aligned}$$

В этой связи,

$$m((g, h), (g', h')) = m_1 \times m_2(\pi_1 \times \pi_1((g, h), (g', h')), \pi_2 \times \pi_2((g, h), (g', h'))).$$

Определим отображение

$$\Delta : G \times G \rightarrow G \times G \times G \times G, \quad \Delta(x, y) := (x, y, x, y),$$

тогда окончательно получим композицию

$$m = (m_1 \times m_2) \circ (\pi_1 \times \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_2) \circ \Delta,$$

в которой отображения $m_1 \times m_2 : G_1 \times G_1 \times G_2 \times G_2 \rightarrow G$, $\pi_1 \times \pi_1 : G \times G \rightarrow G_1 \times G_1$, $\pi_2 \times \pi_2 : G \times G \rightarrow G_2 \times G_2$ и Δ непрерывны. По этой причине, m является непрерывным отображением.

Отображение обращения для G имеет вид

$$i(g, h) := (g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1}) = (i_1(g), i_2(h)) = i_1 \times i_2(g, h).$$

Следовательно, $i = i_1 \times i_2$. Поскольку отображения i_1 и i_2 непрерывны, то i также непрерывно. В этой связи, G является топологической группой. \square

Пример 9.26. (Новые примеры топологических групп) В силу Предложения 9.47, каждая из следующих структур является топологической группой с топологией произведения, либо индуцированной топологией соответственно:

- Евклидово пространство $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ является группой относительно сложения векторов,
- группа $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ положительных вещественных чисел относительно умножения,
- окружность $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ относительно умножения комплексных чисел,
- n -тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ со структурой произведения групп,
- ортогональная группа $O(n)$, являющаяся подгруппой $GL(n, \mathbb{R})$, состоящая из ортогональных матриц (матриц с ортонормированными столбцами).

Определение 9.33. Если G — топологическая группа, а $g \in G$, то левый сдвиг на g — это отображение $L_g : G \rightarrow G$, определенное равенством $L_g(g') := gg'$. Правый сдвиг на g — это отображение $R_g : G \rightarrow G$, определенное равенством $R_g(g') := g'g$.

Отображение L_g непрерывно, поскольку оно равно композиции

$$G \xrightarrow{i_g} G \times G \xrightarrow{m} G,$$

в которой $i_g(g') = (g, g')$, а m — групповая операция. В силу равенства $L_g \circ L_{g^{-1}} = \text{Id}_G$, левый сдвиг на любой элемент $g \in G$ является гомеоморфизмом G . Аналогично, правый сдвиг R_g также является гомеоморфизмом.

Определение 9.34. Топологическое пространство X называется **топологически однородным**, если для любых $x, y \in X$ имеется гомеоморфизм $\varphi: X \rightarrow X$, переводящий x в y .

Интуитивно это означает, что X «выглядит одинаково» относительно любой точки. Любая топологическая группа G топологически однородна: для любых $g, g' \in G$ левый сдвиг $L_{g'g^{-1}}$ является гомеоморфизмом G , переводящим g в g' . Это влечет, в частности, то, что многим топологическим пространствам нельзя придать структуру топологической группы. Например, если X является объединением осей Ox и Oy в \mathbb{R}^2 и мы примем факт (который будет доказан в следующей главе), что начало не имеет локально евклидовой окрестности в X , то из этого следует, что X не обладает групповой структурой, превращающей его в топологическую группу.

7.2. Действия групп

Определение 9.35. Пусть G — группа (не обязательно топологическая), а X — множество. **Левое действие G на X** — это отображение $G \times X \rightarrow X$, записываемое как $(g, x) \mapsto g \cdot x$, со следующими свойствами:

$$(i) \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x \text{ для всех } x \in X \text{ и } g_1, g_2 \in G.$$

$$(ii) \quad 1 \cdot x = x \text{ для всех } x \in X.$$

Аналогично, **правое действие** — это отображение $X \times G \rightarrow X$, записываемое как $(x, g) \mapsto x \cdot g$, с такими же свойствами, за исключением того, что композиция работает в обратном порядке: $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$.

Любое правое действие определяет левое действие естественным способом, и обратно, в силу соответствия

$$g \cdot x = x \cdot g^{-1}.$$

В этой связи, для многих целей выбор левого или правого действия является делом вкуса. Как правило, будем использовать левые действия, поскольку закон композиции в этом случае подражает композиции функций. Если не будет указано иное, группы всегда будут действовать слева.

Вместе с тем, будут ситуации, в которых естественно использовать правое действие.

Теперь предположим, что X — топологическое пространство, а G — группа, действующая на X (для определенности скажем, что она действует слева). Действие называется **действием гомеоморфизмами**, если для каждого $g \in G$ отображение $x \mapsto g \cdot x$ является гомеоморфизмом X . Если, в дополнение, G является топологической группой, то действие называется **непрерывным** в том случае, когда отображение $G \times X \rightarrow X$ непрерывно. В следующем Предложении устанавливается связь между этими двумя понятиями.

Предложение 9.48. Пусть G — топологическая группа, действующая на топологическом пространстве X . Тогда

- (a) Если действие непрерывно, то оно является действием гомеоморфизмами.
- (b) Если топология на G дискретна, то действие непрерывно в том и только в том случае, когда оно является действием гомеоморфизмами.

Доказательство. (a) Пусть действие непрерывно. Это означает, в частности, что для каждого $g \in G$ отображение $\Psi_g : x \mapsto g \cdot x$ из X в X непрерывно. Действительно, Ψ_g является композицией непрерывных отображений

$$X \rightarrow G \times X, \quad x \mapsto (g, x),$$

и

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

Теперь покажем, что Ψ_g биективно. Для $x \in X$,

$$\Psi_g \circ \Psi_{g^{-1}}(x) = \Psi_g(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x,$$

и

$$\Psi_{g^{-1}} \circ \Psi_g(x) = \Psi_{g^{-1}}(g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} \cdot g) \cdot x = 1 \cdot x = x,$$

что влечет равенства

$$\Psi_g \circ \Psi_{g^{-1}} = \text{Id}_X, \quad \Psi_{g^{-1}} \circ \Psi_g = \text{Id}_X.$$

В этой связи, отображение Ψ_g биективно, причем, $(\Psi_g)^{-1} = \Psi_{g^{-1}}$ — непрерывное отображение. Следовательно, Ψ_g — гомеоморфизм и мы показали, что G действует гомеоморфизмами.

(b) Пусть G имеет дискретную топологию. (\Rightarrow) Следует из (a).

(\Leftarrow) Пусть G действует гомеоморфизмами. Тогда ограничение действия $G \times X \rightarrow X$ на множество вида $\{g\} \times X$ непрерывно. Действительно, это ограничение является композицией гомеоморфизма

$$\{g\} \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto x,$$

и гомеоморфизма

$$X \rightarrow X, \quad x \mapsto g \cdot x.$$

Поскольку множества вида $\{g\} \times X$ образуют открытое покрытие $G \times X$, то действие непрерывно в силу критерия локальной непрерывности. \square

Определение 9.36. Для любого $x \in X$ множество

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

называется *орбитой* x .

Определение 9.37. Действие называется *транзитивным*, если для любой пары точек $x, y \in X$ имеется элемент $g \in G$, такой, что $g \cdot x = y$.

Предложение 9.49. Действие транзитивно в том и только в том случае, когда орбита любой точки — все пространство X , то есть, когда $G \cdot x = X$ для любой точки $x \in X$.

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть действие транзитивно, $x \in X$. По определению, $G \cdot x \subset X$. Если $y \in X$, то существует элемент $g \in G$, такой, что $y = g \cdot x$. Но это означает, что $y \in G \cdot x$. В этой связи, $X \subset G \cdot x$ и равенство $G \cdot x = X$ справедливо.

(\Leftarrow) Пусть $G \cdot x = X$ для любого $x \in X$. Если $x, y \in X$, то $y \in G \cdot x$, что влечет равенство $y = g \cdot x$ для некоторого $g \in G$. Следовательно, действие транзитивно. \square

Определение 9.38. Действие называется *свободным*, если единственный элемент G , оставляющий какую-то точку X неподвижной, — единичный. Иными словами, если $g \cdot x = x$ для некоторого $x \in X$, то $g = 1$.

Пример 9.27. (Непрерывные действия групп)

- (a) Общая линейная группа $GL(n, \mathbb{R})$ действует справа на \mathbb{R}^n посредством матричного умножения, где каждый элемент \mathbb{R}^n рассматривается как матрица-столбец. Это действие непрерывно, поскольку компоненты $g \cdot x$ являются полиномиальными функциями компонент g и x . Если $x \in \mathbb{R}^n$ — ненулевой вектор, то мы можем найти векторы x_2, \dots, x_n , такие, что кортеж (x, x_2, \dots, x_n) образует базис \mathbb{R}^n . Тогда матрица g со столбцами (x, x_2, \dots, x_n) обратима и переводит вектор $(1, 0, \dots, 0)$ в x . Если $y \in \mathbb{R}^n$ — любой другой ненулевой вектор, то аналогично можно показать, что имеется матрица $h \in GL(n, \mathbb{R})$, переводящая вектор $(1, 0, \dots, 0)$ в y . Тогда матрица hg^{-1} переводит x в y . В этой связи, имеются лишь две орбиты: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\{0\}$.
- (b) Ортогональная группа $O(n)$ также действует непрерывно на \mathbb{R}^n посредством матричного умножения; действие является ограничением действия из (a) на $O(n) \times \mathbb{R}^n \subset GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. Поскольку любой единичный вектор x может быть дополнен до ортонормированного базиса (x, x_2, \dots, x_n) , то рассуждения, аналогичные (a), показывают, что для любых единичных векторов x и y имеется ортогональная матрица, переводящая x в y . Если x и y — ненулевые векторы одинаковой длины, то существует ортогональная матрица, переводящая $x/\|x\|$ в $y/\|y\|$, и эта матрица также переводит x в y . Поскольку умножение на ортогональную матрицу сохраняет длины векторов, то орбиты действия $O(n)$ на \mathbb{R}^n есть $\{0\}$ и сферы с центром в 0 .
- (c) Ограничение действия $O(n)$ на единичную сферу в \mathbb{R}^n дает транзитивное действие на S^{n-1} .
- (d) Группа \mathbb{R}^* действует на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ посредством умножения на скаляр. Это действие свободно, а орбитами являются прямые, проходящие через начало координат (которое выколото).
- (e) Любая топологическая группа G действует непрерывно, свободно и транзитивно на себя слева под действием левого сдвига: $g \cdot g' = L_g(g') = gg'$. Аналогично, G действует на себя справа посредством правого сдвига.

- (f) Если Γ — подгруппа топологической группы G (с индуцированной топологией), то групповое умножение слева или справа определяет левое или правое действие Γ на G ; это всего лишь ограничение действия G на себя на $\Gamma \times G$ или $G \times \Gamma$. Это действие непрерывно и свободно, но в общем случае не транзитивно.
- (g) Двухэлементная дискретная группа $\{\pm 1\}$ действует свободно на S^n посредством умножения: $\pm 1 \cdot x = \pm x$. Это действие гомеоморфизмами, и, поскольку группа дискретна, то оно непрерывно. Каждая орбита есть пара $\{x, -x\}$.

Пусть дано действие группы G на пространстве X (не обязательно непрерывное или даже гомеоморфизмами). Определим отношение на X , полагая $x_1 \sim x_2$, если и только если существует элемент $g \in G$, такой, что $g \cdot x_1 = x_2$. Оно рефлексивно, поскольку $1 \cdot x = x$ для каждого x ; оно симметрично, поскольку $g \cdot x_1 = x_2$ влечет $g^{-1} \cdot x_2 = x_1$; и оно транзитивно, поскольку из равенств $g \cdot x_1 = x_2$ и $g' \cdot x_2 = x_3$ следует равенство $g'g \cdot x_1 = x_3$. Таким образом, \sim — отношение эквивалентности.

Предложение 9.50. *Классы эквивалентности по отношению \sim являются орбитами действия группы:*

$$\forall x \in X : [x] = G \cdot x.$$

Доказательство. Пусть $x \in X$. Если $y \in [x]$, то $y \sim x$ и $y = g \cdot x$ для некоторого $g \in G$. Это означает, что $y \in G \cdot x$ и потому справедливо включение $[x] \subset G \cdot x$. Обратно, если $y \in G \cdot x$, то существует элемент $g \in G$, такой, что $y = g \cdot x$. Тогда $y \sim x$, что влечет $y \in [x]$. Следовательно, $G \cdot x \subset [x]$ и равенство доказано. \square

Определение 9.39. *Факторпространство X/\sim называется **пространством орбит** действия и обозначается через X/G .*

Если действие транзитивно, то пространство орбит состоит из одной точки, поэтому только нетранзитивные действия дают интересные примеры.

Рассмотрим факторпространства, определенные действиями групп из Примера 9.27.

Пример 9.28. *Поскольку действие $GL(n, \mathbb{R})$ на \mathbb{R}^n посредством матричного умножения имеет две орбиты, то факторпространство имеет в точности две точки $a = q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и $b = q(\{0\})$. Единственные насыщенные открытые подмножества \mathbb{R}^n есть само \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и \emptyset , поэтому открытыми подмножествами факторпространства являются $\{a, b\}$, $\{a\}$ и \emptyset . В этой связи, пространство орбит не хаусдорфово.*

Библиография

1. Lee John M. **Introduction to Topological Manifolds**. — Springer New York, 2011.

1. Гладкая структура

1.1. C^k -согласованность

Локально евклидова структура топологического многообразия M позволяет ввести координатное описание точек M и отображений, определенных на M . Вместе с тем, для формализации гладких отображений, то есть, отображений, допускающих тейлоризацию нужного порядка, этого недостаточно. Действительно, пусть $f \in \mathbb{R}^M$ — некоторое отображение, а $p \in M$ — точка. Поскольку на M не предполагается никакой аффинной структуры (например, M — сфера), то мы можем определить гладкость функции f в окрестности точки p лишь через гладкость его координатного представления. Предположим, что мы выбрали некоторый атлас \mathcal{A} на M . Тогда точка p принадлежит координатной области некоторой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Координатное представление f в окрестности p есть отображение \tilde{f}_φ , определенное равенством (9.6.2). Поскольку \tilde{f}_φ отображает открытое подмножество \mathbb{R}^n в множество \mathbb{R} , то мы можем определить его гладкость методами классического анализа: оно имеет класс C^k , если существуют и непрерывны все его частные производные до порядка k включительно.

Однако (U, φ) может быть не единственной картой, координатная

область которой содержит p . Пусть $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ — другая карта, координатная область которой содержит p . Тогда определено координатное представление \tilde{f}_ψ , связанное с функцией \tilde{f}_φ на их общей области определения равенством

$$\tilde{f}_\psi = \tilde{f}_\varphi \circ \varphi \circ \psi^{-1},$$

где $\varphi \circ \psi^{-1}$ — гомеоморфизм пересчета. Для корректного определения порядка гладкости отображения f , необходимо, чтобы он не зависел от координатного представления функции в окрестности точки. В случае с картой (V, ψ) это означает, что \tilde{f}_ψ должно быть отображением класса C^k . Для этого нужно, чтобы функция $\varphi \circ \psi^{-1}$ имела класс гладкости не меньший, чем k . Но карты (U, φ) и (V, ψ) равноправны, поэтому функция замены координат $\psi \circ \varphi^{-1}$ также должна иметь класс гладкости, как минимум, равный k .

Мы могли бы говорить о функциях на многообразии, имеющих в окрестностях разных точек разные классы гладкости, но для физических приложений требуется, чтобы класс гладкости был одинаков независимо от точки. Сказанное является мотивацией для следующего определения [1, 2].

Определение 10.1. Атлас \mathcal{A} топологического многообразия M называется **атласом класса C^k** , $k \in \mathbb{N}$, если любые две карты $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ являются C^k -согласованными: либо 1) $U \cap V = \emptyset$, либо 2) $U \cap V \neq \emptyset$ и функция замены координат (9.6.1) является C^k -диффеоморфизмом.

Используя стандартное соглашение, когда случай $k = 0$ соответствует гомеоморфизму, под C^0 -атласом будем понимать любой атлас топологического многообразия. Далее, под **атласом класса C^∞** , или **гладким атласом** понимается атлас, в котором функции замены координат в условии 2) гладкого согласования имеют непрерывные частные производные любых порядков. Наконец, под C^ω -атласом, или **аналитическим атласом** понимается атлас, все функции замены координат которого являются аналитическими функциями (то есть, разлагаются в ряд Тейлора в окрестности любой точки области определения). Справедливы стандартные включения:

$$C^\omega \subset C^\infty \subset C^k \subset C^0.$$

Случай многообразий с краем рассматривается аналогично. Вместе с тем, необходимы некоторые комментарии к гомеоморфизму пересчета. В случае многообразия без края гомеоморфизм пересчета $\psi \circ \varphi^{-1}$ действует между открытыми подмножествами \mathbb{R}^n и его гладкость понимается в смысле классического анализа (все его координатные функции имеют непрерывные частные производные до нужного порядка включительно). В случае многообразия с краем множество $\varphi(U \cap V)$ может быть открытым в \mathbb{H}^n , но не в \mathbb{R}^n . В этой связи, необходимо пояснить, что означает гладкость $\psi \circ \varphi^{-1}$ в этом случае.

Пусть O — открытое подмножество \mathbb{H}^n , а $f : O \rightarrow \mathbb{R}^k$ — отображение. Оно называется **гладким** (класса C^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), если для любой точки $p \in O$ существуют открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащее p , и отображение $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ класса C^k (в стандартном смысле), такое, что $\tilde{f}|_{U \cap O} = f|_{U \cap O}$. Иными словами, f гладкое если локально его можно продолжить до отображения, которое является гладким в стандартном смысле.

1.2. Отношение эквивалентности в классе гладких атласов

Пусть M — топологическое многообразие (с краем или без). Если \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 — атласы класса C^k на M , то их объединение $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ является атласом на M . Предположим, что этот атлас является атласом класса C^k . Тогда атласы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 равноправны: переходя от одного из них к другому, мы не меняем порядок гладкости отображения, заданного на многообразии. Для того, чтобы не различать равноправные атласы, определим отношение эквивалентности \sim на классе всех C^k -атласов [1, 3, 4]: $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$, если $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ — атлас класса C^k .

Определение 10.2. Класс эквивалентности $\mathcal{D} = [\mathcal{A}]$ называется C^k -структурой на M . Атлас

$$\mathcal{A}_{\max} = \bigcup \{ \mathcal{A} \in \mathcal{D} \},$$

равный объединению всех элементов \mathcal{D} , называется **максимальным атласом**. Любая карта $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\max}$ называется **гладкой картой**.

Замечание 10.1. Гладкую структуру можно определить эквивалентным образом как максимальный атлас, содержащий данный гладкий атлас [5, 6].

Присоединяя к топологическому многообразию гладкую структуру, приходим к новой структуре, являющейся фундаментом теоретических построений современной физики.

Определение 10.3. Структура $(M, \mathcal{T}, \mathcal{D})$, в которой подструктура (M, \mathcal{T}) является n -мерным топологическим многообразием (с краем или без), а класс \mathcal{D} является C^k -структурой на M , называется n -мерным C^k -многообразием (соответственно, с краем или без).

Если это не повлечет никакой путаницы, в дальнейшем мы будем опускать символы \mathcal{T}, \mathcal{D} в $(M, \mathcal{T}, \mathcal{D})$ и писать « M — гладкое многообразие» (или, соответственно, «гладкое многообразие с краем»).

2. Гладкие отображения

Гладкие отображения между гладкими многообразиями играют главную роль в настоящей работе. Конфигурации, деформации, температура, плотность упругой энергии являются примерами таких отображений. Опираясь на понятие гладкой структуры над многообразием, можно получить общее определение для гладких отображений между ними [1, 2, 7].

2.1. Алгебра $C^k(M)$ гладких функций

Рассмотрим функцию $f \in \mathbb{R}^M$ на гладком многообразии $(M, \mathcal{T}, \mathcal{D})$ размерности n (с краем или без). Карта $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\max}$ определяет координатное представление f по формуле (9.6.2). Поскольку гладкость отображения \tilde{f}_φ может быть определена в смысле классического анализа, то определим гладкость отображения f следующим образом.

Определение 10.4. Функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется **функцией класса C^k** , если для каждой точки $p \in M$ существует карта $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\max}$ такая, что $p \in U$ и координатное представление \tilde{f}_φ является функцией класса C^k на множестве $\varphi(U)$.

В силу рассуждений п. 1.1., определение C^k -функции на многообразии является корректным. Обозначим множество всех C^k -функций $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ через $C^k(M)$. Это множество превращается в векторное пространство, если на нем ввести поточечные операции сложения и умножения на скаляры:

$$\begin{aligned}(f + g) : M &\rightarrow \mathbb{R}, & (f + g)(p) &:= f(p) + g(p), \\ (\lambda f) : M &\rightarrow \mathbb{R}, & (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p),\end{aligned}$$

где $f, g \in C^k(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Операция поточечного умножения

$$(fg) : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (fg)(p) := f(p)g(p),$$

превращает $C^k(M)$ в коммутативную и ассоциативную алгебру над \mathbb{R} .

Замечание 10.2. Для обоснования того, что $C^k(M)$ замкнуто относительно операций сложения и умножения, достаточно рассмотреть координатные представления. Пусть (U, φ) — гладкая карта. Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{(f + g)}_\varphi &= (f + g) \circ \varphi^{-1} = \tilde{f}_\varphi + \tilde{g}_\varphi, \\ \widetilde{(\lambda f)}_\varphi &= (\lambda f) \circ \varphi^{-1} = \lambda \tilde{f}_\varphi, \\ \widetilde{(fg)}_\varphi &= (fg) \circ \varphi^{-1} = \tilde{f}_\varphi \tilde{g}_\varphi,\end{aligned}$$

и из того, что правые части — гладкие функции, следует гладкость левых частей.

Если $U \subset M$ — открытое подмножество M , то рассматривая его как открытое подмногообразие M , можно использовать обозначение $C^k(U)$ для множества всех C^k -функций $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Выберем некоторую карту (U, φ) из максимального атласа M . Для каждого $i = 1, \dots, n$ определим проекцию

$$\pi_n^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_n^i(x^1, \dots, x^n) := x^i.$$

Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Получаем функцию

$$\varphi^i := \pi_n^i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}. \tag{10.2.1}$$

Координатное представление этой функции есть

$$\tilde{\varphi}^i = \varphi^i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}^i = \pi_n^i|_{\varphi(U)}$. Поскольку π_n^i — C^∞ -функция, то

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \varphi^i \in C^k(U).$$

2.2. Гладкие отображения между многообразиями

Пусть $(M_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{D}_1)$ и $(M_2, \mathcal{T}_2, \mathcal{D}_2)$ — C^k -многообразия (с краем или без) размерностей $\dim M_1 = n_1$ и $\dim M_2 = n_2$. Обозначим через $\mathcal{A}_{\max}^{(1)}$ и $\mathcal{A}_{\max}^{(2)}$ соответствующие максимальные атласы.

Рассмотрим непрерывное отображение $\varkappa : M_1 \rightarrow M_2$. Выберем некоторую карту $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\max}^{(1)}$. Можно найти, по меньшей мере, одну карту $(V, \psi) \in \mathcal{A}_{\max}^{(2)}$, такую, что $U \cap \varkappa^{-1}(V) \neq \emptyset$. В силу непрерывности \varkappa , множество $U \cap \varkappa^{-1}(V)$ открыто в U и, следовательно, множество $\varphi(U \cap \varkappa^{-1}(V))$ открыто либо в \mathbb{R}^{n_1} , либо (если не открыто в \mathbb{R}^{n_1}) в \mathbb{H}^{n_1} . Таким образом, определено координатное представление $\tilde{\varkappa}_{\varphi, \psi}$ (9.6.3), являющееся отображением между подмножествами \mathbb{R}^{n_1} и \mathbb{R}^{n_2} . Пусть (x^j) обозначает локальные координаты на M_1 , а (y^i) — локальные координаты на M_2 . Тогда отображение $\tilde{\varkappa}_{\varphi, \psi}$ может быть представлено в виде n_2 функций

$$y^i : (x^1, \dots, x^{n_1}) \mapsto y^i(x^1, \dots, x^{n_1}), \quad i = 1, \dots, n_2.$$

Определение 10.5. *Отображение $\varkappa : M_1 \rightarrow M_2$ называется отображением класса C^k , если оно непрерывно и для любой точки $p \in M_1$ существуют карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\max}^{(1)}$ и $(V, \psi) \in \mathcal{A}_{\max}^{(2)}$ такие, что $p \in U$, $\varkappa(p) \in V$ и координатное представление $\tilde{\varkappa}_{\varphi, \psi}$ имеет класс C^k .*

В работе множество всех гладких отображений $\varkappa : M_1 \rightarrow M_2$ обозначается через $C^k(M_1; M_2)$. В частности, $C^k(M) = C^k(M; \mathbb{R})$.

2.3. Диффеоморфизмы

Пусть M_1 и M_2 — C^k -многообразия (с краем или без). Выделим во множестве $C^k(M_1; M_2)$ те отображения, которые сохраняют гладкую структуру.

Определение 10.6. *Отображение $\varkappa : M_1 \rightarrow M_2$ называется C^k -диффеоморфизмом, если оно биективно и $\varkappa, \varkappa^{-1}$ являются отображениями класса C^k .*

Рассмотрим пример. Пусть M — C^k -многообразие размерности n . Выберем некоторую гладкую карту (U, φ) . Ранее мы показали, что отображения φ^i (10.2.1), $i = 1, \dots, n$, являются гладкими. Теперь рассмотрим отображение $\varphi : U \rightarrow O$. Здесь $O = \varphi(U)$ — открытое подмногообразие \mathbb{R}^n с картой (O, Id_O) . Координатное представление φ имеет вид

$$\tilde{\varphi}_{\varphi, \text{Id}_O} = \text{Id}_O \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}_O,$$

и является отображением класса C^∞ . Таким образом, $\varphi \in C^k(U; O)$. Поскольку отображение φ является гомеоморфизмом, то обратное отображение $\varphi^{-1} : O \rightarrow U$ существует и непрерывно. Его координатное представление также совпадает с Id_O и, следовательно, является гладким. В этой связи, $\varphi : U \rightarrow O$ является диффеоморфизмом между гладкими многообразиями, представленными U и O .

2.4. Иммерсии, субмерсии и вложения

Пусть M_1 и M_2 — C^k -многообразия размерностей $\dim M_1 = n_1$ и $\dim M_2 = n_2$. Среди элементов $C^k(M_1; M_2)$ имеются отображения со специальными свойствами, которые играют ключевую роль в определении конфигураций и деформаций. В этой связи, рассмотрим их более детально.

Определим вспомогательное понятие ранга отображения. Пусть $\varkappa \in C^k(M_1; M_2)$, $p \in M$. Выберем гладкие карты (U, φ) на M_1 и (V, ψ) на M_2 такие, что $p \in U$, $\varkappa(p) \in V$ и определим координатное отображение

$$\tilde{\varkappa}_{\varphi, \psi} : (x^1, \dots, x^{n_1}) \mapsto (y^1, \dots, y^{n_2}).$$

В точке $\varphi(p)$ можно построить матрицу Якоби, то есть матрицу с элементами

$$\left. \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right|_{\varphi(p)}, \quad i = 1, \dots, n_2, \quad j = 1, \dots, n_1.$$

Далее, можно вычислить число линейно независимых строк (или столбцов) этой матрицы. Это число называется **рангом \varkappa в p** и обозначается через $\text{rank}|_p \varkappa$.

Мы приходим к следующей классификации гладких отображений в зависимости от ранга [1, 2].

Определение 10.7. *Отображение $\mathcal{X} \in C^k(M_1; M_2)$ называется*

- *C^k -субмерсией, если $\text{rank}|_p \mathcal{X} = n_2$ во всех точках $p \in M_1$;*
- *C^k -иммерсией (погружением), если $\text{rank}|_p \mathcal{X} = n_1$ во всех точках $p \in M_1$;*
- *C^k -вложением, если \mathcal{X} является C^k -иммерсией и гомеоморфизмом на свой образ.*

Для иллюстрации рассмотрим двумерные многообразия: ленту Мебиуса и поверхность Клейна. Возможность вложения или погружения этих многообразий в трехмерное евклидово пространство \mathcal{E} зависит от его размерности и топологической структуры. Действительно, для ленты Мебиуса (рис. 10.1) можно определить отображение, образ которого — точечное подмножество \mathcal{E} :

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = \left(3 + r \cos \frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi \mathbf{i} + \left(3 + r \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi \mathbf{j} + r \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{k},$$

$(r, \varphi) \in]-1, 1[\times [0, 2\pi[$. Здесь $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты декартовой системы координат, а \mathbf{x} — вектор места точки поверхности. Это множество не имеет самопересечений и, следовательно, отображение \mathbf{x} (определяет вложение). В то же время, проекция этого множества на любую плоскость, например, $ХОУ$, не является вложением в двумерное евклидово пространство. Вместе с тем, имеется возможность вложения в двумерное пространство, топологически эквивалентное поверхности Клейна (рис. 10.2).

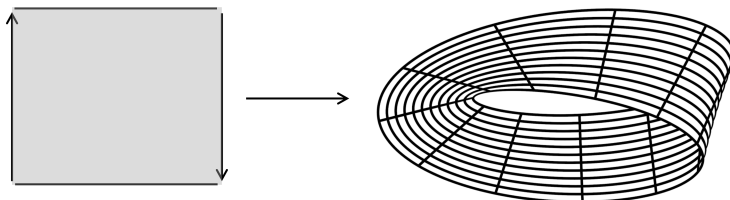


Рис. 10.1. Лента Мебиуса

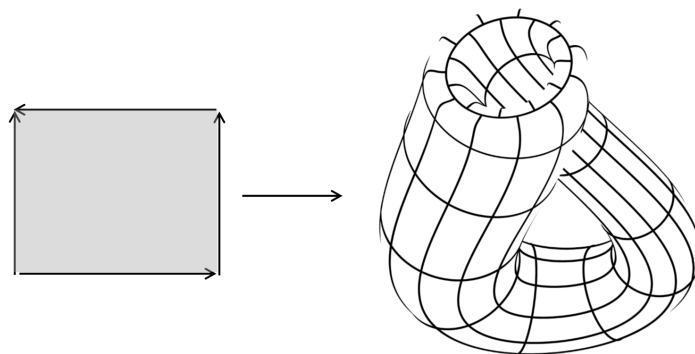


Рис. 10.2. Поверхность Клейна

Поверхность («бутылка») Клейна (рис. 10.2) может быть представлена в \mathcal{E} отображением

$$\mathbf{x}(t, \theta) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r(t) (\cos \theta G(\boldsymbol{\tau}(t)) + \sin \theta \mathbf{k}), \quad (t, \theta) \in]0, 2\pi[\times [0, 2\pi[,$$

где $\boldsymbol{\alpha}(t) = a(1 - \cos t)\mathbf{i} + b \sin t(1 - \cos t)\mathbf{j}$, $r(t) = c - d(t - \pi)\sqrt{t(2\pi - t)}$, $G(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\tau}(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^{-1}\boldsymbol{\alpha}'(t)$. Это отображение является гладким и, следовательно, оно является погружением. Вместе с тем, его образ в \mathcal{E} имеет самопересечения. Различные варианты параметризации поверхности Клейна представлены в работе [8]. Показанная на рис. 10.2 поверхность построена при значениях параметров $(a, b, c, d) = (20, 8, \frac{11}{2}, \frac{2}{5})$.

2.5. Теоремы Уитни о вложениях

Справедливы две теоремы о вложении в евклидово пространство.

Теорема 10.1. (Слабая теорема Уитни) Для любого компактного n -мерного C^k -многообразия M , где $k \geq 2$, существует C^k -вложение M в \mathbb{R}^{2n+1} .

Доказательство см. в [4, 6]. По поводу усиления теоремы см. замечание в [6, стр. 40].

Теорема 10.2. (Сильная теорема Уитни) Любое гладкое n -мерное ($n > 1$) многообразие можно погрузить в \mathbb{R}^{2n-1} и можно вложить в \mathbb{R}^{2n} . При этом, значения $2n - 1$ и $2n$ неулучшаемы.

2.6. Разбиение единицы

Предположим, что имеется семейство отображений, заданных на открытых подмножествах многообразия, в совокупности покрывающих его. Для склейки этого семейства в единое отображение (при определенных условиях на семейство) используется инструмент, называемый разбиением единицы [7]. В частности, с использованием разбиения единицы строится риманова метрика на многообразии, а также определяется интегрирование дифференциальных форм на нем.

Пусть M — гладкое многообразие (с краем или без). **Носителем $\text{supp } f$ отображения $f : M \rightarrow \mathbb{R}$** называется замыкание множества $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$:

$$\text{supp } f = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}.$$

Определение 10.8. *Разбиение единицы на гладком многообразии M — это семейство $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, удовлетворяющая условиям:*

- (i) Семейство $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ является локально конечным открытым покрытием¹ M .
- (ii) Для каждого $\alpha \in I$: $f_\alpha \in C^k(M)$ и $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$.
- (iii) Для всех $\alpha \in I$ и для всех $x \in M$: $f_\alpha(x) \geq 0$.
- (iv) Для всех $x \in M$: $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = 1$.

Согласно (i), в (iv) отлично от нуля лишь конечное число слагаемых. Если $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ — гладкий атлас M , содержащийся в максимальном атласе гладкой структуры, то **разбиение единицы, подчиненное \mathcal{A}** , есть такое разбиение единицы $\{(U_\beta, f_\beta)\}_{\beta \in J}$, что для любого $\beta \in J$ существует $\alpha \in I$, для которого $U_\beta \subset V_\alpha$.

2.7. Замечание о гладких структурах

Хотя C^0 -структура на любом пространстве M единственна, при $k \geq 1$ пространство M может допускать несколько различных C^k -структур. Если $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ — различные C^k -структуры на M , то $(M, \mathcal{T}, \mathcal{D}_1)$,

¹То есть, любая точка M имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом множеств U_α .

$(M, \mathcal{T}, \mathcal{D}_2)$ — два разных C^k -многообразия. В этой связи, сделаем замечание о существовании C^k -структур. Справедливо [6, стр. 71], что если на пространстве M существует C^k -структура ($k \geq 1$), то на нем существует и C^∞ -структура, диффеоморфная данной.

Теорема 10.3. (а) Пусть $1 \leq k \leq \infty$. Всякое C^k -многообразие C^k -диффеоморфно C^∞ -многообразию.

(б) Пусть $1 \leq k < s < \infty$. Если два C^s -многообразия C^k -диффеоморфны, то они C^s -диффеоморфны.

Исключением является случай $k = 0$, в котором играет роль размерность многообразия. На любом C^0 -многообразии размерности $n < 4$ можно ввести C^1 -структуру, а, следовательно, и C^∞ -структуру. Но для любого $n \geq 4$ существуют многообразия, не допускающие введения C^1 -структуры [1].

Рассмотрим вопрос о количестве возможных C^∞ -структур на топологическом n -многообразии M . Пусть $\#$ обозначает это количество с точностью до диффеоморфизма. Оно зависит от размерности многообразия, как показано в Таблице 10.1.

n	$\#$
1, 2, 3	1
4	в общем случае, несчетно
5, 6, 7	конечно

Таблица 10.1: Размерность vs число гладких структур

В дальнейшем мы будем рассматривать многообразия класса C^∞ . Структуру C^∞ будем называть **гладкой структурой**, а отображения класса C^∞ — **гладкими отображениями**.

3. Вложенные подмногообразия

Вложение гладкого многообразия в другое гладкое многообразие определяет подмножество области прибытия — образ исходного многообразия, — которое также может быть снабжено структурой гладкого многообразия. Если эта структура согласована с гладкой структурой

объемлющего многообразия, то образ вложения становится подмногообразием области прибытия. Такой способ определения подмногообразий интенсивно используется в механике континуума. Например, форма тела есть, с одной стороны, образ тела, а с другой стороны, — подмногообразие физического пространства. Другим примером является часть тела — гладкое многообразие с краем, гладкая структура которого согласована со структурой всего тела.

3.1. Определение подмногообразия

Пусть M — гладкое многообразие (с краем или без).

Определение 10.9. *Гладкое многообразие $N \subset M$ (с краем или без) называется **вложенным подмногообразием** M , если*

- (i) *топология на N индуцирована из M ;*
- (ii) *гладкая структура на N такова, что каноническая инъекция $\iota_N : N \rightarrow M$ (1.3.2) является гладким вложением.*

Открытое подмногообразие является примером вложенного подмногообразия. Обратное, если M — гладкое многообразие, а $N \subset M$ — вложенное подмногообразие M , размерность которого равна $\dim N = \dim M$, то N — открытое подмножество M [2].

3.2. Образ как подмногообразие

Рассмотрим два гладких многообразия M, N с размерностями $\dim M \leq \dim N$. Пусть $\varkappa : M \rightarrow N$ — гладкое вложение. Множество $\varkappa(M)$ может быть снабжено топологией и гладкой структурой следующим образом [2].

Топология $\mathcal{T}_{\varkappa(M)}$ на $\varkappa(M)$ индуцирована из N . Далее, пусть $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ — атлас из гладкой структуры M . Тогда семейство $\{\varkappa(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ является открытым покрытием $\varkappa(M)$ (в индуцированной топологии $\varkappa(M)$). Поскольку \varkappa — гладкое вложение, то отображение

$$\hat{\varkappa} : M \rightarrow \varkappa(M), \quad \hat{\varkappa}(p) := \varkappa(p),$$

является гомеоморфизмом. Для $\alpha \in I$, по определению карты, отображение $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow O_\alpha$ является гомеоморфизмом и, в этой связи, композиция

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \widehat{\varkappa}^{-1} : \varkappa(U_\alpha) \rightarrow O_\alpha,$$

также является гомеоморфизмом.

Пусть $\alpha, \beta \in I$ — различные индексы, для которых $\varkappa(U_\alpha) \cap \varkappa(U_\beta) \neq \emptyset$. Тогда $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, и гомеоморфизм пересчета

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

есть C^∞ -диффеоморфизм. Следовательно, гомеоморфизм пересчета

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ \widehat{\varkappa}^{-1} \circ \widehat{\varkappa} \circ \varphi_\alpha^{-1},$$

также является C^∞ -диффеоморфизмом. Этим доказывается, что совокупность $\mathcal{A}_{\varkappa(M)} = \{(\varkappa(U_\alpha), \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ является гладким атласом на $\varkappa(M)$. В этой связи, $(\varkappa(M), \mathcal{T}_{\varkappa(M)}, [\mathcal{A}_{\varkappa(M)}])$ — гладкое многообразие размерности $\dim \varkappa(M) = \dim M$.

Для того, чтобы показать, что $(\varkappa(M), \mathcal{T}_{\varkappa(M)}, [\mathcal{A}_{\varkappa(M)}])$ — вложенное подмногообразие N , рассмотрим отображение $\widehat{\varkappa} : M \rightarrow \varkappa(M)$. В подходящих картах $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и $(\varkappa(U_\alpha), \psi_\alpha)$ имеем следующее выражение для координатного представления:

$$\widetilde{\widehat{\varkappa}} = \psi_\alpha \circ \widehat{\varkappa} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \text{Id}_{O_\alpha}.$$

Аналогично, для $\widehat{\varkappa}^{-1}$,

$$\widetilde{\widehat{\varkappa}^{-1}} = \varphi_\alpha \circ \widehat{\varkappa}^{-1} \circ \psi_\alpha^{-1} = \text{Id}_{O_\alpha}.$$

Следовательно, $\widehat{\varkappa}$ является C^∞ -диффеоморфизмом. Теперь заметим, что каноническая инъекция $\iota_{\varkappa(M)} : \varkappa(M) \rightarrow N$ является композицией

$$\iota_{\varkappa(M)} = \varkappa \circ \widehat{\varkappa}^{-1},$$

диффеоморфизма и гладкого вложения. В этой связи, $\iota_{\varkappa(M)}$ есть C^∞ -вложение. Тем самым мы показали, что тройка $(\varkappa(M), \mathcal{T}_{\varkappa(M)}, [\mathcal{A}_{\varkappa(M)}])$ является вложенным подмногообразием N .

3.3. Ограничение отображений на подмногообразия

Пусть $\varkappa : M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий M , N . Если $U \subset M$ — вложенное подмногообразие, то сужение \varkappa на U , то есть отображение $\varkappa|_U = \varkappa \circ \iota_U : U \rightarrow N$, является композицией гладких отображений. В этой связи, отображение $\varkappa|_U$ является гладким.

3.4. Координаты на подмногообразии

Пусть M — подмногообразие N . Поскольку M само является многообразием, то его атлас определяет арифметизацию точек M . Вместе с тем, N может играть роль физического пространства, а M — формы тела. Тогда наблюдатель, находящийся в физическом пространстве, будет вводить координатное описание точек M , используя для этой цели доступный ему атлас на N . При этом, удобно подобрать такую систему координат в N , чтобы число независимых значений координат на форме тела соответствовало его размерности. Например, в трехмерном случае сфера является координатной поверхностью сферических координат, цилиндр — цилиндрических, и так далее. Им соответствуют два независимых параметра, а не три, как для всего пространства.

Определение 10.10. Пусть M является гладким n -мерным многообразием, а (U, φ) — гладкой картой на M . Подмножество $S \subset U$ называется k -ломтем U , $k \in \{0, \dots, n\}$, если $\varphi(S) \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\varphi(S) = \{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

Здесь (x^i) — локальные координаты, порожденные координатным отображением φ .

Заметим, что по определению, последние $n - k$ координат каждой точки S равны нулю. Примем следующее определение [2].

Определение 10.11. S удовлетворяет условию локальной k -нарезки, если для каждой точки $p \in S$ существует гладкая карта (U, φ) на M , такая, что $p \in U$ и $U \cap S$ является k -ломтем U .

Справедлива теорема [2].

Теорема 10.4. Если $S \subset M$ является вложенным k -мерным подмногообразием M , то S удовлетворяет условию локальной k -нарезки.

В этой связи, существует семейство $\{(U_p, \varphi_p)\}_{p \in S}$ карт на M , покрывающих S и таких, что для любого $p \in S$ координатная область (U_p, φ_p) содержит p и $S \cap U_p$ является k -ломтем U_p . Семейство $\mathcal{A}_S = \{(S \cap U_p, \pi \circ \varphi|_{S \cap U_p})\}_{p \in S}$ является гладким атласом S . Здесь $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ — проекция на первые k координат, то есть,

$$\pi : (x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^k).$$

Рассуждения иллюстрируются следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} S \cap U_p & \xrightarrow{\iota_{U_p \cap S}} & U_p \\ \downarrow (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) & & \downarrow (x^1, \dots, x^n) \\ \mathbb{R}^k & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

4. «Башня» тензорных пространств

Для того, чтобы определить такие понятия, как градиент деформации и скорость, необходимо формализовать понятия касательного вектора к телу и касательного вектора к физическому пространству. Конечно, согласно теореме Уитни, как для тела \mathfrak{B} , так и для физического пространства \mathcal{P} , существует вложение в некоторое объемлющее евклидово пространство; рассматривая каждое из \mathfrak{B} и \mathcal{P} как гиперповерхности соответствующих евклидовых пространств, можно определить касательные векторы к ним, опираясь на «наглядные представления», присущие обычной, «школьной», геометрии. Однако при этом теоретические построения (в виду большой размерности объемлющего пространства) становятся громоздкими. Вместе с тем, описание геометрических объектов методами внутренней геометрии всегда определяло изящество геометрической теории. В этой связи, представляется более удобным определение касательных векторов, как объектов внутренней геометрии \mathfrak{B} и \mathcal{P} .

4.1. Касательное пространство к гладкому многообразию

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, а $p \in M$ — некоторая точка. Интуитивно, касательный вектор к M в точке p представляет «инфинитезимальный», или, другими словами, «локальный» объект. Такой объект можно определить в рамках внутренней геометрии, то есть в терминах «обитателей» гладкого многообразия, к которым относятся *гладкие кривые* и *гладкие функции*, определенные на нем.

Касательный вектор как класс эквивалентных кривых

Определение 10.12. *Гладкая кривая на M — это отображение $\chi \in C^\infty(\mathbb{J}; M)$, где $\mathbb{J} \subset \mathbb{R}$ — числовой промежуток (отрезок или интервал). Кривая $\chi \in C^\infty(\mathbb{J}; M)$ **проходит через точку** $p \in M$, если существует число $c \in \mathbb{J}$, для которого $\chi(c) = p$.*

Рассмотрим множество $\mathbf{Cu}_p(M)$ всевозможных гладких кривых, которые удовлетворяют следующим условиям: $\chi \in \mathbf{Cu}_p(M)$ если и только если

(Cu₁) χ — гладкая кривая на M , определенная на открытом интервале, содержащем 0.

(Cu₂) $\chi(0) = p$. Более того, $\chi^{-1}(\{p\}) = \{0\}$.

Условие $\chi^{-1}(\{p\}) = \{0\}$ требует, чтобы $0 \in \mathbb{R}$ был единственным числом, которое отображается в p . Пусть (U, φ) — гладкая карта M , координатная область которой содержит p . Введем следующее отношение эквивалентности \sim_p на множестве $\mathbf{Cu}_p(M)$ [7]:

$$(\chi_1 \sim_p \chi_2) \Leftrightarrow \left(\left. \frac{d(\varphi \circ \chi_1)(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\varphi \circ \chi_2)(t)}{dt} \right|_{t=0} \right).$$

Заметим, что композиции $\varphi \circ \chi_i$, $i = 1, 2$, являются отображениями интервалов в \mathbb{R}^n и поэтому производная d/dt понимается в смысле классического анализа. Если (V, ψ) — другая гладкая карта, координатная область которой содержит p , то правило цепного дифференцирования гарантирует, что если $\chi_1 \sim_p \chi_2$ по отношению к карте (U, φ) , то $\chi_1 \sim_p \chi_2$ по отношению к карте (V, ψ) . В этой связи, отношение эквивалентности не зависит от карты.

Определение 10.13. Каждый класс эквивалентности $u = [\chi]_p$ называется **касательным вектором** к p , а фактормножество

$$T_p M := \mathfrak{C}u_p(M) / \sim_p$$

называется **касательным пространством** к M в точке p .

Векторная структура на касательном пространстве

Каждая гладкая карта (U, φ) многообразия M , содержащая p , определяет отображение

$$\mathfrak{c}_p^\varphi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathfrak{c}_p^\varphi : u = [\chi]_p \mapsto \left. \frac{d(\varphi \circ \chi)}{dt} \right|_{t=0} = (u^1, \dots, u^n). \quad (10.4.1)$$

Оно определено корректно, то есть его значение не зависит от представителя $\chi \in u$. Более того, отображение \mathfrak{c}_p^φ является биекцией. Это можно показать с помощью следующих рассуждений:

- (i) Предположим, что $u_1, u_2 \in T_p M$ и $u_1 \neq u_2$. Если $\mathfrak{c}_p^\varphi(u_1) = \mathfrak{c}_p^\varphi(u_2)$ то, выбирая представители $\chi_1 \in u_1$ и $\chi_2 \in u_2$, получим, что $\chi_1 \sim_p \chi_2$. Это приводит к противоречию с $u_1 \neq u_2$. Таким образом, отображение \mathfrak{c}_p^φ инъективно.
- (ii) Пусть теперь $(u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ является произвольным кортежем, а $(p^1, \dots, p^n) = \varphi(p)$. Выберем $a > 0$ такое, что образ $\tilde{\chi}(\cdot) - a, a[$ кривой

$$\tilde{\chi} \in C^\infty(\cdot - a, a[; \mathbb{R}^n), \quad \tilde{\chi}(t) := (p^1 + u^1 t, \dots, p^n + u^n t),$$

содержится в $\varphi(U)$. Полагая затем $\chi = \varphi^{-1} \circ \tilde{\chi}$, получаем кривую $\chi \in \mathfrak{C}u_p(M)$, для которой $\mathfrak{c}_p^\varphi([\chi]_p) = (u^1, \dots, u^n)$. Таким образом, \mathfrak{c}_p^φ сюръективно. Мы приходим к следующему заключению: отображение \mathfrak{c}_p^φ биективно.

По построению, отображение \mathfrak{c}_p^φ зависит от карты (U, φ) . Пусть (U, φ) и (V, ψ) — две карты из максимального атласа, содержащие p . Из цепного правила дифференцирования следует равенство

$$\mathfrak{c}_p^\psi = D_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \mathfrak{c}_p^\varphi, \quad (10.4.2)$$

в котором $D_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^s)$ — производное отображение, соответствующее гомеоморфизму пересчета $\psi \circ \varphi^{-1}$ в точке $\varphi(p)$.

Поскольку $\mathbf{c}_p^\varphi : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^s$ является биективным отображением со значениями в n -мерном вещественном векторном пространстве \mathbb{R}^n , то векторную структуру последнего можно индуцировать на T_pM посредством \mathbf{c}_p^φ . Действительно, в соответствии с формулой (2.9.2) определим отображения

$$\begin{aligned} + : T_pM \times T_pM &\rightarrow T_pM, & (u + v) &:= (\mathbf{c}_p^\varphi)^{-1}(\mathbf{c}_p^\varphi(u) + \mathbf{c}_p^\varphi(v)), \\ \cdot : \mathbb{R} \times T_pM &\rightarrow T_pM, & (\lambda \cdot u) &:= (\mathbf{c}_p^\varphi)^{-1}(\lambda \mathbf{c}_p^\varphi(u)), \end{aligned}$$

где $u, v \in T_pM$, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Хотя отображение \mathbf{c}_p^φ зависит от карты (U, φ) , прямые вычисления, с учетом равенства (10.4.2), показывают, что отображения $(+)$ и (\cdot) не зависят от карт. Таким образом, в силу Предложения 2.7, отображения $(+)$ и (\cdot) корректно определяют структуру вещественного векторного пространства на T_pM , а \mathbf{c}_p^φ является изоморфизмом по отношению к данной структуре. В частности, $\dim T_pM = n$.

Координатный базис

Естественный (стандартный) базис \mathbb{R}^n образован совокупностью кортежей вида $(\delta_i^1, \dots, \delta_i^n)$ из n элементов, где 1 стоит на i -й позиции, а 0 на остальных. Выберем некоторую гладкую карту (U, φ) , область действия которой содержит p . Поскольку \mathbf{c}_p^φ является изоморфизмом векторных пространств, то совокупность (e_i, \dots, e_n) касательных векторов

$$e_i = (\mathbf{c}_p^\varphi)^{-1}(\delta_i^1, \dots, \delta_i^n) \in T_pM, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.4.3)$$

образует базис T_pM . Каждый вектор e_i является классом эквивалентности кривой χ_i такой, что

$$\varphi \circ \chi_i(t) = (p^1 + \delta_i^1 t, \dots, p^n + \delta_i^n t), \quad (10.4.4)$$

где $(p^1, \dots, p^n) = \varphi(p)$.

Определение 10.14. Базис $(e_i)_{i=1}^n$ называется **координатным базисом**.

Координатный базис зависит от карты (U, φ) . Каждый касательный вектор $u \in T_pM$ имеет представление $u = u^i e_i$, где $(u^1, \dots, u^n) = \mathbf{c}_p^\varphi(u)$.

Пусть (U, φ) и (V, ψ) — две гладкие карты, координатные области которых содержат p , устанавливающие локальные координаты (x^i) , (\tilde{x}^i) . Если (u^i) и (\tilde{u}^i) — компоненты одного и того же вектора $u \in T_p M$ в этих картах, то равенство (10.4.2) влечет

$$\tilde{u}^i = \left. \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \right|_{\varphi(p)} u^j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.4.5)$$

Здесь $\psi \circ \varphi^{-1} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ — гомеоморфизм пересчета (9.6.1).

Касательный вектор как дифференцирование пространства ростков

Пусть $U \subset M$ — открытое множество, а $f \in C^\infty(U)$ — некоторая гладкая функция. Будем называть упорядоченную пару (f, U) **гладким функциональным элементом на M** [2]. Обозначим множество всех гладких функциональных элементов (f, U) на M , таких, что $U \ni p$, через $\text{Fel}_p(M)$.

Введем отношение эквивалентности \sim_p на $\text{Fel}_p(M)$: $(f, U) \sim_p (g, V)$, если существует открытое множество $W \subset U \cap V$, содержащее p , такое, что $f|_W = g|_W$. Класс эквивалентности $\mathbf{f} = [(f, U)]_p$ функционального элемента (f, U) называется **ростком f в точке p** [2], а фактормножество

$$C_p^\infty(M) := \text{Fel}_p(M) / \sim_p$$

представляет множество всех ростков гладких функций в точке p . Заметим, что если U, V являются окрестностями p , $V \subset U$, и $(f, U) \in \text{Fel}_p(M)$, то также $(f|_V, V) \in [(f, U)]_p$. В этой связи, если это не повлечет никакой путаницы, мы будем писать $[f]_p$ вместо $[(f, U)]_p$.

Множество $C_p^\infty(M)$ снабжается структурой вещественного векторного пространства следующим образом. Определим бинарные операции

$$\begin{aligned} + : C_p^\infty(M) \times C_p^\infty(M) &\rightarrow C_p^\infty(M), & \mathbf{f} + \mathbf{g} &:= [(f + g, U \cap V)]_p, \\ \cdot : \mathbb{R} \times C_p^\infty(M) &\rightarrow C_p^\infty(M), & \lambda \mathbf{f} &:= [(\lambda f + g, U)]_p, \end{aligned}$$

где $(f, U) \in \mathbf{f}$, $(g, V) \in \mathbf{g}$, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Легко проверить, что эти операции определены корректно и превращают $C_p^\infty(M)$ в вещественное векторное

пространство. Более того, операция

$$\cdot : C_p^\infty(M) \times C_p^\infty(M) \rightarrow C_p^\infty(M), \quad \mathbf{f} + \mathbf{g} := [(fg, U \cap V)]_p,$$

вводит на $C_p^\infty(M)$ структуру вещественной алгебры.

Поскольку для произвольных $(f, U), (g, V) \in \mathbf{f}$ справедливо равенство $f(p) = g(p)$, то обозначение $\mathbf{f}(p) := f(p)$ определено корректно.

Определение 10.15. *Дифференцирование алгебры $C_p^\infty(M)$ — это линейное отображение*

$$v : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяющее *правилу Лейбница:*

$$\forall f, g \in C_p^\infty(M) : v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

Обозначим множество всех дифференцирований через D_pM . Каждый элемент D_pM называется **касательным вектором в точке p** [2, 9, 10]. Таким образом, приходим к альтернативному определению касательного вектора.

Пусть $u, v \in D_pM$, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку u и v являются линейными отображениями, сумма $(u + v) : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ и умножение на скаляр $(\lambda u) : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ также являются линейными отображениями. Прямые вычисления показывают, что они удовлетворяют правилу Лейбница. В этой связи, множество D_pM обладает структурой вещественного векторного пространства.

Пусть $v \in D_pM$. Следующие элементарные свойства напрямую следуют из определения дифференцирования:

- Если \mathbf{f} — росток постоянной функции, то² $v(\mathbf{f}) = 0$.
- Если $\mathbf{f}(p) = \mathbf{g}(p) = 0$ то $v(\mathbf{fg}) = 0$.

²Если функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $f(U) = \{c\}$, то $[f]_p = c[e]_p$, где $e \in C^\infty(M)$ — единичная функция: $e(M) = \{1\}$. Поскольку $v([f]_p) = cv([e]_p)$, то достаточно показать, что $v([e]_p) = 0$. Используя равенство $[e]_p[e]_p = [e]_p$ и правило Лейбница, приходим к соотношению $v([e]_p) = v([e]_p[e]_p) = 2v([e]_p)$, которое влечет желаемое равенство.

Изоморфизм $T_pM \cong D_pM$

Классы эквивалентности кривых и дифференцирования алгебры ростков являются ничем иным, как формализациями идеи локальности. Несмотря на то, что эти формализации порождены разными построениями, они представляют единый объект с точностью до канонического изоморфизма. Приведем набросок построения изоморфизма между T_pM и D_pM .

Пусть $u \in T_pM$ — касательный вектор. Он порождает отображение $\mathcal{L}_u : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_u(\mathbf{f}) := \left. \frac{d(f \circ \chi)}{dt} \right|_{t=0}, \quad (10.4.6)$$

где $\chi \in u$, а $(f, U) \in \mathbf{f}$. Цепное правило дифференцирования и определения \mathbf{f} и u влекут, что значение \mathcal{L}_u не зависит от представителей классов u и \mathbf{f} . Из определения также следует, что (10.4.6) не зависит от карты. Таким образом, отображение \mathcal{L}_u определено корректно. Поскольку d/dt линейно и удовлетворяет правилу Лейбница, то $\mathcal{L}_u \in D_pM$.

Рассмотрим отображение

$$\mathcal{L} : T_pM \rightarrow D_pM, \quad \mathcal{L} : u \mapsto \mathcal{L}_u,$$

где \mathcal{L}_u определено равенством (10.4.6). Такое отображение является желанным изоморфизмом, поскольку:

- *Отображение \mathcal{L} линейно.* Это следует из линейности \mathfrak{C}_p^∞ .
- *Отображение \mathcal{L} инъективно.* Действительно, предположим, что $\mathcal{L}_{u_1} = \mathcal{L}_{u_2}$. Выберем гладкую карту (U, φ) , координатная область которой содержит p . Положим $\varphi^i := \pi_n^i \circ \varphi$ (10.2.1), где

$$\pi_n^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_n^i(x^1, \dots, x^n) = x^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда $\mathcal{L}_{u_1}([\varphi^i]_p) = \mathcal{L}_{u_2}([\varphi^i]_p)$, для всех $i = 1, \dots, n$. Выбирая представители $\chi_1 \in u_1, \chi_2 \in u_2$, получаем

$$\left. \frac{d(\pi_n^i \circ \varphi \circ \chi_1)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\pi_n^i \circ \varphi \circ \chi_2)}{dt} \right|_{t=0}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и это влечет $u_1 = u_2$.

- *Отображение \mathcal{L} сюръективно.* Предположим, что $v \in D_p M$. Найдем такой касательный вектор $u \in T_p M$, что $\mathcal{L}_u = v$. Выберем гладкую карту (U, φ) , содержащую p и обозначим $\varphi^i = \pi_n^i \circ \varphi$ и $(p^1, \dots, p^n) = \varphi(p)$.

Получим общее представление для дифференцирования ростка. Выберем росток $\mathbf{f} = [(f, \tilde{U})]_p \in C_p^\infty(M)$. Без потери общности можно полагать, что $\tilde{U} \subset U$. Используя формулу Тейлора, приходим к следующему разложению на $\varphi(\tilde{U})$:

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = f(p) + \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} (x^i - p^i) + f_{ij}(x^1, \dots, x^n)(x^i - p^i)(x^j - p^j), \quad (10.4.7)$$

где f_{ij} — гладкая функция (остаточный член) на $\varphi(\tilde{U})$. Отождествляя $f(p)$ и p^i с соответствующими постоянными функциями на \tilde{U} , можно выразить (10.4.7) на \tilde{U} в виде:

$$f = f(p) + \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} (\varphi^i - p^i) + \tilde{f}_{ij}(\varphi^i - p^i)(\varphi^j - p^j), \quad (10.4.8)$$

где $\tilde{f}_{ij} = f_{ij} \circ \varphi$. Используя алгебраические свойства ростков, свойства v , соотношение (10.4.8), приходим к равенству

$$v([f]_p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} v([\varphi^i]_p). \quad (10.4.9)$$

Формула (10.4.9) получена для произвольного ростка $[f]_p$.

Определим гладкую кривую $\chi : t \mapsto \chi(t)$ равенством

$$\chi(t) = \varphi^{-1}(p^1 + tv([\varphi^1]_p), \dots, p^n + tv([\varphi^n]_p)).$$

Здесь (U, φ) и p^i такие же, что и выше. Определенная таким образом кривая принадлежит $\mathbf{Cu}_p(M)$. Положим $u := [\chi]_p \in T_p M$. Выберем росток $[f]_p \in C_p^\infty(M)$. Прямые вычисления показывают,

что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u([f]_p) &= \left. \frac{d(f \circ \chi)}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= D_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) \left. \frac{d(\varphi \circ \chi)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} v([\varphi^i]_p).\end{aligned}$$

Приходим к равенству $v(\mathbf{f}) = \mathcal{L}_u(\mathbf{f})$, справедливому для каждого ростка $\mathbf{f} \in C_p^\infty(M)$. Таким образом, u является желаемым вектором, для которого $\mathcal{L}_u = v$.

Проведенные рассуждения показывают, что \mathcal{L} — канонический изоморфизм и мы можем утверждать, что $T_pM \cong D_pM$.

Пусть (U, φ) — гладкая карта, координатная область которой содержит p , а (e_1, \dots, e_n) — соответствующий координатный базис (10.4.3) пространства T_pM , порожденный кривыми (10.4.4). Поскольку \mathcal{L} — изоморфизм, то $(\mathcal{L}_{e_1}, \dots, \mathcal{L}_{e_n})$ — базис D_pM . Таким образом, если $u = u^i e_i$, то $\mathcal{L}_u = u^i \mathcal{L}_{e_i}$. Пусть $[f]_p \in C_p^\infty(M)$, тогда

$$\mathcal{L}_{e_i}([f]_p) = \left. \frac{d(f \circ \chi)}{dt} \right|_{t=0} = D_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(\delta_i^1, \dots, \delta_i^n) = \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)}.$$

Дифференцирование \mathcal{L}_{e_i} действует подобно частной производной. Этим мотивируется следующее обозначение:

$$\partial_i|_p := \mathcal{L}_{e_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.4.10)$$

Тогда для касательного вектора $u \in T_pM$ имеем $\mathcal{L}_u = u^i \partial_i|_p$. Далее мы отождествляем $u \in T_pM$ с его образом $\mathcal{L}_u \in D_pM$ в силу изоморфизма \mathcal{L} . Таким образом, $(e_i)_{i=1}^n$ отождествляется с $(\partial_i|_p)_{i=1}^n$ и мы получаем разложение

$$u = u^i \partial_i|_p$$

для касательного вектора $u \in T_pM$.

Установим закон преобразования координатного базиса при замене карты. Пусть (U, φ) и (V, ψ) — две гладкие карты, содержащие p и устанавливающие локальные координаты (x^i) , (\tilde{x}^i) . Соотношение (10.4.5) влечет, что

$$\partial_{x^i}|_p = \left. \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \partial_{\tilde{x}^j}|_p, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.4.11)$$

где $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ — гомеоморфизм пересчета $\psi \circ \varphi^{-1}$. Символы x и \tilde{x} в $\partial_{x^i}|_p$ и $\partial_{\tilde{x}^i}|_p$ указывают на то, что мы имеем дело с разными координатными базами.

Касательный вектор как дифференцирование алгебры $C^\infty(M)$.

Приведем третье определение касательного вектора [2, 7].

Определение 10.16. *Дифференцирование в точке p — это линейное отображение $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее правилу Лейбница:*

$$\forall f, g \in C^\infty(M) : v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

Множество всех дифференцирований в точке p может быть снабжено структурой векторного пространства посредством операций сложения линейных отображений и умножения их на скаляр. Обозначим это пространство через $S_p M$. Для любого дифференцирования $v \in S_p M$ справедливы следующие свойства:

- Если $f \in C^\infty(M)$ — постоянная функция, то $v(f) = 0$.
- Если $f(p) = g(p) = 0$, то $v(fg) = 0$.

Пусть $f, g \in C^\infty(M)$ таковы, что $f|_W = g|_W$ для некоторой окрестности $W \subset M$ точки p . Тогда для любого $v \in C_p^\infty(M)$ имеем $v(f) = v(g)$ в силу определения ростка в p . Аналогичное свойство локальности выполняется для любого $v \in S_p M$: $v(f) = v(g)$, но, в отличие от случая ростков, его нужно доказать. Доказательство основано на построении функции $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $h(p) = 1$ и $h|_{M \setminus W} = 0$ [7].

Любой вектор $u \in T_p M$ определяет дифференцирование $\mathcal{L}_u : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ похожим образом, как для ростков (см. (10.4.6)):

$$\mathcal{L}_u(f) := \left. \frac{d(f \circ \chi)}{dt} \right|_{t=0},$$

где $\chi \in u$. Канонический изоморфизм $\mathcal{L} : T_p M \rightarrow S_p M$ устанавливается рассуждениями, аналогичными тем, что использовались при построении канонического изоморфизма $\mathcal{L} : T_p M \rightarrow D_p M$.

Класс эквивалентности кривой, или, что тоже самое, дифференцирование алгебры ростков, или, наконец, дифференцирование алгебры

гладких функций, представляет «инфинитезимальный» объект в точке p . Множество всех таких объектов — касательное пространство T_pM — является формализацией идеи «инфинитезимальной» окрестности точки p .

4.2. Касательное отображение в точке

Пусть M и N являются гладкими многообразиями размерностей n и k соответственно, $p \in M$ — некоторая точка, а $\varkappa : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Это отображение, по определению, переводит точку из M в точку из N . Идея касательного отображения заключается в определении линейного преобразования T_pM в $T_{\varkappa(p)}N$, которое согласовано с \varkappa и является аналогом производного отображения. Приведем два эквивалентных определения [2, 11].

Определение 10.17. *Касательное отображение к \varkappa в точке p — это отображение*

$$\begin{aligned} T_p\varkappa : T_pM &\rightarrow T_{\varkappa(p)}N, \\ \forall u \in T_pM : T_p\varkappa(u) &:= [\varkappa \circ \chi]_{\varkappa(p)}, \end{aligned}$$

где $\chi \in u$.

Правило цепного дифференцирования позволяет установить, что это определение не зависит от представителя u . Таким образом, $T_p\varkappa$ преобразует класс эквивалентности кривой в класс эквивалентности образа этой кривой.

Определение 10.18. *Касательное отображение к \varkappa в точке p — это отображение*

$$\begin{aligned} T_p\varkappa : D_pM &\rightarrow D_{\varkappa(p)}N, \\ \forall v \in T_pM : T_p\varkappa(v)(f) &:= v([f \circ \varkappa]_p), \end{aligned}$$

где $f \in C_{\varkappa(p)}^\infty(N)$.

Касательное отображение удовлетворяет следующим свойствам [2], подобным свойствам полной производной $f'(x)$ гладкого отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ в точке x .

Предложение 10.1. Пусть M, N, P — гладкие многообразия, $\varkappa \in C^\infty(M; N)$, $\gamma \in C^\infty(N; P)$ — гладкие отображения, а $p \in M$. Тогда

- (i) Отображение $T_p\varkappa : T_pM \rightarrow T_{\varkappa(p)}N$ линейно.
- (ii) Касательное отображение к композиции отображений есть композиция касательных отображений:

$$T_p(\gamma \circ \varkappa) = T_{\varkappa(p)}\gamma \circ T_p\varkappa : T_pM \rightarrow T_{\gamma \circ \varkappa(p)}P.$$

- (iii) $T_p\text{Id}_M = \text{Id}_{T_pM}$.

- (iv) Если \varkappa — диффеоморфизм, то $T_p\varkappa : T_pM \rightarrow T_{\varkappa(p)}N$ — изоморфизм векторных пространств и $(T_p\varkappa)^{-1} = T_{\varkappa(p)}\varkappa^{-1}$.

Доказательство. Свойство (i) следует из цепного правила дифференцирования, примененному к полной производной, и из определения \mathfrak{C}_p^φ . Свойства (ii) и (iii) вытекают из определения касательного отображения. Наконец, свойство (iv) следует из (ii) и (iii). \square

4.3. Замечания о касательных пространствах

Касательное пространство к открытому подмногообразию

Пусть M — гладкое многообразие, а $U \subset M$ — открытое множество. Если $p \in U$ — некоторая точка, то можно рассмотреть два касательных пространства: T_pM и T_pU , где U рассматривается как открытое подмногообразие M . Справедлив следующий результат [2].

Предложение 10.2. Касательное отображение $T_p\iota_U : T_pU \rightarrow T_pM$ к канонической инъекции $\iota_U : U \rightarrow M$ (1.3.2) является каноническим изоморфизмом векторных пространств.

В этой связи, любой вектор $u \in T_pU$ может быть отождествлен с его образом $T_p\iota_U(u)$ в T_pM . Такое отождествление используется в настоящей книге.

Касательное пространство к произведению многообразий

Пусть M_1 и M_2 являются гладкими многообразиями. Тогда их прямое произведение, $M_1 \times M_2$, также является гладким многообразием. Пусть $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ — некоторая точка, а $T_{(p_1, p_2)}M_1 \times M_2$ — касательное пространство в (p_1, p_2) . Определим проекции

$$\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i, \quad \pi_i(q_1, q_2) := q_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда справедливо следующее утверждение [2].

Предложение 10.3. *Отображение*

$$\begin{aligned} \alpha : T_{(p_1, p_2)}M_1 \times M_2 &\rightarrow T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2, \\ \forall u \in T_{(p_1, p_2)}M_1 \times M_2 : \quad \alpha(u) &:= (T_{(p_1, p_2)}\pi_1(u), T_{(p_1, p_2)}\pi_2(u)), \end{aligned}$$

является каноническим изоморфизмом.

Таким образом, касательные векторы к произведению многообразий можно рассматривать как упорядоченные пары касательных векторов к каждому сомножителю.

Вектор скорости кривой

Каждый касательный вектор представляет класс эквивалентных гладких кривых. В этой связи, он может быть интерпретирован как вектор скорости кривой. Пусть M — гладкое многообразие, а $\chi : \mathbb{J} \rightarrow M$ — гладкая кривая, определенная на интервале $\mathbb{J} \subset \mathbb{R}$. Выберем некоторую точку $t_0 \in \mathbb{J}$. Пространство \mathbb{J} является гладким одномерным многообразием и поэтому координатный базис $T_{t_0}\mathbb{J}$ состоит из одного вектора $\partial_t|_{t_0}$.

Определение 10.19. *Вектор скорости кривой χ в точке t_0 — это вектор $\chi'(t_0) \in T_{\chi(t_0)}M$,*

$$\chi'(t_0) := T_{t_0}\chi(\partial_t|_{t_0}). \quad (10.4.12)$$

Выберем некоторую гладкую карту (U, φ) на M , координатная область которой содержит $\chi(t_0)$. Ей соответствует координатный базис

$(\partial_i|_{\chi(t_0)})_{i=1}^n$, где $n = \dim M$. Тогда координатное представление $\chi'(t_0)$ имеет вид:

$$\chi'(t_0) = \left. \frac{d\chi^i(t)}{dt} \right|_{t_0} \partial_i|_{\chi(t_0)}.$$

Здесь χ^i , $i = 1, \dots, n$, — координатное представление χ .

Касательное пространство к многообразию с краем

Касательное пространство было определено для многообразий без края. Вместе с тем, с незначительными изменениями, можно воспроизвести соответствующие построения для многообразий с краем. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие с краем; $p \in M$. Пространство $C_p^\infty(M)$ ростков в точке p определяется также как и для многообразий без края. При этом не имеет значения, является ли p внутренней точкой, или это точка края. Касательное пространство $T_p M$ определяется как векторное пространство всех дифференцирований на $C_p^\infty(M)$. Во всех точках оно имеет размерность n [10]. Можно также рассмотреть дифференцирование алгебры $C^\infty(M)$ [2]. В отличие от модели касательного вектора в виде дифференцирования, модель касательного вектора в виде класса эквивалентных кривых требует небольшого уточнения. В случае точки края, кривые должны быть определены не только на интервалах, но также и на множествах вида $[0, \varepsilon[$ или $] - \varepsilon, 0]$ [2].

Как и в случае многообразий без края, для каждой точки $p \in M$ координатный базис обозначается символом $(\partial_i|_p)_{i=1}^n$.

Заметим, что если $p \in \partial M$ то, поскольку край ∂M является гладким $(n - 1)$ -мерным многообразием (подмногообразием M), можно рассматривать два касательных пространства: векторное пространство $T_p M$ размерности n или векторное пространство $T_p \partial M$ размерности $n - 1$.

Определение касательного отображения повторяется без изменений. Мы принимаем соглашение об отождествлении $T_p \partial M$ с его образом под действием инъективного отображения $T_p \iota_{\partial M} : T_p \partial M \rightarrow T_p M$, являющегося касательным к канонической инъекции $\iota_{\partial M} : \partial M \rightarrow M$.

Касательные векторы внутрь/наружу

Пусть M — гладкое многообразие с краем, а $p \in \partial M$ — некоторая точка. Векторы $T_p M$ могут быть разделены на три класса:

- векторы, касательные к $T_p\partial M$,
- векторы, направленные внутрь,
- векторы, направленные наружу.

Последние два класса определяются следующим образом [2].

Определение 10.20. Вектор $u \in T_pM \setminus T_p\partial M$ называется **направленным внутрь**, если существует гладкая кривая $\chi : [0, \varepsilon[\rightarrow M$, $\varepsilon > 0$, такая, что $\chi(0) = p$ и $\chi'(0) = u$. Вектор $u \in T_pM \setminus T_p\partial M$ называется **направленным наружу**, если существует гладкая кривая $\chi :]-\varepsilon, 0] \rightarrow M$, $\varepsilon > 0$, такая, что $\chi(0) = p$ и $\chi'(0) = u$.

4.4. Кокасательное пространство к гладкому многообразию

Определение

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие (с краем или без), а $p \in M$ — некоторая точка. Поскольку T_pM — векторное пространство, то можно рассмотреть векторное пространство $(T_pM)^*$ линейных функционалов (ковекторов) $\nu : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ (дуальное векторное пространство).

Определение 10.21. Пространство $T_p^*M := (T_pM)^*$ называется **кокасательным пространством к M в точке p** .

Определим билинейное отображение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p^*M \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \nu, u \rangle_p := \nu(u).$$

Из канонического изоморфизма между касательным пространством T_pM и его вторым сопряженным $(T_pM)^{**}$ следует, что операция $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ симметрична:

$$\forall \nu \in T_p^*M \forall u \in T_pM : \langle \nu, u \rangle_p = \langle u, \nu \rangle_p.$$

Координатный дуальный базис

Выберем гладкую карту (U, φ) , координатная область которой содержит p . Этой карте соответствует координатный базис $(\partial_i|_p)_{i=1}^n$, а отображение \mathbf{c}_p^φ (10.4.1) порождает n линейных функционалов

$$dx^i|_p = \pi_n^i \circ \mathbf{c}_p^\varphi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.4.13)$$

удовлетворяющих следующим условиям: если $u = u^i \partial_i|_p \in T_p M$, то $dx^i|_p(u) = u^i$. В этой связи,

$$\langle dx^i|_p, \partial_j|_p \rangle_p = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

и $(dx^i|_p)_{i=1}^n$ является дуальным базисом.

Определение 10.22. *Базис $(dx^i|_p)_{i=1}^n$ называется координатным дуальным базисом.*

Каждый ковектор $\nu \in T_p^* M$ может быть единственным образом разложен в виде $\nu = \nu_i dx^i|_p$. Предположим, что (U, φ) и (V, ψ) — две гладкие карты, координатные области которых содержат p . Карты порождают локальные координаты (x^i) и (\tilde{x}^i) . Тогда произвольный ковектор $\nu \in T_p^* M$ может быть разложен двумя способами: $\nu = \nu_i dx^i|_p = \tilde{\nu}_i d\tilde{x}^i|_p$. Формула (10.4.11) влечет, что

$$\nu_i = \left. \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \tilde{\nu}_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.4.14)$$

Дифференциал

Примером ковектора является дифференциал гладкой функции. Предположим, что $f \in C^\infty(M)$. Тогда [2]

Определение 10.23. *Дифференциал f в точке p — это отображение $df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, действующее следующим образом:*

$$\forall u \in T_p M : df_p(u) := u([f]_p). \quad (10.4.15)$$

Здесь $[f]_p$ — росток f в точке p . Отображение df_p является линейным и, следовательно, элементом T_p^*M . Используя дуальный базис (10.4.13), получаем представление

$$df_p = \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} dx^i|_p.$$

Пусть (U, φ) — гладкая карта, координатная область которой содержит p . Для $i = 1, \dots, n$ рассмотрим дифференциал $d\varphi_p^i$ отображения φ^i (10.2.1). Поскольку $\varphi^i \circ \varphi^{-1} = \pi_n^i$, то

$$d\varphi_p^i = \left. \frac{\partial \pi_n^i}{\partial x^j} \right|_{\varphi(p)} dx^j|_p = \delta_j^i dx^j|_p.$$

Следовательно, $d\varphi_p^i = dx^i|_p$. Полученная формула означает, что ковектор $dx^i|_p$ может быть рассмотрен как результат применения операции d к отображению φ^i . Последнее, для точки $x \in U$, возвращает ее i -ю координату x^i . Это наблюдение является мотивацией к использованию обозначения $dx^i|_p$ для ковекторов, составляющих координатный дуальный базис.

4.5. «Башня»

Пусть M является n -мерным гладким многообразием (с краем или без). Касательное и кокасательное пространства T_pM и T_p^*M ассоциированы с каждой точкой $p \in M$. Они представляют «нижний» уровень «башни» и их недостаточно для построения математических моделей континуальной физики. Остальные уровни строятся из нижнего посредством специальной строительной техники — абстрактного тензорного произведения векторных пространств [12, 13]. Такой формализм не нуждается в евклидовой структуре и дает эффективный способ построения тензоров в неевклидовых пространствах.

Фиксируем точку $p \in M$. Из копий пространств T_pM и T_p^*M , с использованием абстрактного тензорного произведения, порождаются всевозможные конечные тензорные произведения. Среди них ($k \in \mathbb{N}$):

- Пространство контравариантных тензоров ранга k :

$$T^k(T_pM) := \underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_{k \text{ раз}}.$$

Базисом этого пространства является совокупность

$$(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n},$$

где $(e_i)_{i=1}^n$ — базис $T_p M$.

- Пространство ковариантных тензоров ранга k :

$$T^k(T_p^* M) := \underbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}_{k \text{ раз}},$$

элементы которого могут быть представлены в виде разложений по базису

$$(\vartheta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \vartheta^{i_k})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n}.$$

Здесь $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — базис $T_p^* M$.

- Пространство смешанных тензоров ранга (k, l) :

$$T^{(k, l)}(T_p M) := \underbrace{T_p M \otimes \cdots \otimes T_p M}_{k \text{ раз}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}_{l \text{ раз}}.$$

Базис пространства смешанных тензоров имеет вид:

$$(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes \vartheta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \vartheta^{j_l})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n},$$

где $(e_i)_{i=1}^n$ — базис $T_p M$, а $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — дуальный базис $T_p^* M$.

Используются стандартные соглашения:

$$\begin{aligned} T^0(T_p M) &= T^0(T_p^* M) := \mathbb{R}, \\ T^{(0, k)}(T_p M) &= T^k(T_p^* M), \quad T^{(k, 0)}(T_p M) = T^k(T_p M), \quad \dots \end{aligned}$$

Размерности построенных пространств имеют вид:

$$\dim T^k(T_p M) = \dim T^k(T_p^* M) = n^k \quad \text{и} \quad \dim T^{(k, l)}(T_p M) = n^{k+l}.$$

Все такие пространства могут быть упорядочены по уровням символической «башни», как показано ниже:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 T_p M \otimes T_p M & & T_p M \otimes T_p^* M & \xleftarrow{\cong} & T_p^* M \otimes T_p M & & T_p^* M \otimes T_p^* M \\
 & & T_p M & & T_p^* M & &
 \end{array}$$

В «башне» тензорных пространств можно выделить «подбашню» — градуированную алгебру Грассмана внешних форм:

$$\Lambda(T_p^* M) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(T_p^* M),$$

в которой $\Lambda^k(T_p^* M)$ — векторное пространство k -форм ω ,

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \vartheta^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{i_k}.$$

Здесь $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, а \wedge — операция внешнего произведения (2.5.1). Используются соглашения:

$$\Lambda^0(T_p^* M) = \mathbb{R}, \quad \Lambda^1(T_p^* M) = T_p^* M.$$

5. Векторные расслоения и их сечения

Тензоры, в их алгебраическом представлении в виде линейных операторов или полилинейных форм, характеризуют физические процессы локально, в инфинитезимальной окрестности некоторой пространственной или материальной точки. С целью глобального описания физического процесса, необходимо расширить алгебраическое понятие тензора на понятие тензорного поля. Формализация тензорного поля в рамках теории гладких многообразий осуществляется посредством сечения векторного расслоения. По-видимому, детальное изложение теории расслоений впервые представил N. Steenrod в [14]. В изложении мы следуем [2, 11].

5.1. Гладкие векторные расслоения ранга k

Пусть M — гладкое многообразие (с краем или без).

Определение 10.24. *Гладким вещественным векторным расслоением ранга k над M называется упорядоченная тройка (E, M, π) , в которой E — гладкое многообразие, а $\pi : E \rightarrow M$ — гладкое сюръективное отображение, такие, что*

(E_1) *Для каждой точки $p \in M$ множество $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$, называемое **слоем над p** , снабжено структурой k -мерного вещественного векторного пространства.*

(E_2) *Для каждой точки $p \in M$ существуют такая ее окрестность $U \subset M$ и такой диффеоморфизм*

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k,$$

*называемый **гладкой локальной тривиализацией E над U** , что*

(Φ_1) $\text{pr}_1 \circ \Phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$, где $\text{pr}_1 : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ — проекция;

(Φ_2) *для каждого $q \in U$ отображение $\Phi|_{E_q}$ является изоморфизмом между векторными пространствами E_q и $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.*

В дальнейшем для сокращения письма мы будем использовать обозначение $\text{rank}(E)$ для ранга гладкого векторного расслоения (E, M, π) .

В общем случае, векторные расслоения определяются для топологических пространств [15], но мы ограничиваемся гладкими многообразиями. Поскольку мы работаем только с полем вещественных чисел, слово «вещественный» в дальнейшем будем опускать. Если (E, M, π) является гладким векторным расслоением ранга k , то используется следующая терминология: пространство E называется **тотальным пространством расслоения**, M называется **базой**, а отображение π называется **проекцией**. Если это не приведет к путанице, мы будем следовать стандартным сокращениям и писать: « E — векторное расслоение над M », или « $\pi : E \rightarrow M$ — векторное расслоение». Если Φ является глобальной тривиализацией, то есть, $U = M$, то (E, M, π) называется **тривиальным расслоением**. В этом случае E диффеоморфно $M \times \mathbb{R}^k$.

Дадим некоторые комментарии к определению векторных расслоений. Поскольку отображение $\pi : E \rightarrow M$ сюръективно, то множество E может быть представлено как дизъюнктивное объединение k -мерных векторных пространств: $E = \coprod_{p \in M} E_p$. Локально, такое объединение диффеоморфно прямому произведению. То есть, если U является окрестностью из (E_2) , то пространство $\pi^{-1}(U) = \coprod_{q \in U} E_q$ диффеоморфно гладкому многообразию $U \times \mathbb{R}^k$. Диффеоморфизм Φ сохраняет слоистую структуру: условие (Φ_1) эквивалентно следующему: для каждого $q \in U$ имеем $\Phi(E_q) \subset \{q\} \times \mathbb{R}^k$. Здесь $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ может быть рассмотрено как «слой» $U \times \mathbb{R}^k = \coprod_{q \in U} (\{q\} \times \mathbb{R}^k)$. Дополнительно, векторные структуры E_q и $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ согласованы условием (Φ_2) .

Точка p может иметь две окрестности U, V с гладкими локальными тривиализациями

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k, \quad \Psi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^k.$$

Как показано в [2], существует гладкое отображение

$$\tau : U \cap V \rightarrow \text{GL}(k; \mathbb{R}),$$

такое, что композиция $\Phi \circ \Psi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$ имеет вид

$$\Phi \circ \Psi^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v).$$

Здесь $\tau(p)v$ представляет действие матрицы размера $k \times k$ на вектор $v \in \mathbb{R}^k$. Отображение τ обычно называется **функцией перехода** [2].

5.2. Касательные и кокасательные расслоения

Гладкое многообразие M снабжено тензорными «башнями» над каждой точкой. «Первые этажи» представлены семействами $(T_p M)_{p \in M}$, $(T_p^* M)_{p \in M}$ касательных и кокасательных пространств. Эти семейства, вместе с законами преобразования векторов и ковекторов, дают информацию, достаточную для построения векторных расслоений. Далее будет представлен набросок рассуждений. Детали и доказательства могут быть найдены в [2, 7].

Дизъюнктивное объединение

Сначала определим операцию дизъюнктивного объединения. Предположим, что имеется семейство $(X_i)_{i \in I}$ непустых множеств. Эти множества могут не быть подмножествами объемлющего множества и также могут не быть попарно непересекающимися.

Определение 10.25. *Множество*

$$\coprod_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times X_i) = \{(i, x) \mid (i \in I) \wedge (x \in X_i)\}$$

называется **дизъюнктивным объединением семейства** $(X_i)_{i \in I}$.

Для каждого $i \in I$ определена каноническая инъекция

$$\iota_i : X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i, \quad \iota_i(x) = (i, x).$$

Обозначим $X'_i = \iota_i(X_i) = \{i\} \times X_i$. По построению, если $i \neq j$, то X'_i не пересекается с X'_j и множество $X = \prod_{i \in I} X_i$ является дизъюнктивным объединением в обычном смысле: $X = \prod_{i \in I} X'_i$. Множество X'_i является «копией» X_i в дизъюнктивном объединении и индекс i в (i, x) служит «меткой», указывающей на то, какому множеству принадлежит x .

Построение векторных расслоений

Теорема 10.5. *Пусть M — гладкое многообразие (с краем или без), а $(E_p)_{p \in M}$ — семейство k -мерных векторных пространств. Пусть*

$$E = \prod_{p \in M} E_p = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times E_p),$$

а $\pi : E \rightarrow M$ — отображение, действующее по правилу $(p, u) \mapsto \pi(p, u) := p$. Пусть, далее, известно семейство $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$. Здесь $\{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие M , и для каждого $i \in I$, Φ_i — биективное отображение

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k,$$

такое, что $\Phi_i|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ — изоморфизм векторных пространств для каждого $p \in U_i$. Предположим, что семейство $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$

удовлетворяет следующему условию. Если $i, j \in I$ такие индексы, что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то существует гладкое отображение

$$\tau_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(k; \mathbb{R}),$$

такое, что композиция $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$ имеет вид

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, v) = (p, \tau_{ij}(p)v).$$

Если эти условия справедливы, то множество E имеет единственную топологию и гладкую структуру, превращающие его в гладкое многообразие (с краем или без). Упорядоченная тройка (E, M, π) является гладким векторным расслоением ранга k над M с проекцией π и гладкими локальными тривиализациями $\{\Phi_i\}_{i \in I}$.

Доказательство теоремы о построении гладких векторных расслоений приведено в [2].

Построение касательного и кокасательного расслоений

Предположим, что M является гладким многообразием размерности n (с краем или без). Имеются семейства $(T_p M)_{p \in M}$ и $(T_p^* M)_{p \in M}$ касательных и кокасательных пространств. Обозначим через TM и T^*M следующие дизъюнктные объединения:

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M, \quad T^*M := \coprod_{p \in M} T_p^* M$$

и определим отображения $\pi_t : TM \rightarrow M$, $\pi_c : T^*M \rightarrow M$ которые действуют как $(p, v) \mapsto p$.

Выберем гладкий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ из максимальной структуры M и определим семейства $\{\Phi_{t;\alpha}\}_{\alpha \in I}$, $\{\Phi_{c;\alpha}\}_{\alpha \in I}$ отображений

$$\begin{aligned} \Phi_{t;\alpha} : \pi_t^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n, & \Phi_{t;\alpha}(p, u^i \partial_i|_p) &:= (p, (u^1, \dots, u^n)), \\ \Phi_{c;\alpha} : \pi_c^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n, & \Phi_{c;\alpha}(p, \nu_i dx^i|_p) &:= (p, (\nu_1, \dots, \nu_n)). \end{aligned}$$

Пусть для различных индексов $\alpha, \beta \in I$ пересечение $U_\alpha \cap U_\beta$ не пусто. Равенства (10.4.5) и (10.4.14), представляющие законы преобразования

вектора и ковектора, позволяют записать следующие соотношения для $(p, u) \in \pi_t^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ and $(p, \nu) \in \pi_c^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$:

$$\begin{aligned}\Phi_{t;\alpha} \circ \Phi_{t;\beta}^{-1}(p, (u^1, \dots, u^n)) &= (p, \tau_{t;\alpha\beta}(p)(u^1, \dots, u^n)), \\ \Phi_{c;\alpha} \circ \Phi_{c;\beta}^{-1}(p, (\nu_1, \dots, \nu_n)) &= (p, \tau_{c;\alpha\beta}(p)(\nu_1, \dots, \nu_n)),\end{aligned}$$

где гладкие отображения $\tau_{t;\alpha\beta}$ и $\tau_{c;\alpha\beta}$, действующие на $U_\alpha \cap U_\beta$ и принимающие значения в $\text{GL}(s; \mathbb{R})$, определены следующим образом:

$$\tau_{t;\alpha\beta}(p) := D_{\varphi_\beta(p)}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}), \quad \tau_{c;\alpha\beta}(p) := (D_{\varphi_\beta(p)}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}))^{-T}.$$

Следовательно, согласно теореме о построении гладких векторных расслоений, (TM, M, π_t) и (T^*M, M, π_c) являются гладкими векторными расслоениями ранга n . Локальные карты для TM и T^*M представлены парами $(\pi_t^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_{t;\alpha})$, $(\pi_c^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_{c;\alpha})$, где

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{t;\alpha} : \pi_t^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \tilde{\varphi}_{t;\alpha}(p, u) := (p^1, \dots, p^n, u^1, \dots, u^n), \\ \tilde{\varphi}_{c;\alpha} : \pi_c^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \tilde{\varphi}_{c;\alpha}(p, \nu) := (p^1, \dots, p^n, \nu_1, \dots, \nu_n),\end{aligned}$$

для $(p^1, \dots, p^n) = \varphi_\alpha(p)$, $u = u^i \partial_i|_p$ и $\nu = \nu_i dx^i|_p$. Таким образом, TM и T^*M являются гладкими $2n$ -мерными многообразиями. Кортежи (x^i, u^i) и (x^i, ν_i) из $2n$ элементов называются **натуральными координатами** на TM и T^*M соответственно [2].

5.3. Операции над векторными расслоениями

В предыдущем разделе мы представили набросок рассуждений, которые позволяют построить касательное и кокасательное расслоения. Аналогичные рассуждения могут быть проведены для векторных расслоений, слои которых — тензорные произведения касательных и кокасательных пространств. Вместе с тем, имеется и другой способ рассуждений. Сначала строится касательное расслоение. Затем, строится *дуальное расслоение* к нему — кокасательное расслоение. Используя построенные расслоения, можно определить их *тензорные произведения* и *прямые суммы*. Такая методология является удобной в теории связностей: если ввести связность на некотором векторном расслоении, то операции над векторными расслоениями позволяют индуцировать эту связность на дуальное расслоение и т.д. Далее будет представлено краткое описание операций над векторными расслоениями. Детальное изложение можно найти, например, в [7].

Дуальное расслоение

Пусть (E, M, π) — гладкое векторное расслоение ранга k . Обозначим

$$\mathfrak{e}^* := \coprod_{p \in M} E_p^*,$$

где E_p^* — дуальное векторное пространство к E_p . Определим отображение $\pi^* : \mathfrak{e}^* \rightarrow M$ правилом: $(p, v) \mapsto p$. Упорядоченная тройка $(\mathfrak{e}^*, M, \pi^*)$ является гладким векторным расслоением ранга k . Функция перехода τ^* построенной структуры имеет вид $\tau^*(p) = (\tau(p))^{-T}$, где τ — функция перехода расслоения (E, M, π) .

Определение 10.26. Векторное расслоение $(\mathfrak{e}^*, M, \pi^*)$ называется *дуальным* к (E, M, π) .

Согласно определению дуального векторного расслоения, кокасательное расслоение является всего лишь дуальным к касательному расслоению.

Сумма Уитни

Пусть (E_1, M, π_1) и (E_2, M, π_2) — гладкие векторные расслоения рангов k_1 и k_2 над одной и той же базой M . Определим пространство $E_1 \oplus E_2$ следующим образом:

$$E_1 \oplus E_2 := \coprod_{p \in M} (E_{1;p} \oplus E_{2;p}),$$

где $E_{i;p} = \pi_i^{-1}(\{p\})$. Знак \oplus в $E_{1;p} \oplus E_{2;p}$ является операцией внешней прямой суммы: каждый элемент $E_{1;p} \oplus E_{2;p}$ является упорядоченной парой (v_1, v_2) , где $v_i \in E_{i;p}$. Определим отображение $\pi : E_1 \oplus E_2 \rightarrow M$ правилом: $(p, v) \mapsto p$. Тогда упорядоченная тройка $(E_1 \oplus E_2, M, \pi)$ является гладким векторным расслоением ранга $k_1 + k_2$.

Определение 10.27. Векторное расслоение $(E_1 \oplus E_2, M, \pi)$ называется *суммой Уитни* расслоений (E_1, M, π_1) и (E_2, M, π_2) .

Тензорное произведение расслоений

Пусть (E_1, M, π_1) и (E_2, M, π_2) — гладкие векторные расслоения рангов k_1 и k_2 над одной и той же базой M . Обозначим

$$E_1 \otimes E_2 := \coprod_{p \in M} (E_{1;p} \otimes E_{2;p}),$$

где $E_{i;p} = \pi_i^{-1}(\{p\})$. Определим отображение $\pi : E_1 \otimes E_2 \rightarrow M$ аналогично предыдущим случаям. Упорядоченная тройка $(E_1 \otimes E_2, M, \pi)$ является гладким векторным расслоением ранга $k_1 k_2$.

Определение 10.28. Векторное расслоение $(E_1 \otimes E_2, M, \pi)$ называется *тензорным произведением* расслоений (E_1, M, π_1) и (E_2, M, π_2) .

«Pullback»-расслоение

Пусть (E, N, π) — гладкое векторное расслоение, M — гладкое многообразие, а $f \in C^\infty(M; N)$ — гладкое отображение. Отображение f по исходному расслоению (E, N, π) определяет новое векторное расслоение (f^*E, M, π^*) , называемое **«pullback»-расслоением** [7]. Тотальное пространство такого расслоения представлено множеством

$$f^*E := \{(p, x) \in M \times E \mid f(p) = \pi(x)\} = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times E_{f(p)},$$

а проекция $\pi^* : f^*E \rightarrow M$ определена равенством $\pi^*(p, x) := p$. Таким образом, слой над точкой p имеет вид

$$(f^*E)_p = \{p\} \times E_{f(p)}.$$

5.4. Векторные расслоения высокого ранга

Используя операцию тензорного произведения векторных расслоений и построенные касательное и кокасательное расслоения TM и T^*M , можно определить новые расслоения из совокупности «башен» над гладким многообразием M (с краем или без). Среди таких векторных расслоений можно выделить следующие [2]:

- Расслоение контравариантных k -тензоров с тотальным пространством

$$T^k(TM) = \coprod_{p \in M} T^k(T_p M).$$

- Расслоение ковариантных k -тензоров с тотальным пространством

$$T^k(T^*M) = \coprod_{p \in M} T^k(T_p^*M).$$

- Расслоение смешанных (k, l) -тензоров с тотальным пространством

$$T^{(k,l)}(TM) = \coprod_{p \in M} T^{(k,l)}(T_p M).$$

- Расслоение внешних k -форм с тотальным пространством

$$\Lambda^k(T^*M) = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M).$$

5.5. Сечения векторных расслоений

Векторные и тензорные поля могут быть формализованы как сечения соответствующих векторных расслоений. Пусть (\mathfrak{E}, M, π) — гладкое векторное расслоение.

Определение 10.29. *Локальное сечение E — это непрерывное отображение $\sigma : U \rightarrow E$, заданное на открытом подмножестве $U \subset M$ и удовлетворяющее условию $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$.*

Последнее равенство эквивалентно следующему соотношению:

$$\forall p \in U : \sigma(p) \in E_p.$$

Если $U = M$, то σ называется **глобальным сечением** E . Мы имеем дело с **гладкими** локальными и глобальными сечениями. Гладкость понимается в смысле гладкости отображений между гладкими многообразиями (см. раздел 2.).

Множество всех гладких глобальных сечений гладкого векторного расслоения (E, M, π) может быть снабжено структурой вещественного векторного пространства, если на нем поточечно определить операции сложения и умножения на скаляр:

$$\begin{aligned}(\sigma_1 + \sigma_2)(p) &:= \sigma_1(p) + \sigma_2(p), \\ (\lambda\sigma_1)(p) &:= \lambda\sigma_1(p),\end{aligned}$$

где σ_1, σ_2 — гладкие глобальные сечения E , а $\lambda \in \mathbb{R}$. Полученное векторное пространство обозначается через $\text{Sec}(E)$. Его нулем является нулевое сечение $p \mapsto 0 \in E_p$.

Для сечения $\sigma \in \text{Sec}(E)$ и функции $f \in C^\infty(M)$ можно определить их произведение

$$f\sigma : M \rightarrow E, \quad (f\sigma)(p) := f(p)\sigma(p).$$

Построенная операция превращает векторное пространство $\text{Sec}(E)$ в модуль над алгеброй $C^\infty(M)$ [2]. Мы часто используем обозначение σ_p для значения сечения σ в точке p , то есть, $\sigma_p := \sigma(p)$.

Гладкие сечения касательного и кокасательного расслоений TM и T^*M являются частными случаями сечений, обсуждаемых выше. Мы используем следующие обозначения для пространств этих сечений:

$$\text{Vec}(M) := \text{Sec}(TM), \quad \text{CVec}(M) := \text{Sec}(T^*M).$$

Следуя принятой терминологии, мы называем элементы модуля $\text{Vec}(M)$ **векторными полями**, а элементы $\text{CVec}(M)$ — **ковекторными полями**. Рассмотрим случай $\text{Vec}(M)$ более подробно. Каждое векторное поле $u \in \text{Vec}(M)$ и функция $f \in C^\infty(M)$ порождают новую функцию $u(f) \in C^\infty(M)$:

$$u(f)(p) := u_p([f]_p).$$

Здесь $[f]_p$ означает росток f в точке p (см. раздел 4.1.). Такое определение позволяет ввести скобочную операцию $[\cdot, \cdot] : \text{Vec}(M) \times \text{Vec}(M) \rightarrow \text{Vec}(M)$ посредством соотношения

$$[u, v]f := u(vf) - v(uf). \quad (10.5.1)$$

Определение 10.30. Операция (10.5.1) называется **коммутатором** или **скобкой Ли**.

Скобка Ли имеет следующие свойства [1, 2]:

(i) **Билинейность.** Для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $u, v, w \in \text{Vec}(M)$ имеем

$$\begin{aligned} [\alpha u + \beta v, w] &= \alpha[u, w] + \beta[v, w], \\ [u, \alpha v + \beta w] &= \alpha[u, v] + \beta[u, w]. \end{aligned}$$

(ii) **Антисимметричность.** Для $u, v \in \text{Vec}(M)$:

$$[u, v] = -[v, u].$$

(iii) **Тождество Якоби.** Если $u, v, w \in \text{Vec}(M)$, то

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

(iv) Если $f, g \in C^\infty(M)$ и $u, v \in \text{Vec}(M)$, то справедливо равенство

$$[fu, gv] = fg[u, v] + fu(g)v - gv(f)u. \quad (10.5.2)$$

Замечание 10.3. Если $h \in C^\infty(M)$ — произвольная функция, то

$$\begin{aligned} [fu, gv]h &= fg(u(v(h)) - v(u(h))) + fu(g)vh - gv(f)uh = \\ &= (fg[u, v] + (fu(g)v - gv(f)u)h). \end{aligned}$$

Это соотношение, совместно с (10.5.1), влечет (10.5.2).

Операция $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, которая была определена для элементов касательного и кокасательного пространств (см. раздел 4.4.), может быть обобщена на сечения. Для этого определим билинейное отображение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{CVec}(M) \times \text{Vec}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \nu, u \rangle := \langle \nu_p, u_p \rangle_p.$$

Аналогичным образом, мы можем определить билинейные отображения \lrcorner, \lrcorner :

$$\lrcorner : (u \otimes \vartheta, v) \mapsto u \otimes \vartheta \lrcorner v = \langle \vartheta, v \rangle u, \quad \lrcorner : (v, \vartheta \otimes u) \mapsto v \lrcorner \vartheta \otimes u = \langle \vartheta, v \rangle u.$$

Здесь u — гладкое сечение векторного расслоения, а v, ϑ — векторное и ковекторное поля.

Определение 10.31. Гладкое сечение расслоения $\Lambda^k(T^*M)$ внешних k -форм называется **дифференциальной k -формой** или, просто, **k -формой**.

Пространство всех дифференциальных k -форм обозначается через

$$\Omega^k(M) := \text{Sec}(\Lambda^k(T^*M)).$$

Внешнее произведение двух дифференциальных форм определяется как

$$(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p.$$

В правой части этого определения символ \wedge представляет операцию (2.5.1), действующую между внешними формами, а в левой части символ \wedge означает новую операцию между дифференциальными формами.

Если $\omega \in \Omega^k(M)$ и $u \in \text{Vec}(M)$, то можно определить $(k-1)$ -форму $u \lrcorner \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ равенством

$$p \mapsto (u \lrcorner \omega)_p, \quad (u \lrcorner \omega)_p(v_1, \dots, v_{k-1}) := \omega_p(u_p, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

Определение 10.32. Дифференциальная форма $u \lrcorner \omega$ называется **внутренним произведением ω на u** .

В работе также используется обозначение

$$i_u \omega := u \lrcorner \omega.$$

5.6. Гомоморфизмы векторных расслоений

Определение

Пусть (E_1, M_1, π_1) и (E_2, M_2, π_2) — два гладких векторных расслоения. Рассмотрим отображения из E_1 в E_2 , которые преобразуют слои в слои. Поскольку слои представлены векторными пространствами, то ожидается, что ограничения этих отображений на слои являются линейными. Вместе с тем, для определения отображения, преобразующего слой $E_{1;p}$ в слой $E_{2;q}$, необходима информация о том, какая именно точка q соответствует заданной точке p . Эти рассуждения приводят к следующему определению [2].

Определение 10.33. *Непрерывное отображение $F : E_1 \rightarrow E_2$ называется гомоморфизмом векторных расслоений, если существует отображение $f : M_1 \rightarrow M_2$, удовлетворяющее следующим свойствам:*

(а) $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$, то есть, диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array},$$

(б) для каждой точки $p \in M_1$ ограничение $F|_{E_{1;p}} : E_{1;p} \rightarrow E_{2;f(p)}$ является линейным отображением.

Предложение 10.4. *Отображение f определения гомоморфизма векторных расслоений является единственным и непрерывным.*

Доказательство. Пусть f_1, f_2 — отображения, соответствующие гомоморфизму расслоений F . Выберем некоторое сечение $\sigma : M_1 \rightarrow E_1$ (например, нулевое сечение). Тогда равенства $\pi_2 \circ F = f_i \circ \pi_1$ и $\pi_1 \circ \sigma = \text{Id}_{M_1}$ влекут $f_i = \pi_2 \circ F \circ \sigma$, $i = 1, 2$. Это, в свою очередь, означает непрерывность и единственность f . \square

В работе мы имеем дело только с гладкими гомоморфизмами векторных расслоений: гомоморфизм F векторных расслоений является гладким отображением между гладкими многообразиями E_1 и E_2 .

Определение 10.34. *Если биективное отображение $F : E_1 \rightarrow E_2$ является гладким гомоморфизмом векторных расслоений, и обратное к нему также является гладким гомоморфизмом, то будем называть F изоморфизмом векторных расслоений.*

Глобальное касательное отображение

Пусть M и N — гладкие многообразия, а $f \in C^\infty(M; N)$ — гладкое отображение. Оно определяет семейство $(T_p f)_{p \in M}$ касательных отображений (см. раздел 4.2.) $T_p f : T_p M \rightarrow T_p N$.

Определение 10.35. *Глобальное касательное отображение* — это отображение $Tf : TM \rightarrow TN$ между касательными расслоениями, сужение которого на каждое касательное пространство T_pM есть $T_p f$.

Отображение Tf является гладким, поскольку в натуральных координатах оно имеет вид

$$\widetilde{Tf}(x^i, u^i) = (y^i, u^j \partial_{x^j} y^i),$$

где $y^i(x^j)$ — координатное представление f . По построению, отображение Tf является гомоморфизмом касательных расслоений.

5.7. «Pullback» и «pushforward»

Пусть M и N — гладкие многообразия, а $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Например, в рамках механики континуума, M может представлять тело, N — физическое пространство, а f — конфигурацию. Определение полей на M дает материальное описание, а определение полей на N — пространственное описание. «Pullback» и «pushforward» представляют класс преобразований из пространственного описания в материальное, и наоборот.

Случай векторного поля

Пусть f — диффеоморфизм. Определим отображения

$$f^* : \text{Vec}(N) \rightarrow \text{Vec}(M),$$

$$f_* : \text{Vec}(M) \rightarrow \text{Vec}(N).$$

Первое отображение, f^* , действуя на векторное поле $u \in \text{Vec}(N)$, дает векторное поле

$$f^*u := (Tf^{-1}) \circ u \circ f \in \text{Vec}(M).$$

Определение 10.36. *Поле f^*u называется «pullback» векторного поля u относительно f .*

Второе отображение, f_* , ассоциирует с каждым векторным полем $u \in \text{Vec}(M)$ векторное поле

$$f_*u := (Tf) \circ u \circ f^{-1} \in \text{Vec}(N).$$

Определение 10.37. Поле f_*u называется «*pushforward*» векторного поля u относительно f .

Определения «pullback» и «pushforward» иллюстрируются коммутативными диаграммами

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \downarrow f^*u & & \downarrow u \\
 TM & \xleftarrow{Tf^{-1}} & TN
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xleftarrow{f^{-1}} & N \\
 \downarrow u & & \downarrow f_*u \\
 TM & \xrightarrow{Tf} & TN
 \end{array}$$

По определению, f^* и f_* являются изоморфизмами и $(f^*)^{-1} = f_*$.

Случай ковекторного поля

Определим отображение

$$f^* : \text{CVec}(N) \rightarrow \text{CVec}(M),$$

которое каждому ковекторному полю $\nu \in \text{CVec}(N)$ ставит в соответствие ковекторное поле $f^*\nu \in \text{CVec}(M)$, действующее на касательный вектор $u \in TM$ по закону $f^*\nu(u) := \nu \lrcorner Tf(u)$.

Определение 10.38. Ковекторное поле $f^*\nu$ называется «*pullback*» поля ν относительно f .

Теперь предположим, что f является диффеоморфизмом. Отображение

$$f_* : \text{CVec}(M) \rightarrow \text{CVec}(N),$$

действует подобно обратному к f^* : для каждого ковекторного поля $\nu \in \text{CVec}(M)$ имеем $f_*\nu := (f^{-1})^*\nu$.

Определение 10.39. Ковекторное поле $f_*\nu$ называется «*pushforward*» поля ν относительно f . ■

Случай k -формы

Определим отображение

$$f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M),$$

действующее на k -форму $\omega \in \Omega^k(N)$ следующим образом. Для точки $p \in M$ значение $(f^*\omega)_p$ на касательных векторах $u_1, \dots, u_k \in T_pM$ имеет вид

$$(f^*\omega)_p(u_1, \dots, u_k) := \omega_{f(p)}(Tf(u_1), \dots, Tf(u_k)).$$

Определение 10.40. Дифференциальная k -форма $f^*\omega$ называется «pullback» дифференциальной формы ω относительно f .

Теперь предположим, что f — диффеоморфизм. Тогда отображение

$$f_* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(N),$$

для каждой k -формы $\omega \in \Omega^k(M)$ дает $f_*\omega := (f^{-1})^*\omega$.

Определение 10.41. Дифференциальная k -форма $f_*\omega$ называется «pushforward» дифференциальной формы ω относительно f .

Случай смешанного (k, l) -тензорного поля

«Pullback» и «pushforward» обобщаются на смешанные тензоры следующим образом. Пусть f — диффеоморфизм. Определим отображение

$$f_* : \text{Sec}(T^{(k,l)}(TM)) \rightarrow \text{Sec}(T^{(k,l)}(TN)),$$

которое действует на тензорные поля $T \in \text{Sec}(T^{(k,l)}(TM))$. Для точки $p \in N$ значение образа, f_*T , полагается равным

$$(f_*T)_p(\nu_1, \dots, \nu_k; u_1, \dots, u_l) := T_{f^{-1}(p)}(f^*\nu_1, \dots, f^*\nu_k; f^*u_1, \dots, f^*u_l),$$

для всех $u_1, \dots, u_l \in TN$, $\nu_1, \dots, \nu_k \in T^*N$, $f^*u_i = (Tf^{-1})u_i$, $(f^*\nu_j)v = \nu_j(Tfv)$.

Определение 10.42. Смешанное тензорное поле f_*T называется «pushforward» тензорного поля T относительно f .

Отображение

$$f^* : \text{Sec}(T^{(k,l)}(TN)) \rightarrow \text{Sec}(T^{(k,l)}(TM)),$$

действует на каждое тензорное поле $T \in \text{Sec}(T^{(k,l)}(TN))$ по правилу

$$f^*T = (f^{-1})_*T.$$

Определение 10.43. Смешанное тензорное поле f^*T называется «pullback» тензорного поля T относительно f .

Замечание 10.4. Заметим, что в определении «pushforward» мы брали касательные векторы $u_i \in TN$ и отождествляли их с постоянными полями. То есть,

$$f^*u_i|_{f^{-1}(p)} = ((Tf^{-1}) \circ u_i \circ f)(f^{-1}(p)) = (Tf^{-1})u_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

5.8. Интегральные кривые

Любая гладкая кривая $\chi : \mathbb{I} \rightarrow M$ порождает поле векторов скорости (10.4.12) $t \mapsto \chi'(t)$. Обратно, пусть задано векторное поле $u \in \text{Vec}(M)$. Рассмотрим задачу об определении кривой, для которой векторное поле будет полем векторов скорости [2].

Определение 10.44. Интегральной кривой векторного поля u называется гладкая кривая $\chi : \mathbb{I} \rightarrow M$, удовлетворяющая условию

$$\forall t \in \mathbb{I} : \chi'(t) = u_{\chi(t)}.$$

Для простоты предположим, что $0 \in \mathbb{I}$. Точка $\chi(0)$ называется **начальной точкой** χ .

Вопрос об определении интегральной кривой χ , для которой точка $p \in M$ является начальной, сводится к решению задачи Коши. Действительно, выберем гладкую карту (U, φ) , такую, что $p \in U$. Тогда, в локальных координатах, $\varphi \circ \chi(t) = (\chi^1(t), \dots, \chi^n(t))$ и $u = u^i \partial_i$. Приходим к следующей системе ОДУ:

$$\frac{d\chi^i}{dt} = u^i(\chi^1, \dots, \chi^n), \quad i = 1, \dots, n,$$

с начальным условием $(\chi^1(0), \dots, \chi^n(0)) = \varphi(p)$. Решение этой системы определено на открытом интервале $] -\varepsilon, \varepsilon[$, для некоторого $\varepsilon > 0$. Кривая $\chi :] -\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ является искомой интегральной кривой векторного поля u с началом в p .

5.9. Гладкие реперы

Пусть (E, M, π) является векторным расслоением ранга k , а U — открытое подмножество M .

Определение 10.45. Упорядоченный набор $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ из k гладких³ локальных сечений называется **локальным репером E над U** , если для каждой точки $p \in U$ значения $(\varepsilon_1(p), \dots, \varepsilon_k(p))$ образуют базис k -мерного векторного пространства E_p .

Пусть σ — локальное сечение, определенное на открытом множестве U . Для любой точки $p \in U$ имеем $\sigma(p) = \sigma^i(p)\varepsilon_i(p)$, где упорядоченный набор $(\sigma^1(p), \dots, \sigma^k(p))$ из k вещественных чисел определен однозначно. Таким образом, имеем k отображений $\sigma^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, которые называются **компонентами сечения σ** относительно локального репера $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$. Гладкость σ эквивалентна гладкости каждой из компонент [2].

Рассмотрим локальные реперы для стандартных векторных расслоений. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие. Предположим, что U является координатной областью, а (x^i) — локальными координатами, тогда:

- **Касательное расслоение TM .** Репер $(\partial_i)_{i=1}^n$, определенный на U правилом $p \mapsto \partial_i|_p$, называется **координатным репером**. Здесь $\partial_i|_p$ — символы, определенные формулой (10.4.10). Для векторного поля $u \in \text{Vec}(U)$ имеем $u = u^i \partial_i$.
- **Кокасательное расслоение T^*M .** Репер $(dx^i)_{i=1}^n$, заданный на U правилом $p \mapsto dx^i|_p$, называется **координатным корепером**. Здесь $dx^i|_p$ — символы, определенные формулой (10.4.13). Для ковекторного поля $\nu \in \text{CVec}(U)$ справедливо разложение $\nu = \nu_i dx^i$.
- **Расслоение внешних k -форм $\Lambda^k(T^*M)$.** Координаты (x^i) порождают локальный репер $(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n}$ над U . Этот репер определен следующим образом:

$$p \mapsto dx^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

³Поскольку мы работаем только с гладкими полями, то элементы кортежа $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ также предполагаются гладкими.

Для дифференциальной k -формы $\omega \in \Omega^k(U)$ имеем разложение

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

- **Расслоение смешанных (k, l) -тензоров $T^{(k, l)}(TM)$.** Локальный репер над U , соответствующий (x^i) , представлен совокупностью

$$(\partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n},$$

в которой каждый элемент есть отображение

$$p \mapsto \partial_{i_1}|_p \otimes \dots \otimes \partial_{i_k}|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_l}|_p.$$

Для смешанного тензора $T \in \text{Sec}(T^{(k, l)}(TU))$ справедливо разложение

$$T = T^{i_1 \dots i_k \cdot \cdot \cdot j_1 \dots j_l} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}.$$

Если $u \in \text{Vec}(M)$ и $\nu \in \text{CVec}(M)$, то мы используем символьные равенства $u = u^i \partial_i$ и $\nu = \nu_i dx^i$. Эти равенства получают точный смысл, если их рассматривать в пределах координатной окрестности. Если равенства рассматриваются в общих точках пересекающихся координатных окрестностей, то компоненты связаны равенствами (10.4.5), (10.4.14). Аналогичная ситуация выполняется для произвольного тензорного поля.

Предположим, что имеется репер над всем гладким многообразием M . Мы называем такой репер **глобальным репером**. В частности, имеем глобальный репер касательного расслоения TM . Если такой репер существует, то многообразие называется **параллелизуемым**. Необходимым и достаточным условием параллелизуемости является тривиальность многообразия TM (то есть для него существует атлас, состоящий из одной карты) [2].

5.10. Голономные и неголономные реперы

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, а $(e_i)_{i=1}^n$ — локальный репер касательного расслоения над M .

Определение 10.46. Репер $(e_i)_{i=1}^n$ называется **голономным** или **коммутирующим**, если

$$[e_i, e_j] = 0, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

В противном случае, репер $(e_i)_{i=1}^n$ называется **неголономным**.

В частности, если $(\partial_i)_{i=1}^n$ — координатный репер, то он является голономным: $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Вместе с тем, справедливо и обратное утверждение [2].

Предложение 10.5. Если $(e_i)_{i=1}^n$ — голономный репер, то локально, в некоторой окрестности каждой точки его области определения, можно ввести такие координаты $(x^i)_{i=1}^n$, что $e_i = \partial_{x^i}$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

5.11. Внешнее дифференцирование

Для $f \in C^\infty(M)$ формула (10.4.15) определяет отображение $df : p \mapsto df_p$, то есть, элемент $\text{CVec}(M)$. Таким образом, получаем операцию

$$d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M), \quad f \mapsto df,$$

где $\Omega^0(M) := C^\infty(M)$ и $\Omega^1(M) := \text{CVec}(M)$.

Операция d может быть расширена на произвольные дифференциальные k -формы следующим образом [2].

Теорема 10.6. Пусть M — гладкое многообразие размерности n с краем или без. Тогда существуют единственные отображения

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

которые удовлетворяют условиям:

- (i) $d(a\alpha + b\beta) = ad\alpha + bd\beta$, где $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ и $a, b \in \mathbb{R}$;
- (ii) для $\alpha \in \Omega^0(M)$ поле $d\alpha : p \mapsto d\alpha_p$ определено формулой (10.4.15);
- (iii) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$, для $\alpha \in \Omega^k(M)$ и $\beta \in \Omega^l(M)$;
- (iv) $d^2\alpha = d(d\alpha) = 0$, для всех $\alpha \in \Omega^k(M)$.

Определение 10.47. *Отображения d называются операциями внешнего дифференцирования. Для дифференциальной k -формы α соответствующая ей $(k+1)$ -форма $d\alpha$ называется внешней производной α .*

Замечание 10.5. *В соответствии со свойствами (i)–(iv), внешняя производная k -формы*

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

имеет вид

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

где $d\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} = \sum_{i=1}^n \partial_i \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^i$. Справедливо эквивалентное представление [5]:

$$d\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq n} \left(\sum_{a=1}^{k+1} (-1)^{a+1} \frac{\partial \alpha_{j_1 \dots \widehat{j}_a \dots j_{k+1}}}{\partial x^{j_a}} \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k+1}},$$

в котором символ $\widehat{}$ указывает на то, что соответствующий индекс опускается.

Пример 10.1. Пусть $\omega \in \Omega^1(M)$, $\omega = \omega_i dx^i$. Следуя свойствам операции внешнего дифференцирования d , указанным в Теореме 10.6, получим координатное выражение для $d\omega$:

$$d\omega = d(\omega_j dx^j) = d\omega_j \wedge dx^j + (-1)^0 \omega_j \wedge d^2 x^j.$$

Здесь $d\omega_j = \partial_i \omega_j dx^i$, а $d^2 x^j = 0$. В этой связи,

$$d\omega = \partial_i \omega_j dx^i \wedge dx^j.$$

Представим полученное равенство в другой форме. В силу соотношения $dx^i \wedge dx^i = 0$, имеем

$$d\omega = \sum_{i < j} \partial_i \omega_j dx^i \wedge dx^j + \sum_{i > j} \partial_i \omega_j dx^i \wedge dx^j.$$

Преобразуем вторую сумму:

$$\sum_{i>j} \partial_i \omega_j dx^i \wedge dx^j = - \sum_{i>j} \partial_i \omega_j dx^j \wedge dx^i.$$

Сделав замены индексов i на j и j на i , получим, что

$$\sum_{i>j} \partial_i \omega_j dx^i \wedge dx^j = - \sum_{i<j} \partial_j \omega_i dx^i \wedge dx^j.$$

Тогда

$$d\omega = \sum_{i<j} (\partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i) dx^i \wedge dx^j.$$

Пример 10.2. В качестве иллюстрации рассмотрим случай гладкого многообразия M размерности $n = 3$.

1. Пусть $\omega \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, тогда

$$d\omega = \partial_1 \omega dx^1 + \partial_2 \omega dx^2 + \partial_3 \omega dx^3.$$

Получили 1-форму.

2. Пусть $\omega \in \Omega^1(M)$, $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$, тогда

$$\begin{aligned} d\omega &= d\omega_1 \wedge dx^1 + (-1)^0 \omega_1 \wedge d^2 x^1 + \\ &+ d\omega_2 \wedge dx^2 + (-1)^0 \omega_2 \wedge d^2 x^2 + d\omega_3 \wedge dx^3 + (-1)^0 \omega_3 \wedge d^2 x^3. \end{aligned}$$

Поскольку $d^2 x^i = 0$, а $d\omega_{ij} = \partial_k \omega_{ij} dx^k$, то

$$\begin{aligned} d\omega &= (\partial_1 \omega_1 dx^1 + \partial_2 \omega_1 dx^2 + \partial_3 \omega_1 dx^3) \wedge dx^1 + \\ &+ (\partial_1 \omega_2 dx^1 + \partial_2 \omega_2 dx^2 + \partial_3 \omega_2 dx^3) \wedge dx^2 + (\partial_1 \omega_3 dx^1 + \partial_2 \omega_3 dx^2 + \partial_3 \omega_3 dx^3) \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Приводя подобные и учитывая равенства $dx^i \wedge dx^i = 0$, $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, получаем 2-форму

$$d\omega = (\partial_1 \omega_2 - \partial_2 \omega_1) dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_1 \omega_3 - \partial_3 \omega_1) dx^1 \wedge dx^3 + (\partial_2 \omega_3 - \partial_3 \omega_2) dx^2 \wedge dx^3.$$

3. Пусть $\omega \in \Omega^2(M)$, $\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3$.

Тогда

$$d\omega = d\omega_{12} \wedge dx^1 \wedge dx^2 + d\omega_{13} \wedge dx^1 \wedge dx^3 + d\omega_{23} \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Используя определение дифференциала скалярной функции и равенства $d^2x^i = 0$, $dx^i \wedge dx^i = 0$, получаем

$$d\omega = \partial_3\omega_{12}dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \partial_2\omega_{13}dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \partial_1\omega_{23}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Наконец, в силу равенства $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, приходим к выражению

$$d\omega = (\partial_1\omega_{23} - \partial_2\omega_{13} + \partial_3\omega_{12})dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Получили 3-форму.

4. $\omega \in \Omega^3(M)$, $\omega = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Тогда

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \\ &= (\partial_1f dx^1 + \partial_2f dx^2 + \partial_3f dx^3) \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0. \end{aligned}$$

5.12. Риманова метрика и музыкальные изоморфизмы

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие с краем или без. Измерительный прибор, позволяющий определять длины векторов из касательного пространства T_pM и углы между ними, представлен скалярным произведением на T_pM . Но в разных точках M этот прибор определяется по-разному, и для того, чтобы представить его в виде значения поля, заданного на всем многообразии, необходимо использовать дополнительные соображения. Эти соображения сводятся к разбиению единицы, которое позволяет определить гладкое поле скалярных произведений — риманову метрику.

Определение 10.48. *Риманова метрика на M — это гладкое сечение $g \in \text{Sec}(T^*M \otimes T^*M)$, такое, что для каждой точки $p \in M$ выполняются следующие аксиомы:*

$$(g_1) \quad \forall u, v \in T_pM : g_p(u, v) = g_p(v, u);$$

$$(g_2) \quad \forall u \in T_pM : g_p(u, u) \geq 0;$$

$$(g_3) \quad \forall u \in T_pM : (g_p(u, u) = 0, \text{ если и только если } u = 0).$$

Замечание 10.6. Для каждого гладкого n -мерного многообразия M (с краем или без) существует риманова метрика [2]. Рассуждения, устанавливающие существование римановой метрики, используют два объекта. Первый из них — это евклидова метрика $g^{\text{Eucl}} = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ на \mathbb{R}^n , записанная в декартовых координатах. Выберем некоторый атлас $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ из гладкой структуры M . Он порождает семейство $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ отображений $g_\alpha := \varphi_\alpha^* g^{\text{Eucl}}$; каждое из них является римановой метрикой на соответствующей координатной области карты U_α . Вторым объектом — гладкое разбиение единицы $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Оно позволяет «склеить» полученные римановы метрики в глобальную риманову метрику $g = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha g_\alpha$ на M .

Поскольку риманова метрика дает инструмент для геометрических измерений, то выбор метрики из всех возможных римановых метрик на M не является произвольным в физических приложениях и основан на определенных физических рассуждениях.

Для фиксированной точки $p \in M$ отображение $u \mapsto g_p(u, \cdot)$ является изоморфизмом векторных пространств $T_p M$ и $T_p^* M$. Это позволяет определить отображения (послойные изоморфизмы) $(\cdot)^b : TM \rightarrow T^*M$ и $(\cdot)^\sharp : T^*M \rightarrow TM$ следующим образом:

$$\begin{aligned} TM \ni u &\mapsto u^b \in T_{\pi_t(u)}^* M : \langle u^b, \cdot \rangle_{\pi_t(u)} = g_{\pi_t(u)}(u, \cdot); \\ T^*M \ni \nu &\mapsto \nu^\sharp \in T_{\pi_c(\nu)} M : g_{\pi_c(\nu)}(\nu^\sharp, \cdot) = \langle \nu, \cdot \rangle_{\pi_c(\nu)}. \end{aligned}$$

Соотношения между построенными отображениями иллюстрируются диаграммами

$$\begin{array}{ccc} M & & M \\ \pi_t \uparrow & \swarrow \pi_c & \uparrow \pi_t \\ TM & \xrightarrow{(\cdot)^b} & T^*M \\ & & \leftarrow (\cdot)^\sharp \\ & & TM \end{array}$$

Используя координатный репер $(\partial_i)_{i=1}^n$ и соответствующий корепер $(dx^i)_{i=1}^n$, приходим к следующим представлениям:

$$u^b = g_{ij} u^j dx^i, \quad \nu^\sharp = g^{ij} \nu_j \partial_i,$$

где $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, а $[g^{ij}]$ — матрица, обратная к $[g_{ij}]$.

Если $\nu = g(u, \cdot)$, то $u^\flat = \nu$, $\nu^\sharp = u$ и $\nu_i = g_{ij}u^j$, $u^i = g^{ij}\nu_j$. Далее мы используем обозначение $\nu_i = v_i$. Таким образом, в координатной нотации, музыкальные изоморфизмы могут быть интерпретированы как операции поднятия и опускания индекса.

Музыкальные изоморфизмы могут быть обобщены на тензорные пространства следующим образом. Операция $(\cdot)^{k\flat}$, $k \in \mathbb{N}$, определяется соотношением

$$(\cdot)^{k\flat} : S_1 \otimes \dots \otimes S_{k-1} \otimes TM \otimes S_{k+1} \otimes S_r \rightarrow S_1 \otimes \dots \otimes S_{k-1} \otimes T^*M \otimes S_{k+1} \otimes S_r,$$

то есть, $T^{k\flat}(f_1, \dots, f_{k-1}, u, f_{k+1}, \dots, f_r) = T(f_1, \dots, f_{k-1}, u^\flat, f_{k+1}, \dots, f_r)$, а операция $(\cdot)^{k\sharp}$, $k \in \mathbb{N}$, определена как

$$(\cdot)^{k\sharp} : S_1 \otimes \dots \otimes S_{k-1} \otimes T^*M \otimes S_{k+1} \otimes S_r \rightarrow S_1 \otimes \dots \otimes S_{k-1} \otimes M \otimes S_{k+1} \otimes S_r,$$

то есть, $T^{k\sharp}(f_1, \dots, f_{k-1}, \nu, f_{k+1}, \dots, f_r) = T(f_1, \dots, f_{k-1}, \nu^\sharp, f_{k+1}, \dots, f_r)$. Здесь S_j обозначает либо TM , либо T^*M .

В частном случае тензорных полей второго ранга имеем следующие разложения:

- Случай $T = T^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$:

$$T^{1\flat} = g_{ki}T^{ij}dx^k \otimes \partial_j, \quad T_{k\cdot}^{\cdot j} = g_{ki}T^{ij}.$$

- Случай $T = T_{ij}dx^i \otimes dx^j$:

$$T^{1\sharp} = g^{ki}T_{ij}\partial_k \otimes dx^j, \quad T_{\cdot j}^{\cdot k} = g^{ki}T_{ij}.$$

- Случай $T = T_{ij}dx^i \otimes dx^j$:

$$T^{2\sharp} = g^{kj}T_{ij}dx^i \otimes \partial_k, \quad T_{i\cdot}^{\cdot k} = g^{kj}T_{ij}.$$

Риманова метрика g индуцирует поле скалярных произведений между элементами T^*M следующим образом. Обозначим $g_{(1)} := g^{1\sharp 2\sharp}$. То есть,

$$g_{(1)} = g^{ij}\partial_i \otimes \partial_j.$$

Для любых ковекторов $\mu, \nu \in T^*M$ имеем $g_{(1)}(\mu, \nu) = \mu_i \nu_j g^{ij}$. В общем случае, риманова метрика g определяет поле $g_{(k)}$ внутренних произведений между элементами $\Lambda^k(T^*M)$. Пусть $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ и $\beta = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \beta_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}$ — внешние k -формы. Тогда [11]

$$g_{(k)}(\alpha, \beta) := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta_{j_1 \dots j_k}.$$

5.13. Двухточечные тензоры

Градиент деформации \mathbf{F} и первый тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа \mathbf{P} , возникающие в классической теории упругости, являются примерами двухточечных тензоров. По-видимому, впервые это отмечалось в работе [16]. Для обобщения понятия двухточечных тензоров на гладкие многообразия, необходимо построить специальное расслоение — расслоение двухточечных тензоров⁴.

Расслоение двухточечных тензоров

Понятие «pullback»-расслоения позволяет определить векторное расслоение, называемое **расслоением двухточечных тензоров**. Если M и N — гладкие многообразия, $f \in C^\infty(M; N)$, то⁵ многообразии

$$T^{(r,s)} f^* TN \otimes T^{(k,l)} TM,$$

является тотальным пространством такого расслоения. Его база представлена многообразием M , а слой над p имеет вид

$$\{p\} \times \left(T^{(r,s)}(T_{f(p)}N) \otimes T^{(k,l)}(T_pM) \right).$$

Каждый элемент $T^{(r,s)} f^* TN \otimes T^{(k,l)} TM$ называется **двухточечным тензором над отображением f** [16, 17, 18, 19].

Выберем некоторое открытое множество $V \subset \mathfrak{N}$ и обозначим $U = f^{-1}(V)$. Пусть (E_α) , (E^α) локальный репер и корепер расслоения TM ,

⁴При построении такого расслоения мы следуем идее, изложенной в [17].

⁵Расслоение можно определить и по другому, например $T^{(k,l)} TM \otimes T^{(r,s)} f^* TN$.

определенные на U , а (e_i) , (e^i) — локальный репер и корепер расслоения TN , определенные на V . Через

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} \otimes E_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes E_{\alpha_k} \otimes E^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes E^{\beta_l},$$

мы обозначаем локальное сечение, которое каждой точке $p \in U$ сопоставляет смешанный тензор

$$p \mapsto e_{i_1}|_q \otimes \cdots \otimes e_{i_r}|_q \otimes e^{j_1}|_q \otimes \cdots \otimes e^{j_s}|_q \otimes E_{\alpha_1}|_p \otimes \cdots \otimes E_{\alpha_k}|_p \otimes E^{\beta_1}|_p \otimes \cdots \otimes E^{\beta_l}|_p,$$

где $q = f(p)$. Совокупность всех таких сечений образует локальный репер расслоения $T^{(r,s)}f^*TN \otimes T^{(k,l)}TM$.

Будем использовать поля двухточечных тензоров второго ранга. Ниже приведены всевозможные варианты таких полей:

$$\begin{aligned} T \in \text{Sec}(f^*TN \otimes T^*M), \quad T : p \mapsto T^{i\cdot}_{\cdot\alpha}(p)e_i|_{f(p)} \otimes E^\alpha|_p, \\ T \in \text{Sec}(f^*TN \otimes TM), \quad T : p \mapsto T^{i\alpha}_{\cdot\cdot}(p)e_i|_{f(p)} \otimes E_\alpha|_p, \\ T \in \text{Sec}(f^*T^*N \otimes T^*M), \quad T : p \mapsto T_{i\alpha}{}^{\cdot\cdot}(p)e^i|_{f(p)} \otimes E^\alpha|_p, \\ T \in \text{Sec}(f^*T^*N \otimes TM), \quad T : p \mapsto T_{i\cdot}{}^{\alpha\cdot}(p)e^i|_{f(p)} \otimes E_\alpha|_p. \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

Рассмотрим законы преобразования компонент двухточечных тензоров второго ранга. Предположим, что «штрихованные» реперы, (E'_α) , (e'_i) и «нештрихованные», (E_α) , (e_i) , связаны равенствами

$$E'_\alpha = \Omega^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} E_\beta, \quad e'_i = \omega^{j\cdot}_{\cdot i} e_j,$$

где $\Omega : p \mapsto \Omega(p) \in \text{GL}(\dim M; \mathbb{R})$ и $\omega : p \mapsto \omega(p) \in \text{GL}(\dim N; \mathbb{R})$ — гладкие поля обратимых матриц, определенные на открытых подмножествах M и N соответственно. Тогда для кореперов имеем равенства

$$E'^\alpha = (\Omega^{-1})^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} E^\beta, \quad e'^i = (\omega^{-1})^{i\cdot}_{\cdot j} e^j.$$

Приходим к следующим формулам преобразования компонент тензоров (10.5.3):

$$\begin{aligned} T'^{i\cdot}_{\cdot\alpha} &= (\omega^{-1})^{i\cdot}_{\cdot j} \Omega^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} T^{j\cdot}_{\cdot\beta}, & T'^{i\alpha}_{\cdot\cdot} &= (\omega^{-1})^{i\cdot}_{\cdot j} (\Omega^{-1})^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} T^{j\beta}_{\cdot\cdot}, \\ T'_{i\alpha}{}^{\cdot\cdot} &= \omega^{j\cdot}_{\cdot i} \Omega^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} T_{j\beta}{}^{\cdot\cdot}, & T'_{i\cdot}{}^{\alpha\cdot} &= \omega^{j\cdot}_{\cdot i} (\Omega^{-1})^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} T_{j\cdot}{}^{\beta\cdot}. \end{aligned}$$

Имеется тесная связь между полями двухточечных тензоров второго ранга и гомоморфизмами векторных расслоений. Следующие коммутативные диаграммы иллюстрируют действия гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{T} & TN \\
 \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TN} \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T^*M & \xrightarrow{T} & TN \\
 \pi_{T^*M} \downarrow & & \downarrow \pi_{TN} \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{T} & T^*N \\
 \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{T^*N} \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T^*M & \xrightarrow{T} & T^*N \\
 \pi_{T^*M} \downarrow & & \downarrow \pi_{T^*N} \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

На каждой из диаграмм символ T представляет гомоморфизм. По определению, ограничение гомоморфизма на слой является линейным отображением. В этой связи, имеется следующее взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами и двухточечными тензорами второго ранга:

$$\begin{aligned}
 T : TM &\rightarrow TN &\Leftrightarrow & T \in \text{Sec}(f^*TN \otimes T^*M), \\
 T : T^*M &\rightarrow TN &\Leftrightarrow & T \in \text{Sec}(f^*TN \otimes TM), \\
 T : TM &\rightarrow T^*N &\Leftrightarrow & T \in \text{Sec}(f^*T^*N \otimes T^*M), \\
 T : T^*M &\rightarrow T^*N &\Leftrightarrow & T \in \text{Sec}(f^*T^*N \otimes TM).
 \end{aligned}$$

Транспонированный и ортогональный тензоры

Транспонированный и ортогональный тензоры широко используются в механике континуума. Один из многих примеров — полярное разложение Коши, из которого определяются меры деформаций Коши — Грина.

В классической теории конечных деформаций транспонированный тензор \mathbf{F}^T к градиенту деформации $\mathbf{F} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}; \mathcal{V})$, где \mathcal{S}_R — отсчетная форма, а \mathcal{V} — трансляционное пространство, определяется как единственное поле $\mathbf{F}^T : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V}; \mathcal{V})$, удовлетворяющее условию

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_x[\mathbf{u}] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_x^T[\mathbf{v}],$$

для всех $x \in \mathcal{S}_R$. Ортогональный тензор в евклидовом пространстве \mathcal{V} определяется как линейное отображение $Q \in \text{Lin}(\mathcal{V}; \mathcal{V})$, сохраняющее скалярное произведение:

$$\forall u, v \in \mathcal{V} : Q[u] \cdot Q[v] = u \cdot v.$$

Каждое из этих определений существенно использует евклидову структуру ассоциированного векторного пространства \mathcal{V} . В случае гладких многообразий вместо скалярного произведения можно использовать либо свертку $\langle \cdot, \cdot \rangle$ вектора с ковектором, либо риманову метрику g . Поскольку никакой аффинной структуры не предполагается, необходимо рассматривать четыре возможных типа двухточечных тензоров (10.5.3). Это приводит к различным определениям транспонированного и ортогонального тензоров [17, 19, 20].

Используется определение транспонированного тензора к первому из тензоров, представленному в (10.5.3). Оно согласовано с определением, принятым в [19], но, вместе с тем, имеет техническое отличие. В цитируемой статье отображение $f : M \rightarrow N$ (или, согласно обозначениям статьи, $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{J}$) предполагалось биективным. Такое предположение представляется слишком ограничительным, поскольку развиваемая теория должна применяться к случаю, когда f является конфигурацией, то есть биекцией на свой образ.

Пусть $f \in C^\infty(M; N)$. Рассмотрим «pullback»-расслоение $\iota_{f(M)}^* TN$. Его базой является многообразие $f(M)$, а слой над каждой точкой $p \in f(M)$ представлен множеством $\{p\} \times T_p N$. Такое векторное расслоение является ограничением TN на $f(M)$.

Предположим, что гладкие многообразия M и N снабжены римановыми метриками G и g . Для сечения $T \in \text{Sec}(f^* TN \otimes T^* M)$ определим его **транспонирование** как поле двухточечных тензоров⁶

$$T^T \in \text{Sec}((\hat{f}^{-1})^* TM \otimes \iota_{f(M)}^* T^* N),$$

такое, что для каждого $x \in f(M)$ отображение $T_x^T \in \text{Lin}(T_x N; T_y M)$, где $y = \hat{f}^{-1}(x)$, удовлетворяет условию

$$\forall u \in T_y M \forall v \in T_x N : g_x(T_y u, v) = G_y(u, T_x^T v). \quad (10.5.4)$$

⁶Отображение $\hat{f} : M \rightarrow f(M)$ построено по отображению f согласно правилу: $\hat{f}(p) := f(p)$.

Двухточечный тензор T^T может быть рассмотрен как гомоморфизм векторного расслоения:

$$T^T : \iota_{f(M)}^* TN \rightarrow TM.$$

Отметим, что такое отображение определено не на тотальном пространстве касательного расслоения $(Tf(M), f(M), \pi)$, а на тотальном пространстве расслоения $(\iota_{f(M)}^* TN, f(M), \pi^*)$. Связь между отображениями T^T и \widehat{f} иллюстрирует диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \iota_{f(M)}^* TN & \xrightarrow{T^T} & TM \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} \\ f(M) & \xrightarrow{\widehat{f}^{-1}} & M \end{array}$$

Формула для компонент транспонированного тензора напрямую следует из (10.5.4). Если $T(x) = T_{\cdot\alpha}^i(x)e_i|_y \otimes E^\alpha|_x$, где $y = f(x)$, то тогда T^T имеет следующее диадное разложение:

$$T^T(y) = (T^T)_{\cdot i}^{\alpha}(y)E_\alpha|_x \otimes e^i|_y,$$

в котором $(T^T)_{\cdot i}^{\alpha}(y) = T^T(E^\alpha|_x, e_i|_y)$. Согласно формуле (10.5.4), в которой положим $u = E_\alpha|_x$, $v = e_j|_y$, получаем равенство

$$(G)_{\alpha\beta}|_x (T^T)_{\cdot j}^{\beta}(y) = g_{ij}|_y T_{\cdot\alpha}^i(x).$$

Приходим к окончательному выражению

$$(T^T)_{\cdot i}^{\alpha}(y) = g_{ij}|_y G^{\alpha\beta}|_x T_{\cdot\beta}^j(x), \quad (10.5.5)$$

где $G_{\alpha\beta} = G(E_\alpha, E_\beta)$, а $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

Ортогональный тензор Q определяется как двухточечный тензор $Q \in \text{Sec}(f^*TN \otimes T^*M)$, удовлетворяющий равенству

$$\forall x \in M \forall u, v \in T_x M : G_x(u, v) = g_{f(x)}(Q_x u, Q_x v). \quad (10.5.6)$$

Используя (10.5.4), получаем соотношение $G_x(u, v) = G_x(u, Q_{f(x)}^T Q_x v)$, для всех $u, v \in T_x M$. Это влечет равенство $G_x(u, (Q_{f(x)}^T Q_x - \text{Id}_{T_x M})v) = 0$, справедливое для любых $u, v \in T_x M$. Таким образом, $Q_{f(x)}^T Q_x = \text{Id}_{T_x M}$, и мы пришли к привычному соотношению для ортогонального тензора.

6. Ориентация и интегрирование на многообразиях

6.1. Форма объема и ориентация гладкого многообразия

Касательное пространство $T_p M$ в точке $p \in M$ гладкого многообразия M размерности n (с краем или без) является n -мерным векторным пространством и, таким образом, для него определено классическое понятие ориентации. Ориентация — это один из двух классов эквивалентности *упорядоченных* базисов. Напомним, что два упорядоченных базиса эквивалентны, если их матрица перехода имеет положительный определитель. Понятие определителя тесно связано с понятием внешней n -формы и отсюда следует, что любая ненулевая внешняя форма $\mu \in \Lambda^n(T_p^* M)$ задает ориентацию на $T_p M$ [2]. Выбирая ориентацию в каждом пространстве $T_p M$, приходим к полю ориентаций, или, эквивалентно, к полю ненулевых n -форм. Требование гладкости этого поля приводит к понятию формы объема.

Форма объема

Определение 10.49. *Формой объема* называется n -форма $\mu \in \Omega^n(M)$, такая, что $\mu(p) \neq 0$ для любой точки $p \in M$. Если для многообразия существует форма объема, то оно называется **ориентируемым**.

Две формы объема $\mu_1, \mu_2 \in \Omega^n(M)$ называются эквивалентными, если существует функция $f \in C^\infty(M)$, такая, что $f(p) > 0$ для любого $p \in M$, и $\mu_1 = f\mu_2$. Можно показать, что это действительно отношение эквивалентности [11].

Определение 10.50. *Ориентацией* M называется любой класс эквивалентности $[\mu]$. **Ориентированным многообразием** называется упорядоченная пара $(M, [\mu])$.

Ориентация $[\mu]$ индуцирует ориентацию на каждое касательное пространство. То есть, кортеж $(b_i)_{i=1}^n$ в $T_p M$ называется **положительно (отрицательно) ориентированным** относительно μ , если $\mu_p(b_1, \dots, b_n) > 0$ (< 0).

На ориентированном многообразии можно выбрать карты и гладкий атлас, согласованные с ориентацией $[\mu]$.

Определение 10.51. Гладкая карта (U, φ) называется **положительно ориентированной**, если координатный репер (∂_i) положительно ориентирован, и **отрицательно ориентированной**, если координатный репер отрицательно ориентирован. Гладкий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ называется **ориентирующим**, если для любых $\alpha, \beta \in I$ функция замены координат $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ имеет положительный якобиан в любой точке $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Отметим, что ориентирующий атлас определяет единственную ориентацию на многообразии, в которой каждая карта этого атласа положительно ориентирована. Обратно, если на многообразии M выбрана некоторая ориентация и либо $\partial M = \emptyset$, либо $\dim M > 1$, то совокупность всех ориентированных гладких карт составляет ориентирующий атлас на многообразии [1, 2].

Ориентация края

Предположим, что на гладком многообразии M с краем выбрана ориентация, то есть, выбрана форма объема μ . Край ∂M можно ориентировать таким образом, что его ориентация будет согласована с ориентацией $[\mu]$. Выберем поле $p \mapsto N(p) \in T_p M \setminus T_p \partial M$ векторов, направленных наружу. Тогда $(n-1)$ -форма $\iota_{\partial M}^*(N \lrcorner \mu)$ представляет форму объема на ∂M и она определяет желаемую ориентацию [2].

Риманова форма объема

Предположим, что на M выбрана риманова метрика g . В каждом касательном пространстве $T_p M$ можно построить ортонормированный базис, следуя процедуре ортогонализации Грама–Шмидта. Пусть M ориентировано. Тогда в выбранной ориентации существует единственная форма объема μ , для которой $\mu_p(b_1, \dots, b_n) = 1$ для всякого положительно ориентированного ортонормированного базиса $T_p M$ [2]. В ориентированной гладкой карте,

$$\mu = \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad g = \det [g_{ij}].$$

Мы обозначаем эту дифференциальную форму через dV .

Определение 10.52. Дифференциальная форма dV называется **римановой формой объема**.

6.2. Звезда Ходжа

Предположим, что M ориентировано, а форма объема dV порождена римановой метрикой g . Зафиксируем ориентацию для $T_p M$ относительно dV и определим изоморфизм — **звезду Ходжа** [11]

$$\begin{aligned} * : \Lambda^k(T_p^* M) &\rightarrow \Lambda^{n-k}(T_p^* M), \\ \forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(T_p^* M) : \alpha \wedge * \beta &= g_{(k)}(\alpha, \beta) dV. \end{aligned}$$

Если (e_1, \dots, e_n) — положительно ориентированный g -ортогональный базис $T_p M$, а (e^1, \dots, e^n) — соответствующий ему дуальный базис, то

$$*(e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)},$$

для перестановки $\sigma \in S_n$, такой, что $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ и $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(n)$.

Пример 10.3. В частности, когда $n = 2$,

$$*e^1 = e^2, \quad *e^2 = -e^1,$$

а когда $n = 3$,

$$*e^1 = e^2 \wedge e^3, \quad *(e^1 \wedge e^3) = -e^2.$$

Можно показать, что звезда Ходжа удовлетворяет следующим свойствам [11]:

- (i) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(T_p^* M) : \alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha$;
- (ii) $*1 = dV, *dV = 1$;
- (iii) $\forall \alpha \in \Lambda^k(T_p^* M) : ** \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha$;
- (iv) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(T_p^* M) : g_{(k)}(\alpha, \beta) = g_{(n-k)}(*\alpha, *\beta)$.

В базисе $(e^{i_1}, \dots, e^{i_n})$, дуальном к ортонормированному базису, имеем

$$*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = \sqrt{g} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_k \\ j_{k+1} < \dots < j_n}} \varepsilon_{(j_1, \dots, j_n)} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} e^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{j_n},$$

где $g = \det [g_{ij}]$. В частности, для $k = 1$, справедливо выражение

$$*e^i = \sqrt{g} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} g^{ij} e^1 \wedge \dots \wedge \hat{e}^j \wedge \dots \wedge e^n, \quad (10.6.1)$$

где \hat{e}^j означает, что ковектор e^j нужно опустить.

Для $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$, имеем

$$*\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_k \\ j_{k+1} < \dots < j_n}} \varepsilon_{(j_1, \dots, j_n)} \alpha_{i_1 \dots i_k} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} e^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{j_n}.$$

Звезду Ходжа можно поточечно перенести на дифференциальные формы:

$$(*\alpha)_p = *(\alpha_p).$$

6.3. Интегрирование дифференциальных форм и теорема Стокса

В рамках геометрического подхода, уравнения баланса континуальной физики могут быть сформулированы в терминах интегралов от дифференциальных форм по гладким многообразиям. Эти интегралы определяются последовательно, от интегралов по открытым подмножествам \mathbb{R}^n к интегралам по многообразиям. Приведем набросок такого построения [2, 11].

Интегрирование по открытому подмножеству \mathbb{R}^n

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а дифференциальная форма $\omega \in \Omega^n(U)$ имеет компактный носитель⁷. Если, относительно естественного базиса \mathbb{R}^n , $\omega = \omega_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, то интеграл от ω по множеству

⁷Носитель дифференциальной формы определяется аналогично носителю функции.

U определяется равенством

$$\int_U \omega := \int_U \omega_{1\dots n}(x) dx^1 \cdots dx^n.$$

Интеграл в правой части равенства есть кратный интеграл.

Интегрирование по карте

Пусть теперь M является гладким n -мерным многообразием, а (U, φ) — гладкой картой на нем. Если $\omega \in \Omega^n(M)$ и $\text{supp } \omega \subset U$, то $\omega|_U$ имеет такой же носитель. Следовательно, $\varphi^*(\omega|_U)$ имеет компактный носитель, если это справедливо для ω .

Если многообразие M ориентировано и дифференциальная форма $\omega \in \Omega^n(U)$ имеет компактный носитель $\text{supp } \omega \subset U$, где (U, φ) — гладкая положительно ориентированная карта, то

$$\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\omega|_U).$$

Если $\text{supp } \omega \subset U \cap V$, где (U, φ) и (V, ψ) — положительно ориентированные карты, то

$$\int_U \omega = \int_V \omega.$$

Интегрирование по многообразию

Мы определили интегрирование по одной карте. Для распространения этого определения на все многообразие, используется разбиение единицы. Пусть M — ориентированное гладкое многообразие, \mathcal{A} — гладкий атлас с положительно ориентированными картами, а $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ — разбиение единицы, подчиненное \mathcal{A} . Для дифференциальной формы $\omega \in \Omega^n(M)$ с компактным носителем определим $\omega_\alpha := f_\alpha \omega$ (то есть, ω_α имеет компактный носитель в U_α). Тогда

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{U_\alpha} \omega_\alpha.$$

Правая часть равенства содержит только конечное число слагаемых, отличных от нуля, и его значение не зависит от выбора атласа и соответствующего разбиения единицы.

Теорема Стокса

Пусть M — гладкое ориентированное n -многообразие с краем, а $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ — дифференциальная $(n-1)$ -форма с компактным носителем. Тогда [2]

Теорема 10.7. (Теорема Стокса)

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega, \quad (10.6.2)$$

где $\iota_{\partial M} : \partial M \rightarrow M$ — каноническая инъекция (1.3.2).

Сокращая запись (если это не приводит к путанице), теорему Стокса представляют в виде

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Библиография

1. Введение в топологию. 2-е изд., доп. / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. — М. : Наука. Физматлит, 1995.
2. Lee John M. [Introduction to Smooth Manifolds](#). — Springer New York, 2012.
3. Nakahara Mikio. *Geometry, topology and physics*. — CRC Press, 2003.
4. Adachi Masahisa. *Embeddings and immersions*. — American Mathematical Soc., 2012.
5. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. — М. : Наука, 1987.
6. Хирш М. Дифференциальная топология. — М. : ИО НФМИ, 1999.

7. Rudolph Gerd, Schmidt Matthias. [Differential Geometry and Mathematical Physics. Part I. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems](#). — Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013.
8. Franzoni Gregorio. The klein bottle: Variations on a theme // Notices of the AMS. — 2012. — Vol. 59, no. 8. — P. 1094–1099.
9. Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M. Analysis, manifolds and physics. Part 1. Basics. — North-Holland, 1982.
10. Tu Loring W. [An Introduction to Manifolds](#). — Springer-Verlag New York, 2011.
11. Abraham Ralph, Marsden Jerrold E, Ratiu Tudor. Manifolds, tensor analysis, and applications. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 75.
12. Бурбаки Н. Алгебра. Часть 1. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М. : ГИФМЛ, 1962.
13. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. — М. : Наука, 1980.
14. Steenrod Norman Earl. The topology of fibre bundles. — Princeton University Press, 1951. — Vol. 14.
15. Husemoller Dale. [Fibre Bundles](#). — Springer New York, 1994.
16. Michal Aristotle D. Matrix and Tensor Calculus With Applications to Mechanics, Elasticity and Aeronautics. — New York: John Wiley & Sons; London: Chapman-Hall, Ltd., 1947.
17. Marsden Jerrold E, Hughes Thomas JR. Mathematical foundations of elasticity. — Courier Corporation, 1994.
18. Toupin R. A. World invariant kinematics // [Archive for Rational Mechanics and Analysis](#). — 1957. — Vol. 1, no. 1. — P. 181–211.
19. Kollmann F.G., Hackenberg H.-P. On the Algebra of Two-Point Tensors on Manifolds with Applications in Nonlinear Solid Mechanics // [ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für](#)

Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1993. — Vol. 73, no. 11. — P. 307–314.

20. Lychev S., Koifman K. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. — De Gruyter, 2018.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1. Основные определения

Пусть (G, \top) — математическая структура, в которой G — множество¹, а $\top : G \times G \rightarrow G$ — бинарная операция. В общем случае математическая структура (G, \top) может быть произвольной, но мы предполагаем, что она является группой. Если нейтральный элемент обозначить через $\mathbb{1}$, элемент, обратный к a — через a^{-1} , то справедливы следующие свойства \top :

- $\forall a, b, c \in G : a \top (b \top c) = (a \top b) \top c,$
- $\exists \mathbb{1} \in G \forall a \in G : a \top \mathbb{1} = \mathbb{1} \top a = a,$
- $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \top a^{-1} = a^{-1} \top a = \mathbb{1}.$

Биективное отображение

$$\text{inv} : G \rightarrow G, \quad a \mapsto a^{-1},$$

называется **отображением обращения**.

Пусть (G_1, \top_1) и (G_2, \top_2) — группы. Используется следующая терминология для отображений $f : G_1 \rightarrow G_2$:

¹Как правило будем предполагать, что множество G имеет мощность континуума.

- **Гомоморфизм:** $\forall a, b \in G_1 : f(a \top_1 b) = f(a) \top_2 f(b)$,
- **Изоморфизм:** биективный гомоморфизм,
- **Эндоморфизм:** $G_1 = G_2$ и f — гомоморфизм,
- **Автоморфизм:** биективный эндоморфизм.

Таким образом, гомоморфизм групп — это отображение, сохраняющее операцию, а эндоморфизм групп — это гомоморфизм группы в себя.

Пусть \mathcal{T}_G обозначает топологию на G , а \mathcal{D}_G — гладкую структуру на G .

Определение 11.1. *Группа Ли* — это математическая структура $(G, \mathcal{T}_G, \mathcal{D}_G, \top)$, в которой подструктура $(G, \mathcal{T}_G, \mathcal{D}_G)$ является гладким многообразием, а подструктура (G, \top) является группой. При этом структуры гладкого многообразия и группы согласованы следующим требованием: отображение

$$q : G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto a \top b^{-1},$$

является гладким.

В определении группы Ли предполагается, что множество $G \times G$ снабжено структурой гладкого многообразия, а q — отображение одного гладкого многообразия в другое. В этой связи, сделаем необходимые пояснения.

Топология определяется на $G \times G$ следующим образом. Совокупность

$$\mathcal{B} = \{O_1 \times O_2 \mid O_1, O_2 \in \mathcal{T}_G\}$$

является базой топологии, а открытые подмножества $G \times G$ представлены всевозможными объединениями вида

$$O = \bigcup_{O_1, O_2 \in \mathcal{V}} O_1 \times O_2,$$

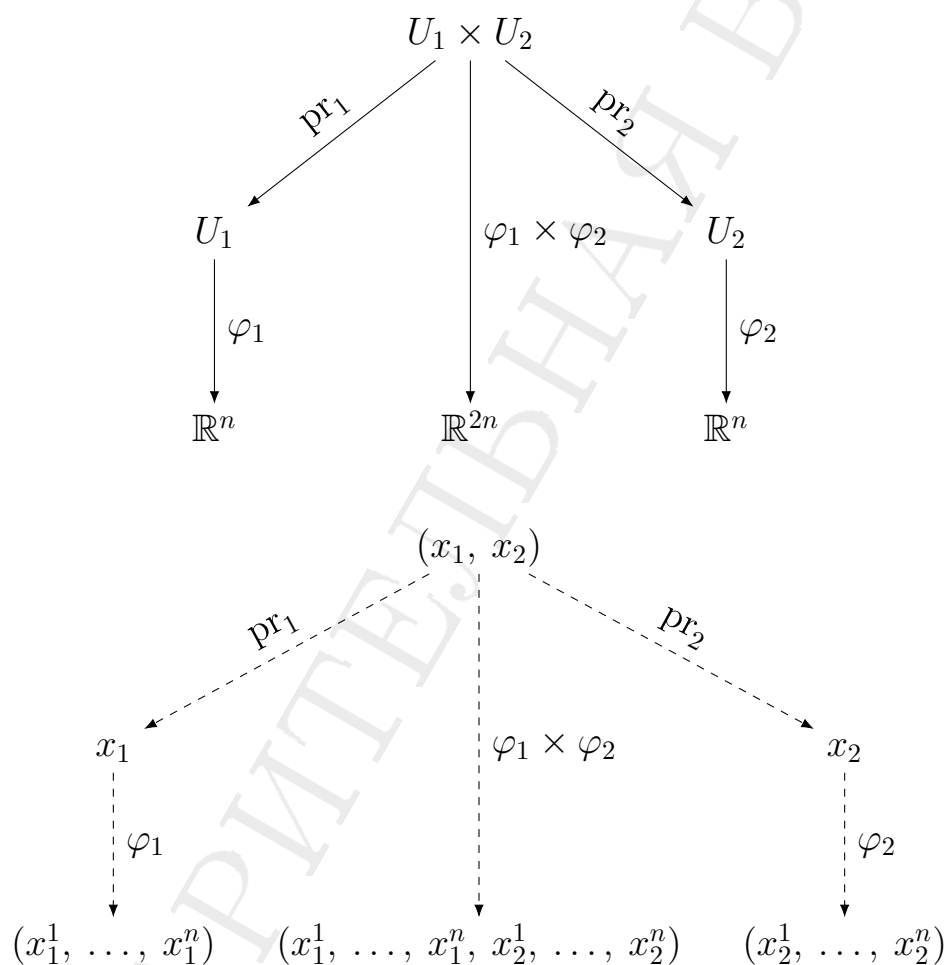
где $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}_G$.

Пусть $(p_1, p_2) \in G \times G$ — некоторая точка. Существуют гладкие карты (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) на G , такие, что $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$. Здесь U_1 , U_2 — открытые подмножества G , а $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ —

гомеоморфизмы; n — размерность G . Тогда пара $(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$ — карта на $G \times G$, координатная область которой содержит точку (p_1, p_2) . Здесь²

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi_1 \times \varphi_2(x_1, x_2) := (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)).$$

Построения иллюстрируют следующие диаграммы:



На диаграммах: отображения $pr_i : U_1 \times U_2 \rightarrow U_i$, $i = 1, 2$, обозначают проекции.

²Напомним, что если $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ и $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ — отображения, то они определяют новое отображение

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2, \quad f_1 \times f_2(x, y) = (f_1(x), f_2(y)).$$

Гладкость отображения q означает, по определению, непрерывность q и гладкость его координатного представления в окрестности любой точки области определения $G \times G$. Пусть $\mathcal{A}_G = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ — гладкий атлас на G , принадлежащий дифференциальной структуре \mathcal{D}_G . Тогда $\mathcal{A}_{G \times G} = \{(U_\alpha \times U_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi_\beta)\}_{\alpha, \beta \in I}$ — гладкий атлас на $G \times G$. Пусть теперь $(p_1, p_2) \in G \times G$ — некоторая точка. Тогда существуют индексы $\alpha, \beta, \gamma \in I$, такие, что $(p_1, p_2) \in U_\alpha \times U_\beta$ и $q(p_1, p_2) \in U_\gamma$. Следовательно, в силу непрерывности q , множество $W_{\alpha, \beta, \gamma} = (U_\alpha \times U_\beta) \cap q^{-1}(U_\gamma)$ открыто в $U_\alpha \times U_\beta$. Координатное представление q в паре карт $(U_\alpha \times U_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi_\beta)$ и $(U_\gamma, \varphi_\gamma)$ имеет вид

$$\tilde{q}_{\alpha, \beta, \gamma} = \varphi_\gamma \circ q \circ (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta)^{-1} : \varphi_\alpha \times \varphi_\beta(W_{\alpha, \beta, \gamma}) \rightarrow \varphi_\gamma(q(W_{\alpha, \beta, \gamma}))$$

и является гладким отображением открытого подмножества \mathbb{R}^{2n} в открытое подмножество \mathbb{R}^n . Конструкция $\tilde{q}_{\alpha, \beta, \gamma}$ проиллюстрирована на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} W_{\alpha, \beta, \gamma} & \xrightarrow{q} & q(W_{\alpha, \beta, \gamma}) \\ \downarrow \varphi_\alpha \times \varphi_\beta & & \downarrow \varphi_\gamma \\ \varphi_\alpha \times \varphi_\beta(W_{\alpha, \beta, \gamma}) & \xrightarrow{\tilde{q}_{\alpha, \beta, \gamma}} & \varphi_\gamma(q(W_{\alpha, \beta, \gamma})) \end{array}$$

Определение 11.2. Пусть (G_1, \mathcal{T}_1) и (G_2, \mathcal{T}_2) — группы Ли. Гомоморфизм $f : G_1 \rightarrow G_2$ называется **гомоморфизмом групп Ли**, если $f \in C^\infty(G_1; G_2)$.

То, что гомоморфизм f групп Ли является гладким отображением, означает, что он непрерывен и его координатное представление в окрестности любой точки из G_1 является гладким отображением. Пусть $\mathcal{A}_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, $\mathcal{A}_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$ — гладкие атласы на G_1 и G_2 соответственно. Для точки $p \in G_1$ существуют значения индексов $\alpha \in I$ и $\beta \in J$, такие, что $p \in U_\alpha$ и $f(p) \in V_\beta$. В силу непрерывности f , множество $W_{\alpha, \beta} = U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$ открыто в U_α . Координатное представление f в паре карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (V_β, ψ_β) имеет вид

$$\tilde{f}_{\alpha, \beta} = \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(W_{\alpha, \beta}) \rightarrow \psi_\beta(f(W_{\alpha, \beta})),$$

и является гладким отображением открытого подмножества \mathbb{R}^n в открытое подмножество \mathbb{R}^m . Здесь $n = \dim G_1$, $m = \dim G_2$. Построения иллюстрирует диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} W_{\alpha, \beta} & \xrightarrow{f} & f(W_{\alpha, \beta}) \\ \downarrow \varphi_\alpha & & \downarrow \psi_\beta \\ \varphi_\alpha(W_{\alpha, \beta}) & \xrightarrow{\tilde{f}_{\alpha, \beta}} & \psi_\beta(f(W_{\alpha, \beta})) \end{array}$$

Как показывает следующее утверждение, из гладкости отображения q вытекает гладкость групповых операций \top и inv .

Предложение 11.1. Пусть (G, \top) — группа Ли. Тогда отображения

$$\begin{aligned} \top &: G \times G \rightarrow G, \\ \text{inv} &: G \rightarrow G, \end{aligned}$$

являются гладкими.

Доказательство. Сначала покажем, что $\text{inv} \in C^\infty(G; G)$. Поскольку $\{1\} \subset G$ является 0-мерным подмногообразием G , то $\{1\} \times G \subset G \times G$ является подмногообразием $G \times G$. В этой связи, каноническая инъекция $\iota: \{1\} \times G \rightarrow G \times G$ является гладким отображением. Далее, пусть $\varphi: G \rightarrow \{1\} \times G$, $a \mapsto (1, a)$. Тогда отображение inv можно представить как композицию

$$\text{inv} = q \circ \iota \circ \varphi$$

гладких отображений. По этой причине, отображение inv является гладким.

Поскольку

$$a \top b = a \top (b^{-1})^{-1} = a \top (\text{inv}(b))^{-1} = q(a, \text{inv}(b)),$$

то

$$\top = q \circ (\text{Id}_G \times \text{inv}).$$

Отображения Id_G и inv являются гладкими, поэтому их произведение

$$\text{Id}_G \times \text{inv}: G \times G \rightarrow G \times G,$$

является гладким. Следовательно, $\top \in C^\infty(G \times G; G)$. \square

В литературе используется эквивалентное определение группы Ли, основанное на следующем Предложении [1].

Предложение 11.2. Пусть на множестве G определены структуры группы (с групповой операцией \top) и гладкого многообразия так, что отображения

$$\begin{aligned}\top &: G \times G \rightarrow G, \\ \text{inv} &: G \rightarrow G,\end{aligned}$$

являются гладкими. Тогда (G, \top) — группа Ли.

Доказательство. Нужно показать, что отображение

$$q : G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto a \top b^{-1},$$

является гладким. Поскольку

$$q(a, b) = a \top b^{-1} = a \top \text{inv}(b) = \top(a, \text{inv}(b)),$$

то

$$q = \top \circ (\text{Id}_G \times \text{inv}).$$

Согласно условию утверждения, \top и inv являются гладкими отображениями. В этой связи, $q \in C^\infty(G \times G; G)$, что завершает доказательство. \square

Таким образом, группу Ли можно эквивалентно определить как множество, снабженное структурами группы и гладкого многообразия так, что отображения

$$\begin{aligned}\top &: G \times G \rightarrow G, \\ \text{inv} &: G \rightarrow G,\end{aligned}$$

являются гладкими.

Замечание 11.1. На самом деле, в определении группы Ли достаточно потребовать гладкость \top . Гладкость inv следует тогда из теоремы об обратной функции. Более точно, справедливо утверждение [2]: пусть G — гладкое многообразие, снабженное гладкой групповой операцией \top . Тогда (G, \top) — группа Ли.

Рассмотрим групповую операцию \top более подробно. Пусть $(p_1, p_2) \in G \times G$, тогда

$$T_{(p_1, p_2)}\top : T_{(p_1, p_2)}(G \times G) \rightarrow T_{p_1\top p_2}G.$$

Здесь $T_{(p_1, p_2)}(G \times G)$ — касательное пространство к $G \times G$. Определим соответствие

$$\alpha : T_{(p_1, p_2)}(G \times G) \rightarrow T_{p_1}G \oplus T_{p_2}G, \quad \alpha(v) = (T_{p_1}\pi_1(v), T_{p_2}\pi_2(v)), \quad (11.1.1)$$

где π_i — проекции. Их координатные представления имеют вид

$$\tilde{\pi}_i(x_1^1, \dots, x_1^n, x_2^1, \dots, x_2^n) = (x_i^1, \dots, x_i^n).$$

Производные отображения от этих функций в натуральном базисе представлены матрицами размера $n \times (2n)$:

$$\tilde{\pi}'_1 = (E|0), \quad \tilde{\pi}'_2 = (0|E),$$

где E — единичная $n \times n$ матрица, а 0 — нулевая $n \times n$ матрица. В этой связи, если в натуральном базисе касательный вектор v представлен компонентами (v^1, \dots, v^{2n}) , то вектор $\alpha(v)$ представлен компонентами $((v^1, \dots, v^n), (v^{n+1}, \dots, v^{2n}))$. Соответствие α является каноническим изоморфизмом [1] и, в этой связи, используется отождествление

$$T_{(p_1, p_2)}(G \times G) \cong T_{p_1}G \oplus T_{p_2}G.$$

Таким образом, касательный вектор v из $T_{(p_1, p_2)}(G \times G)$ рассматривается как пара (v_1, v_2) касательных векторов $v_1 \in T_{p_1}G$ и $v_2 \in T_{p_2}G$.

Для отображения, касательного к \top , справедливо утверждение:

Предложение 11.3.

$$T_{(p_1, p_2)}\top(v_1, v_2) = (T_{p_1}R_{p_2})v_1 + (T_{p_2}L_{p_1})v_2, \quad (11.1.2)$$

для любых $(v_1, v_2) \in T_{(p_1, p_2)}(G \times G) \cong T_{p_1}G \oplus T_{p_2}G$. Здесь

$$\begin{aligned} L_a : G &\rightarrow G, & L_a(b) &:= a\top b, \\ R_a : G &\rightarrow G, & R_a(b) &:= b\top a. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $f \in C^\infty(G)$, тогда, поскольку $\top(p_1, p_2) = R_{p_2}(p_1)$ и $\top(p_1, p_2) = L_{p_1}(p_2)$, то

$$\begin{aligned} (T_{(p_1, p_2)}\top(v_1, v_2))(f) &= (v_1, v_2)(f \circ \top) = \\ &= v_1(f \circ R_{p_2}) + v_2(f \circ L_{p_1}) = \\ &= (T_{p_1}R_{p_2})v_1(f) + (T_{p_2}L_{p_1})v_2(f). \end{aligned}$$

□

Пусть $a \in G$. Отображения

$$\begin{aligned} L_a : G &\rightarrow G, & L_a(b) &:= a\top b, \\ R_a : G &\rightarrow G, & R_a(b) &:= b\top a, \end{aligned}$$

использованные в доказанном предложении, называются, соответственно, **левым сдвигом** и **правым сдвигом** и определяют действие группы Ли на себя. Для $a, b \in G$ справедливы следующие равенства:

$$L_a \circ L_b = L_{a\top b}, \quad R_a \circ R_b = R_{b\top a}, \quad L_a \circ R_a = R_b \circ L_a.$$

Из равенств вытекает, что левый и правый сдвиги являются диффеоморфизмами G на себя, причем, $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ и $(R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$.

Теперь мы можем доказать справедливость следующего утверждения [1].

Предложение 11.4. *Если (G, \top) — группа, снабженная структурой гладкого многообразия, в которой \top — гладкое отображение, то отображение*

$$\text{inv} : G \rightarrow G$$

является гладким.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное отображение

$$F : G \times G \rightarrow G \times G, \quad F(g, h) = (g, g\top h).$$

Покажем, что F является диффеоморфизмом. Прежде всего, F биективно. Для этого достаточно предъявить обратную биекцию. Пусть

$$H : G \times G \rightarrow G \times G, \quad H(g, h) = (g, g^{-1}\top h),$$

тогда

$$H \circ F(g, h) = H(g, g \top h) = (g, g^{-1} \top g \top h) = (g, h),$$

поэтому $H \circ F = \text{Id}_{G \times G}$, и

$$F \circ H(g, h) = F(g, g^{-1} \top h) = (g, g^{-1} \top g \top h) = (g, h),$$

откуда $F \circ H = \text{Id}_{G \times G}$. Таким образом, F биективно и $F^{-1} = H$.

По построению, F является гладким отображением. Касательное отображение к F имеет вид $T_{(p_1, p_2)}F : T_{p_1}G \oplus T_{p_2}G \rightarrow T_{p_1}G \oplus T_{p_1 \top p_2}G$,

$$(v_1, v_2) \mapsto (v_1, (T_{p_1}R_{p_2})v_1 + (T_{p_2}L_{p_1})v_2).$$

Это линейное биективное отображение, поскольку таковыми являются касательные отображения $T_{p_1}R_{p_2}$ и $T_{p_2}L_{p_1}$. Таким образом, в силу теоремы об обратной функции³, отображение F является локальным диффеоморфизмом. Поскольку F биективно, то F — диффеоморфизм (глобально). Тогда отображение обращения inv , будучи композицией

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{\iota} & G \times G & \xrightarrow{F^{-1}} & G \times G & \xrightarrow{\text{pr}_2} & G \times G \\ & & & & \text{inv} & & \end{array}$$

$$\text{inv} : g \mapsto (g, \mathbf{1}) \mapsto (g, g^{-1}) \mapsto g^{-1},$$

является гладким отображением. □

Левый и правый сдвиги порождают глобальные тривиализации касательного расслоения TG [2]:

Предложение 11.5. Пусть (G, \top) — группа Ли. Отображения

$$\chi_L, \chi_R : G \times T_{\mathbf{1}}G \rightarrow TG, \quad \chi_L(a, u) := TL_a u, \quad \chi_R(a, u) := TR_a u,$$

являются глобальными тривиализациями TG .

³Теорема об обратной функции формулируется следующим образом [1]. Пусть M, N — гладкие многообразия, $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Если точка $p \in M$ такова, что касательное отображение $T_p f$ обратимо, то существуют связные окрестности U_0 точки p и V_0 точки $f(p)$, такие, что $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Докажем утверждение для χ_L . Случай χ_R рассматривается аналогично. Отображение χ_L является композицией

$$\chi_L = T\tau \circ \alpha^{-1} \circ (s_0 \times \iota),$$

$$G \times T_1G \xrightarrow{s_0 \times \iota} TG \oplus TG \xrightarrow{\alpha^{-1}} T(G \times G) \xrightarrow{T\tau} TG$$

χ_L

$$\chi_L : (a, u) \mapsto (0_a, u_1) \mapsto \alpha^{-1}(0_a, u_1) \mapsto TL_a u,$$

где $s_0 : G \rightarrow TG$ — нулевое сечение, $\iota : T_1G \rightarrow G$ — каноническая инъекция, α — изоморфизм (11.1.1). В силу формулы (11.1.2),

$$T\tau(0_a, u_1) = T_1L_a u.$$

Как композиция гладких отображений, χ_L является гладким. По построению, оно действует послойно и его сужение на каждый слой является линейным. Поскольку оно биективно, то оно определяет локальную тривиализацию касательного расслоения. Но поскольку локальная тривиализация задана на всем G , то это — глобальная тривиализация. \square

Таким образом, касательное расслоение TG к группе Ли G может быть представлено в виде произведения $G \times T_1G$ — «цилиндра» с основанием G и образующей, составленной из копий T_1G .

Гомоморфизм групп Ли можно представить в виде декомпозиции с левыми сдвигами:

Предложение 11.6. Пусть (G, τ_G) , (H, τ_H) — группы Ли, а $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли. Тогда для любого $a \in G$,

$$\varphi = L_{\varphi(a)} \circ \varphi \circ L_{a^{-1}}.$$

Доказательство. Пусть $b \in G$, тогда

$$L_{\varphi(a)} \circ \varphi \circ L_{a^{-1}}(b) = L_{\varphi(a)} \circ \varphi(a^{-1}\tau_G b) = \varphi(a)\tau_H \varphi(a^{-1})\tau_H \varphi(b) = \varphi(b),$$

что и требовалось доказать. \square

Доказанное утверждение влечет свойство перестановочности касательного отображения к левому сдвигу с касательным отображением к гомоморфизму:

Предложение 11.7. Пусть $(G, \top_G), (H, \top_H)$ — группы Ли, а $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли. Тогда для любого $a \in G$,

$$T\varphi \circ TL_a = TL_{\varphi(a)} \circ T\varphi.$$

Доказательство. Из равенства $\varphi = L_{\varphi(a)} \circ \varphi \circ L_{a^{-1}}$ следует равенство

$$\varphi \circ L_a = L_{\varphi(a)} \circ \varphi.$$

Применяя операцию T к обеим частям полученного равенства и используя свойства касательного отображения, получаем желаемый результат. \square

2. Примеры

Рассмотрим примеры групп Ли.

Пример 11.1. Пусть V — вещественное векторное пространство размерности n . Определение нормы на V задает индуцированную (метрическую) топологию на нем и все такие топологии совпадают. Таким образом, V является топологическим пространством. Определим картирование на нем.

Пусть (e_1, \dots, e_n) — базис V . Он определяет изоморфизм

$$E : \mathbb{R}^n \rightarrow V, \quad E(x) = x^i e_i,$$

векторных пространств. Но \mathbb{R}^n — тоже топологическое пространство, с топологией, индуцированной евклидовой метрикой. Будучи линейными отображениями конечномерных нормированных векторных пространств, E и E^{-1} являются непрерывными. В этой связи, отображение E — гомеоморфизм, и пара (V, E^{-1}) представляет карту, полностью покрывающую V . Следовательно, V является n -мерным топологическим многообразием.

Пусть теперь $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ — другой базис V , а

$$\tilde{E} : \mathbb{R}^n \rightarrow V, \quad \tilde{E}(x) = \tilde{x}^i \tilde{e}_i,$$

представляет соответствующий гомеоморфизм. Поскольку $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ и (e_1, \dots, e_n) — базисы одного и того же векторного пространства,

то они связаны между собой посредством обратимой матрицы $[A_{\cdot i}^j]$, такой, что

$$e_i = A_{\cdot i}^j \tilde{e}_j.$$

Рассмотрим гомеоморфизм пересчета между картами (V, E^{-1}) и (V, \tilde{E}^{-1}) :

$$\tilde{E}^{-1} \circ E(x) = \tilde{E}^{-1}(x^i e_i) = \tilde{E}^{-1}(x^i A_{\cdot i}^j \tilde{e}_j) = \tilde{x},$$

где $\tilde{x}^j = A_{\cdot i}^j x^i$. Отображение $x \mapsto \tilde{x}$ является линейным и обратимым, то есть, диффеоморфизмом. В этой связи, любые две карты вида (V, E^{-1}) и (V, \tilde{E}^{-1}) являются C^∞ — согласованными. Совокупность всех таких карт образует атлас, характеризующий гладкую структуру — стандартную гладкую структуру на V .

Множество V со стандартной гладкой структурой и групповой структурой $(V, +)$ является группой Ли.

Далее $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ обозначает множество всех вещественных $m \times n$ матриц. Используется сокращенное обозначение $M_n(\mathbb{R}) := M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Лемма 11.1. *Отображение*

$$\det_n : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

является непрерывным.

Доказательство. В связи с тем, что $M_n(\mathbb{R})$ — конечномерное векторное пространство, для доказательства непрерывности отображения \det_n достаточно взять в нем какую-либо норму. Пусть для $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$. Норма на $M_n(\mathbb{R})$ обладает следующим свойством. Если e_j — элемент \mathbb{R}^n , где на j -м месте стоит 1, а на остальных стоит 0, то для $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\| \geq \|Ae_j\| = \sqrt{(a_{1j})^2 + \dots + (a_{nj})^2} \geq |a_{ij}|,$$

при любом $i \in \{1, \dots, n\}$. Таким образом, $\|A\| \geq |a_{ij}|$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов $M_n(\mathbb{R})$, сходящаяся к $A \in M_n(\mathbb{R})$. Покажем, что тогда числовая последовательность $\{\det_n X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $\det_n A$. Поскольку

$$\|X^{(n)} - A\| \leq |x_{ij}^{(n)} - a_{ij}|,$$

и $\|X^{(n)} - A\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то мы имеем, что $x_{ij}^{(n)} \rightarrow a_{ij}$. По определению,

$$\det_n X^{(n)} = (-1)^{|\sigma|} x_{1, \sigma(1)}^{(n)} \cdots x_{n, \sigma(n)}^{(n)},$$

поэтому, используя то, что $x_{ij}^{(n)} \rightarrow a_{ij}$, и арифметические свойства предела числовой последовательности, приходим к

$$\det_n X^{(n)} \rightarrow (-1)^{|\sigma|} a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)} = \det_n A.$$

Тем самым доказана непрерывность отображения \det_n . \square

Пример 11.2. Поскольку множество $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ — вещественное векторное пространство, то оно является гладким многообразием размерности mn . Далее, как установлено в доказанной Лемме, отображение \det_n является непрерывным. Следовательно, множество

$$\mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) := \det_n^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\},$$

будучи прообразом открытого множества, открыто в $M_n(\mathbb{R})$. В этой связи, $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ — гладкое многообразие размерности n^2 . Оно является группой относительно операции матричного умножения (общая линейная группа).

Произведение AB матриц $A, B \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ определяет гладкое отображение $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, поскольку элементы матрицы AB являются полиномами. Отображение $\mathrm{inv} : \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ является гладким в силу правила Крамера. В этой связи, общая линейная группа $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ является группой Ли.

Пример 11.3. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Ему соответствует группа линейных автоморфизмов (обратимых линейных отображений V на себя) $\mathrm{GL}(V)$ с групповой операцией, порождаемой композицией функций. Любой базис V определяет изоморфизм $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(\dim V; \mathbb{R})$. По этой причине, $\mathrm{GL}(V)$ — группа Ли.

Пример 11.4. Определим множество $GL^+(n; \mathbb{R})$ равенством

$$GL^+(n; \mathbb{R}) := \det^{-1}(]0, +\infty[) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}.$$

Будучи открытым подмножеством $GL(n; \mathbb{R})$, оно является гладким многообразием размерности n^2 . Поскольку

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (\det A)(\det B), \\ \det A^{-1} &= (\det A)^{-1}, \end{aligned}$$

где $A, B \in GL^+(n; \mathbb{R})$ то $GL^+(n; \mathbb{R})$ — группа. Групповые операции, будучи ограничениями исходных, являются гладкими. В этой связи, $GL^+(n; \mathbb{R})$ — группа Ли.

Пример 11.5. Группы

$$\begin{aligned} SL(n; \mathbb{R}) &:= \{A \in GL(n; \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}, \\ O(n) &:= \{A \in GL(n; \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}, \end{aligned}$$

называются, соответственно, унимодулярной и ортогональной группами. Обе они являются группами Ли. Мы докажем это для случая ортогональной группы.

Доказательство основано на следующем утверждении (теорема о множестве уровня [2]). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, а $c \in \mathbb{R}^m$ — регулярное значение f , такое, что множество уровня $M := f^{-1}(\{c\})$ непусто. Тогда M является гладким многообразием размерности $n - m$. Дадим необходимые пояснения. Точка $x \in U$ называется регулярной точкой f , если $\text{rank}(f'(x)) = m$. Точка $c \in \mathbb{R}^m$ называется регулярным значением f , если все точки множества $f^{-1}(\{c\})$ регулярны.

Пусть $S_n(\mathbb{R})$ обозначает линейное подпространство $M_n(\mathbb{R})$ симметричных матриц. Тогда $O(n)$ является множеством уровня $f^{-1}(\{\mathbb{1}\})$ отображения

$$f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = A^T A.$$

Покажем, что $\mathbb{1}$ — регулярное значение f . Пусть $A, X \in M_n(\mathbb{R})$, тогда

$$f(A + X) = (A + X)^T(A + X) = f(A) + f'(A)X,$$

где $f'(A)X = A^T X + X^T A$. Если $f(A) = \mathbf{1}$, то для $B \in S_n(\mathbb{R})$ будем иметь

$$f'(A)(AB) = A^T AB + B^T A^T A = 2B,$$

что влечет сюръективность $f'(A)$. Таким образом, $\mathbf{1}$ — регулярное значение f и $O(n)$ — гладкое многообразие размерности $n(n-1)/2$. Поскольку сужение гладких матричных операций на это многообразие является гладким то $O(n)$ — группа Ли.

Пример 11.6. Специальная ортогональная группа $SO(n)$ является подгруппой $O(n)$, состоящей из элементов с единичным определителем:

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n; \mathbb{R}),$$

и также является группой Ли. В случае $n = 2$ специальная ортогональная группа имеет вид

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Действительно, пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1.$$

То есть,

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1, \\ b^2 + d^2 &= 1, \\ ad - bc &= 1, \\ ab + cd &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что точки (a, c) и (b, d) принадлежат единичной окружности, поэтому

$$a = \cos \alpha, \quad c = \sin \alpha, \quad b = \cos \beta, \quad d = \sin \beta,$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Подставляя в последние два уравнения, получим

$$\begin{aligned} \cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha &= 1, \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta &= 0, \end{aligned}$$

откуда следуют равенства

$$\sin(\beta - \alpha) = 1, \quad \cos(\beta - \alpha) = 0.$$

В этой связи, $\beta - \alpha \in \pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}$. Выбирая $\beta - \alpha = \pi/2$, получаем

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

где $t = -\alpha$.

Пример 11.7. Пусть (G_1, \top_1) и (G_2, \top_2) — группы Ли. Определим групповую структуру на $G_1 \times G_2$ следующим образом. Пусть

$$\top : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \rightarrow G_1 \times G_2, \quad (a_1, a_2) \top (b_1, b_2) := (a_1 \top_1 b_1, a_2 \top_2 b_2).$$

Операция \top удовлетворяет всем аксиомам группы. Действительно, пусть $a_1, b_1, c_1 \in G_1$ и $a_2, b_2, c_2 \in G_2$, тогда

$$\begin{aligned} ((a_1, a_2) \top (b_1, b_2)) \top (c_1, c_2) &= \\ &= (a_1 \top_1 b_1, a_2 \top_2 b_2) \top (c_1, c_2) = (a_1 \top_1 b_1 \top_1 c_1, a_2 \top_2 b_2 \top_2 c_2), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) \top ((b_1, b_2) \top (c_1, c_2)) &= \\ &= (a_1, a_2) \top (b_1 \top_1 c_1, b_2 \top_2 c_2) = (a_1 \top_1 b_1 \top_1 c_1, a_2 \top_2 b_2 \top_2 c_2), \end{aligned}$$

где использованы свойства ассоциативности операций \top_1 и \top_2 . Таким образом, \top — ассоциативная операция. Далее, пусть $a_1 \in G_1$ и $a_2 \in G_2$, тогда

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) \top (\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2) &= (a_1 \top_1 \mathbf{1}_1, a_2 \top_2 \mathbf{1}_2) = (a_1, a_2), \\ (\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2) \top (a_1, a_2) &= (\mathbf{1}_1 \top_1 a_1, \mathbf{1}_2 \top_2 a_2) = (a_1, a_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $(\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2)$ является нейтральным элементом относительно \top . Наконец, пусть $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$, тогда

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) \top (a_1^{-1}, a_2^{-1}) &= (a_1 \top_1 a_1^{-1}, a_2 \top_2 a_2^{-1}) = (\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2), \\ (a_1^{-1}, a_2^{-1}) \top (a_1, a_2) &= (a_1^{-1} \top_1 a_1, a_2^{-1} \top_2 a_2) = (\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2). \end{aligned}$$

Мы показали, что элемент (a_1, a_2) обратим, причем, $(a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1})$. В этой связи, $(G_1 \times G_2, \top)$ — группа.

Структуры гладкого многообразия, определенные на множествах G_1 и G_2 , индуцируют гладкую структуру на множество $G_1 \times G_2$. В этой структуре отображение \top является гладким. Действительно, \top можно представить в виде

$$(a_1, a_2)\top(b_1, b_2) = (\top_1 \circ (\text{pr}_1 \times \text{pr}_1)((a_1, a_2), (b_1, b_2)), \top_2 \circ (\text{pr}_2 \times \text{pr}_2)((a_1, a_2), (b_1, b_2))), \blacksquare$$

где $\text{pr}_i : G_1 \times G_2 \rightarrow G_i$, $i = 1, 2$, — проекции. Таким образом,

$$\top = [\top_1 \circ (\text{pr}_1 \times \text{pr}_1)] \times [\top_2 \circ (\text{pr}_2 \times \text{pr}_2)].$$

Проекции pr_1 , pr_2 и операции \top_1 , \top_2 являются гладкими, что влечет гладкость \top . Тем самым мы показали, что $(G_1 \times G_2, \top)$ — группа Ли.

Пример 11.8. Множество $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является группой Ли относительно операции умножения.

Рассмотрим примеры гомоморфизмов групп Ли.

Пример 11.9. Отображение

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad \exp(t) := e^t,$$

является гомоморфизмом групп Ли $(\mathbb{R}, +)$ и (\mathbb{R}^*, \cdot) .

Пример 11.10. Отображение

$$\det : \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$$

является гомоморфизмом мультипликативных групп Ли.

3. Левоинвариантные векторные поля

Определение 11.3. Пусть (G, \top) — группа Ли. Векторное поле $X \in \text{Vec}(G)$ называется *левоинвариантным*, если

$$\forall a \in G : (L_a)_* X = X.$$

Здесь $(L_a)_*$ — «pushforward» векторного поля, определяемый равенством

$$(L_a)_*X := TL_a \circ X \circ (L_a)^{-1}.$$

Следующая диаграмма иллюстрирует действие операции «pushforward»:

$$\begin{array}{ccc} G & \xleftarrow{(L_a)^{-1}} & G \\ \downarrow X & & \downarrow f_*X \\ TG & \xrightarrow{TL_a} & TG \end{array}$$

Пусть $a, b \in G$, тогда $(L_a)^{-1}(a \top b) = b$. Следовательно,

$$[(L_a)_*X]|_{a \top b} = TL_a X_b,$$

и условие левой инвариантности сводится к

$$TL_a X_b = X_{a \top b}.$$

Полагая $b = \mathbb{1}$, приходим к равенству

$$\forall a \in G : X_a = T_{\mathbb{1}}L_a X_{\mathbb{1}}.$$

В локальных координатах на G полученное равенство имеет вид

$$X_a^i = \frac{\partial (a \top b)^i}{\partial b^j} \Big|_{b=\mathbb{1}} X_{\mathbb{1}}^j.$$

4. Алгебра Ли группы Ли

Приведем необходимые определения, касающиеся алгебры Ли.

Определение 11.4. *Алгебра Ли над \mathbb{R} — это векторное пространство \mathfrak{g} над \mathbb{R} , снабженное билинейным отображением*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$$

удовлетворяющим следующим аксиомам:

- (1) *антисимметричность*: $\forall A \in \mathfrak{g} : [A, A] = 0$,
- (2) *тождество Якоби*: $\forall A, B, C \in \mathfrak{g} : [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

Определение 11.5. *Гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ — это линейное отображение $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, удовлетворяющее условию:*

$$\forall A, B \in \mathfrak{g} : \varphi([A, B]) = [\varphi(A), \varphi(B)].$$

Определение 11.6. *Пусть \mathfrak{g} — алгебра Ли. Подалгебра Ли — это векторное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, такое, что*

$$\forall A, B \in \mathfrak{h} : [A, B] \in \mathfrak{h}.$$

Пусть M — гладкое многообразие. Рассмотрим множество $\text{Vec}(M)$ гладких векторных полей на M . Операции сложения, умножения на скаляр и поточечного умножения на элементы кольца $C^\infty(M)$ гладких скалярнозначных функций превращают $\text{Vec}(M)$ в модуль над $C^\infty(M)$. Определена скобочная операция (скобка Ли)

$$[\cdot, \cdot] : \text{Vec}(M) \times \text{Vec}(M) \rightarrow \text{Vec}(M), \quad [X, Y](f) := X(Yf) - Y(Xf),$$

которая удовлетворяет условиям антисимметричности и тождеству Якоби. В этой связи, $\text{Vec}(M)$ является алгеброй Ли относительно скобки Ли.

Скобка Ли коммутирует с диффеоморфизмом в следующем смысле.

Предложение 11.8. *Пусть $f : M \rightarrow N$ — диффеоморфизм между гладкими многообразиями M и N . Тогда*

$$\forall X, Y \in \text{Vec}(M) : f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y].$$

Доказательство. Будем использовать эквивалентное определение «pushforward»: ■

$$\forall g \in C^\infty(M) : f_*X(g) = X(g \circ f) \circ f^{-1}.$$

Для $X, Y \in \text{Vec}(M)$ и $g \in C^\infty(M)$ справедливо равенство

$$f_*[X, Y](g) = [X, Y](g \circ f) \circ f^{-1} = X(Y(g \circ f)) \circ f^{-1} - Y(X(g \circ f)) \circ f^{-1}.$$

С другой стороны,

$$[f_*X, f_*Y](g) = f_*X(f_*Y(g)) - f_*Y(f_*X(g)).$$

Но

$$\begin{aligned} f_*X(f_*Y(g)) &= X(f_*Y(g) \circ f) \circ f^{-1} = \\ &= X(Y(g \circ f) \circ f^{-1} \circ f) \circ f^{-1} = X(Y(g \circ f)) \circ f^{-1}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f_*Y(f_*X(g)) &= Y(f_*X(g) \circ f) \circ f^{-1} = \\ &= Y(X(g \circ f) \circ f^{-1} \circ f) \circ f^{-1} = Y(X(g \circ f)) \circ f^{-1}, \end{aligned}$$

поэтому $f_*[X, Y](g) = [f_*X, f_*Y](g)$. Из произвольности g отсюда вытекает желаемое равенство. \square

Пусть теперь G — алгебра Ли, а $\mathfrak{g} \subset \text{Vec}(G)$ — множество всех левоинвариантных векторных полей на G . Оно является векторным подпространством $\mathfrak{X}(G)$. Более того, оно является подалгеброй Ли алгебры $\text{Vec}(G)$ [2]:

Предложение 11.9. *Левоинвариантные векторные поля на G образуют подалгебру Ли алгебры $\text{Vec}(G)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $X, Y \in \mathfrak{g}$, то $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. Пусть $a \in G$. Поскольку L_a — диффеоморфизм, то мы можем использовать равенство

$$(L_a)_*[X, Y] = [(L_a)_*X, (L_a)_*Y].$$

Но $(L_a)_*X = X$, $(L_a)_*Y = Y$, поэтому

$$(L_a)_*[X, Y] = [X, Y].$$

Следовательно, $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. Это означает, что \mathfrak{g} — подалгебра Ли алгебры $\text{Vec}(G)$. \square

Определение 11.7. *Алгебра Ли \mathfrak{g} левоинвариантных векторных полей на G называется **алгеброй Ли группы G** .*

Хотя алгебра $\text{Vec}(G)$, в общем случае, бесконечномерна, ее подалгебра \mathfrak{g} всегда имеет конечную размерность, что вытекает из следующего Предложения [2]:

Предложение 11.10. *Отображение*

$$f : \mathfrak{g} \rightarrow T_1G, \quad X \mapsto X_1,$$

является каноническим изоморфизмом векторных пространств.

Доказательство. (1) **Линейность.** Если $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} f(X + Y) &= (X + Y)_1 = X_1 + Y_1 = f(X) + f(Y), \\ f(\lambda X) &= (\lambda X)_1 = \lambda X_1 = \lambda f(X). \end{aligned}$$

Тем самым, линейность f доказана.

(2) **Инъективность.** Пусть $f(X) = f(Y)$, тогда $X_1 = Y_1$ и для любого $a \in G$,

$$X_a = TL_a X_1 = TL_a Y_1 = Y_a,$$

что влечет $X = Y$.

(3) **Сюръективность.** Пусть $u \in T_1G$, а $\chi_L : G \times T_1G \rightarrow TG$ — тривиализация TG ; $\chi_L(a, X) = TL_a X$. Рассмотрим отображение

$$X : G \rightarrow TG, \quad a \mapsto \chi_L(a, u).$$

Оно является векторным полем. Далее, для $b \in G$,

$$T_b L_a (X|_b) = T_b L_a \circ T|_1 L_b (u) = T_1 (L_a \circ L_b)(u) = T_1 L_{a \circ b}(u) = X_{a \circ b},$$

что влечет $X \in \mathfrak{g}$. Наконец,

$$X_1 = TL_1(u) = T\text{Id}_G u = u,$$

и потому $f(X) = u$.

Из рассуждений (1)–(3) следует, что f — изоморфизм. \square

Таким образом, $\mathfrak{g} \cong T_1G$ и, следовательно, $\dim \mathfrak{g} = \dim G$. Дадим интерпретацию полученному равенству. Элементы $\text{Vec}(G)$ являются инфинитезимальными генераторами кривых на G , а, значит, и потоков. Ограничиваясь левоинвариантными генераторами, мы можем сказать, что достаточно всего лишь $\dim G$ линейно независимых левоинвариантных генераторов для того, чтобы покрыть G сетями кривых. Любой другой левоинвариантный генератор порождает сеть кривых, являющуюся, в определенном смысле, наложением «искажений» «базисных» сетей кривых.

Пусть \mathfrak{g} — алгебра Ли над G , а (e_1, \dots, e_n) — базис \mathfrak{g} . Тогда

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^{\cdot k} e_k, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Определение 11.8. Числа $c_{ij}^{\cdot k}$ называются **структурными коэффициентами** \mathfrak{g} в заданном базисе.

Предложение 11.11. Структурные коэффициенты удовлетворяют соотношениям:

- $c_{ij}^{\cdot k} + c_{ji}^{\cdot k} = 0$, где $i, j, k = 1, \dots, n$,
- $c_{ij}^{\cdot k} c_{kl}^{\cdot m} + c_{jl}^{\cdot k} c_{ki}^{\cdot m} + c_{li}^{\cdot k} c_{kj}^{\cdot m} = 0$, где $i, j, l, m = 1, \dots, n$.

5. Экспоненциальное отображение

Приведем вспомогательные определения и утверждения. Пусть M — гладкое многообразие.

Определение 11.9. *Продолжение интегральной кривой* векторного поля X — это интегральная кривая $\tilde{\gamma}$ поля X , являющаяся продолжением γ в теоретико-множественном смысле. Интегральная кривая называется **максимальной**, если она не допускает продолжения. Она называется **полной**, если $I = \mathbb{R}$.

Векторное поле называется **полным**, если все его максимальные интегральные кривые полны.

Предложение 11.12. Пусть M — многообразие, а $X \in \mathfrak{X}(M)$. Для любой точки $t \in M$ существует единственная максимальная интегральная кривая $\gamma_t : I_t \rightarrow M$ поля X , такая, что $\gamma_t(0) = t$.

В случае группы Ли справедливо следующее Предложение

Предложение 11.13. *Каждое левоинвариантное векторное поле является полным.*

Доказательство приведенных Предложений можно найти в [2]. Таким образом, элементы \mathfrak{g} генерируют интегральные кривые $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ на G . Эти кривые могут быть интерпретированы как последовательности инфинитезимальных действий группы Ли на себя.

Определение 11.10. *Пусть D — окрестность $\{0\} \times M$ в $\mathbb{R} \times M$, а $\Phi : D \rightarrow M$ — гладкое отображение. Для $m \in M$ и $t \in \mathbb{R}$ обозначим*

$$\mathcal{D}_m = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, m) \in D\}, \quad \mathcal{D}_t = \{m \in M \mid (t, m) \in D\},$$

и пусть $\Phi_m : \mathcal{D}_m \rightarrow M$ и $\Phi_t : \mathcal{D}_t \rightarrow M$ обозначают отображения, определенные равенствами

$$\Phi_m(t) = \Phi_t(m) = \Phi(t, m).$$

Отображение Φ называется **поток** на M , если:

- (i) $\Phi_{t=0} = \text{Id}_M$,
- (ii) если $(s, m) \in D$ и $(t, \Phi_s(m)) \in D$, то $(s+t, m) \in D$ и

$$\Phi_t(\Phi_s(m)) = \Phi_{t+s}(m),$$

- (iii) \mathcal{D}_m — связно (следовательно, открытый интервал) для любого $m \in M$,
- (iv) $\Phi_t(D_t) \subset D_{-t}$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 11.11. *Поток называется **максимальным**, если его нельзя продолжить на отображение, являющееся потоком. Поток называется **полным**, если $D = \mathbb{R} \times M$.*

Пусть $X \in \text{Vec}(M)$, тогда положим

$$D = \bigcup_{m \in M} I_m \times \{m\},$$

и определим отображение

$$\Phi : D \rightarrow M, \quad \Phi(t, m) = \gamma_m(t),$$

где $\gamma_m : I_m \rightarrow M$ — максимальная интегральная кривая векторного поля X , проходящая через m .

Предложение 11.14. *Соответствие $\Phi \mapsto X$ является биекцией между векторными полями и максимальными потоками на M . Полным векторным полям соответствуют полные потоки.*

Доказательство см. в [2]. Поток, соответствующий векторному полю X , обозначим через Φ^X .

Определение 11.12. *Пусть G — группа Ли. Экспоненциальное отображение G определяется как*

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad \exp(X) = \Phi_1^X(\mathbf{1}).$$

Свойства экспоненциального отображения вытекают из определения потока:

- Поскольку $\Phi_t^0 = \text{Id}_G$, то

$$\exp(0) = \mathbf{1}.$$

- Для $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\exp((t + s)X) = \exp(tX) \exp(sX),$$

$$\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}.$$

Предложение 11.15. *Экспоненциальное отображение является гладким. Оно индуцирует диффеоморфизм между некоторой окрестностью 0 в \mathfrak{g} и некоторой окрестностью $\mathbf{1}$ в G .*

Предложение 11.16. *Для $X, Y \in \mathfrak{g}$ с $[X, Y] = 0$ справедливо равенство*

$$\exp(X) \exp(Y) = \exp(Y) \exp(X) = \exp(X + Y).$$

6. Представление групп и алгебр Ли

Предложение 11.17. *Гомоморфизм групп Ли индуцирует гомоморфизм ассоциированных с ними алгебр Ли.*

Приведем набросок доказательства. Пусть G, H — группы Ли, а $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ — соответствующие им алгебры Ли. Пусть, кроме того, $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли. Поскольку $\varphi(\mathbf{1}_G) = \mathbf{1}_H$, то $T_{\mathbf{1}_G}\varphi : T_{\mathbf{1}_G}G \rightarrow T_{\mathbf{1}_H}H$. Как показано в Предложении 5, отображения

$$\begin{aligned} f_G : \mathfrak{g} &\rightarrow T_{\mathbf{1}_G}G, & X &\mapsto X_{\mathbf{1}_G}, \\ f_H : \mathfrak{h} &\rightarrow T_{\mathbf{1}_H}H, & Y &\mapsto Y_{\mathbf{1}_H}, \end{aligned}$$

являются изоморфизмами. Тогда определено отображение⁴

$$d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}, \quad d\varphi = f_H^{-1} \circ T_{\mathbf{1}_G}\varphi \circ f_G.$$

Отображение $d\varphi$ является искомым гомоморфизмом алгебр Ли, индуцированным φ . Построения иллюстрируются диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f_G} & T_{\mathbf{1}_G}G & \xrightarrow{T_{\mathbf{1}_G}\varphi} & T_{\mathbf{1}_H}H & \xrightarrow{f_H^{-1}} & \mathfrak{h} \\ & & & & \searrow d\varphi & & \\ & & & & & & \end{array}$$

Получим другое представление для $d\varphi$. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, тогда $f_G(X) = X_{\mathbf{1}_G}$ и $T_{\mathbf{1}_G}\varphi \circ f_G(X) = T_{\mathbf{1}_G}\varphi(X_{\mathbf{1}_G}) \in T_{\mathbf{1}_H}H$. Обозначим $Y_{\mathbf{1}_H} = T_{\mathbf{1}_G}\varphi(X_{\mathbf{1}_G})$. По определению $d\varphi$, придем к равенству $d\varphi(X) = f_H^{-1}(Y_{\mathbf{1}_H}) = Y$. Если $b \in H$, то

$$d\varphi(X)|_b = Y_b = TL_b Y_{\mathbf{1}_H} = TL_b T_{\mathbf{1}_G}\varphi(X_{\mathbf{1}_G}).$$

Таким образом,

$$\forall b \in H : d\varphi(X)|_b = TL_b T_{\mathbf{1}_G}\varphi(X_{\mathbf{1}_G}).$$

Свойства $d\varphi$ сформулированы в следующем Предложении.

Предложение 11.18. (i) *Пусть $\varphi : G \rightarrow H, \psi : H \rightarrow K$ — гомоморфизмы групп Ли, тогда*

$$d(\psi \circ \varphi) = d\psi \circ d\varphi.$$

⁴Символ d вносит путаницу, но он традиционно используется.

(ii) $d\text{Id}_G = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$.

(iii) Если $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли, то

$$\forall a \in G \forall X \in \mathfrak{g} : T\varphi(X_a) = d\varphi(X)|_{\varphi(a)}.$$

(iv) Если $\varphi : G \rightarrow H$ — изоморфизм групп Ли, то $d\varphi$ обратимо, причем

$$(d\varphi)^{-1} = d(\varphi^{-1}),$$

и

$$\forall X \in \mathfrak{g} : d\varphi(X) = \varphi_* X,$$

где $\varphi_* X = T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$ — «pushforward».

Доказательство. (i) По определению,

$$d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}, \quad d\varphi = f_H^{-1} \circ T_{1_G}\varphi \circ f_G,$$

$$d\psi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{k}, \quad d\psi = f_K^{-1} \circ T_{1_H}\psi \circ f_H.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\psi \circ d\varphi &= f_K^{-1} \circ T_{1_H}\psi \circ f_H \circ f_H^{-1} \circ T_{1_G}\varphi \circ f_G = f_K^{-1} \circ T_{1_H}\psi \circ T_{1_G}\varphi \circ f_G = \\ &= f_K^{-1} \circ T_{1_G}(\psi \circ \varphi) \circ f_G. \end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку $\psi \circ \varphi : G \rightarrow K$ — гомоморфизм, то

$$d(\psi \circ \varphi) = f_K^{-1} \circ T_{1_G}(\psi \circ \varphi) \circ f_G.$$

Тем самым мы показали, что $d(\psi \circ \varphi) = d\psi \circ d\varphi$.

(ii) Поскольку отображение $\text{Id}_G : G \rightarrow G$ является гомоморфизмом, то для него определен гомоморфизм $d\text{Id}_G$. Далее,

$$d\text{Id}_G = f_G^{-1} \circ T_{1_G}\text{Id}_G \circ f_G = f_G^{-1} \circ \text{Id}_{T_{1_G}} \circ f_G = \text{Id}_{\mathfrak{g}},$$

и мы установили, что $d\text{Id}_G = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$.

(iii) Пусть $a \in G$ и $X \in \mathfrak{g}$, тогда, согласно Предложению 7,

$$T\varphi(X_a) = T\varphi \circ TL_a(X_{1_G}) = TL_{\varphi(a)} \circ T\varphi(X_{1_G}) = d\varphi(X)|_{\varphi(a)},$$

что и требовалось показать.

(iv) Пусть $\varphi : G \rightarrow H$ — изоморфизм групп Ли, тогда справедливы равенства

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}_H, \quad \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{Id}_G.$$

Применяя к обеим частям этих равенств операцию d и используя установленные свойства (i) и (ii), приходим к соотношениям

$$d\varphi \circ d(\varphi^{-1}) = \text{Id}_{\mathfrak{h}}, \quad d(\varphi^{-1}) \circ d\varphi = \text{Id}_{\mathfrak{g}}.$$

Следовательно, $d\varphi$ — обратимый гомоморфизм (то есть, изоморфизм) и $(d\varphi)^{-1} = d(\varphi^{-1})$.

Поскольку, как установлено в (iii), $T\varphi(X_a) = d\varphi(X)|_{\varphi(a)}$, то, полагая $\varphi(a) = b$, получаем

$$d\varphi(X)|_b = T\varphi(X_{\varphi^{-1}(b)}) = \varphi_*(X)|_b,$$

откуда следует желаемая формула. \square

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Определение 11.13. *Представление группы Ли G на V — это гомоморфизм групп Ли $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Гомоморфизм представлений $\varphi_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$, $i = 1, 2$, — это линейное отображение $\lambda : V_1 \rightarrow V_2$, такое, что*

$$\forall a \in G : \lambda \circ \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \circ \lambda.$$

Обозначим через $\mathfrak{gl}(V)$ вещественное векторное пространство, построенное на множестве линейных отображений из V в V и снабженное коммутатором $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Определение 11.14. *Представление алгебры Ли — это гомоморфизм алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Гомоморфизм представлений $\varphi_i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_i)$, $i = 1, 2$, — это линейное отображение $\lambda : V_1 \rightarrow V_2$, такое, что*

$$\forall A \in \mathfrak{g} : \lambda \circ \varphi_1(A) = \varphi_2(A) \circ \lambda.$$

Любая группа Ли обладает естественным представлением на своей алгебре Ли. Пусть $a \in G$, тогда отображение

$$C_a : G \rightarrow G, \quad C_a(b) := a \top b \top a^{-1},$$

называется *сопряжением*. Для $a, b, c \in G$ справедливы равенства:

$$C_a(b \top c) = C_a(b) \top C_a(c), \quad C_a \circ C_b = C_{a \top b}.$$

Отображение сопряжения $C_a : G \rightarrow G$ является автоморфизмом группы Ли. В этой связи, $dC_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — автоморфизм алгебры Ли \mathfrak{g} . Таким образом, определено отображение

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}), \quad \text{Ad}(a) = dC_a.$$

Отображение Ad является представлением G в \mathfrak{g} .

Каждая алгебра Ли группы Ли обладает естественным представлением в себе:

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

определенным равенством

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)Y := [X, Y].$$

Определение 11.15. *Представления Ad и ad называются, соответственно, сопряженными представлениями G и \mathfrak{g} .*

Предложение 11.19.

$$d\text{Ad} = \text{ad}.$$

Пусть φ — представление G в конечномерном векторном пространстве V . Поскольку отображение⁵

$$\text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V^*), \quad A \mapsto A^T,$$

является линейным, то оно гладкое. Таким образом, φ индуцирует представление

$$\varphi^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*), \quad \varphi^*(a) = \varphi(a^{-1})^T,$$

называемое *дуальным* к φ . Представление

$$d(\varphi^*) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^*),$$

называется *дуальным представлением* $d\varphi$. Справедливо равенство:

$$\forall X \in \mathfrak{g} : d(\varphi^*)(X) = -(d\varphi(X))^T.$$

⁵Здесь $\text{End}(V)$ — векторное пространство линейных отображений из V в V .

Определение 11.16. Дуальные к сопряженным представлениям G и \mathfrak{g} называются *косопряженными представлениями* G и \mathfrak{g} и обозначаются через Ad^* и ad^* .

Таким образом, по определению,

$$\begin{aligned} \forall a \in G \forall Y \in \mathfrak{g} \forall \xi \in \mathfrak{g}^* : \langle \text{Ad}^*(a)\xi, Y \rangle &= \langle \xi, \text{Ad}(a^{-1})Y \rangle, \\ \forall X, Y \in \mathfrak{g} \forall \xi \in \mathfrak{g}^* : \langle \text{ad}^*(X)\xi, Y \rangle &= -\langle \xi, [X, Y] \rangle. \end{aligned}$$

7. Форма Маурера – Картана

Определение 11.17. *Формой Маурера – Картана* называется 1-форма $\Theta : G \rightarrow T^*G \otimes \mathfrak{g}$, такая, что $\Theta : a \mapsto \Theta_a$, где

$$\Theta_a : T_a G \rightarrow T_1 G \cong \mathfrak{g}, \quad \forall v \in T_a G : \Theta_a(v) := (L_{a^{-1}})_* v.$$

Вместо $(L_{a^{-1}})_*$ можно написать $TL_{a^{-1}}$.

Пусть (e_i) — репер из левоинвариантных сечений TG , а (e^i) — корепер. Тогда, для $a \in G$,

$$\Theta(e_i)(a) = \Theta_a(e_i(a)) = TL_{a^{-1}}e_i(a) = e_i(\mathbf{1}).$$

Таким образом, $\Theta(e_i) = e_i(\mathbf{1})$. Пусть $\Theta = \nu_i^{\cdot j} e^i \otimes e_j(\mathbf{1})$, тогда

$$e_k(\mathbf{1}) = \Theta(e_k) = \delta_k^i \nu_i^{\cdot j} e_j(\mathbf{1}) = \nu_k^{\cdot j} e_j(\mathbf{1}).$$

Следовательно, $\nu_k^{\cdot j} = \delta_k^j$, и мы окончательно получаем разложение

$$\Theta = e^i \otimes e_i(\mathbf{1}).$$

8. Действие группы

8.1. Определение и простейшие свойства

Пусть (G, \top) — группа с единицей $\mathbf{1}$, а M — множество.

Определение 11.18. *Левое действие* G на M — это отображение

$$\triangleright : G \times M \rightarrow M, \quad (g, p) \mapsto g \triangleright p,$$

удовлетворяющее условиям:

$$(1_{\triangleright}) \quad \forall g_1, g_2 \in G \forall p \in M : g_1 \triangleright (g_2 \triangleright p) = (g_1 \top g_2) \triangleright p,$$

$$(2_{\triangleright}) \quad \forall p \in M : \mathbb{1} \triangleright p = p.$$

Определение 11.19. *Правое действие G на M — это отображение*

$$\triangleleft : M \times G \rightarrow M, \quad (p, g) \mapsto p \triangleleft g,$$

удовлетворяющее условиям:

$$(1_{\triangleleft}) \quad \forall g_1, g_2 \in G \forall p \in M : (p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2 = p \triangleleft (g_1 \top g_2),$$

$$(2_{\triangleleft}) \quad \forall p \in M : p \triangleleft \mathbb{1} = p.$$

Определение 11.20. *Если M — топологическое пространство, а G — топологическая группа, то действие G на M называется **непрерывным**, если отображение $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ (или $\triangleleft : M \times G \rightarrow M$) непрерывно. Тогда говорят, что M является **левым** (соответственно, **правым**) G -пространством. Если M — гладкое многообразие, G — группа Ли, а \triangleright (соответственно, \triangleleft) — гладкое отображение, то действие называется **гладким**.*

Правое действие можно выразить через левое действие, и наоборот.

Предложение 11.20. *Пусть $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ — левое действие G на M , тогда отображение*

$$\triangleleft : M \times G \rightarrow M, \quad p \triangleleft g := g^{-1} \triangleright p,$$

является правым действием G на M .

Доказательство. Проверим выполнение свойств (1_{\triangleleft}) и (2_{\triangleleft}) . Пусть $g_1, g_2 \in M, p \in M$, тогда

$$\begin{aligned} (p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2 &= (g_1^{-1} \triangleright p) \triangleleft g_2 = g_2^{-1} \triangleright (g_1^{-1} \triangleright p) = \\ &= (g_2^{-1} \top g_1^{-1}) \triangleright p = (g_1 \top g_2)^{-1} \triangleright p = p \triangleleft (g_1 \top g_2). \end{aligned}$$

Далее, если $p \in M$, то

$$p \triangleleft \mathbb{1} = \mathbb{1} \triangleright p = p.$$

Тем самым мы проверили, что \triangleleft — правое действие. □

Определение 11.21. Пусть $\triangleright: G \times M \rightarrow M$ — левое действие G на M , тогда⁶

- для $p \in M$ **орбита** p , обозначаемая через $G \triangleright p$, есть множество

$$G \triangleright p := \{g \triangleright p \mid g \in G\},$$

- для $p \in M$ **группа изотропии** (или **стабилизатор** p), обозначаемая через G_p , есть множество

$$G_p := \{g \in G \mid g \triangleright p = p\},$$

- действие называется **транзитивным**, если

$$\forall p, q \in M \exists g \in G : g \triangleright p = q,$$

- действие называется **свободным**, если

$$\forall g \in G : (\exists p \in M : g \triangleright p = p) \Rightarrow g = \mathbf{1}.$$

Группа изотропии действительно является группой.

Предложение 11.21. Для любой точки $p \in M$, (G_p, \top) — подгруппа группы (G, \top) .

Доказательство. Нужно установить следующее:

- Если $g_1, g_2 \in G_p$, то $g_1 \top g_2 \in G_p$.
- $\mathbf{1} \in G_p$.
- Если $g \in G_p$, то $g^{-1} \in G_p$.

Пусть $g_1, g_2 \in G_p$. Покажем, что $(g_1 \top g_2) \triangleright p = p$:

$$(g_1 \top g_2) \triangleright p = g_1 \triangleright (g_2 \triangleright p) = g_1 \triangleright p = p,$$

поскольку $g_1 \triangleright p = p$, $g_2 \triangleright p = p$. Таким образом, $g_1 \top g_2 \in G_p$. Далее, так как $\mathbf{1} \triangleright p = p$, то $\mathbf{1} \in G_p$. Пусть теперь $g \in G_p$. Покажем, что $g^{-1} \in G_p$. Действительно,

$$g^{-1} \triangleright p = g^{-1} \triangleright (g \triangleright p) = (g^{-1} \top g) \triangleright p = \mathbf{1} \triangleright p = p,$$

поэтому $g^{-1} \in G_p$ и мы показали, что (G_p, \top) — подгруппа группы (G, \top) . \square

⁶Аналогичные определения могут быть сформулированы для правого действия.

Определение свободного действия можно выразить в терминах стабилизатора:

Предложение 11.22. *Действие свободно тогда и только тогда, когда*

$$\forall p \in M : G_p = \{1\}.$$

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть \triangleright действует свободно на M . Если $p \in M$, то $\{1\} \subset G_p$. Пусть $g \in G_p$, тогда $g \triangleright p = p$, и, согласно определению свободного действия, $g = \{1\}$. В этой связи, $G_p = \{1\}$.

(\Leftarrow) Пусть известно, что $\forall p \in M : G_p = \{1\}$. Если $g \in G$ таков, что $g \triangleright p = p$ для некоторого $p \in M$, то $g \in G_p$, что влечет $g = 1$. Следовательно, действие группы свободно. \square

Если действие группы транзитивно и свободно, то от одного элемента множества можно перейти к другому, используя однозначно определенный элемент группы.

Предложение 11.23. *Пусть \triangleright — транзитивное и свободное действие на M , тогда*

$$\forall p, q \in M \exists! g \in G : g \triangleright p = q$$

Доказательство. Пусть $p, q \in M$. Поскольку \triangleright транзитивно, то найдется $g \in G$, такой, что $g \triangleright p = q$. Покажем, что g единственный. Пусть $g_1, g_2 \in G$ таковы, что

$$g_1 \triangleright p = q, \quad g_2 \triangleright p = q.$$

Тогда $g_1 \triangleright p = g_2 \triangleright p$. Действуя элементом g_1^{-1} на левую и правую части этого равенства, получаем

$$g_1^{-1} \triangleright (g_1 \triangleright p) = g_1^{-1} \triangleright (g_2 \triangleright p),$$

что с учетом определения левого действия дает

$$(g_1^{-1} \top g_1) \triangleright p = (g_1^{-1} \top g_2) \triangleright p,$$

или, $(g_1^{-1} \top g_2) \triangleright p = p$. Так как \triangleright свободно, то $g_1^{-1} \top g_2 = 1$, что окончательно влечет $g_1 = g_2$. \square

Пусть \triangleright — левое действие, а $g \in G$. Рассмотрим частичное отображение

$$\Psi_g : M \rightarrow M, \quad \Psi_g(p) := g \triangleright p.$$

Для него справедливо следующее утверждение:

Предложение 11.24. *Для любого $g \in G$ отображение Ψ_g является биекцией.*

Доказательство. Покажем, что

$$\Psi_g \circ \Psi_{g^{-1}} = \text{Id}_M, \quad \Psi_{g^{-1}} \circ \Psi_g = \text{Id}_M.$$

Пусть $p \in M$, тогда

$$\Psi_g \circ \Psi_{g^{-1}}(p) = \Psi_g(g^{-1} \triangleright p) = g \triangleright (g^{-1} \triangleright p) = p,$$

и, аналогично,

$$\Psi_{g^{-1}} \circ \Psi_g(p) = \Psi_{g^{-1}}(g \triangleright p) = g^{-1} \triangleright (g \triangleright p) = p.$$

Таким образом, Ψ_g — биекция, причем, $(\Psi_g)^{-1} = \Psi_{g^{-1}}$. \square

Отображение Ψ_g обладает групповыми свойствами: если $g_1, g_2 \in G$, то

$$\Psi_{g_1} \circ \Psi_{g_2} = \Psi_{g_1 \top g_2}.$$

Действительно, пусть $p \in M$, тогда

$$\Psi_{g_1} \circ \Psi_{g_2}(p) = \Psi_{g_1}(g_2 \triangleright p) = g_1 \triangleright (g_2 \triangleright p) = (g_1 \top g_2) \triangleright p = \Psi_{g_1 \top g_2}(p),$$

откуда следует желаемое равенство.

Если M — гладкое многообразие, G — группа Ли, то гладкое левое действие порождает диффеоморфизм Ψ_g для любого $g \in G$.

Пусть $(\text{Diff}(M), \circ)$ — группа диффеоморфизмов на M с операцией композиции \circ . Тогда справедливо следующее утверждение:

Предложение 11.25. *Отображение*

$$f : G \rightarrow \text{Diff}(M), \quad g \mapsto \Psi_g,$$

является гомоморфизмом групп, то есть

$$\forall g_1, g_2 \in G : f(g_1 \top g_2) = f(g_1) \circ f(g_2).$$

Доказательство. По определению,

$$\begin{aligned} f(g_1 \top g_2) &= \Psi_{g_1 \top g_2}, \\ f(g_1) \circ f(g_2) &= \Psi_{g_1} \circ \Psi_{g_2}. \end{aligned}$$

Но из рассуждений, предшествовавших доказательству, мы получили, что $\Psi_{g_1} \circ \Psi_{g_2} = \Psi_{g_1 \top g_2}$. Это влечет желаемое равенство. \square

8.2. Примеры

Пример 11.11. Пусть V — конечномерное векторное пространство, а отображение

$$\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$$

является гомоморфизмом групп (то есть, ρ — представление). Определим отображение

$$\triangleright: G \times V \rightarrow V, \quad g \triangleright v := \rho(g)v.$$

Покажем, что \triangleright — левое действие G на V . Пусть $g_1, g_2 \in G, v \in V$, тогда

$$\begin{aligned} g_1 \triangleright (g_2 \triangleright v) &= g_1 \triangleright (\rho(g_2)v) = \rho(g_1)(\rho(g_2)v) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)(v) = \\ &= \rho(g_1 \top g_2)v = (g_1 \top g_2) \triangleright v. \end{aligned}$$

Аксиома (1_{\triangleright}) удовлетворена. Наконец, если $v \in V$, то

$$\mathbf{1} \triangleright v = \rho(\mathbf{1})v = \text{Id}_V v = v,$$

и аксиома (2_{\triangleright}) также удовлетворена. Следовательно, \triangleright — левое действие G на V .

Пример 11.12. Пусть $\triangleright_1: G_1 \times M_1 \rightarrow M_1, \triangleright_2: G_2 \times M_2 \rightarrow M_2$ — левые действия групп $(G_1, \top_1), (G_2, \top_2)$ на M_1 и M_2 . Тогда отображение

$$\triangleright: G_1 \times G_2 \times M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \times M_2, \quad (g_1, g_2) \triangleright (p_1, p_2) := (g_1 \triangleright_1 p_1, g_2 \triangleright_2 p_2), \blacksquare$$

является левым действием группы $(G_1 \times G_2, \top)$,

$$\top: (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \rightarrow G_1 \times G_2, \quad (g_1, g_2) \top (h_1, h_2) := (g_1 \top_1 h_1, g_2 \top_2 h_2), \blacksquare$$

на $M_1 \times M_2$.

Действительно, пусть $g_1, g_2 \in G_1, h_1, h_2 \in G_2, p \in M_1, q \in M_2$, тогда

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) \triangleright ((g_2, h_2) \triangleright (p, q)) &= (g_1, h_1) \triangleright (g_2 \triangleright_1 p, h_2 \triangleright_2 q) = \\ &= (g_1 \triangleright_1 (g_2 \triangleright_1 p), h_1 \triangleright_2 (h_2 \triangleright_2 q)) = ((g_1 \top_1 g_2) \triangleright_1 p, (h_1 \top_2 h_2) \triangleright_2 q) = \\ &= (g_1 \top_1 g_2, h_1 \top_2 h_2) \triangleright (p, q) = ((g_1, h_1) \top (g_2, h_2)) \triangleright (p, q), \end{aligned}$$

и условие (1_{\triangleright}) выполнено. Далее, если $p \in M_1$ и $q \in M_2$, то

$$(\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2) \triangleright (p, q) = (\mathbf{1}_1 \triangleright_1 p, \mathbf{1}_2 \triangleright_2 q) = (p, q),$$

и (2_{\triangleright}) также выполнено. Следовательно, \triangleright — левое действие группы $(G_1 \times G_2, \top)$ на $M_1 \times M_2$.

Пример 11.13. Определим отображение

$$\triangleright: \text{GL}(n; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (A, x) \mapsto Ax.$$

Оно является левым действием. Действительно, если $A, B \in \text{GL}(n; \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$, то

$$A \triangleright (B \triangleright x) = A \triangleright (Bx) = A(Bx) = (AB)x = AB \triangleright x,$$

что дает (1_{\triangleright}) . Наконец, если $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$E \triangleright x = Ex = x,$$

что дает (2_{\triangleright}) .

Пример 11.14. Пусть (G, \top) — группа Ли, а отображение

$$L_g: G \rightarrow G, \quad L_g(h) = g \top h,$$

представляет левый сдвиг; здесь $g \in G$. Тогда соответствие

$$\triangleright: G \times G \rightarrow G, \quad g \triangleright h := L_g(h),$$

является левым действием G на себя. Оно транзитивно и свободно. Действительно, если h_1, h_2 — элементы G , то для $g = h_2 \top h_1^{-1}$ будем иметь

$$h_2 = g \top h_1 = g \triangleright h_1,$$

что влечет транзитивность. Далее, если для $g \in G$ найдется такой $h \in G$, что $g \triangleright h = h$, то

$$g \top h = h,$$

и $g = \mathbf{1}$. В этой связи, \triangleright свободно.

8.3. Полупрямое произведение

Пусть (H, \top_H) и (N, \top_N) — группы Ли, а $\triangleright H \times N \rightarrow N$ — гладкое левое действие H на N . Предположим, что для любого $h \in H$, отображение

$$\Psi_h : N \rightarrow N, \quad \Psi_h(g) := h \triangleright g,$$

является автоморфизмом N , то есть, изоморфизмом N на себя. Определим новую группу Ли $N \rtimes_{\triangleright} H$, называемую **полупрямым произведением H и N** следующим образом. Как гладкое многообразие, $N \rtimes_{\triangleright} H$ есть прямое произведение $N \times H$, но групповая операция задана равенством

$$(n, h) \top (n', h') := (n \top_N \Psi_h(n'), h \top_H h').$$

Предложение 11.26. *Операция \top наделяет $N \times H$ структурой группы.*

Доказательство. Нужно показать, что

- 1) операция \top ассоциативна,
- 2) операция \top обладает нейтральным элементом,
- 3) любой элемент $N \times H$ обратим относительно \top .

1) Пусть $n_1, n_2, n_3 \in N, h_1, h_2, h_3 \in H$, тогда

$$\begin{aligned} ((n_1, h_1) \top (n_2, h_2)) \top (n_3, h_3) &= (n_1 \top_N \Psi_{h_1}(n_2), h_1 \top_H h_2) \top (n_3, h_3) = \\ &= (n_1 \top_N \Psi_{h_1}(n_2) \top_N \Psi_{h_1 \top_H h_2}(n_3), h_1 \top_H h_2 \top_H h_3). \end{aligned}$$

Но $\Psi_{h_1 \top_H h_2}(n_3) = \Psi_{h_1}(\Psi_{h_2}(n_3))$, поэтому

$$((n_1, h_1) \top (n_2, h_2)) \top (n_3, h_3) = (n_1 \top_N \Psi_{h_1}(n_2) \top_N \Psi_{h_1}(\Psi_{h_2}(n_3)), h_1 \top_H h_2 \top_H h_3). \blacksquare$$

Далее,

$$\begin{aligned} (n_1, h_1) \top ((n_2, h_2) \top (n_3, h_3)) &= (n_1, h_1) \top (n_2 \top_N \Psi_{h_2}(n_3), h_2 \top_H h_3) = \\ &= (n_1 \top_N \Psi_{h_1}(n_2 \top_N \Psi_{h_2}(n_3)), h_1 \top_H h_2 \top_H h_3). \end{aligned}$$

Поскольку Ψ_{h_1} — автоморфизм, то

$$\Psi_{h_1}(n_2 \top_N \Psi_{h_2}(n_3)) = \Psi_{h_1}(n_2) \top_N \Psi_{h_1}(\Psi_{h_2}(n_3)),$$

и поэтому

$$(n_1, h_1) \top ((n_2, h_2) \top (n_3, h_3)) = (n_1 \top_N \Psi_{h_1}(n_2) \top_N \Psi_{h_1}(\Psi_{h_2}(n_3)), h_1 \top_H h_2 \top_H h_3). \blacksquare$$

Таким образом, мы приходим к желаемому равенству

$$((n_1, h_1) \top (n_2, h_2)) \top (n_3, h_3) = (n_1, h_1) \top ((n_2, h_2) \top (n_3, h_3)),$$

означающему, что операция \top ассоциативна.

2) Пусть $n \in N$, $h \in H$, тогда

$$(n, h) \top (\mathbf{1}_N, \mathbf{1}_H) = (n \top_N \Psi_h(\mathbf{1}_N), h \top_H \mathbf{1}_H) = (n, h),$$

поскольку $\Psi_h(\mathbf{1}_N) = \mathbf{1}_N$, и

$$(\mathbf{1}_N, \mathbf{1}_H) \top (n, h) = (\mathbf{1}_N \top_N \Psi_{\mathbf{1}_H}(n), \mathbf{1}_H \top_H h) = (n, h),$$

поскольку $\Psi_{\mathbf{1}_H}(n) = \mathbf{1}_H \triangleright n = n$. Таким образом, $(\mathbf{1}_N, \mathbf{1}_H)$ — нейтральный элемент относительно \top .

3) Пусть $n \in N$, $h \in H$, тогда

$$(n, h) \top (\Psi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) = (n \top_N \Psi_h(\Psi_{h^{-1}}(n^{-1})), h \top_H h^{-1}).$$

Поскольку

$$\Psi_h(\Psi_{h^{-1}}(n^{-1})) = \Psi_h \circ \Psi_{h^{-1}}(n^{-1}) = \Psi_{h \top_H h^{-1}}(n^{-1}) = \Psi_{\mathbf{1}_H}(n^{-1}) = n^{-1},$$

то

$$(n, h) \top (\Psi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) = (n \top_N n^{-1}, h \top_H h^{-1}) = (\mathbf{1}_N, \mathbf{1}_H).$$

Далее,

$$(\Psi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) \top (n, h) = (\Psi_{h^{-1}}(n^{-1}) \top_N \Psi_{h^{-1}}(n), h^{-1} \top_H h).$$

По условию, $\Psi_{h^{-1}}$ — автоморфизм, поэтому

$$\Psi_{h^{-1}}(n^{-1}) \top_N \Psi_{h^{-1}}(n) = \Psi_{h^{-1}}(n^{-1} \top_N n) = \Psi_{h^{-1}}(\mathbf{1}_N) = \mathbf{1}_N,$$

и

$$(\Psi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) \top (n, h) = (\mathbf{1}_N, \mathbf{1}_H).$$

Тем самым мы показали, что элемент $(n, h) \in N \times H$ обратим и

$$(n, h)^{-1} = (\Psi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}).$$

Этим завершается доказательство того, что $(N \times H, \top)$ — группа. \square

Пример 11.15. Рассмотрим группу $(\mathbb{R}^n, +)$. Ортогональная группа $O(n)$ действует на \mathbb{R}^n по правилу

$$\triangleright: O(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad A \triangleright x := Ax.$$

Тогда Ψ_A является автоморфизмом⁷ \mathbb{R}^n . Полупрямое произведение

$$\text{Eucl}(n) := \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$$

называется евклидовой группой. Групповая операция на $\text{Eucl}(n)$ действует следующим образом:

$$(b, A) \top (b', A') = (b \top_{\mathbb{R}^n} \Psi_A(b'), AA') = (b + Ab', AA').$$

Единица $\text{Eucl}(n)$ имеет вид $(1, E)$, а элемент, обратный к (b, A) , представлен парой

$$(b, A)^{-1} = (\Psi_{A^{-1}}(b^{-1}), A^{-1}) = (-A^{-1}b, A^{-1}).$$

Определим левое действие $\text{Eucl}(n)$ на \mathbb{R}^n равенством

$$(b, A) \triangleright_E x := b + Ax.$$

Действие \triangleright_E и элемент $(b, A) \in \text{Eucl}(n)$ определяют отображение

$$f_{(b, A)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_{(b, A)}(x) := (b, A) \triangleright_E x = b + Ax.$$

Определенное таким образом аффинное преобразование сохраняет евклидово расстояние в \mathbb{R}^n : если $x, y \in \mathbb{R}^n$, то

$$\|f_{(b, A)}(x) - f_{(b, A)}(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|x - y\|,$$

поскольку $A \in O(n)$. Обратно, если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ сохраняет расстояние в \mathbb{R}^n , то существуют $A \in O(n)$ и $b \in \mathbb{R}^n$, такие, что

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) = b + Ax.$$

⁷Можно выбрать некоторое конечномерное евклидово векторное пространство и отождествить элементы $O(n)$ с ортогональными преобразованиями этого пространства.

Таким образом, отображению f соответствует некоторый элемент $(b, A) \in \text{Eucl}(n)$. В этой связи, имеется соответствие

$$f \leftrightarrow (b, A)$$

между отображениями, сохраняющими расстояние в \mathbb{R}^n , и элементами евклидовой группы. Отсюда видно, что операции композиции таких отображений соответствует групповая операция \top в $\text{Eucl}(n)$.

8.4. Пространство орбит

Пусть $\triangleright: G \times M \rightarrow M$ — левое действие группы G на множестве M . Определим на M отношение \sim :

$$(p \sim q) \Leftrightarrow \exists g \in G : g \triangleright p = q.$$

Предложение 11.27. *Отношение \sim является отношением эквивалентности на M .*

Доказательство. Нужно показать, что

- 1) \sim рефлексивно,
- 2) \sim симметрично,
- 3) \sim транзитивно.

1) Поскольку $\mathbb{1} \triangleright p = p$, то $p \sim p$.

2) Если $p \sim q$, то существует элемент $g \in G$, такой, что $g \triangleright p = q$. Тогда $g^{-1} \triangleright (g \triangleright p) = g^{-1} \triangleright q$, откуда $q^{-1} \triangleright q = p$, что влечет $q \sim p$.

3) Пусть $p \sim q$, а $q \sim r$. Тогда существуют элементы $g, h \in G$, такие, что

$$g \triangleright p = q, \quad \text{и} \quad h \triangleright q = r.$$

Следовательно, $r = h \triangleright q = h \triangleright (g \triangleright p)$, откуда

$$(h \top g) \triangleright p = r.$$

Это означает, что $p \sim r$ и мы, таким образом, показали, что \sim — отношение эквивалентности. \square

Пусть $[p]$ обозначает класс эквивалентности точки $p \in M$, то есть, множество

$$[p] = \{q \in M \mid q \sim p\}.$$

В рассматриваемом случае класс эквивалентности является ничем иным, как орбитой $G \triangleright p$ точки p :

Предложение 11.28. $\forall p \in M : [p] = G \triangleright p$.

Доказательство. Пусть $q \in [p]$, тогда $q \sim p$ и $q = g \triangleright p$ для некоторого $g \in G$. Но $g \triangleright p \in G \triangleright p$, поэтому $q \in G \triangleright p$. Это означает, что $[p] \subset G \triangleright p$. Обратно, пусть $q \in G \triangleright p$, тогда $q = g \triangleright p$ для некоторого $g \in G$. Следовательно, $q \sim p$, и потому $q \in [p]$. В этой связи, $G \triangleright p \subset [p]$ и мы доказали желанное равенство. \square

Таким образом, фактормножество M/G определяется равенством

$$M/G = \{G \triangleright p \mid p \in M\}$$

и называется **пространством орбит** действия \triangleright .

Отображение

$$\pi : M \rightarrow M/G, \quad \pi(p) := [p],$$

называется **канонической сюръекцией**.

Пусть M — топологическое пространство. Определим совокупность \mathcal{T} подмножеств M/G условием: $U \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(U)$ открыто в M . Таким образом, каноническая сюръекция индуцирует топологию на M/G :

Предложение 11.29. \mathcal{T} — топология на M/G .

Доказательство. (i) Справедливы равенства $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ и $\pi^{-1}(M/G) = M$, где \emptyset и M открыты в M . По этой причине, $\emptyset, M/G \in \mathcal{T}$.

(ii) Пусть $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}$, тогда

$$\pi^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_k) = \pi^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi^{-1}(U_k),$$

где множества $\pi^{-1}(U_1), \dots, \pi^{-1}(U_k)$ открыты в M . Тогда множество $\pi^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_k)$ открыто в M и $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{T}$.

(iii) Наконец, пусть $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство элементов \mathcal{T} , тогда

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} \pi^{-1}(U_\alpha),$$

где множества $\pi^{-1}(U_\alpha)$ открыты в M . В этой связи, $\pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right)$ открыто в M и $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Таким образом, \mathcal{T} — топология на M/G . \square

Определение 11.22. Построенная топология \mathcal{T} на M/G называется *фактортопологией*.

По определению фактортопологии, каноническая сюръекция является непрерывным отображением. В частном случае, когда отношение эквивалентности порождается топологической группой, оно является открытым отображением, то есть, переводит открытые множества в открытые множества.

Предложение 11.30. Для любого непрерывного действия топологической группы G на топологическое пространство M каноническая сюръекция

$$\pi : M \rightarrow M/G$$

является открытым отображением.

Доказательство. Для $g \in G$ и $U \subset M$ определим множество

$$g \triangleright U := \{g \triangleright x \mid x \in U\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \triangleright U.$$

Действительно, пусть $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$, тогда $\pi(x) \in \pi(U)$. Существует $y \in U$, такой, что $\pi(x) = \pi(y)$. Но это означает, что $[x] = [y]$ и, следовательно, $x \sim y$. В этой связи, $x = g \Delta y$, для некоторого $g \in G$. Тогда $x \in g \triangleright U$, что влечет $x \in \bigcup_{g \in G} g \triangleright U$. Мы показали, что $\pi^{-1}(\pi(U)) \subset \bigcup_{g \in G} g \triangleright U$. Обратно, пусть $x \in \bigcup_{g \in G} g \triangleright U$, тогда $x \in g \triangleright U$, для некоторого $g \in G$. Иными словами, $x = g \triangleright y$, где $y \in U$. Но это равносильно тому, что $x \sim y$ и поэтому $\pi(x) = \pi(y) \in \pi(U)$. Следовательно, $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$, и обратное включение доказано.

Пусть теперь U открыто в M . Для $g \in G$ отображение

$$\Psi_g : M \rightarrow M, \quad p \mapsto g \triangleright p,$$

является гомеоморфизмом и $\Psi_g(U) = g \triangleright U$. Докажем последнее равенство. Пусть $y \in \Psi_g(U)$, тогда $y = \Psi_g(x)$, для некоторого $x \in U$. По определению Ψ_g , тогда $y = g \triangleright x$, но это означает, что $y \in g \triangleright U$. Таким образом, $\Psi_g(U) \subset g \triangleright U$. Обратно, пусть $y \in g \triangleright U$, тогда $y = g \triangleright x$, для некоторого $x \in U$. Но это влечет равенство $y = \Psi_g(x)$, означающее, что $y \in \Psi_g(U)$. Мы установили обратное включение, а, вместе с ним, и равенство.

Поскольку U открыто, то $\Psi_g(U)$ открыто. Значит, множество $g \triangleright U$ открыто для любого $g \in G$. В этой связи, множество $\pi^{-1}(\pi(U))$, будучи объединением открытых множеств, открыто в M . По определению фактортопологии, тогда $\pi(U)$ открыто в M/G и π — открытое отображение. \square

Пространство орбит, в общем случае, не является многообразием. Оно даже может быть не хаусдорфово! Необходимы дополнительные ограничения на \triangleright . Дадим вспомогательное определение. Отображение $F : X \rightarrow Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *собственным*, если прообраз каждого компактного подмножества Y компактен.

Определение 11.23. *Непрерывное левое действие $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ группы Ли G на многообразии M называется собственным, если отображение*

$$G \times M \rightarrow M \times M, \quad (g, p) \mapsto (g \triangleright p, p),$$

является собственным.

Предложение 11.31. *Если группа Ли действует непрерывно и собственным образом на многообразии, то пространство орбит хаусдорфово.*

В случае компактной группы Ли требование, чтобы действие было собственным, излишне:

Предложение 11.32. *Непрерывное действие компактной группы Ли на многообразии является собственным.*

Следующее Предложение устанавливает свойства орбит и группы изотропии при условии, что действие является собственным.

Определение 11.24. *Если группа Ли G действует собственным образом на многообразии M , то каждая орбита замкнута в M , а каждая группа изотропии компактна.*

Гладкое, свободное и собственное действие группы Ли на гладкое многообразии порождает структуру гладкого многообразия на пространстве орбит:

Теорема 11.1. Пусть группа Ли G действует гладко, свободно и собственнo на гладкое многообразии M . Тогда пространство орбит M/G — топологическое многообразии размерности $\dim M - \dim G$, и оно имеет единственную гладкую структуру со свойством, что отображение $\pi : M \rightarrow M/G$ является гладкой субмерсией.

Библиография

1. Lee John M. [Introduction to Smooth Manifolds](#). — Springer New York, 2012.
2. Rudolph Gerd, Schmidt Matthias. [Differential Geometry and Mathematical Physics. Part I. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems](#). — Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1. Локально тривиальное расслоение

1.1. Определение

Векторные расслоения, рассмотренные в Главе 10, и главные расслоения, являющиеся предметом настоящей главы, представляют частный случай общей конструкции: локально тривиального расслоения. Предваряя общее определение локально тривиального расслоения, рассмотрим наводящие соображения.

Пусть M и F — гладкие многообразия. Их произведение $E = M \times F$ также является гладким многообразием. Обозначим через $\pi : E \rightarrow M$ каноническую проекцию произведения на первый сомножитель и рассмотрим структуру (E, M, π, F) . Отображение π является гладким и сюръективным; для любой точки $m \in M$ оно определяет прообраз $E_m := \pi^{-1}(\{m\}) = \{m\} \times F$, являющийся гладким подмногообразием E размерности $\dim E_m = \dim F$, диффеоморфным F . Для различных точек $m_1, m_2 \in M$ множества E_{m_1} и E_{m_2} не пересекаются; объединение семейства $(E_m)_{m \in M}$ дает E :

$$E = \bigcup_{m \in M} E_m.$$

В этой связи, многообразие E можно интерпретировать состоящим из слоев E_m , каждый из которых топологически и в смысле гладкости устроен как F . Слои E можно представить расставленными над многообразием M и по этой причине последнее называют базой.

Простейшим примером структуры (E, M, π, F) является структура $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{R})$, в которой многообразие E — круговой цилиндр. Теперь рассмотрим обобщение, в котором E представимо в виде произведения многообразий лишь локально.

Определение 12.1. Пусть E, M и F — гладкие многообразия, а $\pi : E \rightarrow M$ — гладкая сюръекция. Четверка (E, M, π, F) называется **локально тривиальным расслоением**, если выполнено следующее условие. Для любой точки $m \in M$ существуют окрестность U в M и диффеоморфизм $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, такой, что

$$\text{pr}_U \circ \Psi = \pi,$$

где $\text{pr}_U : U \times F \rightarrow U$ — каноническая проекция. Соотношение между Ψ , pr_U и π иллюстрируется коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ \pi \downarrow & & \swarrow \text{pr}_U \\ & & U \end{array}$$

Многообразие M называется **базой расслоения**, многообразие E — **тотальным пространством расслоения**, отображение π — **проекцией**, многообразие F — **типовым слоем**, множество $E_m := \pi^{-1}(\{m\})$ — **слоем над точкой m** а отображение Ψ — **локальной тривиализацией**. Поскольку π сюръективно, то многообразие E представимо в виде объединения попарно непересекающихся слоев:

$$E = \coprod_{m \in M} E_m.$$

Далее будут рассмотрены следствия того, что E допускает локальное представление в виде произведения: 1) слой E_m наделен структурой гладкого многообразия и 2) на E можно ввести особые координаты.

1.2. Слой над точкой как гладкое многообразие

Покажем, что каждый слой над точкой является гладким подмногообразием тотального пространства. Для этого нам понадобятся дополнительные сведения. Пусть M, N — гладкие многообразия. Напомним, что субмерсией называется гладкое отображение $\varkappa \in C^\infty(M; N)$, такое, что его ранг в каждой точке M равен размерности N . С использованием касательного отображения это можно выразить следующим образом: в каждой точке $t \in M$ касательное отображение $T_t \varkappa : T_t M \rightarrow T_{\varkappa(t)} N$ является сюръективным отображением. Критерий того, что \varkappa — субмерсия, формулируется на основании следующего определения.

Определение 12.2. Пусть $\varkappa : M \rightarrow N$ — гладкое отображение, тогда *локальным сечением* \varkappa называется гладкое отображение $s : U \rightarrow M$, определенное на открытом множестве $U \subset N$, такое, что

$$\varkappa \circ s = \text{Id}_U.$$

Достаточное условие того, что \varkappa — гладкая субмерсия, сформулировано в следующем Предложении [1].

Предложение 12.1. Пусть M, N — гладкие многообразия, а $\varkappa : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Если любая точка M является образом гладкого локального сечения \varkappa , то отображение \varkappa — гладкая субмерсия.

Доказательство. Для $t \in M$ пусть $s : U \rightarrow M$ — локальное сечение, такое, что $s(n) = t, n \in U$. Тогда

$$\varkappa \circ s = \text{Id}_U,$$

откуда

$$T_t \varkappa \circ T_n s = \text{Id}_{T_n N}.$$

Из последнего равенства следует, что $T_t \varkappa$ — сюръекция. Поскольку точка t произвольна, то \varkappa — гладкая субмерсия. \square

Пусть теперь (E, M, π, F) — локально тривиальное расслоение. Покажем, что π — субмерсия. Для локальной тривиализации Ψ ,

$$\text{pr}_U = \pi \circ \Psi^{-1}.$$

Зафиксируем некоторый элемент $f \in F$. Тогда отображение

$$\sigma : U \rightarrow U \times \{f\}, \quad x \mapsto (x, f),$$

является диффеоморфизмом. При этом,

$$\text{pr}_U \circ \sigma : U \rightarrow U, \quad x \mapsto (x, f) \mapsto x,$$

поэтому $\text{pr}_U \circ \sigma = \text{Id}_U$. В этой связи,

$$\pi \circ (\Psi^{-1} \circ \sigma) = \text{Id}_U.$$

Это означает, что отображение $\Psi^{-1} \circ \sigma : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ является локальным сечением π . Далее, пусть $e \in E$, тогда $\pi(e) = m \in M$. Для M найдутся окрестность U и локальная тривиализация Ψ ; $\text{pr}_U \circ \Psi(e) = m$. Следовательно,

$$\text{pr}_U \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \Psi(e) = m,$$

откуда $e = \Psi^{-1} \circ \sigma(m)$. В силу Предложения 12.1 заключаем, что π — гладкая субмерсия.

То, что π — субмерсия, означает, что для любой точки $e \in E$, отображение $T_e\pi$ является сюръекцией. Но это равносильно тому, что $\text{rank}(T_e\pi) = \dim M$ в любой точке $e \in E$. Таким образом, π — отображение постоянного ранга и мы можем применить следующую теорему [1, 2].

Теорема 12.1. (Теорема о множестве уровня) Пусть M и N — гладкие многообразия, а $\varkappa : M \rightarrow N$ — гладкое отображение с постоянным рангом r . Тогда каждое множество уровня есть вложенное подмногообразие M размерности $\dim M - r$.

Под множеством уровня понимается множества вида $\varkappa^{-1}(\{x\})$, где $x \in N$. Таким образом, в силу теоремы о множестве уровня, для любой точки $m \in M$, слой $E_m = \pi^{-1}(\{m\})$ является гладким подмногообразием E размерности $\dim E - \dim M$.

Пусть $m \in M$, тогда отображение

$$\sigma : F \rightarrow \{m\} \times F, \quad f \mapsto (m, f).$$

является диффеоморфизмом. Если Ψ — тривиализация, соответствующая m , то отображение

$$\Psi^{-1} \circ \sigma : F \rightarrow \pi^{-1}(\{m\})$$

также является диффеоморфизмом. В этой связи, F и E_m диффеоморфны.

1.3. Натуральные координаты на тотальном пространстве расслоения

Локальная тривиализация позволяет ввести особую карту на E . Пусть $n = \dim M$, $m = \dim F$, $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ — локальная тривиализация, причем, (U, σ_M) — карта на M ; здесь $\sigma_M : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Пусть, далее, (V, σ_F) — карта на F ; $\sigma_F : V \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда $\Psi^{-1}(U \times V) =: O \subset \pi^{-1}(U)$. Сужение

$$\Psi_O = \Psi|_O : O \rightarrow U \times V$$

является гомеоморфизмом и по этой причине отображение

$$\Sigma = (\sigma_M \times \sigma_F) \circ \Psi_O : O \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad \Sigma(e) = (x^1, \dots, x^n; f^1, \dots, f^m),$$

является координатным гомеоморфизмом. Следовательно, (O, Σ) — карта на E . Координаты, порождаемые этой картой, будем называть **натуральными**.

Карта (O, Σ) обладает тем свойством, что точка из O определяется координатами базы и слоя. Кроме того, координатное представление

$$\tilde{\pi} = \sigma_M \circ \pi \circ \Sigma^{-1} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

проекции $\tilde{\pi}$ совпадает с канонической проекцией $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ на \mathbb{R}^n . Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(\sigma_M \times \sigma_F)^{-1}} & U \times V & \xrightarrow{\Psi^{-1}} & O & \xrightarrow{\pi} & U & \xrightarrow{\sigma_M} & \mathbb{R}^n \\ & & & & & \searrow & & & \\ & & & & & \tilde{\pi} & & & \end{array}$$

$$\tilde{\pi} : (x^1, \dots, x^n; f^1, \dots, f^m) \mapsto (x, f) \mapsto e \mapsto x \mapsto (x^1, \dots, x^n).$$

Здесь, поскольку, $\Psi^{-1}(x, f) = e$, то $x = \pi(e)$.

2. Главное расслоение

2.1. Определение

Перейдем к рассмотрению объекта настоящей главы — главному расслоению [3, 4, 5].

Определение 12.3. *Главным расслоением называется упорядоченная совокупность*

$$(P, G, M, \triangleleft, \pi),$$

в которой P, M — гладкие многообразия, $\pi : P \rightarrow M$ — гладкое сюръективное отображение, (G, \top) — группа Ли, $u \triangleleft : P \times G \rightarrow P$ — гладкое правое действие, такие, что

(A) \triangleleft сохраняет слои π :

$$\forall p \in P \forall g \in G : \pi(p \triangleleft g) = \pi(p);$$

(B) для любой точки $t \in M$ существуют окрестность U в M и диффеоморфизм $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, для которого выполнены условия:

(i) $\text{pr}_U \circ \Psi = \pi$, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \pi \downarrow & & \swarrow \text{pr}_U \\ U & & \end{array}$$

коммутативна; здесь $\text{pr}_U : U \times G \rightarrow U$ — каноническая проекция;

(ii) отображение $\varphi := \text{pr}_G \circ \Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ эquivариантно:

$$\forall p \in \pi^{-1}(U) \forall g \in G : \varphi(p \triangleleft g) = \varphi(p) \top g.$$

Здесь $\text{pr}_G : U \times G \rightarrow G$ — каноническая проекция.

Таким образом, для $p \in \pi^{-1}(U)$, имеем

$$\Psi(p) = (\pi(p), \varphi(p)).$$

В силу п. (B), (i), главное расслоение является локально тривиальным расслоением с типовым слоем — группой (G, \top) . Она называется **структурной группой** P . Значит, каждый слой P является гладким подмногообразием P и на P можно ввести натуральные координаты. Рассмотрим следствия связи групповых и гладких структур.

Предложение 12.2. *Группа (G, \top) действует свободно на P .*

Доказательство. Пусть элемент $g \in G$ таков, что $p \triangleleft g = p$, для некоторой точки $p \in P$. Обозначим $m = \pi(p)$, тогда, в силу (B), найдутся окрестность U точки m и локальная тривиализация Ψ . Справедливы равенства:

$$\varphi(p) = \varphi(p \triangleleft g) = \varphi(p) \top g,$$

то есть, $\varphi(p) = \varphi(p) \top g$, что влечет $g = \mathbf{1}$. \square

Предложение 12.3.

$$\forall p \in P : \pi^{-1}(\{\pi(p)\}) = \{p \triangleleft g \mid g \in G\} = p \triangleleft G.$$

Доказательство. Покажем, что $p \triangleleft G \subset \pi^{-1}(\{\pi(p)\})$. Пусть $q \in p \triangleleft G$, тогда $q = p \triangleleft g$, для некоторого $g \in G$. В силу (A),

$$\pi(q) = \pi(p \triangleleft g) = \pi(p),$$

что влечет $q \in \pi^{-1}(\{\pi(p)\})$. Следовательно, $p \triangleleft G \subset \pi^{-1}(\{\pi(p)\})$.

Обратно, покажем, что $\pi^{-1}(\{\pi(p)\}) \subset p \triangleleft G$. Пусть $q \in \pi^{-1}(\{\pi(p)\})$. Для $m = \pi(q) = \pi(p)$ найдем окрестность U и локальную тривиализацию $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$. Так как $\varphi(q)$ и $\varphi(p)$ принадлежат G , то, полагая $g = \varphi(p)^{-1} \top \varphi(q)$, получим, что

$$\varphi(p) \top g = \varphi(q).$$

Следовательно, $\varphi(p \triangleleft g) = \varphi(p) \top g = \varphi(q)$, и

$$\Psi(p \triangleleft g) = (\pi(p \triangleleft g), \varphi(p \triangleleft g)) = (\pi(p), \varphi(q)) = (\pi(q), \varphi(q)) = \Psi(q).$$

Отсюда, в силу биективности Ψ , $p \triangleleft g = q$. В этой связи, $q \in p \triangleleft G$ и $\pi^{-1}(\{\pi(p)\}) \subset p \triangleleft G$. Равенство доказано. \square

Из доказанного вытекает

Предложение 12.4. *Пусть $t \in M$. Если $p, q \in \pi^{-1}(\{t\})$, то $q = p \triangleleft g$, для некоторого $g \in G$.*

Доказательство. Если $p, q \in \pi^{-1}(\{t\})$, то $\pi(p) = \pi(q) = t$ и по этой причине $q \in \pi^{-1}(\{\pi(p)\}) = p \triangleleft G$. Следовательно, $q = p \triangleleft g$, для некоторого $g \in G$. \square

2.2. Примеры главных расслоений

По заданным многообразию и группе Ли можно построить простейшее главное расслоение.

Пример 12.1. Пусть M — многообразие, (G, \top) — группа Ли, $\text{pr}_M : M \times G \rightarrow M$ — каноническая проекция. Определим отображение

$$\triangleleft : M \times G \times G \rightarrow M \times G, \quad (m, g) \triangleleft h := (m, g \top h).$$

Тогда \triangleleft — правое действие G на $M \times G$. Действительно,

- $(m, g) \triangleleft \mathbf{1} = (m, g \top \mathbf{1}) = (m, g)$,
- $((m, g) \triangleleft h_1) \triangleleft h_2 = (m, g \top h_1) \triangleleft h_2 = (m, g \top h_1 \top h_2) = (m, g) \triangleleft (h_1 \top h_2)$,

поэтому \triangleleft удовлетворяет всем аксиомам правого действия. Далее, определим отображение

$$\Psi : \text{pr}_M^{-1}(M) \rightarrow M \times G, \quad \Psi = \text{Id}_{M \times G}.$$

Оно является тривиализацией. В этой связи,

$$(M \times G, G, M, \triangleleft, \text{pr}_M)$$

является главным расслоением — **тривиальным главным расслоением**.

Если главное расслоение уже было построено, то его можно сужать на открытые подмножества базы.

Пример 12.2. Пусть $(P, G, M, \triangleleft, \pi)$ — главное расслоение, а $U \subset M$ — открытое подмножество. Положим $P_U := \pi^{-1}(U)$ и определим ограничение

$$\pi_U : P_U \rightarrow U.$$

Далее, если $p \in P_U$, а $g \in G$, то $p \triangleleft g \in P_U$. Действительно, в силу (A),

$$\pi(p \triangleleft g) = \pi(p) \in U,$$

поэтому $p \triangleleft g \in \pi^{-1}(U) = P_U$. В этой связи, $\triangleleft (P_U \times G) \subset P_U$ и определено ограничение

$$\triangleleft_U: P_U \times G \rightarrow P_U,$$

являющееся правым действием. Путем пересечений областей действия локальных тривиализаций с U мы можем индуцировать локальные тривиализации с P на P_U . Таким образом,

$$(P_U, G, U, \triangleleft_U, \pi_U)$$

является главным расслоением, называемым **сужением** исходного расслоения на U .

Нетривиальный пример главного расслоения — расслоение реперов.

Пример 12.3. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие. Обозначим через $L_x M$ множество базисов касательного пространства в точке $x \in M$:

$$L_x M := \{(e_i)_{i=1}^n \mid (e_i)_{i=1}^n \text{ — базис } T_x M\},$$

и положим

$$LM := \coprod_{x \in M} L_x M.$$

Определим отображения

$$\pi: LM \rightarrow M, \quad \pi(x, (e_i)_{i=1}^n) := x,$$

и

$$\triangleleft: LM \times \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow LM, \quad (x, (e_i)_{i=1}^n) \triangleleft (\Omega_{\cdot j}^i) := (x, (\Omega_{\cdot i}^j e_j)_{i=1}^n).$$

Отображение \triangleleft определено корректно, поскольку $(\Omega_{\cdot i}^j e_j)_{i=1}^n$ — базис $T_x M$. Кроме того, оно является правым действием группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ на LM . Действительно,

- $(x, (e_i)_{i=1}^n) \triangleleft (\delta_{\cdot j}^i) = (x, (\delta_{\cdot i}^j e_j)_{i=1}^n) = (x, (e_i)_{i=1}^n)$,
- если $(\Omega_{\cdot j}^i), (\Sigma_{\cdot j}^i) \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, то

$$\begin{aligned} ((x, (e_i)_{i=1}^n) \triangleleft (\Omega_{\cdot j}^i)) \triangleleft (\Sigma_{\cdot j}^i) &= (x, (\Omega_{\cdot i}^j e_j)_{i=1}^n) \triangleleft (\Sigma_{\cdot j}^i) = \\ &= (x, (\Sigma_{\cdot i}^k \Omega_{\cdot k}^j e_j)_{i=1}^n), \end{aligned}$$

u

$$\begin{aligned} (x, (e_i)_{i=1}^n) \triangleleft ((\Omega_{\cdot j}^{i \cdot}) \cdot (\Sigma_{\cdot j}^{i \cdot})) &= (x, (e_i)_{i=1}^n) \triangleleft (\Omega_{\cdot k}^{i \cdot} \Sigma_{\cdot j}^{k \cdot}) = \\ &= (x, (\Sigma_{\cdot i}^{k \cdot} \Omega_{\cdot k}^{j \cdot} e_j)_{i=1}^n). \end{aligned}$$

Из обеих равенств следует, что

$$((x, (e_i)_{i=1}^n) \triangleleft (\Omega_{\cdot j}^{i \cdot})) \triangleleft (\Sigma_{\cdot j}^{i \cdot}) = (x, (e_i)_{i=1}^n) \triangleleft ((\Omega_{\cdot j}^{i \cdot}) \cdot (\Sigma_{\cdot j}^{i \cdot})).$$

Пусть (U, σ) — карта на M , а $(\partial_i)_{i=1}^n$ — координатный репер. Тогда для $(x, (e_i)_{i=1}^n) \in \pi^{-1}(U)$ имеем $e_i = \overset{\sigma}{\Omega}_{\cdot j}^{i \cdot} \partial_j$, где $(\overset{\sigma}{\Omega}_{\cdot j}^{i \cdot}) \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ — однозначно определенная матрица. Таким образом, определено биективное соответствие

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{GL}(n; \mathbb{R}), \quad \Psi : (x, (e_i)_{i=1}^n) \mapsto (x, (\overset{\sigma}{\Omega}_{\cdot i}^{j \cdot})).$$

Оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) $\text{pr}_U \circ \Psi = \pi$. Действительно,

$$\text{pr}_U \circ \Psi(x, (e_i)_{i=1}^n) = \text{pr}_U(x, (\overset{\sigma}{\Omega}_{\cdot i}^{j \cdot})) = x = \pi(x, (e_i)_{i=1}^n).$$

(ii) $\varphi((x, (e_i)_{i=1}^n) \triangleleft (\Omega_{\cdot j}^{i \cdot})) = \varphi(x, (e_i)_{i=1}^n) \cdot (\Omega_{\cdot j}^{i \cdot})$, где

$$\varphi = \text{pr}_{\text{GL}(n; \mathbb{R})} \circ \Psi : (x, (e_i)_{i=1}^n) \mapsto (\overset{\sigma}{\Omega}_{\cdot i}^{j \cdot}).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi((x, (e_i)_{i=1}^n) \triangleleft (\Omega_{\cdot j}^{i \cdot})) &= \varphi(x, (\Omega_{\cdot i}^{j \cdot} e_j)_{i=1}^n) = (\Omega_{\cdot i}^{j \cdot} \overset{\sigma}{\Omega}_{\cdot j}^{k \cdot}), \\ \varphi(x, (e_i)_{i=1}^n) \cdot (\Omega_{\cdot j}^{i \cdot}) &= (\overset{\sigma}{\Omega}_{\cdot i}^{j \cdot}) \cdot (\Omega_{\cdot j}^{i \cdot}) = (\Omega_{\cdot i}^{j \cdot} \overset{\sigma}{\Omega}_{\cdot j}^{k \cdot}). \end{aligned}$$

Таким образом, Ψ играет роль локальной тривиализации.

Наделим LM гладкой структурой, постулируя, что все отображения Ψ — диффеоморфизмы. Построенная структура

$$(LM, \text{GL}(n; \mathbb{R}), M, \triangleleft, \pi)$$

является главным расслоением. Оно называется **расслоением реперов**.

Предположим, что на многообразии задана риманова метрика. Тогда можно определить расслоение ортонормированных реперов.

Пример 12.4. Пусть M — гладкое многообразие размерности n , а g — риманова метрика на нем. Обозначим через $O_x M$ множество g -ортонормированных базисов пространства $T_x M$, где $x \in M$. Тогда на всей совокупности

$$OM := \coprod_{x \in M} O_x M$$

может быть определена структура главного **расслоения ортонормированных реперов** со структурной группой $O(n)$. Далее, если многообразии M ориентировано, то можно выделить расслоение $O_+ M \subset OM$ со структурной группой $SO(n)$.

2.3. Морфизмы

Определение

Пусть $(P_1, G_1, M_1, \triangleleft_1, \pi_1)$ и $(P_2, G_2, M_2, \triangleleft_2, \pi_2)$ — главные расслоения. Рассмотрим отображения, сохраняющие структуру расслоения.

Определение 12.4. *Морфизмом* из P_1 в P_2 называется пара отображений (ϑ, λ) , где $\vartheta : P_1 \rightarrow P_2$ — гладкое отображение, а $\lambda : G_1 \rightarrow G_2$ — гомоморфизм групп Ли, такие, что

$$\forall p \in P_1 \forall g \in G_1 : \vartheta(p \triangleleft_1 g) = \vartheta(p) \triangleleft_2 \lambda(g).$$

Определение 12.5. *Морфизм* (ϑ, λ) называется **изоморфизмом**, если ϑ — диффеоморфизм, а λ — изоморфизм групп Ли.

Индукцированное отображение баз

Пусть (ϑ, λ) — морфизм из P_1 в P_2 . Тогда отображение ϑ обладает тем свойством, что оно переводит слой в слой. Действительно, если $p, q \in P_{1,x} := \pi_1^{-1}(\{x\})$, где $x \in M_1$, то, как было показано в Предложении 12.4, справедливо равенство: $q = p \triangleleft g$ для некоторого $g \in G_1$. Будем считать p фиксированной точкой. Тогда

$$\vartheta(q) = \vartheta(p \triangleleft_1 g) = \vartheta(p) \triangleleft_2 \lambda(g) \in \vartheta(p) \triangleleft_2 G_2.$$

Поскольку $\vartheta(p) \triangleleft_2 G_2 = \pi_2^{-1}(\{\pi_2(\vartheta(p))\}) =: P_{2, \pi_2(\vartheta(p))}$, то мы получаем окончательный результат:

$$\vartheta(P_{1, x}) \subset P_{2, \tilde{x}},$$

где $\tilde{x} = \pi_2(\vartheta(p))$, означающий, что ϑ сохраняет слои.

Тот факт, что ϑ сохраняет слои, позволяет определить отображение баз

$$\tau : M_1 \rightarrow M_2, \quad \tau : x \mapsto \tilde{x}.$$

Отображения ϑ и τ связаны следующим образом. Вспоминая, что $x = \pi_1(p)$, получаем

$$\tau(\pi_1(p)) = \pi_2(\vartheta(p)),$$

или, окончательно,

$$\tau \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \vartheta.$$

Установленное равенство иллюстрирует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\vartheta} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{\tau} & M_2 \end{array}$$

Координатное представление морфизмов

Пусть $(P_1, G_1, M_1, \triangleleft_1, \pi_1)$ и $(P_2, G_2, M_2, \triangleleft_2, \pi_2)$ — главные расслоения, которым соответствуют локальные тривиализации (U_1, Ψ_1) и (U_2, Ψ_2) ;

$$\Psi_1 : \pi_1^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times G_1, \quad \Psi_2 : \pi_2^{-1}(U_2) \rightarrow U_2 \times G_2.$$

Пусть на U_1 и U_2 заданы координатные отображения

$$\begin{aligned} \sigma_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^{n_1}, & \sigma_1 : X &\mapsto (X_I)_{I=1}^{n_1}, \\ \sigma_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^{n_2}, & \sigma_2 : x &\mapsto (x_i)_{i=1}^{n_2}, \end{aligned}$$

где n_1, n_2 — размерности M_1 и M_2 . Выберем локальные карты (V_1, δ_1) и (V_2, δ_2) на G_1 и G_2 . Здесь

$$\begin{aligned}\delta_1 : V_1 &\rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, & \delta_1 : G &\mapsto (G^A)_{A=1}^{m_1}, \\ \delta_2 : V_2 &\rightarrow \mathbb{R}^{m_2}, & \delta_2 : g &\mapsto (g^a)_{a=1}^{m_2},\end{aligned}$$

$m_1 = \dim G_1, m_2 = \dim G_2$. Тогда координатные отображения на P_1 и P_2 представлены гомеоморфизмами

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= (\sigma_1 \times \delta_1) \circ \Psi_1 : \pi_1^{-1}(U_1) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{m_1}, \\ \Sigma_2 &= (\sigma_2 \times \delta_2) \circ \Psi_2 : \pi_2^{-1}(U_2) \rightarrow \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_2}.\end{aligned}$$

Координатные представления $\tilde{\pi}_1 = \sigma_1 \circ \pi_1 \circ \Sigma_1^{-1} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ и $\tilde{\pi}_2 = \sigma_2 \circ \pi_2 \circ \Sigma_2^{-1} : \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ проекций π_1 и π_2 имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_1 &: (X^1, \dots, X^{n_1}; G^1, \dots, G^{m_1}) \mapsto (X^1, \dots, X^{n_1}), \\ \tilde{\pi}_2 &: (x^1, \dots, x^{n_2}; g^1, \dots, g^{m_2}) \mapsto (x^1, \dots, x^{n_2}),\end{aligned}$$

а координатные представления отображений ϑ и τ , представлены равенствами

$$\tilde{\vartheta} = \Sigma_2 \circ \vartheta \circ \Sigma_1^{-1}, \quad \tilde{\tau} = \sigma_2 \circ \tau \circ \sigma_1^{-1}.$$

Тогда, в терминах координатных представлений, соотношение

$$\tau \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \vartheta.$$

примет вид

$$\tilde{\tau} \circ \tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\vartheta}.$$

Отсюда следует, что отображения $\tilde{\vartheta}$ и $\tilde{\tau}$ связаны равенством

$$\tilde{\vartheta}(X^1, \dots, X^{n_1}; G^1, \dots, G^{m_1}) = (\tilde{\tau}(X^1, \dots, X^{n_1}); \varepsilon(X^1, \dots, X^{n_1}; G^1, \dots, G^{m_1})), \blacksquare$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &: (X^1, \dots, X^{n_1}) \mapsto (x^1, \dots, x^{n_2}), \\ \varepsilon &: (X^1, \dots, X^{n_1}; G^1, \dots, G^{m_1}) \mapsto (g^1, \dots, g^{m_2}).\end{aligned}$$

2.4. Сечения главных расслоений

Определение 12.6. Пусть $(P, G, M, \triangleleft, \pi)$ — главное расслоение. **Сечение** P — это гладкое отображение $s : M \rightarrow P$, удовлетворяющее условию $\pi \circ s = \text{Id}_M$. **Локальное сечение** P над открытым множеством $U \subset M$ — это гладкое отображение $s : U \rightarrow P$, такое, что $\pi \circ s = \text{Id}_U$.

Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{s} & P \\
 \text{Id}_U \downarrow & & \nearrow \pi \\
 U & &
 \end{array}$$

иллюстрирует определение локального сечения. Условие

$$\pi \circ s = \text{Id}_U$$

равносильно условию

$$\forall x \in U : s(x) \in \pi^{-1}(\{x\}).$$

Таким образом, значение сечения принадлежит слою над соответствующим значением аргумента.

2.5. Функции перехода и коциклическое условие

Пусть $(P, G, M, \triangleleft, \pi)$ — главное расслоение. Выберем тривиализирующее покрытие M , то есть, семейство $\{U_i, \Psi_i\}_{i \in I}$, где $\Psi_i : \pi^{-1}(U) \rightarrow U_i \times G$ — локальная тривиализация, а $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

Пусть $i, j \in I$ таковы, что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Выберем $x \in U_i \cap U_j$ и покажем, что значение $\varphi_i(p) \top (\varphi_j(p))^{-1} \in G$ не зависит от $p \in P_x = \pi^{-1}(\{x\})$. Действительно, если $p, q \in P_x$, то $q = p \triangleleft g$ для некоторого $g \in G$. Следовательно,

$$\varphi_i(q) = \varphi_i(p) \top g, \quad \varphi_j(q) = \varphi_j(p) \top g.$$

Второе равенство влечет, что $(\varphi_j(q))^{-1} = g^{-1} \top (\varphi_j(p))^{-1}$. В этой связи,

$$\varphi_i(q) \top (\varphi_j(q))^{-1} = \varphi_i(p) \top g \top g^{-1} \top (\varphi_j(p))^{-1} = \varphi_i(p) \top (\varphi_j(p))^{-1},$$

и мы показали, что значение выражения

$$\varphi_i(p) \top (\varphi_j(p))^{-1} \in G$$

не зависит от $p \in P_x$. Таким образом, отображение

$$\rho_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G, \quad \rho_{ij} : x \mapsto \varphi_i(p) \top (\varphi_j(p))^{-1}, \text{ для } p \in P_x,$$

определено корректно. Отображение ρ_{ij} называется *функцией перехода*.

Если $x \in U_i \cap U_j$, то отображения $\varphi_i : P_x \rightarrow G$ и $\varphi_j : P_x \rightarrow G$ являются диффеоморфизмами. По этой причине, композиция

$$\varphi_i|_{P_x} \circ (\varphi_j|_{P_x})^{-1} : G \rightarrow G$$

является диффеоморфизмом. Следующее Предложение устанавливает связь между этим диффеоморфизмом и функцией перехода [6].

Предложение 12.5. Пусть $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, тогда

$$\forall x \in U_i \cap U_j \forall g \in G : \varphi_i|_{P_x} \circ (\varphi_j|_{P_x})^{-1}(g) = \rho_{ij}(x) \top g.$$

Доказательство. Пусть $(\varphi_j|_{P_x})^{-1}(g) = p$, тогда $g = \varphi_j(p)$, и

$$\varphi_i|_{P_x} \circ (\varphi_j|_{P_x})^{-1}(g) = \varphi_i(p).$$

Но $p \in P_x$, поэтому

$$\rho_{ij} \top g = \varphi_i(p) \top (\varphi_j(p))^{-1} \top g = \varphi_i(p),$$

что дает желаемый результат. □

Следующее Предложение устанавливает связь между различными функциями перехода [6].

Предложение 12.6. Пусть $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ и $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Тогда выполняется *коциклическое условие*:

$$\rho_{ik}(x) \top \rho_{kj}(x) = \rho_{ij}(x).$$

Доказательство. Пусть $p \in P_x$, тогда

$$\begin{aligned} \rho_{ik}(x) \top \rho_{kj}(x) &= (\varphi_i(p) \top (\varphi_k(p))^{-1}) \top (\varphi_k(p) \top (\varphi_j(p))^{-1}) = \\ &= \varphi_i(p) \top (\varphi_j(p))^{-1} = \rho_{ij}(x). \end{aligned}$$

□

Из коциклического условия вытекают два следствия. Положим $i = j = k$, тогда $\rho_{ii}(x) \top \rho_{ii}(x) = \rho_{ii}(x)$, откуда

$$\rho_{ii} = \mathbb{1}.$$

Положим теперь в коциклическом условии $i = j$, тогда $\rho_{ik}(x) \top \rho_{ki}(x) = \rho_{ii}(x) = \mathbb{1}$, откуда

$$\rho_{ik}(x) = (\rho_{ki}(x))^{-1}.$$

Ценность функций перехода в том, что они позволяют восстановить тотальное пространство главного расслоения. Справедливо Предложение [6]:

Предложение 12.7. Пусть M — гладкое многообразие, (G, \top) — группа Ли. Тогда для любого не более, чем счетного, открытого покрытия $\{U_i\}_{i \in I}$ пространства M и любой системы отображений

$$\rho_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G,$$

удовлетворяющей условию

$$\rho_{ik}(x) \top \rho_{kj}(x) = \rho_{ij}(x), \quad x \in U_i \cap U_j \cap U_k,$$

существует главное расслоение над M со структурной группой G , система локальных тривиализаций которого обладает отображениями пересчета ρ_{ij} .

Ограничимся наброском идеи доказательства. Тотальное пространство расслоения строится следующим образом. Сначала определяется дизъюнктное объединение

$$X = \coprod_{i \in I} (U_i \times G).$$

Оно является многообразием. На нем вводится следующее отношение эквивалентности \sim :

$$(i, x, g) \sim (j, y, h) \Leftrightarrow x = y, h = \rho_{ij}(x) \top g.$$

Тогда

$$P := X / \sim.$$

Поскольку, согласно определению отношения эквивалентности, из $[(i, x, g)] = [(j, y, h)]$ следует $x = y$, то проекция $\pi : P \rightarrow M$ может быть определена следующим образом:

$$\pi([(i, x, g)]) := x.$$

Правое действие $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ задается в виде

$$[(i, x, g)] \triangleleft h := [(i, x, g \top h)].$$

Локальные тривиализации определяются следующим образом. Пусть $\text{pr} : X \rightarrow P$ — каноническая проекция, сопоставляющая каждой точке X ее класс эквивалентности. Обозначим через pr_i ограничение pr на $U_i \times G$. Оно определяет биекцию

$$\text{pr}_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i).$$

Тогда локальные тривиализации для $i \in I$ определяются как

$$\Psi_i = \text{pr}_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G.$$

2.6. Ассоциированные расслоения

Пусть $(P, G, M, \triangleleft_P, \pi)$ — главное расслоение, а $\triangleright_F : G \times F \rightarrow F$ — левое действие на многообразии F . Тогда можно построить локально тривиальное расслоение с типовым слоем F .

Определим правое действие \triangleleft_F , ассоциированное с \triangleright_F :

$$\triangleleft_F : F \times G \rightarrow F, \quad f \triangleleft_F g := g^{-1} \triangleright_F f.$$

Оба действия, \triangleleft_P и \triangleleft_F , определяют отображение

$$\triangleleft : P \times F \times G \rightarrow P \times F, \quad (p, f) \triangleleft g := (p \triangleleft_P g, f \triangleleft_F g).$$

Отображение \triangleleft является правым действием G на $P \times F$. Действительно,

- $(p, f) \triangleleft \mathbb{1} = (p \triangleleft_P \mathbb{1}, f \triangleleft_F \mathbb{1}) = (p, f)$,
- если $g, h \in G$, то

$$\begin{aligned} ((p, f) \triangleleft g) \triangleleft h &= (p \triangleleft_P g, f \triangleleft_F g) \triangleleft h = \\ &= ((p \triangleleft_P g) \triangleleft_P h, (f \triangleleft_F g) \triangleleft_F h) = (p \triangleleft_P (g \top h), f \triangleleft_F (g \top h)) = \\ &= (p, f) \triangleleft (g \top h). \end{aligned}$$

Определим на многообразии $P \times F$ отношение эквивалентности \sim :

$$(p, f) \sim (p', f') \Leftrightarrow \exists g \in G : (p, f) \triangleleft g = (p', f').$$

Тогда $P \times F$ распадается на непересекающиеся классы — орбиты. Обозначим пространство орбит через $P \times_G F$, т.е.,

$$P \times_G F := (P \times F)/G = \{(p, f) \triangleleft G \mid (p, f) \in P \times F\}.$$

На гладком многообразии $P \times_G F$ определим отображение

$$\pi_F : P \times_G F \rightarrow M, \quad \pi_F([(p, f)]) := \pi(p).$$

Проверим корректность определения. Пусть $(p, f) \sim (p', f')$, тогда $(p, f) \triangleleft g = (p', f')$, для некоторого $g \in G$. По определению \triangleleft имеем, что $(p \triangleleft_P g, f \triangleleft_F g) = (p', f')$. Отсюда, в свою очередь, следует равенство $p \triangleleft_P g = p'$. Но тогда $\pi(p') = \pi(p \triangleleft_P g) = \pi(p)$, и корректность доказана. Наконец, заметим, что по определению, отображение π_F сюръективно.

Заметим, что локальная тривиализация (U, Ψ) на P порождает локальное сечение $s : U \rightarrow P$ по правилу

$$s(x) := \Psi^{-1}(x, \mathbb{1}).$$

Тогда отображение

$$\xi : U \times F \rightarrow \pi_F^{-1}(U), \quad \xi : (x, f) \mapsto [(s(x), f)],$$

является диффеоморфизмом. В этой связи, (U, ξ^{-1}) — локальная тривиализация $P \times_G F$. Таким образом, $(P \times_G F, M, \pi_F)$ — локально тривиальное расслоение с типовым слоем F .

Определение 12.7. Локально тривиальное расслоение $(P \times_G F, M, \pi_F)$ с типовым слоем F называется **ассоциированным** с главным расслоением $(P, G, M, \triangleleft_P, \pi)$.

Следующее Предложение дает достаточное условие того, что ассоциированное расслоение является векторным расслоением [6].

Предложение 12.8. Пусть $(P, G, M, \triangleleft_P, \pi)$ — главное расслоение, F — конечномерное векторное пространство, а $\rho : G \rightarrow \text{GL}(F)$ — представление¹. Тогда $(P \times_G F, M, \pi_F)$ — векторное расслоение.

Библиография

1. Lee John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. — Springer New York, 2012.
2. Rudolph Gerd, Schmidt Matthias. **Differential Geometry and Mathematical Physics. Part I. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems**. — Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013.
3. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М. : Мир, 1970.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М. : Наука, 1981.
5. Naber Gregory L. **Topology, Geometry and Gauge fields. Foundations**. — Springer-Verlag New York, 2011.
6. Rudolph Gerd, Schmidt Matthias. **Differential Geometry and Mathematical Physics. Part II. Fibre Bundles, Topology and Gauge Fields**. — Springer Science+Business Media Dordrecht, 2017.

¹То есть, гомоморфизм групп. Он определяет левое действие

$$\triangleright_F: G \times F \rightarrow F, \quad g \triangleright_F v := \rho(g)v.$$

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1. Вспомогательные построения

В настоящей главе рассматривается теория связностей на главных расслоениях, из которой в частном случае получаются классические связности: евклидова, Леви-Чивита, Вайценбока и др. Рассмотрение общей теории предваряют вспомогательные построения, представленные в настоящем разделе. В изложении мы всюду следуем монографии [1].

1.1. Векторное поле Киллинга

Напомним, что если (G, Γ) — группа Ли, то через \mathfrak{g} обозначается алгебра Ли левоинвариантных векторных полей. Поле $X \in \mathfrak{g}$ порождает поток $\Phi_t^X : G \rightarrow G, t \in \mathbb{R}$. Экспоненциальное отображение определяется как

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad \exp(X) := \Phi_1^X(\mathbf{1}).$$

Пусть теперь M — гладкое многообразие, (G, Γ) — группа Ли, а $\triangleleft : M \times G \rightarrow M$ — правое действие G на M . Для фиксированного $X \in \mathfrak{g}$ соответствие

$$(m, t) \mapsto m \triangleleft \exp(tX),$$

определяет поток на M , поскольку

$$(m \triangleleft \exp(sX)) \triangleleft \exp(tX) = m \triangleleft (\exp(sX) \top \exp(tX)) = m \triangleleft \exp((t+s)X). \blacksquare$$

Определение 13.1. Векторное поле на M , определяемое потоком

$$\Psi^X : (m, t) \mapsto m \triangleleft \exp(tX),$$

называется **векторным полем Киллинга** и обозначается через X_* .

Значение поля X_* в точке $m \in M$ может быть выражено следующим образом:

$$(X_*)_m = \left. \frac{d}{dt} \Psi_t^X(m) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \Psi_m^X(t) \right|_{t=0}.$$

1.2. Распределения

Пусть M — многообразие. Для $D \subset TM$ обозначим через $\text{Vec}_D(M)$ множество всех векторных полей на M , принимающих значения в D , а через $\text{Vec}_D^{\text{loc}}(M)$ — множество локальных векторных полей, принимающих значения в D .

Определение 13.2. *Распределение на M — это множество $D \subset TM$, такое, что для любой точки $m \in M$ выполнены условия:*

- (1) Множество $D_m = D \cap T_m M$ — линейное подпространство $T_m M$.
- (2) Для любого $Y \in D_m$ существует поле $X \in \text{Vec}_D(M)$, такое, что $X_m = Y$.

Определение 13.3. Функция $\text{rank}_D : M \mapsto \dim D_m$ называется **рангом распределения D** . Если ранг постоянен, то D называется **регулярным**. В противном случае, D называется **вырожденным**.

Пример 13.1. Пусть $\pi : P \rightarrow M$ — субмерсия. Тогда положим

$$\ker T\pi := \{u \in TP \mid T\pi(u) = 0\} = (T\pi)^{-1}(0),$$

где $T\pi : TP \rightarrow TM$ — касательное отображение. Множество $\ker T\pi$ является регулярным распределением ранга $\dim P - \dim M$.

Пример 13.2. Пусть M — гладкое многообразие, (G, \top) — группа Ли, $a \triangleleft: M \times G \rightarrow M$ — правое действие. Тогда векторные поля Киллинга определяют распределение $D^{\mathfrak{g}}$, такое, что

$$D_m^{\mathfrak{g}} = \{(A_*)_m \in T_m M \mid A \in \mathfrak{g}\}.$$

Пусть M — гладкое многообразие, а D — распределение на нем.

Определение 13.4. Связное подмногообразие N многообразия M называется **интегральным многообразием** D , проходящим через $t \in M$, если $t \in M$ и

$$T_x N = D_x,$$

для всех $x \in N$. Распределение D называется **интегрируемым**, если для всех $t \in M$ существует интегральное многообразие D , проходящее через t .

Определение 13.5. Распределение D на M называется **инволютивным**, если $\text{Vec}_D(M) \subset \text{Vec}(M)$ является подалгеброй Ли.

Иными словами, D инволютивно, если для любых $X, Y \in \text{Vec}_D(M)$ справедливо включение $[X, Y] \in \text{Vec}_D(M)$.

Справедлива Теорема [1]:

Теорема 13.1. Пусть M — гладкое многообразие размерности n , а D — распределение на M . Тогда D интегрируемо в том и только в том случае, когда оно инволютивно и имеет постоянный ранг вдоль интегральных кривых векторных полей из $\text{Vec}_D^{\text{loc}}(M)$.

Следствие:

Следствие 13.1. (Frobenius) Регулярное распределение интегрируемо в том и только в том случае, когда оно инволютивно.

2. Связность как распределение

2.1. Вертикальное подпространство

Пусть $\pi: P \rightarrow M$ — гладкое расслоение. Тогда для $p \in P$ множество

$$V_p P := \ker T_p \pi = \{u \in T_p P \mid T_p \pi(u) = 0\},$$

является векторным подпространством T_pP , касательным к слою $\pi^{-1}(\{\pi(p)\})$ [2].

Определение 13.6. Пространство V_pP называется *вертикальным подпространством* T_pP .

Положим

$$VP := \ker T\pi = \coprod_{p \in P} V_pP.$$

Определение 13.7. Распределение VP называется *вертикальным расслоением над P* .

Теорема 13.2. Пусть $(P, G, M, \triangleleft, \pi)$ — главное расслоение. Тогда векторные поля Киллинга и проекция определяют одно и то же распределение:

$$\begin{aligned} VP &= D^{\mathfrak{g}}, \\ V_pP &= D_p^{\mathfrak{g}}, \end{aligned}$$

для любого $p \in P$.

Доказательство см. в [1].

2.2. Определение связности

Пусть $(P, G, M, \triangleleft, \pi)$ — главное расслоение, а V — вертикальное расслоение над P .

Определение 13.8. Связностью на P называется распределение Γ на P , такое, что

$$(1_{\Gamma}) \quad \forall p \in P : \Gamma_p \oplus V_p = T_pP.$$

$$(2_{\Gamma}) \quad \forall p \in P \forall g \in G : \Gamma_{\Psi_g(p)} = T\Psi_g(\Gamma_p), \text{ где } \Psi_g : p \mapsto p \triangleleft g.$$

Пространство Γ_p называется *горизонтальным подпространством* T_pP .

В силу (1_Γ) , любой касательный вектор $X \in T_p P$ допускает единственное разложение на **горизонтальную компоненту** $\text{hor } X \in \Gamma_p$ и **вертикальную компоненту** $\text{ver } X \in V_p$:

$$X = \text{hor } X + \text{ver } X.$$

Таким образом, определены отображения

$$\begin{aligned} \text{hor} : TP &\rightarrow \Gamma, \\ \text{ver} : TP &\rightarrow V. \end{aligned}$$

2.3. Горизонтальный лифт векторного поля

Пусть Γ — связность на $(P, G, M, \triangleleft, \pi)$. Для точки $p \in P$ отображение

$$v_p : T\pi|_{\Gamma_p} \rightarrow T_{\pi(p)}M$$

является изоморфизмом векторных пространств Γ_p и $T_{\pi(p)}M$. Тогда любое векторное поле $X : M \rightarrow TM$ допускает **горизонтальный лифт** — векторное поле $X^\uparrow : P \rightarrow \Gamma$, такое, что

$$v \circ X^\uparrow = X \circ \pi.$$

2.4. Индуцирование связности на ассоциированное расслоение

Пусть Γ — связность на $(P, G, M, \triangleleft_P, \pi)$, а (E, M, π_F) , $E = P \times_G F$, — ассоциированное расслоение. Для $f \in F$ определим отображение

$$\iota_f : P \rightarrow E, \quad \iota_f(p) := [(p, f)].$$

Таким образом, отображение ι_f определяет вложение тотального пространства главного расслоения в тотальное пространство ассоциированного расслоения. Кроме того, оно обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \iota_f \circ \Psi_g^P &= \iota_{\Psi_g^F(f)}, \\ \pi_F \circ \iota_f &= \pi. \end{aligned}$$

Здесь $\Psi_g^P : p \mapsto p \triangleleft_P g$, $\Psi_g^F : f \mapsto f \triangleleft_F g$.

Горизонтальное подпространство в точке $e = [(p, f)] \in E$ определяется равенством

$$\Gamma_e^E := T\iota_f(\Gamma_p),$$

то есть, Γ_e^E является вложением Γ_p . Пусть V_e^E — касательное пространство к слою над $e \in E$. Тогда приходим к распределению V^E и разложению

$$T_e E = V_e^E \oplus \Gamma_e^E.$$

Таким образом, мы определили связность Γ^E на ассоциированном расслоении E , индуцированную связностью Γ .

3. Связность как форма

3.1. Форма связности

Пусть $(P, G, M, \triangleleft, \pi)$ — главное расслоение. Действие

$$\triangleleft: (p, g) \mapsto p \triangleleft g,$$

определяет отображение

$$\Psi_p : G \rightarrow P, \quad \Psi_p(g) := p \triangleleft g.$$

Ему соответствует касательное отображение

$$T\Psi_p : TG \rightarrow TP.$$

Будет рассматривать отображение $T_1\Psi_p : T_1G \rightarrow T_pP$ как отображение

$$T_1\Psi_p : \mathfrak{g} \rightarrow T_pP,$$

используя канонический изоморфизм $T_1G \cong \mathfrak{g}$. Поскольку

$$(X_*)_p = T_1\Psi_p(X),$$

то $T_1\Psi_p$ порождает изоморфизм

$$T_1\Psi_p : \mathfrak{g} \rightarrow V_p$$

между алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей и вертикальным подпространством. Из этого вытекает, что с каждой связностью Γ можно ассоциировать \mathfrak{g} -значную 1-форму $\omega : T^*P \rightarrow \mathfrak{g}$:

$$\forall p \in P \forall X \in T_pP : \omega_p(X) := (T_1\Psi_p)^{-1}(\text{ver } X).$$

Определение 13.9. Форма ω называется *1-формой связности*.

Предложение 13.1. Пусть $(P, G, M, \triangleleft, \pi)$ — главное расслоение со связностью Γ . Тогда форма связности ω является гладкой и удовлетворяет следующим свойствам:

$$(1_\omega) \quad \forall p \in P : \ker \omega_p = \Gamma_p.$$

$$(2_\omega) \quad \forall X \in \mathfrak{g} : \omega(X_*) = X.$$

$$(3_\omega) \quad \forall g \in G : \Psi_g^* \omega = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \omega.$$

Обратно, любая 1-форма $\omega \in \text{Sec}(T^*P \otimes \mathfrak{g})$, удовлетворяющая условиям (2_ω) и (3_ω) , единственным образом определяет связность Γ .

Доказательство см. в [1].

3.2. Локальное представление связности

Определение 13.10. Пусть ω — 1-форма связности, а $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ — локальное сечение. Тогда *локальным представлением формы ω* называется форма

$$A := s^* \omega,$$

заданная на U .

Если (U, φ) — карта на M , а (t_a) — базис \mathfrak{g} , то совокупность

$$(dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} \otimes t_a),$$

является локальным репером расслоения \mathfrak{g} -значных k -форм на M . Тогда

$$A = A_\mu^a dx^\mu \otimes t_a.$$

Сечение s определяет отображение $\kappa : P \rightarrow G$, удовлетворяющее свойствам:

$$\begin{aligned} \kappa(p \triangleleft g) &= \kappa(p) \top g, \\ p &= s \circ \pi(p) \triangleleft \kappa(p). \end{aligned}$$

С помощью отображения κ , значение ω_p в точке $p \in \pi^{-1}(U)$ может быть восстановлено по локальному представлению A .

Предложение 13.2. Пусть $(P, G, M, \triangleleft, \pi)$ — главное расслоение, ω — форма связности на P , $U \subset M$ — открытое множество, а $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ — локальное сечение. Пусть A — локальные представленные формы связности. Тогда для любой точки $p \in \pi^{-1}(U)$, справедливо равенство

$$\omega_p = \text{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\pi^* A)_p + (\kappa^* \Theta)_p,$$

где Θ — форма Маурера–Картана на G .

4. Ковариантная производная

4.1. Ковариантная внешняя производная и форма кривизны

Пусть P — главное расслоение со связностью Γ , а F — конечномерное векторное пространство.

Определение 13.11. Ковариантной внешней производной формы $\alpha \in \text{Sec}(\Lambda^k(T^*P) \otimes F)$ относительно Γ называется дифференциальная форма $D_\omega \alpha \in \text{Sec}(\Lambda^{k+1}(T^*P) \otimes F)$, определенная равенством

$$D_\omega \alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) := d\alpha(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}),$$

где d — внешний дифференциал, а $X_1, \dots, X_{k+1} \in \text{Vec}(P)$.

Определение 13.12. Пусть ω — форма связности. Тогда **формой кривизны** называется 2-форма

$$\Omega := D_\omega \omega.$$

Таким образом, если X и Y — горизонтальные векторные поля, то $\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y)$.

Кривизна и теорема Фробениуса дают следующий критерий интегрируемости связности Γ [1]:

Теорема 13.3. Горизонтальное распределение Γ интегрируемо тогда и только тогда, когда $\Omega = 0$.

Определение 13.13. Связность Γ с нулевой кривизной называется **плоской**.

4.2. Структурное уравнение и тождество Бианки

Пусть M — n -многообразие, а $\alpha \in \text{Sec}(\Lambda^k(T^*M) \otimes \mathfrak{g})$ и $\beta \in \text{Sec}(\Lambda^l(T^*M) \otimes \mathfrak{g})$ — некоторые формы, тогда внешнее произведение форм α и β определяется как

$$[\alpha, \beta](X_1, \dots, X_{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} [\alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}), \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})],$$

где $X_1, \dots, X_{k+l} \in \text{Vec}(M)$.

Далее через $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ будем обозначать алгебру Ли вещественных $n \times n$ матриц.

Если \mathfrak{g} является подалгеброй ассоциативной алгебры $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, то можно работать с \wedge -произведением:

$$\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \wedge \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}).$$

Между операциями $[\cdot, \cdot]$ и \wedge имеется связь [1]:

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta + (-1)^{kl+1} \beta \wedge \alpha.$$

Теорема 13.4. Пусть P — главное расслоение, ω — форма связности на P , а Ω — форма кривизны. Тогда справедливо уравнение

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] + \Omega,$$

называемое **структурным уравнением**.

Следствие 13.2. Если \mathfrak{g} — подалгебра $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, то структурное уравнение принимает вид

$$d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega.$$

Следствие 13.3. Справедливо **тождество Бианки**:

$$D_\omega \Omega = 0.$$

4.3. Ковариантная производная ∇^ω

Приведем вспомогательные определения. Пусть $\pi : P \rightarrow M$ — главное расслоение, F — конечномерное векторное пространство, а $\sigma : G \rightarrow \text{GL}(F)$ — представление группы Ли.

Определение 13.14. Дифференциальная форма $\tilde{\alpha} \in \text{Sec}(\Lambda^k(T^*P) \otimes F)$ называется **горизонтальной, типа σ** , если она аннулируется любым вектором, касательным к слоям, и если она удовлетворяет равенству

$$\forall g \in G : \Psi_g^* \tilde{\alpha} = \sigma_{g^{-1}} \circ \tilde{\alpha}.$$

Векторное пространство горизонтальных k -форм на P обозначим через

$$\Omega_{\sigma, \text{hor}}^k(P; F).$$

Пусть теперь $E = P \times_G F$ — расслоение, ассоциированное с P .

Предложение 13.3. Любому элементу $\tilde{\alpha} \in \Omega_{\sigma, \text{hor}}^k(P; F)$ соответствует единственный элемент $\alpha \in \Omega^k(M; E)$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k(T^*P) & \xrightarrow{\text{pr} \times \tilde{\alpha}} & P \times F \\ \Lambda^k(T\pi) \downarrow & & \downarrow \iota \\ \Lambda^k(T^*M) & \xrightarrow{\alpha} & E \end{array}$$

На диаграмме: $\text{pr} : \Lambda^k(T^*P) \rightarrow P$ и $\iota : P \times F \rightarrow P \times_G F$ — натуральные проекции. Соответствие $\tilde{\alpha} \mapsto \alpha$ определяет изоморфизм векторных пространств $\Omega_{\sigma, \text{hor}}^k(P; F)$ и $\Omega^k(M; E)$.

Пусть теперь ω — форма связности на P .

Определение 13.15. Пусть $\alpha \in \Omega^k(M; E)$. **Ковариантная внешняя производная $d_\omega \alpha$** — это образ $D_\omega \tilde{\alpha}$ под действием изоморфизма $\Omega_{\sigma, \text{hor}}^k(P; F) \rightarrow \Omega^k(M; E)$, то есть,

$$\widetilde{d_\omega \alpha} = D_\omega \tilde{\alpha}.$$

Согласно определению, для $p \in \pi^{-1}(\{m\})$, и векторов $X_i \in T_m M$, $Y_i \in T_p P$, таких, что $T\pi(Y_i) = X_i$, $i \in \{1, \dots, k+1\}$, справедливо равенство

$$(d_\omega \alpha)_m(X_1, \dots, X_{k+1}) = \iota_p \circ (D_\omega \tilde{\alpha})_p(Y_1, \dots, Y_{k+1}).$$

Здесь

$$\iota_p : F \rightarrow P \times_G F, \quad \iota_p(f) := [(p, f)].$$

Поскольку $\Omega^0(M; E) = \text{Sec}(E)$, $\Omega^1(M; E) = \text{Sec}(T^*M \otimes E)$, то $d_\omega|_{\Omega^0(M; E)}$ является линейным оператором из $\text{Sec}(E)$ в $\text{Sec}(T^*M \otimes E)$.

Определение 13.16. *Линейный оператор*

$$\nabla^\omega := d_\omega|_{\Omega^0(M; E)} : \text{Sec}(E) \rightarrow \text{Sec}(T^*M \otimes E)$$

называется *ковариантной производной на E , порожденной ω* .

Из определения следует, что для $m \in M$, $\Phi \in \text{Sec}(E)$ справедливы равенства

$$(\nabla^\omega \Phi)_m(X) = \iota_p \circ (D_\omega \tilde{\Phi})_p(Y) = \iota_p(X_p^\uparrow(\tilde{\Phi})),$$

где $p \in \pi^{-1}(\{m\})$, $Y \in T_p P$ таков, что $T\pi(Y) = X$, а X^\uparrow — горизонтальный лифт.

Выберем базис (\bar{e}_α) пространства F . Тогда локальное сечение s расслоения P индуцирует локальный репер (e_α) на E , определяемый равенством

$$e_\alpha(m) := \iota_{s(m)}(\bar{e}_\alpha).$$

Предложение 13.4. *Пусть $\pi : P \rightarrow M$ — главное расслоение, снабженное формой связности ω , $E = P \times_G F$ — ассоциированное векторное расслоение, а ∇^ω — ковариантная производная. Пусть, кроме того, s — локальное сечение P , а (e_α) — локальный репер на E , индуцированный s . Тогда*

$$\nabla^\omega e_\alpha = A^{\beta \cdot}_\alpha e_\beta,$$

где $A = s^* \omega$ — локальное представление ω , а $(A^{\beta \cdot}_\alpha)$ — его матрица в базисе (\bar{e}_α) .

Предложение 13.5. *Для $f \in C^\infty(M)$ и $\Phi \in \text{Sec}(E)$ справедливо равенство (правило Лейбница):*

$$\nabla^\omega(f\Phi) = df \otimes \Phi + f\nabla^\omega \Phi.$$

Из двух последних Предложений вытекает

Следствие 13.4. Пусть $\Phi \in \text{Sec}(E)$, а (e_α) — локальный репер на E , тогда

$$\nabla^\omega \Phi = d\Phi^\alpha \otimes e_\alpha + A^\beta_{\cdot\alpha} \Phi^\alpha e_\beta.$$

Для $X \in \text{Vec}(M)$ ковариантная производная ∇^ω индуцирует отображение

$$\nabla_X^\omega : \text{Sec}(E) \rightarrow \text{Sec}(E), \quad \nabla_X^\omega \Phi := \nabla^\omega \Phi(X).$$

Предложение 13.6. Для $X, X_1, X_2 \in \text{Vec}(M)$, $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \in \text{Sec}(E)$ и $f \in C^\infty(M)$ справедливы равенства:

$$(\nabla_1) \quad \nabla_{X_1+X_2}^\omega \Phi = \nabla_{X_1}^\omega \Phi + \nabla_{X_2}^\omega \Phi,$$

$$(\nabla_2) \quad \nabla_X^\omega (\Phi_1 + \Phi_2) = \nabla_X^\omega \Phi_1 + \nabla_X^\omega \Phi_2,$$

$$(\nabla_3) \quad \nabla_{fX}^\omega \Phi = f \nabla_X^\omega \Phi,$$

$$(\nabla_4) \quad \nabla_X^\omega (f\Phi) = f \nabla_X^\omega \Phi + X(f)\Phi.$$

4.4. Форма кривизны, порождаемая ∇^ω

Пусть Ω — форма кривизны, а $\sigma : G \rightarrow \text{GL}(F)$ — представление группы Ли. Поскольку $T\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(F)$ — гомоморфизм, то форме Ω соответствует 2-форма на M со значениями в расслоении эндоморфизмов $\text{End}(E)$:

$$R_m^\nabla(X, Y) := \iota_p \circ T\sigma(\Omega_p(X^\uparrow, Y^\uparrow)) \circ \iota_p^{-1},$$

где $m \in M$, $p \in \pi^{-1}(\{m\})$, $X, Y \in T_m M$, а X^\uparrow и Y^\uparrow — горизонтальные лифты.

Определение 13.17. 2-форма R^∇ называется **формой кривизны, ассоциированной с Ω** .

Предложение 13.7. Для формы кривизны справедливо равенство

$$R^\nabla(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}.$$

4.5. Параллельный перенос и голономия

Пусть $\pi : P \rightarrow M$ — главное расслоение, Γ — связность на P , а γ и $\tilde{\gamma}$ — гладкие кривые на M и P соответственно.

Определение 13.18. Кривая $\tilde{\gamma}$ называется

- **лифтом** γ , если $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$,
- **горизонтальной относительно Γ** , если все векторы скорости $\tilde{\gamma}'$ горизонтальны относительно Γ : $\text{ver } \tilde{\gamma}' = 0$.

Предложение 13.8. Пусть $\pi : P \rightarrow M$ — главное расслоение, Γ — связность на P . Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, содержащий 0, а $\gamma : I \rightarrow M$ — гладкая кривая. Тогда для любой точки $p_0 \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\})$ существует единственный горизонтальный лифт γ^\uparrow , такой, что $\gamma^\uparrow(0) = p_0$.

Пусть $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Каждая гладкая кривая $\gamma : I \rightarrow M$ определяет отображение

$$\hat{\gamma}_\Gamma : \pi^{-1}(\{\gamma(0)\}) \rightarrow \pi^{-1}(\{\gamma(1)\}), \quad p \mapsto \gamma_p^\uparrow(1),$$

где γ_p^\uparrow — горизонтальный лифт γ , проходящий через p .

Определение 13.19. Отображение $\hat{\gamma}_\Gamma$ называется **оператором параллельного переноса вдоль γ относительно связности Γ** .

Пусть $C(m)$ — множество замкнутых гладких кривых, начинающихся и заканчивающихся в $m \in M$. Параллельный перенос вдоль $\gamma \in C(m)$ приводит к автоморфизму слоя $\pi^{-1}(\{m\})$.

Определение 13.20. Группа параллельных переносов вдоль элементов $C(m)$ называется **группой голономии $H_m(\Gamma)$** .

Пусть $E = P \times_G F$. Горизонтальный лифт кривой γ на M к кривой γ_E^\uparrow на E с началом в $[(p, f)] \in \pi_F^{-1}(\{\gamma(0)\})$ определяется равенством

$$\gamma_E^\uparrow(t) := \iota_f(\gamma_P^\uparrow(t)),$$

где γ_P^\uparrow — горизонтальный лифт кривой γ в P с началом в p . Оператор параллельного переноса вдоль γ обозначается через

$$\hat{\gamma}_{\Gamma^E}(t) : \pi_F^{-1}(\{\gamma(0)\}) \rightarrow \pi_F^{-1}(\{\gamma(t)\}).$$

Используя оператор параллельного переноса, можно представить значение ковариантной производной в виде предела. Справедливо Предложение:

Предложение 13.9. Пусть Γ^E — связность на E , ∇ — ковариантная производная, а $\Phi \in \text{Sec}(E)$. Тогда для любого $m \in M$ и любого $X \in \text{Vec}(M)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \nabla_X \Phi(m) &= \left. \frac{d}{dt} (\hat{\gamma}_{\Gamma^E}(t))^{-1} \circ \Phi(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\hat{\gamma}_{\Gamma^E}(t))^{-1} \circ \Phi(\gamma(t)) - \Phi(\gamma(0))}{t}, \end{aligned}$$

где $\gamma : I \rightarrow M$ — интегральная кривая поля X , проходящая через точку $m = \gamma(0)$, а $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, содержащий 0.

4.6. Линейная связность

Пусть M — n -мерное многообразие, а LM — расслоение реперов. Напомним, что линейный репер в $m \in M$ — это базис $u = (u_1, \dots, u_n)$ пространства $T_m M$, а $\pi : LM \rightarrow M$, $\pi(u) = m$. Структурная группа LM — это группа $\text{GL}(n; \mathbb{R})$, а действие на LM определено равенством

$$\triangleleft : LM \times \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow LM, \quad (u, a) \mapsto (u_j a_i^j).$$

Далее, пусть

$$\sigma_n^0 : \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n), \quad \sigma_n^0(a)x = a.x.$$

Отображение σ_n^0 является представлением $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ в \mathbb{R}^n .

Пусть $E = LM \times_{\text{GL}(n; \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ — ассоциированное расслоение. Определим отображение

$$\psi : E \rightarrow TM, \quad \psi([(u, (x^1, \dots, x^n))]) := x^i u_i.$$

Отображение ψ является изоморфизмом векторных расслоений. В этой связи,

$$TM \cong LM \times_{\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})} \mathbb{R}^n.$$

Переходя к дуальным расслоениям, получаем отсюда, что

$$T^*M \cong LM \times_{\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})} (\mathbb{R}^n)^*.$$

В этой связи, для тензорного расслоения будем иметь

$$T_l^k M \cong LM \times_{\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})} T_l^k \mathbb{R}^n.$$

Мы будем использовать другое представление для элемента $u = (m, (e_i)_{i=1}^n) \in LM$. Рассмотрим отображение

$$\varphi^u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_m M, \quad \varphi^u(x) := x^i e_i.$$

Отображение φ^u определено корректно, поскольку для $x \in \mathbb{R}^n$ действительно будет $\varphi^u(x) \in T_m M$. Кроме того, оно является изоморфизмом векторных пространств. Действительно, если $x \neq y$, то $x^i e_i \neq y^i e_i$, а потому $\varphi^u(x) \neq \varphi^u(y)$. Таким образом, φ^u инъективно. Далее, если $z \in T_m M$, то, поскольку $(e_i)_{i=1}^n$ — базис $T_m M$, найдется кортеж $(z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{R}^n$, такой, что $z = z^i e_i$. Но тогда $\varphi^u(z^1, \dots, z^n) = z$ и мы установили, что φ^u сюръективно. Наконец, легко показать, что φ^u линейно.

В дальнейшем элемент $u \in LM$ иногда будем рассматривать как изоморфизм

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\pi(u)} M.$$

Он позволяет определить дифференциальную форму $\theta \in \Omega^1(LM, \mathbb{R}^n)$, $\theta : u \mapsto \Theta_u$, где

$$\theta_u(X) := u^{-1}(T_u \pi(X)), \quad X \in T_u LM.$$

Определение 13.21. Дифференциальная форма θ называется **канонической \mathbb{R}^n -значной 1-формой на LM** .

Определение 13.22. Связность Γ на расслоении реперов LM называется **линейной (или аффинной) связностью на M** .

Пусть Γ — линейная связность на M , а ω — ее 1-форма. Тогда можно определить 2-форму

$$\Theta \in \Omega^2(LM, \mathbb{R}^n), \quad \Theta := D_\omega \theta.$$

Определение 13.23. Дифференциальная форма Θ называется **формой кручения** Γ .

Предложение 13.10. Справедливы уравнения

$$\begin{aligned}d\omega &= -\omega \wedge \omega + \Omega, \\d\theta &= -\omega \wedge \theta + \Theta,\end{aligned}$$

называемыми **структурными**.

Выберем базис (e_i) в \mathbb{R}^n и (E_j^i) в $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$,

$$\theta = \theta^i e_i, \quad \Theta = \Theta^i e_i, \quad \omega = \omega^i_{\cdot j} E_i^j, \quad \Omega = \Omega^i_{\cdot j} E_i^j.$$

Тогда структурные уравнения примут вид

$$\begin{aligned}d\omega^i_{\cdot j} &= -\omega^i_{\cdot k} \wedge \omega^k_{\cdot j} + \Omega^i_{\cdot j}, \\d\theta^i &= -\omega^i_{\cdot j} \wedge \theta^j + \Theta^i.\end{aligned}$$

Предложение 13.11. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}D_\omega \Omega &= 0, \\D_\omega \Theta &= \Omega \wedge \theta,\end{aligned}$$

называемые **тождествами Бианки**.

Рассмотрим ковариантную производную. По определению,

$$\nabla^\omega := d_\omega|_{\Omega^0(M; E)} : \text{Sec}(E) \rightarrow \text{Sec}(T^*M \otimes E),$$

где $E = P \times_G F$. Для сечения Y расслоения $TM \cong LM \times_{\text{GL}(n; \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$, т.е. для векторного поля на M , получаем

$$(\nabla^\omega Y)_m(X) = u \circ (D_\omega \tilde{Y})_u(X^*), \quad \pi(u) = m,$$

где $\tilde{Y} \in \text{Hom}_{\text{GL}(n; \mathbb{R})}(LM, \mathbb{R}^n)$ таков, что $Y(m) = u \circ \tilde{Y}(u)$. Здесь $\text{Hom}_G(P, F)$ — множество гладких эквивариантных отображений $\tilde{\Phi} : P \rightarrow F$:

$$\tilde{\Phi} \circ \Psi_a = \sigma_{a^{-1}} \circ \tilde{\Phi}.$$

Оператор ∇^ω определяет ассоциированный с ним оператор

$$\nabla_X^\omega : \text{Sec}(TM) \rightarrow \text{Sec}(TM), \quad \nabla_X^\omega Y := \nabla^\omega Y(X).$$

Его свойства устанавливаются в следующем Предложении.

Предложение 13.12. Пусть Γ — линейная связность на M , а ∇ — ковариантная производная на TM . Тогда ковариантная производная

$$\nabla_X : \text{Sec}(T_s^r M) \rightarrow \text{Sec}(T_s^r M),$$

единственным образом определяется следующими свойствами:

- (1) $\nabla_X f = Xf$, для $f \in C^\infty(M)$,
- (2) ∇_X — дифференцирование тензорной алгебры,
- (3) ∇_X коммутирует с любой сверткой.

Форме $\Theta \in \Omega^2(LM, \mathbb{R}^n)$ соответствует форма $T \in \Omega^2(M, TM)$, определяемая равенством

$$T_m(X, Y) = u(\Theta_u(X^*, Y^*)),$$

где $X, Y \in T_m M$, $\pi(u) = m$, а $X^*, Y^* \in T_u LM$ удовлетворяют условиям $T\pi(X) = X^*$, $T\pi(Y) = Y^*$. Аналогично, форме Ω соответствует форма $R \in \Omega^2(M, \text{End}(TM))$,

$$R_m(X, Y) = u \circ \Omega_u(X^*, Y^*) \circ u^{-1}.$$

Предложение 13.13. Пусть ∇ — ковариантная производная линейной связности Γ на M . Тогда

$$\begin{aligned} R(X, Y) &= [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}, \\ T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned}$$

Рассмотрим локальное описание линейной связности. Пусть $m \mapsto \mathbf{e}(m) = (e_1(m), \dots, e_n(m))$ — локальное сечение LM , то есть, локальный репер TM , а $m \mapsto \vartheta(m) = (\vartheta^1(m), \dots, \vartheta^n(m))$ — дуальный корепер. Тогда локальное представление $A = \mathbf{e}^* \omega$ линейной связности Γ есть 1-форма на M со значениями в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Таким образом,

$$A = A^i_{\cdot k} E_i^k = \Gamma^{\cdot i}_{jk} \vartheta^j \otimes E_i^k.$$

Определение 13.24. Функции $\Gamma^{\cdot i}_{jk}$ называются **символами Кристоффеля** или **коэффициентами связности** Γ в локальном репере \mathbf{e} .

Библиография

1. Rudolph Gerd, Schmidt Matthias. *Differential Geometry and Mathematical Physics. Part II. Fibre Bundles, Topology and Gauge Fields.* — Springer Science+Business Media Dordrecht, 2017.
2. Lee John M. *Introduction to Smooth Manifolds.* — Springer New York, 2012.

1. Связности на векторных расслоениях

1.1. Аксиоматическое определение

Пусть M — гладкое многообразие. Определим аксиоматически связность, индуцируемую связностью на расслоении реперов [1, 2, 3].

Определение 14.1. *Связностью ∇ на гладком векторном расслоении (E, M, π) называется отображение*

$$\nabla : \text{Vec}(M) \times \text{Sec}(E) \rightarrow \text{Sec}(E), \quad (u, \sigma) \mapsto \nabla_u \sigma,$$

удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$(\nabla_1) \quad \forall u \in \text{Vec}(M) \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \text{Sec}(E) : \nabla_u(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_u \sigma_1 + \nabla_u \sigma_2;$$

$$(\nabla_2) \quad \forall u_1, u_2 \in \text{Vec}(M) \forall \sigma \in \text{Sec}(E) : \nabla_{u_1+u_2} \sigma = \nabla_{u_1} \sigma + \nabla_{u_2} \sigma;$$

$$(\nabla_3) \quad \forall u \in \text{Vec}(M) \forall f \in C^\infty(M) \forall \sigma \in \text{Sec}(E) : \nabla_u(f\sigma) = u(f)\sigma + f\nabla_u \sigma;$$

$$(\nabla_4) \quad \forall u \in \text{Vec}(M) \forall f \in C^\infty(M) \forall \sigma \in \text{Sec}(E) : \nabla_{fu} \sigma = f\nabla_u \sigma.$$

Операция ∇_u называется **ковариантной производной вдоль u** .

Из правила Лейбница (∇_3) и свойства (∇_4) следует, что операция ∇_u удовлетворяет свойству локальности. То есть, пусть $U \subset M$ — некоторое открытое множество. Предположим, что векторные поля u_1, u_2 и сечения σ_1, σ_2 расслоения E совпадают в U : $u_1|_U = u_2|_U$ и $\sigma_1|_U = \sigma_2|_U$. Тогда

$$\nabla_u \sigma_1|_U = \nabla_u \sigma_2|_U.$$

Это свойство позволяет определить связность¹ [2]

$$\nabla|_U : \text{Vec}(U) \times \text{Sec}(E|_U) \rightarrow \text{Sec}(E|_U)$$

на открытом множестве $U \subset M$, используя исходную связность ∇ . Будем называть $\nabla|_U$ ограничением ∇ и в дальнейших рассуждениях опускать символ U после вертикальной черты.

1.2. Координатное представление

Пусть $\sigma \in \text{Sec}(E)$ и $u \in \text{Vec}(M)$, а $U \subset M$ — район действия некоторой карты, такой, что на нем задан некоторый гладкий локальный репер (e_a) расслоения E . Получим координатное представление для ограничения $\nabla_u \sigma$ на U . Сначала заметим, что существуют гладкие отображения $\omega_{ca}^b \in C^\infty(U)$, такие, что

$$\nabla_{\partial_a} e_b = \omega_{ab}^c \partial_c. \quad (14.1.1)$$

Тогда, применяя правило Лейбница (∇_3), мы приходим к выражению

$$\nabla_u \sigma = u^a \{ \partial_a \sigma^c + \sigma^b \omega_{ab}^c \} e_c,$$

в котором $u = u^a \partial_a$, $\sigma = \sigma^b e_b$.

1.3. Ковариантные производные тензорных полей

Заданная связность ∇ на гладком векторном расслоении может быть индуктивно распространена на другие уровни тензорной «башни». Сперва определим отображение

$$\nabla^{\text{sc}} : \text{Vec}(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad \nabla_u^{\text{sc}} f := u(f).$$

¹Здесь $E|_U$ обозначает ограничение векторного расслоения E на U , то есть, гладкое векторное расслоение с базой U и тотальным пространством $E|_U = \coprod_{p \in U} E_p$.

Затем, определим связность

$$\nabla^* : \text{Vec}(M) \times \text{Sec}(E^*) \rightarrow \text{Sec}(E^*)$$

на дуальном векторном расслоении (E^*, M, π) согласно следующему свойству:

$$\forall \sigma \in \text{Sec}(E) \forall \tau \in \text{Sec}(E^*) \forall u \in \text{Vec}(M) : \nabla_u^{\text{sc}} \langle \tau, \sigma \rangle = \langle \nabla_u^* \tau, \sigma \rangle + \langle \tau, \nabla_u \sigma \rangle.$$

Пусть $U \subset M$ — координатная область, (e_a) — гладкий локальный репер E над U , а (e^a) — соответствующий ему корепер. Тогда на U выполняется равенство

$$\nabla_{\partial_a}^* e^b = \nu^{b \cdot \cdot \cdot}_{\cdot \cdot \cdot ad} e^d,$$

где $\nu^{b \cdot \cdot \cdot}_{\cdot \cdot \cdot ad} \in C^\infty(U)$ — неизвестные функции. Положим $u = \partial_a$, $\tau = e^b$, $\sigma = e_c$. Поскольку $\langle e^b, e_c \rangle = \delta_c^b$, то, учитывая (14.1.1), приходим к выражению

$$\nu^{b \cdot \cdot \cdot}_{\cdot \cdot \cdot ac} + \omega^{b \cdot \cdot \cdot}_{\cdot \cdot \cdot ac} = 0,$$

из которого следует

$$\nabla_{\partial_a}^* e^b = -\omega^{b \cdot \cdot \cdot}_{\cdot \cdot \cdot ad} e^d. \quad (14.1.2)$$

Для сечения $\tau \in \text{Sec}(E^*)$ и векторного поля $u \in \text{Vec}(M)$ представление

$$\nabla_u^* \tau = u^a \{ \partial_a \tau_c - \tau_b \omega^{b \cdot \cdot \cdot}_{\cdot \cdot \cdot ac} \} e^c,$$

является прямым следствием (14.1.2) и правила Лейбница (∇_3) . Здесь $\tau = \tau_a e^a$, $u = u^b \partial_b$.

Предположим теперь, что на гладких векторных расслоениях (E_1, M, π_1) и (E_2, M, π_2) над одной и той же базой M определены связности ∇^1 и ∇^2 . Эти связности определяют новые связности,

$$\nabla^{E_1 \oplus E_2} : \text{Vec}(M) \times \text{Sec}(E_1 \oplus E_2) \rightarrow \text{Sec}(E_1 \oplus E_2),$$

$$\nabla^{E_1 \otimes E_2} : \text{Vec}(M) \times \text{Sec}(E_1 \otimes E_2) \rightarrow \text{Sec}(E_1 \otimes E_2),$$

заданные на сумме Уитни $(E_1 \oplus E_2, M, \pi^{E_1 \oplus E_2})$ и тензорном произведении $(E_1 \otimes E_2, M, \pi^{E_1 \otimes E_2})$ расслоений следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_u^{E_1 \oplus E_2}(\sigma_1 \oplus \sigma_2) &:= \nabla_u^1 \sigma_1 \oplus \nabla_u^2 \sigma_2, \\ \nabla_u^{E_1 \otimes E_2}(\sigma_1 \otimes \sigma_2) &:= (\nabla_u^1 \sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes \nabla_u^2 \sigma_2, \end{aligned} \quad (14.1.3)$$

где $u \in \text{Vec}(M)$, а $\sigma_i \in \text{Sec}(E_i)$, $i = 1, 2$.

1.4. Обозначение для компонент

Пусть $u \in \text{Vec}(M)$, $\sigma \in \text{Sec}(E)$ и $\tau \in \text{Sec}(E^*)$. Тогда

$$\nabla_u \sigma = u^a \nabla_a \sigma^c e_c, \quad \nabla_u^* \tau = u^a \nabla_a^* \tau_c e^c,$$

где

$$\nabla_a \sigma^c := \partial_a \sigma^c + \sigma^b \omega_{ab}^{c \cdot \cdot}, \quad \nabla_a^* \tau_c := \partial_a \tau_c - \tau_b \omega_{ac}^{b \cdot \cdot}.$$

1.5. Операторное представление связности

Если ∇ — связность на E , то можно положить

$$\tilde{\nabla} \sigma := \nabla_a \sigma^c e_c \otimes dx^a,$$

на каждой координатной области. Тогда отображение [2, 4]

$$\tilde{\nabla} : \text{Sec}(E) \rightarrow \text{Sec}(E \otimes T^*M),$$

корректно определено и удовлетворяет следующим свойствам:

$$\tilde{\nabla}_1) \text{ Аддитивность: } \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \text{Sec}(E) : \tilde{\nabla}(\sigma_1 + \sigma_2) = \tilde{\nabla} \sigma_1 + \tilde{\nabla} \sigma_2;$$

$$\tilde{\nabla}_2) \text{ Однородность: } \forall \sigma \in \text{Sec}(E) \forall \lambda \in \mathbb{R} : \tilde{\nabla}(\lambda \sigma) = \lambda \tilde{\nabla} \sigma;$$

$\tilde{\nabla}_3)$ Правило Лейбница:

$$\forall \sigma \in \text{Sec}(E) \forall f \in C^\infty(M) : \tilde{\nabla}(f \sigma) = f \tilde{\nabla} \sigma + \sigma \otimes df.$$

Обратно, заданное отображение $\tilde{\nabla}$ определяет связность ∇ по формуле

$$\nabla_u \sigma := \tilde{\nabla} \sigma \lrcorner u.$$

Далее мы будем опускать знак тильды в $\tilde{\nabla}$ и писать просто, ∇ .

1.6. Параллельный перенос

Пусть $\gamma : \mathbb{I} \rightarrow M$ — некоторая гладкая кривая на M .

Определение 14.2. Сечение $\sigma \in \text{Sec}(E)$ называется *параллельным* вдоль γ , если

$$\forall t \in \mathbb{I} : \nabla_{\gamma'(t)} \sigma = 0.$$

Выбирая локальные координаты (x^i) на M , запишем уравнение $\nabla_{\gamma'(t)} \sigma = 0$ в компонентах:

$$\dot{\sigma}^a + \dot{x}^c \sigma^b \omega_{cb}^{a\cdot} = 0, \quad a = 1, \dots, \text{rank}(E).$$

Здесь $\sigma = \sigma^a e_a$, $\gamma' = \dot{x}^a \partial_a$, а (\cdot) обозначает d/dt . Пусть $p = \gamma(t_0)$, тогда можно сформулировать следующее начальное условие: $\sigma_p = \sigma_0$. Таким образом, локально, существует единственное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^a + \dot{x}^c \sigma^b \omega_{cb}^{a\cdot} &= 0, \quad a = 1, \dots, \text{rank}(E), \\ \sigma_p^a &= \sigma_0^a, \quad a = 1, \dots, \text{rank}(E). \end{aligned} \quad (14.1.4)$$

В этой связи, можно определить **оператор параллельного переноса**

$$P_{t_0}^t : E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t)}.$$

С каждым элементом $\sigma_0 \in E_{\gamma(t_0)}$ он ассоциирует значение $\sigma(t)$ решения σ задачи Коши (14.1.4); $P_{t_0}^t : \sigma_0 \mapsto \sigma(t)$.

Теперь пусть $u = \gamma'(t_0)$ — вектор скорости кривой γ в точке p , а $\sigma \in \text{Sec}(E)$ — сечение. Тогда значение ковариантной производной $\nabla_u \sigma|_p$ в точке p может быть вычислено через предел

$$\nabla_u \sigma|_p = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{t_0+h}^{t_0} \sigma_{\gamma(t_0+h)} - \sigma_{\gamma(t_0)}}{h} = \left. \frac{d}{dt} P_t^{t_0} \sigma_{\gamma(t)} \right|_{t=t_0}.$$

Здесь $P_{t_0+h}^{t_0} \sigma_{\gamma(t_0+h)}$ принадлежит $E_{\gamma(t_0)}$, и это означает, что для достаточно малого h разность $P_{t_0+h}^{t_0} \sigma_{\gamma(t_0+h)} - \sigma_{\gamma(t_0)}$ определена корректно и принадлежит $E_{\gamma(t_0)}$. Таким образом, элемент $\nabla_u \sigma|_p \in E_{\gamma(t_0)}$ может быть рассмотрен как производная сечения σ в точке p вдоль вектора u .

2. Аффинная связность

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие. В оставшейся части настоящей Главы будем рассматривать случай, когда связность ∇ задана на касательном расслоении TM . То есть,

$$\nabla : \text{Vec}(M) \times \text{Vec}(M) \rightarrow \text{Vec}(M).$$

В этом случае мы называем ∇ **аффинной связностью**, а функции ω_{bc}^a называем **коэффициентами связности** и обозначаем через Γ_{bc}^a . Из рассуждений предшествующего раздела следует, что ∇ может быть индуцирована на T^*M , а затем — на любое другое векторное расслоение, полученное из копий TM и T^*M с помощью суммы Уитни и тензорного произведения. Эти связности будут обозначаться тем же символом ∇ .

2.1. Выражения для ковариантных производных

Если (∂_i) и (dx^i) , соответственно, координатный репер и корепер, то из (14.1.1) и (14.1.2) следует, что

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_a} \partial_b &= \Gamma_{ab}^c \partial_c, \\ \nabla_{\partial_a} dx^b &= -\Gamma_{ac}^b dx^c.\end{aligned}$$

Если $T \in \text{Sec}(T^{(k,l)}(TM))$,

$$T = T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l},$$

то, используя (14.1.3), приходим к выражению

$$\nabla T = \nabla_i T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l} \otimes dx^i,$$

в котором

$$\begin{aligned}\nabla_i T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} &= \partial_i T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} + T_{j_1 \dots j_l}^{b \dots i_k} \Gamma_{ib}^{i_1} + \dots + T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots b} \Gamma_{ib}^{i_k} - \\ &\quad - T_{j_1 \dots b \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{ij_1}^b - \dots - T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{ij_l}^b.\end{aligned}$$

2.2. Закон преобразования коэффициентов связности

Преобразование коэффициентов связности

Пусть $(e_i)_{i=1}^n$ и $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — локальный репер расслоения TM и соответствующий ему дуальный корепер, определенные на некотором открытом множестве $U \subset M$, которое является координатной областью. Предположим, что заданы n^2 гладких функций $\Omega_{ij}^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, которые определяют

гладкое поле $[\Omega^i_{\cdot j}] : U \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$ невырожденных $n \times n$ матриц. Это поле порождает локальный репер

$$U \ni p \mapsto (e'_i|_p)_{i=1}^n, \quad e'_i = \Omega^j_{\cdot i} e_j.$$

Дуальный корепер $U \ni p \mapsto (\vartheta^i|_p)_{i=1}^n$ может быть выражен через (ϑ^i) посредством соотношений $\vartheta^i = \mathcal{U}^i_{\cdot j} \vartheta^j$, где $[\mathcal{U}^i_{\cdot j}] = [\Omega^i_{\cdot j}]^{-1}$. Обозначим соответствующие коэффициенты связности через $\Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}$ и $\Gamma'^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}$, то есть,

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} e_k, \quad \text{и} \quad \nabla_{e'_i} e'_j = \Gamma'^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} e'_k.$$

Получим закон преобразования из $\Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}$ в $\Gamma'^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}$. Если (∂_{x^i}) — координатный репер на U , то $e_i = A^j_{\cdot i} \partial_{x^j}$, где $[A^i_{\cdot j}] : U \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$ — однозначное определенное гладкое поле матриц. Используя правило Лейбница, получаем

$$\nabla_{e'_j} e'_k = \nabla_{(\Omega^s_{\cdot j} e_s)} (\Omega^q_{\cdot k} e_q) = \Omega^s_{\cdot j} \nabla_{e_s} (\Omega^q_{\cdot k} e_q) = \Omega^s_{\cdot j} \{ \Omega^q_{\cdot k} \nabla_{e_s} e_q + e_s (\Omega^q_{\cdot k}) e_q \}.$$

Поскольку

$$\Gamma'^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \langle \vartheta^i, \nabla_{e'_j} e'_k \rangle = \mathcal{U}^i_{\cdot m} \langle \vartheta^m, \nabla_{e'_j} e'_k \rangle,$$

а $e_s (\Omega^q_{\cdot j}) = A^l_{\cdot s} \partial_{x^l} \Omega^q_{\cdot j}$, то

$$\Gamma'^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \mathcal{U}^i_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \{ \Omega^q_{\cdot k} \langle \vartheta^m, \nabla_{e_s} e_q \rangle + \langle \vartheta^m, e_q \rangle A^l_{\cdot s} \partial_{x^l} \Omega^q_{\cdot k} \}.$$

Принимая во внимание соотношения $\Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} = \langle \vartheta^m, \nabla_{e_s} e_q \rangle$ и $\langle \vartheta^m, e_q \rangle = \delta^m_q$, получаем окончательный результат:

$$\Gamma'^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} \mathcal{U}^i_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \Omega^q_{\cdot k} + A^l_{\cdot s} \mathcal{U}^i_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \partial_{x^l} \Omega^m_{\cdot k}. \quad (14.2.1)$$

Случай голономного репера

Формула (14.2.1) определяет закон преобразования коэффициентов связности в общем случае, когда один неголономный репер заменяется на другой. Если же репер (e_i) является голономным, то есть, $A^l_{\cdot s} = \delta^l_s$, то соотношение (14.2.1) упрощается:

$$\Gamma'^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} \mathcal{U}^i_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \Omega^q_{\cdot k} + \mathcal{U}^i_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \partial_{x^s} \Omega^m_{\cdot k}. \quad (14.2.2)$$

Если оба локальных репера (e_i) и (e'_i) голономны, то мы имеем дело с заменой координат. Тогда $\Omega^i_{\cdot j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$, где (x^i) порождают (e_i) , а (x'^i) порождают (e'_i) . В этой связи, выражение (14.2.2) принимает вид

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^s}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^j \partial x'^k}. \quad (14.2.3)$$

Формула (14.2.3) определяет преобразование связности, индуцированное заменой координат. Заметим, что в силу последнего слагаемого в правой части (14.2.3), такое преобразование не удовлетворяет закону преобразования тензорного поля третьего ранга.

2.3. Пространство аффинной связности

Задание связности ∇ на n -мерном многообразии M определяет на нем некоторую геометрию, выражающуюся в правиле параллельного переноса.

Определение 14.3. Пара (M, ∇) называется **пространством аффинной связности**.

Автопараллельные кривые

Среди всевозможных гладких кривых на M выберем специальные кривые, согласованные со связностью ∇ .

Определение 14.4. Гладкая кривая $\chi : \mathbb{I} \rightarrow M$ называется **автопараллельной кривой**, если

$$\nabla_{\chi'} \chi' = 0.$$

В гладкой карте уравнение автопараллельной кривой сводится к системе

$$\ddot{\chi}^q + \Gamma^{q\cdot\cdot}_{\cdot ij} \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j = 0, \quad q = 1, \dots, n.$$

2.4. Пространство аффинной связности с метрикой

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, снабженное римановой метрикой g и аффинной связностью ∇ . Тогда на M определены два правила: правило параллельного переноса и правило измерения длин касательных векторов и углов между ними.

Определение 14.5. *Тройка (M, g, ∇) называется **пространством аффинной связности с метрикой**.*

Кручение, кривизна и неметричность

Если функции $\Gamma^i_{\cdot jk}$ не равны нулевой функции, то это не говорит о том, что геометрия на M является неевклидовой. Действительно, легко проверить, что в евклидовом пространстве $\Gamma^i_{\cdot jk} = 0$ только в декартовых координатах, в то время как в криволинейных координатах хотя бы одно из $\Gamma^i_{\cdot jk}$ отлично от нуля. Свойство геометрии, с которой ассоциируется термин «неевклидова», тесно связано с тензорными полями **кручения**,

$$\mathfrak{T} : \text{Vec}(M) \times \text{Vec}(M) \rightarrow \text{Vec}(M),$$

кривизны,

$$\mathfrak{K} : \text{Vec}(M) \times \text{Vec}(M) \times \text{Vec}(M) \rightarrow \text{Vec}(M),$$

и неметричности,

$$\mathfrak{Q} : \text{Vec}(M) \times \text{Vec}(M) \times \text{Vec}(M) \rightarrow C^\infty(M).$$

Эти поля определены посредством следующих соотношений [5]:

$$\mathfrak{T}(u, v) := \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v]; \quad (14.2.4)$$

$$\mathfrak{K}(u, v, w) := \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w; \quad (14.2.5)$$

$$\mathfrak{Q} := -\nabla g. \quad (14.2.6)$$

Здесь $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли (10.5.1).

Замечание 14.1. *Тензор кручения (14.2.4) является мерой симметричности связности. Если (∂_i) — координатный репер на M , то*

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(u, v) &= \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] = \\ &= u^i (\partial_i v^k + v^j \Gamma^k_{\cdot ij}) \partial_k - v^j (\partial_j u^k + u^i \Gamma^k_{\cdot ji}) \partial_k - (u^i \partial_i v^k - v^j \partial_j u^k) \partial_k = \\ &= u^i v^j (\Gamma^k_{\cdot ij} - \Gamma^k_{\cdot ji}) \partial_k, \end{aligned}$$

откуда следует выражение

$$\mathfrak{T} = (\Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} - \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ji}) \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j.$$

Это означает, что $\mathfrak{T} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} = \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ji}$ для всех i, j, k .

Замечание 14.2. Как следует из определения (14.2.6), тензор неметричности \mathfrak{Q} является мерой несогласованности связности ∇ с римановой метрикой g .

Согласно определениям (14.2.4), (14.2.5), (14.2.6), тензоры кручения, кривизны и неметричности имеют следующее представление в координатном репере:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} &= \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} - \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj}, \\ \mathfrak{R}^{t\cdot\cdot}_{\cdot ijk} &= \partial_i \Gamma^{t\cdot\cdot}_{\cdot jk} - \partial_j \Gamma^{t\cdot\cdot}_{\cdot ik} + \Gamma^{l\cdot\cdot}_{\cdot jk} \Gamma^{t\cdot\cdot}_{\cdot il} - \Gamma^{l\cdot\cdot}_{\cdot ik} \Gamma^{t\cdot\cdot}_{\cdot jl}, \\ -\mathfrak{Q}_{ijk} &= \partial_i g_{jk} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij} g_{mk} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ik} g_{mj}. \end{aligned}$$

Отметим, что тензор неметричности \mathfrak{Q} может быть определен эквивалентным способом, согласно равенству

$$\mathfrak{Q}(u, v, w) = g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w) - u[g(v, w)].$$

Восстановление аффинной связности по заданным метрике, кручению и неметричности

Можно определить кручение \mathfrak{T} и неметричность \mathfrak{Q} посредством формул (14.2.4) и (14.2.6), используя заданные риманову метрику (только неметричность требует задания метрики) g и связность ∇ . Рассмотрим противоположную ситуацию, когда необходимо восстановить аффинную связность ∇ , соответствующую заданным римановой метрике g , кручению \mathfrak{T} и неметричности \mathfrak{Q} .

Выберем координатный репер (∂_i) и соответствующий ему корепер (dx^i) . Принимая во внимание (14.1.3) и получая выражения для \mathfrak{Q} и \mathfrak{T} в компонентах, приходим к следующей системе $2n^3$ уравнений:

$$\begin{aligned} \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} - \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ji} &= \mathfrak{T}^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \\ \partial_i g_{jk} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij} g_{mk} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ik} g_{mj} &= -\mathfrak{Q}_{ijk}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Циклические перестановки индексов приводят к выражениям

$$\begin{aligned} -\Omega_{ijk} &= \partial_i g_{jk} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij} g_{mk} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ik} g_{mj}, \\ -\Omega_{jki} &= \partial_j g_{ki} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot jk} g_{mi} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ji} g_{mk}, \\ -\Omega_{kij} &= \partial_k g_{ij} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ki} g_{mj} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot kj} g_{mi}. \end{aligned}$$

Складывая второе и третье уравнения и вычитая из полученного результата первое, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \Omega_{ijk} - \Omega_{jki} - \Omega_{kij} &= \\ &= \partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk} + \mathfrak{T}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij} g_{mk} + \mathfrak{T}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ik} g_{mj} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot jk} g_{mi} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot kj} g_{mi}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно приходим к выражению

$$\begin{aligned} 2\Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot jk} g_{mi} &= \partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk} + \\ &+ \mathfrak{T}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij} g_{mk} + \mathfrak{T}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ik} g_{mj} + \mathfrak{T}^{m\cdot\cdot}_{\cdot jk} g_{mi} + \\ &+ \Omega_{jki} + \Omega_{kij} - \Omega_{ijk}. \end{aligned} \quad (14.2.7)$$

Поскольку матрица $[g_{ij}]$ обратима, то из (14.2.7) можно прийти к следующему соотношению для $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} &= \frac{g^{im}}{2} (\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk}) + \\ &+ \frac{g^{im}}{2} (\mathfrak{T}_{mjk}^{\cdot\cdot\cdot} + \mathfrak{T}_{kmj}^{\cdot\cdot\cdot} + \mathfrak{T}_{jmk}^{\cdot\cdot\cdot}) + \\ &+ \frac{g^{im}}{2} (\Omega_{jkm} + \Omega_{kmj} - \Omega_{mjk}), \end{aligned} \quad (14.2.8)$$

где $\mathfrak{T}_{kij}^{\cdot\cdot\cdot} = g_{km} \mathfrak{T}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij}$. Формула (14.2.8) показывает, что для введения аффинной связности на многообразии \mathfrak{M} достаточно определить риманову метрику и тензоры Ω , \mathfrak{T} . Таким образом, $(g, \mathfrak{T}, \Omega)$ можно рассматривать как тройку независимых переменных.

2.5. Частный случай: евклидово пространство

Пусть \mathcal{E} — трехмерное евклидово аффинное пространство. В рамках классической евклидовой геометрии вектор \mathbf{u} отождествляется с коектором $\mathbf{u}^\flat = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \cdot)$, и наоборот. Здесь \mathbf{g} — риманова метрика, определяемая скалярным произведением (\cdot) . Таким образом, если $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^3$ — репер

в \mathcal{E} , то соответствующий дуальный репер рассматривается как репер $(\mathbf{e}^k)_{k=1}^3$, удовлетворяющий соотношениям $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^s = \delta_k^s$, $s, k \in \{1, 2, 3\}$. Это означает, что

$$\langle (\mathbf{e}^s)^\flat, \mathbf{e}_k \rangle = \mathbf{g}(\mathbf{e}^s, \mathbf{e}_k) = \delta_k^s.$$

Введем криволинейные координаты (q^i) в \mathcal{E} . Они определяются функциями $q^k = q^k(x^1, x^2, x^3)$, связывающими декартовы координаты (x^i) с (q^i) . Репер и дуальный корепер определяются выражениями

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{i}_s \frac{\partial x^s}{\partial q^k}, \quad \mathbf{e}^k = \mathbf{i}_s \frac{\partial q^k}{\partial x^s}.$$

Функции замены координат, связывающие криволинейные координаты (q^k) с декартовыми, определяют все геометрические величины, соответствующие связности и метрике. Действительно, легко показать, что

- (i) Метрический тензор $\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$ и соответствующий ему дуальный, $\mathbf{g}^\sharp = g^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, который в классических рассмотрениях отождествляется с \mathbf{g} , имеют следующие компоненты:

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^s}{\partial q^j} \delta_{ks}, \quad g^{ij} = \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \frac{\partial q^j}{\partial x^s} \delta^{ks}.$$

- (ii) Ковариантная производная ∇ определяется выражением

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad \text{где} \quad \nabla := \mathbf{e}^k \partial_k,$$

в котором $\partial_k := \frac{\partial}{\partial q^k}$.

- (iii) Символы Кристоффеля представлены формулой

$$\gamma_{jk}^{i\cdot\cdot} := \mathbf{e}^i \cdot \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial q^j \partial q^k}.$$

Рассмотрим пространство $(\mathcal{E}, \mathbf{g}, \nabla)$. Несмотря на то, что величины, такие как метрика и символы Кристоффеля, отличаются от привычных декартовых, они не соответствуют пространству более общему, чем евклидово. Для того, чтобы показать это, достаточно вычислить кривизну, кручение и неметричность. Для вычисления кривизны заметим, что

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} &= \underbrace{u^k(\partial_k v^i)(\partial_i w^j)(\partial_j \mathbf{p})}_{\dots\dots\dots} + \underline{\underline{u^k v^i(\partial_k \partial_i w^j)(\partial_j \mathbf{p})}} + \underline{\underline{u^k v^i(\partial_i w^j)(\partial_k \partial_j \mathbf{p})}} + \\
&\quad + \underline{\underline{u^k(\partial_k v^i)w^j(\partial_i \partial_j \mathbf{p})}} + \underline{\underline{u^k v^i(\partial_k w^j)(\partial_i \partial_j \mathbf{p})}} + \underline{\underline{u^k v^i(\partial_k \partial_i \partial_j \mathbf{p})}}, \\
\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} &= \underline{\underline{v^k(\partial_k u^i)(\partial_i w^j)(\partial_j \mathbf{p})}} + \underline{\underline{v^k u^i(\partial_k \partial_i w^j)(\partial_j \mathbf{p})}} + \underline{\underline{v^k u^i(\partial_i w^j)(\partial_k \partial_j \mathbf{p})}} + \\
&\quad + \underline{\underline{v^k(\partial_k u^i)w^j(\partial_i \partial_j \mathbf{p})}} + \underline{\underline{v^k u^i(\partial_k w^j)(\partial_i \partial_j \mathbf{p})}} + \underline{\underline{v^k u^i(\partial_k \partial_i \partial_j \mathbf{p})}}, \\
\nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \mathbf{w} &= \underbrace{u^i(\partial_i v^j)(\partial_j w^k)(\partial_k \mathbf{p})}_{\dots\dots\dots} + \underline{\underline{u^i(\partial_i)w^k(\partial_j \partial_k \mathbf{p})}} - \\
&\quad - \underline{\underline{v^i(\partial_i u^j)(\partial_j w^k)(\partial_k \mathbf{p})}} - \underline{\underline{v^i(\partial_i u^j)w^k(\partial_j \partial_k \mathbf{p})}}.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание перестановочность частных производных, $\partial_i \partial_j \mathbf{p} = \partial_j \partial_i \mathbf{p}$, и сокращая подобные члены, получаем

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \text{Vec}(\mathcal{E}) : \quad \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \mathbf{w} \equiv \mathbf{0}.$$

Для вычисления кручения используются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \underline{\underline{u^i(\partial_i v^j)(\partial_j \mathbf{p})}} + \underline{\underline{u^i v^j(\partial_i \partial_j \mathbf{p})}}, \\
\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \underline{\underline{v^i(\partial_i u^j)(\partial_j \mathbf{p})}} + \underline{\underline{v^i u^j(\partial_i \partial_j \mathbf{p})}}, \\
[\mathbf{u}, \mathbf{v}] &= \underline{\underline{u^i(\partial_i v^j)(\partial_j \mathbf{p})}} - \underline{\underline{v^i(\partial_i u^j)(\partial_j \mathbf{p})}}.
\end{aligned}$$

Тогда, из перестановочности вторых производных, получаем

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Vec}(\mathcal{E}) : \quad \mathfrak{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \equiv \mathbf{0}.$$

Наконец, вычислим неметричность. Принимая во внимание соотно-

шения

$$\begin{aligned} g(\nabla_u v, w) &= \underline{w_j u^i (\partial_i v^j)} + \underline{w^k u^i v^j (\partial_k p)} \cdot (\partial_i \partial_j p), \\ g(v, \nabla_u w) &= \underline{v_j u^i (\partial_i w^j)} + \underline{v^k u^i w^j (\partial_k p)} \cdot (\partial_i \partial_j p), \\ u[g(v, w)] &= \underline{u^i w_j (\partial_i v^j)} + \underline{u^i v_k (\partial_i w^k)} + \underline{u^i v^j w^k (\partial_i \partial_j p)} \cdot (\partial_k p) + \\ &\quad + \underline{u^i v^j w^k (\partial_j p)} \cdot (\partial_i \partial_k p), \end{aligned}$$

и используя перестановочность вторых частных производных, приходим к равенству

$$\forall u, v, w \in \text{Vec}(\mathcal{E}) : \Omega(u, v, w) = g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w) - u[g(v, w)] \equiv 0. \blacksquare$$

2.6. Частный случай: риманово пространство

Геодезические

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие с римановой метрикой g . Если $\chi :]a, b[\rightarrow M$ — гладкая кривая на M , то ее **длина**, $l_g(\chi)$, есть, по определению, число

$$l_g(\chi) = \int_a^b \sqrt{g_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi'(t))} dt.$$

Здесь $\chi'(t)$ — вектор скорости кривой χ в точке t .

Для гладкой кривой $\chi :]a, b[\rightarrow M$ в локальных координатах (x^i) имеем $\chi(t) = (\chi^1(t), \dots, \chi^n(t))$ и $\chi'(t) = \dot{\chi}^i(t) \partial_i|_{\chi(t)}$. Тогда приходим к координатному представлению для $l_g(\chi)$:

$$l_g(\chi) = \int_a^b L(\chi^i, \dot{\chi}^i) dt,$$

где $L(\chi^i, \dot{\chi}^i) = \sqrt{g_{ij}(\chi^1, \dots, \chi^n) \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j}$ — лагранжиан.

Определение 14.6. *Геодезической* называется экстремаль функционала $l_g(\chi)$:

$$\delta l_g(\chi) = 0.$$

Система уравнений Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \chi^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}^k} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Вычисления дают уравнение геодезических:

$$\ddot{\chi}^q + \frac{g^{qk}}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j = 0, \quad q = 1, \dots, n. \quad (14.2.9)$$

Здесь $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$.

Замечание 14.3. Для вывода уравнения геодезических вычислим производные лагранжиана $L(\chi^i, \dot{\chi}^i) = \sqrt{g_{ij}(\chi^1, \dots, \chi^m) \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j}$ по двум переменным χ^i и $\dot{\chi}^i$, то есть,

$$\frac{\partial L}{\partial \chi^k} = \frac{\partial_k g_{ij} \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j}{2L},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}^k} = \frac{g_{ik} \dot{\chi}^i}{L}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}^k} \right) = \left(\frac{1}{L} \right)' g_{ik} \dot{\chi}^i + \frac{\partial_j g_{ik} \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j + g_{ik} \ddot{\chi}^i}{L}.$$

Вычисления, проводимые для произвольного параметра t , приводят к громоздким выражениям. Для упрощения вычислений, предположим, без ограничения общности, что геодезическую кривую можно параметризовать натуральным параметром, таким, что $\|\chi'(t)\|_g = 1$. Тогда для любых χ^i лагранжиан равен $L = 1$ (но не его производная) и уравнения Эйлера — Лагранжа могут быть записаны как

$$\frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j - \partial_j g_{ik} \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j - g_{ik} \ddot{\chi}^i = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Поскольку $\partial_j g_{ik} \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j = (\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj}) \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j / 2$, то полученное уравнение преобразуется в следующее:

$$\frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{kj}) \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j - g_{ik} \ddot{\chi}^i = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Наконец, умножая обе части полученного уравнения на g^{qk} , и суммируя левую часть по k , получаем (14.2.9).

Параллельный перенос

Введем на M связность ∇ , удовлетворяющую требованию: *автопараллельные кривые являются в точности геодезическими*. В этой связи, в координатном репере $(\partial_i)_{i=1}^n$ коэффициенты связности должны иметь следующее представление:

$$\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = \frac{g^{im}}{2}(\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk}), \quad (14.2.10)$$

где $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$.

Определение 14.7. *Связность, определяемая равенствами (14.2.10), называется **связностью Леви-Чивита**, а соответствующее пространство аффинной связности с метрикой, то есть, тройка (M, g, ∇) , — **римановым пространством**.*

Кривизна, кручение и неметричность

Пусть (M, g, ∇) — риманово пространство с метрикой g . В общем случае, кривизна \mathfrak{R} отлична от нуля, в то время как кручение и неметричность тождественно равны нулю. Для того, чтобы показать, что кручение тождественно равно нулю, выполним следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \nabla_u v &= \underline{u^i(\partial_i v^j)\partial_j} + \underline{u^i v^j \Gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot} \partial_k}, \\ \nabla_v u &= \underline{v^i(\partial_i u^j)\partial_j} + \underline{v^i u^j \Gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot} \partial_k}, \\ [u, v] &= \underline{u^i(\partial_i v^j)\partial_j} - \underline{v^i(\partial_i u^j)\partial_j}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (14.2.4) и принимая во внимание симметрию коэффициентов связности, $\Gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot} = \Gamma_{\cdot ji}^{k\cdot\cdot}$, исключим подобные члены. В результате, придем к желаемому заключению:

$$\forall u, v \in \text{Vec}(M) : \mathfrak{T}(u, v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] \equiv 0.$$

Для того, чтобы показать, что неметричность также равна нулю, вы-

полним следующие вычисления:

$$\begin{aligned} g(\nabla_u v, w) &= \underline{w_k u^i (\partial_i v^k)} + \underline{w_k u^i v^j \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}}, \\ g(v, \nabla_u w) &= \underline{v_k u^i (\partial_i w^k)} + \underline{v_k u^i w^j \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}}, \\ u[g(v, w)] &= \underline{u^i w_j (\partial_i v^j)} + \underline{u^i v_k (\partial_i w^k)} + \underline{u^i v^j w^k (\partial_i g_{jk})}. \end{aligned}$$

Поскольку $\Gamma_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot} + \Gamma_{kji}^{\cdot\cdot\cdot} - \partial_j g_{ij} = 0$, то мы приходим к желаемому результату $\forall u, v, w \in \text{Vec}(M) : \Omega(u, v, w) = g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w) - u[g(v, w)] \equiv 0$.

2.7. Связность на «pullback»-расслоении

Определение

Пусть M и N — гладкие многообразия, а $\varkappa : M \rightarrow N$ — C^∞ -диффеоморфизм. Предположим, что на N задана аффинная связность ∇ . Тогда отображение \varkappa индуцирует связность

$$\nabla^{(\varkappa)} : \text{Vec}(M) \times \text{Sec}(\varkappa^*TN) \rightarrow \text{Sec}(\varkappa^*TN),$$

на «pullback»-расслоении \varkappa^*TN по формуле [6]:

$$\nabla_u^{(\varkappa)} V := \{\nabla_{\varkappa_* u} (V \circ \varkappa^{-1})\} \circ \varkappa. \quad (14.2.11)$$

Замечание 14.4. «Pushforward» \varkappa_* есть \mathbb{R} -линейное отображение, что влечет (∇_1) и (∇_2) . Далее, если $f \in C^\infty(M)$, то $\varkappa_* u(f \circ \varkappa^{-1}) = u(f)$ и $\varkappa_*(fu) = f\varkappa_*(u)$. Это дает (∇_3) и (∇_4) .

Координатное представление

Пусть (e_i) — гладкий локальный репер расслоения TN , тогда (E_i) , где $E_i = e_i \circ \varkappa$, является локальным репером расслоения \varkappa^*TN . Пусть (x^i) — локальные координаты на M , а (y^i) — локальные координаты на N . Обозначим коэффициенты связности ∇ через $\gamma_{jk}^{i\cdot\cdot}$. Тогда

$$\nabla_{\partial_{x^a}}^{(\varkappa)} E_b = \{\nabla_{\varkappa_* \partial_{x^a}} e_b\} \circ \varkappa.$$

Касательное отображение $T\kappa$ имеет диадное представление $T\kappa = F_{\cdot j}^{i\cdot} \partial_{y^i} \otimes dx^j$. В этой связи, $\kappa_* \partial_{x^a} = (F_{\cdot a}^{i\cdot} \circ \kappa^{-1}) \partial_{y^i}$, и

$$\nabla_{\partial_{x^a}}^{(\kappa)} E_b = F_{\cdot a}^{i\cdot} (\nabla_{\partial_{y^i}} e_b) \circ \kappa.$$

Используя соотношение $\nabla_{\partial_{y^i}} e_b = \gamma_{\cdot ib}^{c\cdot} e_c$ окончательно получаем

$$\nabla_{\partial_{x^a}}^{(\kappa)} E_b = F_{\cdot a}^{i\cdot} \gamma_{\cdot ib}^{c\cdot} E_c.$$

Таким образом, $\Gamma_{\cdot ab}^{c\cdot} = F_{\cdot a}^{i\cdot} \gamma_{\cdot ib}^{c\cdot}$ — коэффициенты связности $\nabla^{(\kappa)}$. Если u — гладкое сечение TM , а V — гладкое сечение κ^*TN , то

$$\nabla_u^{(\kappa)} V = u^a \{ \partial_a V^c + V^b F_{\cdot a}^{i\cdot} \gamma_{\cdot ib}^{c\cdot} \} E_c.$$

Если (e^i) — корепер, дуальный к (e^i) , то совокупность (E^i) сечений $E^i = e^i \circ \kappa$ является корепером дуальным к (E_i) . Используя $\Gamma_{\cdot ab}^{c\cdot} = F_{\cdot a}^{i\cdot} \gamma_{\cdot ib}^{c\cdot}$ и формулу (14.1.2), приходим к равенству

$$\nabla_{\partial_{x^a}}^{(\kappa)} E^b = -F_{\cdot a}^{i\cdot} \gamma_{\cdot id}^{b\cdot} E^d.$$

Случай двухточечных тензоров

Ограничимся случаем векторного расслоения $\kappa^*TN \otimes TM$. Определим связность на нем, используя (14.1.3). Пусть $\nabla^{(M)}$ — аффинная связность на M , тогда

$$\nabla_u(\sigma_1 \otimes \sigma_2) := (\nabla_u^{(\kappa)} \sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes \nabla_u^{(M)} \sigma_2.$$

Пусть (\tilde{E}_α) — репер на M , а $T : p \mapsto T_{\cdot\cdot}^{i\alpha}(p) E_i|_p \otimes \tilde{E}_\alpha|_p$ — двухточечный тензор. Тогда

$$\nabla T = \nabla_\beta T_{\cdot\cdot}^{a\kappa} E_a \otimes \tilde{E}_\kappa \otimes dx^\beta,$$

где

$$\nabla_\beta T_{\cdot\cdot}^{a\kappa} = \partial_\beta T_{\cdot\cdot}^{a\kappa} + T_{\cdot\cdot}^{a\lambda} \Gamma_{\cdot\lambda\beta}^{\kappa\cdot} + T_{\cdot\cdot}^{b\kappa} F_{\cdot\beta}^{c\cdot} \gamma_{\cdot bc}^{a\cdot},$$

а $\Gamma_{\cdot\lambda\beta}^{\kappa\cdot}$ — коэффициенты связности $\nabla^{(M)}$.

2.8. Метод подвижного репера

Пусть M — гладкое *параллелизуемое* многообразие размерности n . Из параллелизуемости следует, что существует *глобальный* репер $(z_i)_{i=1}^n$ расслоения TM . Это означает, что $z_i \in \text{Vec}(M)$ для всех $i = 1, \dots, n$, и для каждой точки $p \in M$ упорядоченный набор $(z_i|_p)_{i=1}^n$ значений является линейно независимым.

Метод подвижного репера, предложенный Е. Cartan для случая n -мерного евклидова аффинного пространства \mathcal{E} , позволяет определить аффинную связность посредством задания поля линейных преобразований, действующих на ортонормированный базис $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^n$ [7]. В нашем случае мы имеем гладкое многообразие с нетривиальным, в общем случае, атласом. Для применения идеи подвижного репера необходимо: **1)** выбрать некоторый допустимый гладкий атлас; **2)** построить аффинную связность $\nabla|_U$ на каждом районе U действия карты; **3)** «склеить» полученные связности в единое отображение — связность на M . В этой связи, достаточно ограничиться рассмотрением некоторого района действия карты.

Объекты анголономии

Пусть U — координатная область некоторой гладкой карты, а $(\partial_i)_{i=1}^n$ — соответствующий координатный репер. Он является голономным, то есть, $[\partial_i, \partial_j] = 0$ для всех i, j . Существуют такие n^2 функций $\Omega_{\cdot j}^i \in C^\infty(U)$, что они образуют гладкое поле $[\Omega_{\cdot j}^i] : U \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$ и

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : z_i = \Omega_{\cdot i}^j \partial_j.$$

Репер $(z_i)_{i=1}^n$ является, в общем случае, неголономным, то есть,

$$[z_i, z_j] = -c_{ij}^{\cdot k} z_k, \quad (14.2.12)$$

где функции $c_{ij}^{\cdot k} \in C^\infty(U)$ называются **объектами анголономии** [8]. Используя соотношение (10.5.2)

$$[fu, gv]_p = f(p)g(p)[u, v]_p + f(p)u_p(g)v_p - g(p)v_p(f)u_p,$$

в котором f, g являются гладкими функциями, определенными в окрестности p , приходим к следующей системе с неизвестными $c_{ij}^{\cdot m}$ при фикс-

сированных i, j :

$$-c_{ij}^{\cdot\cdot m} \Omega^k_{\cdot m} = \Omega^q_{\cdot i} (\partial_q \Omega^k_{\cdot j}) - \Omega^q_{\cdot j} (\partial_q \Omega^k_{\cdot i}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Решение этой системы имеет вид

$$c_{ij}^{\cdot\cdot k} = -\mathcal{U}^k_{\cdot m} \{ \Omega^q_{\cdot i} (\partial_q \Omega^m_{\cdot j}) - \Omega^q_{\cdot j} (\partial_q \Omega^m_{\cdot i}) \}, \quad (14.2.13)$$

где $[\mathcal{U}^i_{\cdot j}] = [\Omega^i_{\cdot j}]^{-1}$. Принимая во внимание соотношение

$$\partial_i \mathcal{U}^k_{\cdot j} = -\mathcal{U}^m_{\cdot j} (\partial_i \Omega^q_{\cdot m}) \mathcal{U}^k_{\cdot q}$$

приходим к более удобному представлению для (14.2.13):

$$c_{ij}^{\cdot\cdot k} = \Omega^m_{\cdot i} \Omega^q_{\cdot j} (\partial_m \mathcal{U}^k_{\cdot q} - \partial_q \mathcal{U}^k_{\cdot m}). \quad (14.2.14)$$

Реперу $(z_i)_{i=1}^n$ соответствует дуальный корепер $(\vartheta^i)_{i=1}^n$, определенный соотношениями $\langle \vartheta^i, z_j \rangle = \delta_j^i$, где $i, j \in \{1, \dots, n\}$. В этой связи, $\vartheta^i = \mathcal{U}^i_{\cdot j} dx^j$. Получим дуальный аналог соотношения (14.2.12). Справедливы равенства

$$\begin{aligned} d\vartheta^k &= d(\mathcal{U}^k_{\cdot j} dx^j) = \sum_{i < j} (\partial_i \mathcal{U}^k_{\cdot j} - \partial_j \mathcal{U}^k_{\cdot i}) dx^i \wedge dx^j = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \mathcal{U}^k_{\cdot j} - \partial_j \mathcal{U}^k_{\cdot i}) dx^i \wedge dx^j, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве производится суммирование по всем i и j . Преобразования

$$\begin{aligned} d\vartheta^k &= \frac{1}{2} (\partial_i \mathcal{U}^k_{\cdot j} - \partial_j \mathcal{U}^k_{\cdot i}) \delta_p^i \delta_q^j dx^p \wedge dx^q = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \mathcal{U}^k_{\cdot j} - \partial_j \mathcal{U}^k_{\cdot i}) \Omega^i_{\cdot l} \mathcal{U}^l_{\cdot p} \Omega^j_{\cdot s} \mathcal{U}^s_{\cdot q} dx^p \wedge dx^q = \\ &= \frac{1}{2} c_{pq}^{\cdot\cdot k} \vartheta^p \wedge \vartheta^q = \sum_{p < q} c_{pq}^{\cdot\cdot k} \vartheta^p \wedge \vartheta^q, \quad (14.2.15) \end{aligned}$$

приводят к окончательному равенству:

$$d\vartheta^k = \sum_{p < q} c_{pq}^{\cdot\cdot k} \vartheta^p \wedge \vartheta^q. \quad (14.2.16)$$

Связность Вайценбока

Теперь определим аффинную связность на U по формуле

$$\nabla_{z_a} z_b = \omega_{.ab}^{c..} z_c, \quad a, b = 1, \dots, n,$$

в которых n^3 функций $\omega_{.ab}^{c..} \in C^\infty(U)$ являются предварительно заданными. Если $\Gamma_{.ij}^{k..}$ — коэффициенты связности в координатном репере $(\partial_i)_{i=1}^n$, то, согласно (14.2.2), мы имеем

$$\omega_{.jk}^{i..} = \Gamma_{.sq}^{m..} \mathcal{U}_{.m}^i \Omega_{.j}^s \Omega_{.k}^q + \mathcal{U}_{.m}^i \Omega_{.j}^s \partial_s \Omega_{.k}^m.$$

Умножение обеих частей полученного равенства на $\Omega_{.i}^o \mathcal{U}_{.l}^j \mathcal{U}_{.r}^k$ и последующее суммирование по индексам i, j, k дает

$$\Gamma_{.jk}^{i..} = \omega_{.bc}^{a..} \Omega_{.a}^i \mathcal{U}_{.j}^b \mathcal{U}_{.k}^c - \mathcal{U}_{.k}^m \partial_j \Omega_{.m}^i.$$

Полученное соотношение можно преобразовать следующим образом. Поскольку

$$\mathcal{U}_{.k}^m \partial_j \Omega_{.m}^i = -\mathcal{U}_{.k}^m \delta_r^i \partial_j \Omega_{.m}^r = \mathcal{U}_{.k}^m \mathcal{U}_{.r}^c \Omega_{.c}^i \partial_j \Omega_{.m}^r,$$

то, используя тождество $\partial_i \mathcal{U}_{.j}^k = -\mathcal{U}_{.j}^m (\partial_i \Omega_{.m}^q) \mathcal{U}_{.q}^k$, получаем

$$\Gamma_{.jk}^{i..} = \omega_{.bc}^{a..} \Omega_{.a}^i \mathcal{U}_{.j}^b \mathcal{U}_{.k}^c + \Omega_{.c}^i \partial_j \mathcal{U}_{.k}^c. \quad (14.2.17)$$

Получим выражения для кручения, кривизны и неметричности связности ∇ . В соответствии с (14.2.4), мы имеем

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{.ij}^{k..} z_k \otimes \vartheta^i \otimes \vartheta^j, \quad \text{где} \quad \mathfrak{T}_{.ij}^{k..} = \omega_{.ij}^{k..} - \omega_{.ji}^{k..} + c_{ij}^{..k}.$$

Здесь $c_{ij}^{..k}$ — объекты анголономии (14.2.14). Далее, тензор кривизны определяется равенством (14.2.5), поэтому

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{.ijk}^{m..} z_m \otimes \vartheta^i \otimes \vartheta^j \otimes \vartheta^k,$$

где $\mathfrak{R}_{.ijk}^{m..}$ имеют вид

$$\mathfrak{R}_{.ijk}^{m..} = \Omega_{.i}^s \partial_s \omega_{.jk}^{m..} - \Omega_{.j}^s \partial_s \omega_{.ik}^{m..} + \omega_{.jk}^{s..} \omega_{.is}^{m..} - \omega_{.ik}^{s..} \omega_{.js}^{m..} + c_{ij}^{..s} \omega_{.sk}^{m..}.$$

Наконец, для неметричности (14.2.6) справедливо равенство

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{.ijk}^{..} \vartheta^i \otimes \vartheta^j \otimes \vartheta^k, \quad \text{где} \quad \mathfrak{Q}_{.ijk}^{..} = \Omega_{.i}^s \partial_s g_{jk} - g_{mk} \omega_{.ij}^{m..} - g_{jm} \omega_{.ik}^{m..}.$$

Здесь $g = g_{ij}\vartheta^i \otimes \vartheta^j$ — некоторая риманова метрика на M .

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1*. Пусть $(z_i)_{i=1}^n$ — g -ортонормированный репер, то есть $g(z_i, z_j) = \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Тогда

$$\mathfrak{Q}_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot} = \omega_{ij}^{\cdot\cdot k} + \omega_{ik}^{\cdot\cdot j}.$$

Если мы потребуем, чтобы связность ∇ была согласованной с римановой метрикой (то есть, $\mathfrak{Q} = 0$), то это возможно в том случае, когда справедливы следующие условия совместности:

$$\omega_{ij}^{\cdot\cdot k} + \omega_{ik}^{\cdot\cdot j} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

2*. Пусть $\omega_{bc}^{a\cdot\cdot} = 0$, для всех $a, b, c = 1, \dots, n$. Тогда

$$\nabla_{z_a} z_b = 0, \quad a, b = 1, \dots, n.$$

Это означает, что репер $(z_i)_{i=1}^n$ является всюду параллельным. Выражение (14.2.17) принимает вид

$$\Gamma_{jk}^{i\cdot\cdot} = \Omega_{\cdot c}^i \partial_j \mathcal{U}_{\cdot k}^c. \quad (14.2.18)$$

Для кручения, кривизны и неметричности мы получаем следующие выражения

$$\mathfrak{T}_{ij}^{\cdot\cdot k} = c_{ij}^{\cdot\cdot k}, \quad \mathfrak{R}_{\cdot ijk}^{m\cdot\cdot} = 0, \quad \mathfrak{Q}_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot} = -\Omega_{\cdot i}^s \partial_s g_{jk}. \quad (14.2.19)$$

Первое равенство показывает, что объекты ангилономии $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ являются компонентами кручения связности, полученной из неголономного подвижного репера.

3*. Пусть $(z_i)_{i=1}^n$ — ортонормированный репер и $\omega_{bc}^{a\cdot\cdot} = 0$, для всех $a, b, c = 1, \dots, n$. Тогда коэффициенты связности $\Gamma_{jk}^{i\cdot\cdot}$ могут быть вычислены по формуле (14.2.18). В (14.2.19) только тензор кручения отличен от нуля. То есть, ∇ обладает нулевой кривизной и является согласованной с метрикой. Такая связность называется **связностью Вайценбока** [9, 10]. Пространство (M, g, ∇) называется пространством с **абсолютным параллелизмом**, или **пространством Вайценбока**.

2.9. Структурные уравнения Картана

Пусть (M, ∇) — пространство аффинной связности; $\dim M = n$. Поскольку риманова метрика не задана, связность ∇ характеризуется всего двумя тензорными полями — кручением \mathfrak{T} и кривизной \mathfrak{R} . В этом случае между связностью и тензорами кручения и кривизны можно установить соотношения, которые удобно представить в виде соотношений между дифференциальными формами. Впервые эти соотношения установил Е. Cartan [11] и, в этой связи, они называются **структурными уравнениями Картана**.

Зафиксируем координатную область U некоторой гладкой карты. Тогда $(\partial_i)_{i=1}^n$ — соответствующий координатный репер. Пусть $(e_i)_{i=1}^n$ — локальный репер TM , заданный на U . Как прежде отмечалось, существуют такие n^2 функций $\Omega^i_{\cdot j} \in C^\infty(U)$, что они образуют гладкое поле матриц $[\Omega^i_{\cdot j}] : U \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$ и

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : e_i = \Omega^j_{\cdot i} \partial_j.$$

Тогда корепер $(\vartheta^i)_{i=1}^n$, дуальный к $(e_i)_{i=1}^n$, связан с координатными корепером выражением $\vartheta^i = \mathcal{U}^i_{\cdot j} dx^j$, где $[\mathcal{U}^i_{\cdot j}] = [\Omega^i_{\cdot j}]^{-1}$. Определим 1-формы:

$$\omega^i_{\cdot j} := \Gamma^{i \cdot \cdot k}_{\cdot kj} \vartheta^k,$$

где $\Gamma^{i \cdot \cdot k}_{\cdot kj}$ — коэффициенты связности ∇ относительно репера $(e_i)_{i=1}^n$.

Определение 14.8. Поле $\omega^i_{\cdot j}$ называется **1-формой связности**.

Первое уравнение Картана

Рассмотрим выражение $d\vartheta^i + \omega^i_{\cdot j} \wedge \vartheta^j$. Здесь

$$\begin{aligned} d\vartheta^i &= d\mathcal{U}^i_{\cdot j} \wedge dx^j = \partial_k \mathcal{U}^i_{\cdot j} dx^k \wedge dx^j = (\partial_k \mathcal{U}^i_{\cdot j}) \Omega^{k \cdot \cdot} \Omega^j_{\cdot s} \vartheta^m \wedge \vartheta^s, \\ \omega^i_{\cdot j} \wedge \vartheta^j &= \Gamma^{i \cdot \cdot m}_{\cdot ms} \vartheta^m \wedge \vartheta^s. \end{aligned}$$

Поскольку

$$(\partial_k \mathcal{U}^i_{\cdot j}) \Omega^{k \cdot \cdot} \Omega^j_{\cdot s} = -\mathcal{U}^i_{\cdot j} (\partial_k \Omega^{j \cdot \cdot}) \Omega^{k \cdot \cdot}_{\cdot m},$$

то выражение для $d\vartheta^i$ принимает вид

$$d\vartheta^i = -\mathcal{U}^i_{\cdot j} \Omega^{k \cdot \cdot}_{\cdot m} (\partial_k \Omega^{j \cdot \cdot}) \vartheta^m \wedge \vartheta^s.$$

В этой связи,

$$d\vartheta^i + \omega^i_{\cdot j} \wedge \vartheta^j = \{\Gamma^i_{\cdot ms} - \mathcal{U}^i_{\cdot l} \Omega^k_{\cdot m} (\partial_k \Omega^l_{\cdot s})\} \vartheta^m \wedge \vartheta^s.$$

Но выражение в фигурных скобках есть, согласно (14.2.2),

$$\tilde{\Gamma}^l_{\cdot rq} \mathcal{U}^i_{\cdot l} \Omega^r_{\cdot m} \Omega^q_{\cdot s},$$

где $\tilde{\Gamma}^l_{\cdot rq}$ — коэффициенты связности ∇ в координатном репере. По этой причине,

$$d\vartheta^i + \omega^i_{\cdot j} \wedge \vartheta^j = \tilde{\Gamma}^l_{\cdot rq} \mathcal{U}^i_{\cdot l} \Omega^r_{\cdot m} \Omega^q_{\cdot s} \vartheta^m \wedge \vartheta^s.$$

Правая часть полученного выражения равна

$$\frac{1}{2} (\tilde{\Gamma}^l_{\cdot rq} - \tilde{\Gamma}^l_{\cdot qr}) \mathcal{U}^i_{\cdot l} \Omega^r_{\cdot m} \Omega^q_{\cdot s} \vartheta^m \wedge \vartheta^s,$$

где $\tilde{\Gamma}^l_{\cdot rq} - \tilde{\Gamma}^l_{\cdot qr} = \tilde{\mathfrak{T}}^l_{\cdot rq}$ — компоненты тензора кручения в координатном репере. Определим **2-форму кручения**

$$\mathfrak{T}^i := \frac{1}{2} \mathfrak{T}^i_{\cdot ms} \vartheta^m \wedge \vartheta^s, \quad (14.2.20)$$

где $\mathfrak{T}^i_{\cdot ms}$ — компоненты тензора кручения в репере $(e_i)_{i=1}^n$. Тогда, окончательно, приходим к первому уравнению Картана

$$d\vartheta^i + \omega^i_{\cdot j} \wedge \vartheta^j = \mathfrak{T}^i. \quad (14.2.21)$$

Второе уравнение Картана

Применим операцию внешнего дифференцирования к обеим частям уравнения (14.2.21):

$$d\mathfrak{T}^i = dd\vartheta^i + d(\omega^i_{\cdot j} \wedge \vartheta^j).$$

Поскольку $d \circ d = 0$, то

$$d\mathfrak{T}^i = d\omega^i_{\cdot j} \wedge \vartheta^j - \omega^i_{\cdot j} \wedge d\vartheta^j. \quad (14.2.22)$$

Заменим в (14.2.22) поле $d\vartheta^j$ выражением $d\vartheta^k = \mathfrak{T}^k - \omega^k_{\cdot j} \wedge \vartheta^j$, эквивалентным первому уравнению Картана:

$$d\mathfrak{T}^i = d\omega^i_{\cdot j} \wedge \vartheta^j - \omega^i_{\cdot k} \wedge \mathfrak{T}^k + \omega^i_{\cdot k} \wedge \omega^k_{\cdot j} \wedge \vartheta^j. \quad (14.2.23)$$

Далее будем рассматривать 3-форму $d\mathfrak{T}^i$. В последующих рассуждениях удобно представить форму кручения (14.2.20) \mathfrak{T}^i в координатном репере. Приходим к выражению:

$$\mathfrak{T}^i = \frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{T}}^l \cdot_{ko} \mathfrak{U}^i \cdot_l dx^k \wedge dx^o.$$

Поскольку

$$\tilde{\Gamma}^l \cdot_{ok} \mathfrak{U}^i \cdot_l dx^k \wedge dx^o = -\tilde{\Gamma}^l \cdot_{ok} \mathfrak{U}^i \cdot_l dx^k \wedge dx^o,$$

то мы получаем окончательное выражение для формы кручения в координатном репере:

$$\mathfrak{T}^i = \tilde{\Gamma}^l \cdot_{ko} \mathfrak{U}^i \cdot_l dx^k \wedge dx^o.$$

Тогда выражение для внешнего дифференциала от формы кручения имеет вид

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}^i &= d(\tilde{\Gamma}^l \cdot_{ko} \mathfrak{U}^i \cdot_l) \wedge dx^k \wedge dx^o = \\ &= \partial_p (\tilde{\Gamma}^l \cdot_{ko} \mathfrak{U}^i \cdot_l) dx^p \wedge dx^k \wedge dx^o = \\ &= \{ \mathfrak{U}^i \cdot_l \partial_p \tilde{\Gamma}^l \cdot_{ko} + \tilde{\Gamma}^l \cdot_{ko} \partial_p \mathfrak{U}^i \cdot_l \} dx^p \wedge dx^k \wedge dx^o. \end{aligned} \quad (14.2.24)$$

Выразим производную $\partial_p \mathfrak{U}^i \cdot_l$ через коэффициенты связности. Поскольку $\mathfrak{U}^i \cdot_m \Omega^m \cdot_k = \delta_k^i$, то

$$\mathfrak{U}^i \cdot_m \partial_s \Omega^m \cdot_k = -\Omega^m \cdot_k \partial_s \mathfrak{U}^i \cdot_m.$$

В этой связи, выражение (14.2.2) принимает вид

$$\Gamma^i \cdot_{jk} = \tilde{\Gamma}^m \cdot_{sq} \mathfrak{U}^i \cdot_m \Omega^s \cdot_j \Omega^q \cdot_k - \Omega^p \cdot_j \Omega^m \cdot_k \partial_p \mathfrak{U}^i \cdot_m.$$

Домножая обе части полученного равенства на $\mathfrak{U}^j \cdot_o \mathfrak{U}^k \cdot_l$ и производя суммирование по k и j , получаем

$$\Gamma^i \cdot_{jk} \mathfrak{U}^j \cdot_o \mathfrak{U}^k \cdot_l = \tilde{\Gamma}^m \cdot_{ol} \mathfrak{U}^i \cdot_m - \partial_o \mathfrak{U}^i \cdot_l.$$

Приходим к окончательному выражению:

$$\partial_p \mathfrak{U}^i \cdot_l = \tilde{\Gamma}^m \cdot_{pl} \mathfrak{U}^i \cdot_m - \Gamma^i \cdot_{js} \mathfrak{U}^j \cdot_p \mathfrak{U}^s \cdot_l. \quad (14.2.25)$$

Вернемся к выражению (14.2.24) для $d\mathfrak{T}^i$. Подставляя туда полученную формулу (14.2.25) для $\partial_p \mathfrak{U}^i \cdot_l$, приходим к равенству

$$d\mathfrak{T}^i = \{ \mathfrak{U}^i \cdot_l (\partial_p \tilde{\Gamma}^l \cdot_{ko} + \tilde{\Gamma}^m \cdot_{ko} \tilde{\Gamma}^l \cdot_{pm}) - \tilde{\Gamma}^m \cdot_{ko} \Gamma^i \cdot_{js} \mathfrak{U}^j \cdot_p \mathfrak{U}^s \cdot_m \} dx^p \wedge dx^k \wedge dx^o.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ko} \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot js} \mathcal{U}^{j\cdot}_{\cdot p} \mathcal{U}^{s\cdot}_{\cdot m} dx^p \wedge dx^k \wedge dx^o &= \\ &= (\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot js} \vartheta^j) \wedge (\tilde{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ko} \mathcal{U}^{s\cdot}_{\cdot m} dx^k \wedge dx^o) = \omega^{i\cdot}_{\cdot s} \wedge \mathfrak{T}^s, \end{aligned}$$

то мы получаем следующее выражение для $d\mathfrak{T}^i$:

$$d\mathfrak{T}^i = \{\mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot l} (\partial_p \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot ko} + \tilde{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ko} \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot pm})\} dx^p \wedge dx^k \wedge dx^o - \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge \mathfrak{T}^k. \quad (14.2.26)$$

Теперь преобразуем выражение $\{\mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot l} (\partial_p \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot ko} + \tilde{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ko} \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot pm})\} dx^p \wedge dx^k$:

$$\{\mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot l} (\partial_p \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot ko} + \tilde{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ko} \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot pm})\} dx^p \wedge dx^k = \frac{1}{2} (\mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot l} \tilde{\mathfrak{R}}^{l\cdot\cdot\cdot}_{\cdot pko}) dx^p \wedge dx^k,$$

где $\tilde{\mathfrak{R}}^{l\cdot\cdot\cdot}_{\cdot pko}$ — компоненты тензора кривизны в координатном репере:

$$\tilde{\mathfrak{R}}^{l\cdot\cdot\cdot}_{\cdot pko} = \partial_p \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot ko} - \partial_k \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot po} + \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot pm} \tilde{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ko} - \tilde{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{\cdot km} \tilde{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{\cdot po}.$$

Поэтому (14.2.26) принимает вид

$$d\mathfrak{T}^i = \frac{1}{2} (\mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot l} \tilde{\mathfrak{R}}^{l\cdot\cdot\cdot}_{\cdot pko}) dx^p \wedge dx^k \wedge dx^o - \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge \mathfrak{T}^k.$$

Поскольку $dx^o = \Omega^{o\cdot}_{\cdot j} \vartheta^j$, то

$$d\mathfrak{T}^i = \mathfrak{R}^{i\cdot}_{\cdot j} \vartheta^j - \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge \mathfrak{T}^k, \quad (14.2.27)$$

где через $\mathfrak{R}^{i\cdot}_{\cdot j}$ обозначена 2-форма кривизны:

$$\mathfrak{R}^{i\cdot}_{\cdot j} := \frac{1}{2} (\mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot l} \Omega^{o\cdot}_{\cdot j} \tilde{\mathfrak{R}}^{l\cdot\cdot\cdot}_{\cdot pko}) dx^p \wedge dx^k. \quad (14.2.28)$$

Подставляя (14.2.27) в (14.2.23), получим равенство

$$\mathfrak{R}^{i\cdot}_{\cdot j} \vartheta^j - \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge \mathfrak{T}^k = d\omega^{i\cdot}_{\cdot j} \wedge \vartheta^j - \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge \mathfrak{T}^k + \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge \omega^{k\cdot}_{\cdot j} \wedge \vartheta^j,$$

из которого следует второе уравнение Картана:

$$d\omega^{i\cdot}_{\cdot j} + \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge \omega^{k\cdot}_{\cdot j} = \mathfrak{R}^{i\cdot}_{\cdot j}. \quad (14.2.29)$$

Библиография

1. Madsen Ib H, Tornehave Jxrgen. From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes. — Cambridge University Press, 1997.
2. Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. Lectures on Differential Geometry. — World Scientific Publishing, 1999.
3. Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M. Analysis, manifolds and physics. Part 1. Basics. — North-Holland, 1982.
4. Taubes C.H. Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature. Oxford Graduate Texts in Mathematics. — OUP Oxford, 2011.
5. Petersen Peter. Riemannian geometry. — Springer Science & Business Media, 2006. — Vol. 171.
6. Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. — De Gruyter, 2018.
7. Goldberg Vladislav, Chern Shiing-Shen. Riemannian Geometry In An Orthogonal Frame. — World Scientific Publishing Company, 2001.
8. Yavari Arash, Goriely Alain. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics // [Archive for Rational Mechanics and Analysis](#). — 2012. — Vol. 205, no. 1. — P. 59–118.
9. Weitzenböck R. Invariantentheorie // P. Noordhoff, Groningen. — 1923.
10. Fernandez O. E., Bloch A. M. The Weitzenböck Connection and Time Reparameterization in Nonholonomic Mechanics // [J. Math. Phys.](#) — 2011. — Vol. 52, no. 1. — P. 012901.
11. Cartan É. Sur les variétés a connexion affine et la théorie de la relativité généralisée // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. — 1923. — Vol. 40. — P. 325–412.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

ГЛАВА 15

Деформируемый континуум

Библиография

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1. Тело и физическое пространство

1.1. Тело

Тело \mathfrak{B} определяется как множество, элементы которого обозначаются заглавными фактурными буквами $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \dots$ и называются **материальными точками** [1]. Кардинальное число $\text{Card } \mathfrak{B}$ определяет вид механической теории, описывающей кинематику и динамику материальных точек, составляющих тело. Объектом исследований механики континуума являются тела \mathfrak{B} , кардинальные числа которых одинаковы и равны $\text{Card } \mathfrak{B} = \text{Card } \mathbb{R}$. В этой связи, мы рассматриваем тело как множество мощности континуума.

Для описания взаимодействия материальных точек, составляющих тело, используется понятие окрестности, формализующее идею соседства двух точек. Поскольку окрестность определяется в рамках теории топологических пространств, то необходимо предположить, что тело \mathfrak{B} снабжено структурой топологического пространства. Вместе с тем, топология на теле не может быть произвольной. С физической точки зрения, различные точки должны иметь непересекающиеся окрестности. Таким образом, \mathfrak{B} — хаусдорфово топологическое пространство. Дополнительно предположим, что оно обладает второй аксиоме счетности, то есть, в

нем есть счетная база. Это дает возможность генерировать окрестности из как можно меньшего набора множеств.

Для аналитического описания физических полей, действующих на материальные точки, необходимо допустить возможность покрытия тела \mathfrak{B} картами (U, φ) . Здесь $U \subset \mathfrak{B}$ — открытое множество, а $\varphi : U \rightarrow O$ — гомеоморфизм между районом U действия карты и открытым множеством $O \subset \mathbb{R}^n$. Будем считать, что n фиксировано. Тогда \mathfrak{B} , как хаусдорфово локально евклидово пространство фиксированной размерности, удовлетворяющее второй аксиоме счетности¹, является топологическим многообразием размерности n .

Для того, чтобы можно было корректно формализовать понятие гладкости отображения (например, плотности упругой энергии), то есть возможности локальной аппроксимации полиномом любого порядка, тело \mathfrak{B} должно подчиняться дополнительному условию: на \mathfrak{B} выбран некоторый максимальный атлас, или, что эквивалентно, гладкая структура. Если (U, φ) и (V, ψ) — две карты из атласа C^∞ -структуры, то либо $U \cap V = \emptyset$, либо $U \cap V \neq \emptyset$ и отображение $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ между открытыми подмножествами \mathbb{R}^n является C^∞ -диффеоморфизмом. Таким образом, \mathfrak{B} — гладкое n -мерное многообразие².

Формулировка интегральных уравнений баланса для *частей* тела (подмножеств с определенным свойством) требует возможность интегрирования внешних форм по частям тела или их границам. Такое интегрирование может быть проведено корректно в случае ориентированных многообразий. Таким образом, необходима возможность снабдить \mathfrak{B} некоторой ориентацией, которая затем индуцируется на части тела. Проведенные рассуждения сводятся к следующим свойствам, которыми множество \mathfrak{B} материальных точек должно обладать:

$$(\mathfrak{B}_1) \quad \text{Card } \mathfrak{B} = \text{Card } \mathbb{R};$$

¹Если отбросить вторую аксиому счетности, то, в общем случае, тело может быть покрыто лишь не менее чем континуальным набором карт. Приняв вторую аксиому счетности, мы можем работать с конечным или счетным набором карт.

²Представление тела в виде гладкого многообразия впервые использовали W. Noll, С.-С. Wang, M. Gurtin и A. Murdoch в работах [2, 3, 4]. В частности, Noll аксиоматически определил гладкое тело как множество, для которого указано семейство отображений из этого множества в физическое пространство, называемых конфигурациями и удовлетворяющих некоторой системе аксиом. Gurtin и Murdoch дали определение двумерной материальной поверхности, основанное на этих аксиомах.

(\mathfrak{B}_2) \mathfrak{B} является n -мерным C^∞ -многообразием.

(\mathfrak{B}_3) \mathfrak{B} является ориентируемым многообразием, то есть, существует форма объема $\mu_0 \in \Omega^n(\mathfrak{B})$.

Предположим, что на теле выбрана некоторая ориентация $[\mu_0]$. Под **частью** тела \mathfrak{B} будем понимать n -мерное вложенное подмногообразие $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{B}$ с краем $\partial\mathfrak{P}$ и ориентацией³ $[\iota_{\mathfrak{P}}^*\mu_0]$. Множество всех частей тела будем обозначать через $\text{Part}(\mathfrak{B})$.

1.2. Физическое пространство

Физическое пространство \mathcal{P} определяется как множество, элементы которого x, y, z, \dots , называются **местами**. Образно говоря, физическое пространство является «идеальной лабораторией», в которой наблюдаются места и производятся измерения. Поскольку в физическом пространстве наблюдается тело, то полагаем, что $\text{Card } \mathcal{P} = \text{Card } \mathfrak{B} = \text{Card } \mathbb{R}$.

Для мест, также как и для материальных точек, используются высказывания, которые предполагают формализацию идеи соседства и непрерывности⁴. В этой связи, \mathcal{P} должно быть наделено некоторой топологией. На топологию наложены два ограничения: она хаусдорфова и она удовлетворяет второй аксиоме счетности. Таким образом, различные места отделены друг от друга (то есть, имеют непересекающиеся окрестности) и окрестности точек порождаются из минимального набора множеств.

Для получения числовых значений полей (сил, потенциальных функций и т.д.), должна быть возможность ввести на \mathcal{P} некоторую систему координат (в общем случае, локальных). В этой связи, удобно моделировать \mathcal{P} как топологическое многообразие размерности m . Для формализации понятия гладкости одной возможности покрыть картами недостаточно: между картами должно выполняться условие гладкого согласования. Следовательно, \mathcal{P} должно быть снабжено надстройкой в виде гладкой структуры. Таким образом, физическое пространство \mathcal{P} моделируется как гладкое m -мерное многообразие.

³Здесь $\iota_{\mathfrak{P}}$ — каноническая инъекция, определяемая формулой (1.3.2), а $\iota_{\mathfrak{P}}^*\mu_0$ — «pullback» формы μ_0 .

⁴Например, «в окрестности места x действует поле сил».

Поскольку пространство \mathcal{P} формализует идеальную лабораторию, то должна быть возможность проводить измерения в нем. Инструмент, реализующий измерения, формализуется римановой метрикой — сечением $g \in \text{Sec}(T^*\mathcal{P} \otimes T^*\mathcal{P})$, значение $g_{\mathcal{P}}$ которого в каждой точке $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ — симметричная невырожденная положительно определенная билинейная форма на $T_{\mathcal{P}}\mathcal{P}$.

Замечание 16.1. Для касательного вектора $v \in T_{\mathcal{P}}\mathcal{P}$, где $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ — некоторое место, квадрат его длины определяется выражением

$$\|v\|_g^2 = g(v, v).$$

Если v — вектор скорости кривой⁵ χ , то число $\|v\|_g$ имеет смысл величины скорости этой кривой.

Пусть $\chi :]a, b[\rightarrow \mathcal{P}$ — кусочно-гладкая кривая на \mathcal{P} тогда ее длина $l_g(\chi)$ есть, по определению, число

$$l_g(\chi) = \int_a^b \sqrt{g_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi'(t))} dt.$$

Пусть $u_1, u_2 \in T_{\mathcal{P}}\mathcal{P}$ — два вектора. Угол $\angle(u_1, u_2)_{\mathcal{P}} \in [0, \pi]$ между ними определяется равенством

$$\cos \angle(u_1, u_2)_{\mathcal{P}} = \frac{g_{\mathcal{P}}(u_1, u_2)}{\|u_1\|_g \|u_2\|_g}.$$

Замечание 16.2. Риманова метрика g позволяет определять расстояние между точками «в малом». Вместе с тем, при дополнительных условиях на пространство \mathcal{P} , риманова метрика порождает функцию расстояния $d_g : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$. Действительно, предположим, что \mathcal{P} связно. Тогда между любыми двумя различными точками $x, y \in \mathcal{P}$ можно провести кусочно-гладкую кривую. Следуя [5], определим функцию расстояния как

$$d_g(x, y) := \inf l_g(\chi),$$

где инфимум берется по всем кусочно-непрерывным кривым χ , соединяющим x и y .

⁵См. формулу (10.4.12).

Риманова метрика является инструментом, позволяющим получать информацию о длинах и углах. Вместе с тем, этого недостаточно для формулировки уравнений, выражающих баланс некоторой физической величины. В частности, не определены понятия результирующей силы и ускорения, каждое из которых требует наличия возможности складывать значения поля, вычисленные в разных точках пространства. Таким образом, необходим инструмент, позволяющий «перенести» значения поля в выбранную точку. Этот инструмент — правило параллельного переноса, — определяется аффинной связностью ∇ на \mathcal{P} . В этой связи, кроме метрики, на \mathcal{P} должна быть определена некоторая аффинная связность. Будем полагать, что эта связность является связностью Леви-Чивита. Коэффициенты этой связности в координатном репере $(\partial_i)_{i=1}^m$ имеют вид

$$\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = \frac{g^{il}}{2}(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}),$$

где $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$.

Таким образом, (\mathcal{P}, g, ∇) — риманово пространство. Для формулировки уравнений баланса на \mathcal{P} также необходима возможность корректного определения интегрирования дифференциальных форм. Эта возможность появляется, если предположить, что \mathcal{P} ориентируемо. Пусть μ — форма объема, задающая некоторую ориентацию. Она определяет риманову форму объема dV_g ,

$$dV_g = \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

Замечание 16.3. Если $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ — некоторое гладкое компактное ориентированное подмногообразие \mathcal{P} , то его объем $\text{Vol}_g(\mathcal{S})$ вычисляется по формуле

$$\text{Vol}_g(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} dV_{i_{\mathcal{S}}^*g},$$

в которой $i_{\mathcal{S}}^*g$ — «pullback» поля g на \mathcal{S} , а $dV_{i_{\mathcal{S}}^*g}$ — соответствующая форма объема.

1.3. Конфигурации

Пусть \mathfrak{B} — тело, а (\mathcal{P}, g) — физическое пространство с римановой метрикой g . Будем предполагать, что размерности $n = \dim \mathfrak{B}$ и $m =$

$\dim \mathcal{P}$ тела и физического пространства связаны соотношениями

$$n \leq m \leq 3.$$

В противном случае, в физическом пространстве будет наблюдаться лишь некоторая проекция тела.

Связь между континуальным множеством материальных точек, составляющих тело, и множеством их мест в физическом пространстве устанавливается посредством **конфигурации** — отображения $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{P}$. Образ конфигурации κ , то есть, множество $\kappa(\mathfrak{B})$, называется *формой* и обозначается символом \mathcal{S}_κ , если тело фиксировано. Соотношения между телом, конфигурацией и формой иллюстрируются на Рис. 16.1, где $\kappa = \iota_{\mathcal{S}_\kappa} \circ \hat{\kappa}$,

- $\iota_{\mathcal{S}_\kappa} : \mathcal{S}_\kappa \rightarrow \mathcal{P}$ — каноническая инъекция, определенная равенством $\iota_{\mathcal{S}_\kappa}(x) := x$;
- $\hat{\kappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}_\kappa$ — отображение, действующее по правилу $\hat{\kappa}(\mathfrak{X}) := \kappa(\mathfrak{X})$.

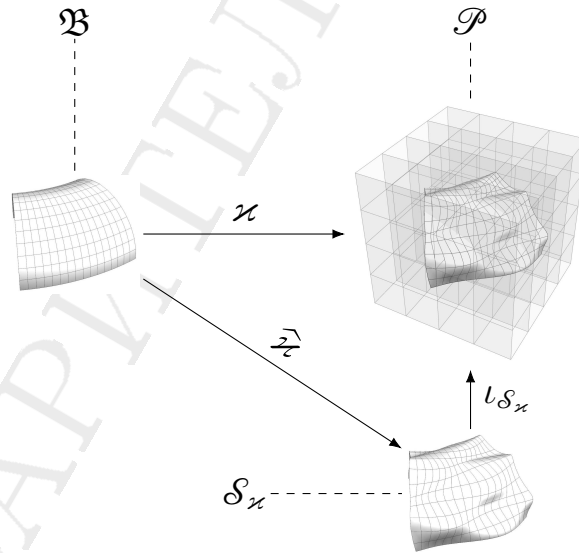


Рис. 16.1. Тело, физическое пространство, конфигурация, форма

Поскольку как тело, так и физическое пространство, являются гладкими многообразиями, среди всех конфигураций κ будем рассматривать только те, которые являются отображениями класса C^∞ . То есть,

$\kappa \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$, что позволяет использовать дифференциальное исчисление в дальнейших рассуждениях. Дополнительно предположим, что κ является гладким погружением: в каждой материальной точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ касательное отображение $T_{\mathfrak{X}}\kappa : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \rightarrow T_{\kappa(\mathfrak{X})}\mathcal{P}$ инъективно. Это означает, что пространственные образы различных инфинитезимальных материальных волокон не совпадают⁶. Такое условие также называется условием **локальной непроницаемости**. Вместе с тем, предположение об инъективности касательного отображения не гарантирует, что условие непроницаемости будет *глобальным*. Необходимо ограничить класс всех гладких погружений κ условием: κ — гомеоморфизм на свой образ $\kappa(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{P}$, рассматриваемый как топологическое подпространство \mathcal{P} , или, что эквивалентно, отображение $\hat{\kappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}_\kappa$ является гомеоморфизмом. В этой связи, κ является гладким вложением.

Таким образом, под **конфигурацией** тела \mathfrak{B} в физическое пространство \mathcal{P} понимается C^∞ -вложение $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{P}$. Множество всех таких отображений обозначается символом $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$. В частном случае, когда физическое пространство евклидово, то есть, $\mathcal{P} = \mathcal{E}$, будем писать коротко, $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$.

1.4. Деформации

Пусть \mathfrak{B} — гладкое n -мерное многообразие, представляющее тело, а \mathcal{P} — гладкое m -мерное многообразие, представляющее физическое пространство с римановой метрикой g . Изменение формы тела \mathfrak{B} , вложенного в \mathcal{P} , характеризуется отображением, называемым деформацией.

В классической механике континуума для количественного измерения деформации рассматривается изменение форм материальных волокон. В рамках геометрического подхода материальные волокна формализуются как гладкие кривые $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathfrak{B}$ на теле. Эти кривые наблюдаемы только в том случае, если выбрана некоторая конфигурация $\kappa \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$. То есть, множество $\chi(\mathbb{I})$ материальных точек не наблюдаемо, а множество $\kappa \circ \chi(\mathbb{I})$ их мест наблюдаемо.

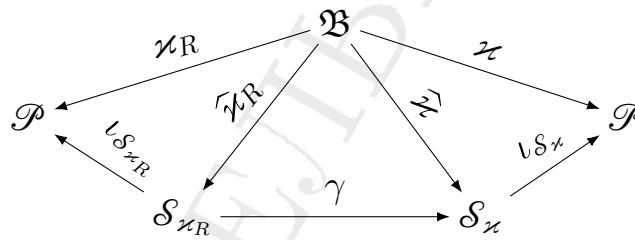
Пусть $\kappa_R \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$ — конфигурация, которую наблюдатель принимает за *отсчетную*. Таким образом, множество $\kappa_R \circ \chi(\mathbb{I})$ представляет отсчетную форму материального волокна. Если $\kappa \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$ — кон-

⁶Инфинитезимальное материальное волокно формализуется как касательный вектор, см. раздел 6.1..

фигурация, образ которой, $\varkappa(\mathfrak{B})$, наблюдается в *настоящий момент*, то множество $\varkappa \circ \chi(\mathbb{I})$ представляет *актуальный* образ материального волокна. Используя измерительный прибор, которым наблюдателя обеспечивает риманова метрика g , можно вычислить и сопоставить длины отсчетной и актуальной форм материального волокна. Если рассмотреть два материальных волокна, пересекающихся в некоторой точке, то можно сопоставить углы в точке пересечения в отсчетной и актуальной формах, используя ту же риманову метрику g . Таким образом, сравниваются метрические свойства (длины, углы) материальных волокон в отсчетной и актуальной формах. В этой связи, определим отображение

$$\gamma: \varkappa_R(\mathfrak{B}) \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B}), \quad \gamma := \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1},$$

которое называется **деформацией \mathfrak{B} из конфигурации \varkappa_R в конфигурацию \varkappa** [2]. Соотношения между конфигурациями и деформациями иллюстрируются на диаграмме:



Здесь $\mathcal{S}_{\varkappa_R} = \varkappa_R(\mathfrak{B})$, а $\mathcal{S}_{\varkappa} = \varkappa(\mathfrak{B})$.

2. Движение

2.1. Движение как кривая

Движение тела \mathfrak{B} в физическом пространстве \mathcal{P} представляется континуальной последовательностью форм и может быть формализовано следующим образом [6]. Пусть $\mathbb{T} =]t_1, t_2[\subset \mathbb{R}$ — хронометрическое многообразие (t_1 и t_2 могут быть конечными или бесконечными). Отображение $M: \mathbb{T} \rightarrow \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$, которое сопоставляет каждому промежутку времени $t \in \mathbb{T}$ некоторую конфигурацию \varkappa_t , то есть, $M: t \mapsto \varkappa_t$, представляет **движение тела \mathfrak{B} над хронометрическим многообразием \mathbb{T}** . Иными словами, движение — это кривая в $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$. Эквивалентно,

движение M может быть представлено как семейство $M = \{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ конфигураций.

Любое движение $M = \{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ определяет два типа отображений. Пусть $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ — материальная точка. Тогда отображение

$$\chi_{M; \mathfrak{X}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{P}, \quad \chi_{M; \mathfrak{X}}(t) := \varkappa_t(\mathfrak{X}),$$

представляет пространственную траекторию \mathfrak{X} . Другое отображение получается путем фиксирования времени $t \in \mathbb{T}$. То есть,

$$\chi_{M; t} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{P}, \quad \chi_{M; t}(\mathfrak{X}) := \varkappa_t(\mathfrak{X}).$$

Такое отображение является ничем иным, как конфигурацией \varkappa_t .

Если для любой точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ отображение $\chi_{M; \mathfrak{X}}$ имеет класс C^∞ , то мы будем называть M *гладким движением*. Будем рассматривать только такие движения.

Зафиксируем точку $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$. Гладкое движение $M = \{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ определяет континуальное семейство карт⁷ $\{(U_t, \varphi_t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ и $\{(V_t, \psi_t)\}_{t \in \mathbb{T}}$, таких, что⁸

$$\forall t \in \mathbb{T} : (\mathfrak{X} \in U_t) \wedge (\varkappa_t(U_t) \subset V_t).$$

Таким образом, для точки \mathfrak{X} имеем отображение $\mathbb{T} \ni t \mapsto \varkappa_t(\mathfrak{X}) \in \bigcup_{t \in \mathbb{T}} V_t$.

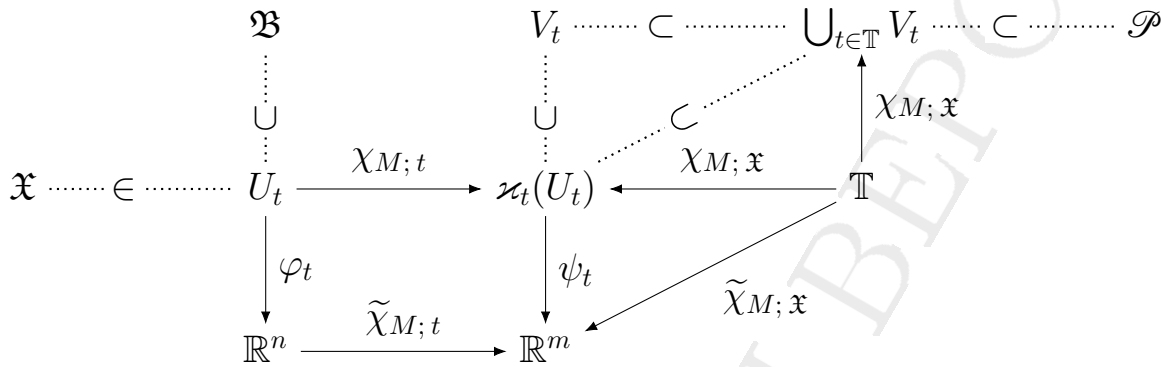
Отображения $\chi_{M; \mathfrak{X}}$ и $\chi_{M; t}$ имеют следующие координатные представления:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{M; \mathfrak{X}} &= \psi_t \circ \chi_{M; \mathfrak{X}} \in C^\infty(\mathbb{T}; \mathbb{R}^m), \\ \tilde{\chi}_{M; t} &= \psi_t \circ \chi_{M; t} \circ \varphi_t^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

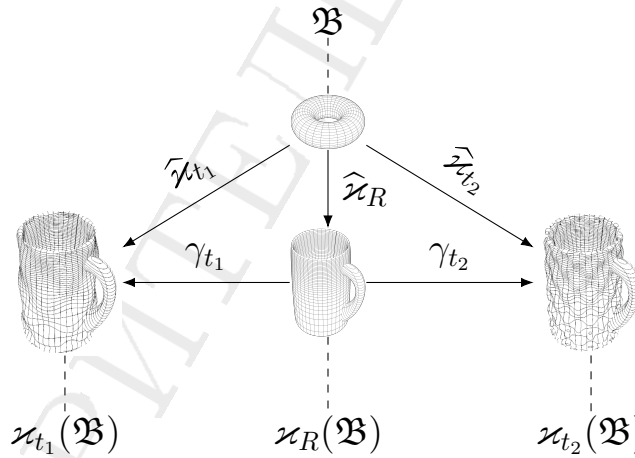
⁷Поскольку можно выбрать счетное множество карт, покрывающих \mathfrak{B} и \mathcal{P} , некоторые элементы семейств $\{(U_t, \varphi_t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ и $\{(V_t, \psi_t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ могут совпасть. Вместе с тем, в наших рассуждениях удобно использовать \mathbb{T} в качестве множества индексов.

⁸Например, в качестве (V_t, ψ_t) можно взять любую карту, для которой $\varkappa_t(\mathfrak{X}) \in V_t$ и затем положить $U_t = \varkappa_t^{-1}(V_t)$.

Действие этих отображений иллюстрирует диаграмма



Заметим, что в рамках классической механики континуума движение рассматривается как семейство деформаций. Пусть κ_R — отсчетная конфигурация. Тогда движение — это семейство преобразований формы $\kappa_R(\mathcal{B})$ в актуальные, $\kappa_t(\mathcal{B})$. Такие преобразования представлены семейством $\{\gamma_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ деформаций $\gamma_t = \hat{\kappa}_t \circ \hat{\kappa}_R^{-1}$. Соотношения между семействами конфигураций и деформаций иллюстрируются диаграммой



Следует отметить, что на диаграмме тело показано как полноторие, а его формы — «кружками», которые топологически эквивалентны между собой. Тем самым мы хотели подчеркнуть, что тело и его формы могут быть существенно различными как метрические многообразия.

2.2. Скорости

Пусть $M = \{\kappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ — гладкое движение. Как правило, в механике континуума используются два эквивалентных описания кинематических

и физических полей. Согласно первому из них, поля являются отображениями мест материальных точек из некоторой фиксированной отсчетной формы. Это — **материальное описание**. В этом случае наблюдается состояние каждой индивидуальной частицы. Согласно второму описанию, поля определяются как функции фиксированного множества мест. Это — **пространственное описание**. В этом случае в разные моменты времени область определения может пересекаться с различными формами. Материальное и пространственное описания поля скорости вводятся следующим образом.

Материальное описание

Понятие вектора скорости кривой в применении к кривой $\chi_{M; \mathfrak{X}}$ дает два типа отображений. Фиксируем материальную точку $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$. Тогда получим отображение

$$V_{M; \mathfrak{X}} : \mathbb{T} \rightarrow T\mathcal{P}, \quad V_{M; \mathfrak{X}}(t) := \chi'_{M; \mathfrak{X}}(t) \in T_{\mathfrak{x}(t)}\mathcal{P}.$$

Поскольку образ интервала \mathbb{T} под действием отображения $\chi_{M; \mathfrak{X}}$ является пространственной траекторией точки \mathfrak{X} , наблюдаемой за интервал \mathbb{T} , то вектор $V_{M; \mathfrak{X}}(t_0)$, для $t_0 \in \mathbb{T}$, представляет *скорость точки \mathfrak{X} в момент времени t_0* . Таким образом, приходим к полю скоростей фиксированной материальной точки. Вместе с тем, могут интересоваться скорости всех материальных точек в момент времени $t \in \mathbb{T}$. Определим отображение

$$V_{M; t} : \mathfrak{B} \rightarrow T\mathcal{P}, \quad V_{M; t}(\mathfrak{X}) := \chi'_{M; \mathfrak{X}}(t) \in T_{\mathfrak{x}(t)}\mathcal{P}.$$

Значение $V_{M; t}(\mathfrak{X}_0)$ at $\mathfrak{X}_0 \in \mathfrak{B}$ представляет скорость точки \mathfrak{X}_0 в момент времени t . Наконец, приходим к отображению

$$V : \mathfrak{B} \times \mathbb{T} \rightarrow T\mathcal{P}, \quad (\mathfrak{X}, t) \mapsto \chi'_{M; \mathfrak{X}}(t).$$

которое называется **полем скорости в материальном описании**.

Для материальной точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ и момента времени $t_0 \in \mathbb{T}$ имеем разложение $V_{M; \mathfrak{X}}(t_0) = V_{M; \mathfrak{X}}^i(t_0)\partial_i|_{\mathfrak{x}}$, где $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{t_0}(\mathfrak{X})$,

$$V_{M; \mathfrak{X}}^i(t_0) = \left. \frac{d[\pi_m^i \circ \psi \circ \chi_{M; \mathfrak{X}}(\tau)]}{d\tau} \right|_{\tau=t_0}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь ψ — координатное отображение с областью определения, содержащей x .

Поле V определяет семейство $\{V_{M;t}\}_{t \in \mathbb{T}}$ отображений $V_{M;t} : \mathfrak{B} \rightarrow T\mathcal{P}$. Каждое из них, $V_{M;t}$, ставит в соответствие каждой материальной точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ касательный вектор $V_{M;t}(\mathfrak{X}) \in T_{\mathfrak{x}_t(\mathfrak{X})}\mathcal{P}$. В этой связи, $V_{M;t}$ есть в точности гладкое сечение «pullback»-расслоения $\mathfrak{x}_t^*T\mathcal{P}$, то есть, $V_{M;t} \in \text{Sec}(\mathfrak{x}_t^*T\mathcal{P})$.

Пространственное описание

Пусть $t \in \mathbb{T}$. **Скорость в пространственном описании** определяется как сечение «pullback»-расслоения $\iota_{\mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}}^*T\mathcal{P}$:

$$v_t = V(\cdot, t) \circ \widehat{\mathfrak{x}}_t^{-1} : \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t} \rightarrow T\mathcal{P}.$$

Наконец, определим поле:

$$v : \bigcup_{t \in \mathbb{T}} (\mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t} \times \{t\}) \rightarrow T\mathcal{P}, \quad (x, t) \mapsto v_t(x),$$

которое представляет поле скорости в пространственном описании, зависящее от мест и времени.

3. Меры напряжений

Классические представления напряжений существенно используют евклидову структуру физического пространства \mathcal{E} , вмещающего отсчетную и актуальную формы тела:

- Существование тензора напряжений Коши \mathbf{T} устанавливается с помощью классического доказательства, в основе которого лежит построение тетраэдра в евклидовом пространстве.
- Интегралы, представляющие результирующие контактные силы, используют евклидово правило параллельного перенесения. Поскольку плотности контактных сил принимают значения в трансляционном пространстве $\vec{\mathcal{E}}$, то их значения, принимаемые в различных точках, можно суммировать. Такое суммирование выполняется в силу определения интегрирования в евклидовом пространстве.

- Пусть \mathcal{S} обозначает $\partial\kappa_R(\mathfrak{B})$ или $\partial\kappa(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B} \in \text{Part}(\mathfrak{B})$, а $\kappa_R, \kappa \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B})$. Для точки $x \in \mathcal{S}$ выполняется разложение $T_x\mathcal{S} \oplus (T_x\mathcal{S})^\perp = \vec{\mathcal{E}}$, где $(T_x\mathcal{S})^\perp$ — векторное подпространство $\vec{\mathcal{E}}$, состоящее из векторов, ортогональных $T_x\mathcal{S}$. По определению, $(T_x\mathcal{S})^\perp$ использует евклидову структуру $\vec{\mathcal{E}}$. Нормальный вектор к площадке (элементу поверхности \mathcal{S}), \mathbf{n}_x , является элементом $(T_x\mathcal{S})^\perp$.
- Тензор напряжений Коши \mathbf{T} и первый тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа \mathbf{P} связаны преобразованием Пиолы $\mathbf{P} = J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}$, в котором используется операция транспонирования, а значит, евклидова структура. Здесь \mathbf{F} — градиент деформации из отсчетной формы в актуальную, а $J = \det \mathbf{F}$.

В настоящем разделе понятие напряжений обобщается на гладкие многообразия в соответствии с идеями, изложенными в работе [7].

3.1. Сосредоточенные силы и плотности сил

Сосредоточенные силы

Пусть $M = \{\kappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ — гладкое движение, а $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ — некоторая материальная точка. *Сосредоточенная сила*, действующая на материальную точку \mathfrak{X} в момент времени $t \in \mathbb{T}$ определяется как ковектор $f_t \in T_{\kappa_t(\mathfrak{X})}^*\mathcal{P}$, то есть, как элемент слоя «pullback»-расслоения $\kappa_t^*T\mathcal{P}$. Пусть семейство $\{f_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ сосредоточенных сил, действующих на материальную точку \mathfrak{X} , соответствует заданному движению M . Движение M , в свою очередь, порождает поле $\{V_{M;t}\}_{t \in \mathbb{T}}$ скоростей $V_{M;t} \in \text{Sec}(\kappa_t^*T\mathcal{P})$. Для каждого $t \in \mathbb{T}$ скаляр $f_t \lrcorner V_{M;t}(\mathfrak{X})$ может быть интерпретирован как мощность, развиваемая силой f в момент времени t .

Плотности сил

Следуя подходу, принятому в механике континуума, предположим, что силы, действующие на тело \mathfrak{B} , делятся на две группы. Первая из них представлена **объемными силами**, распределенными по объему любой части тела. Вторая группа представлена **контактными (поверхностными) силами**, распределенными по границе любой части тела. Таким

образом, обе эти группы состоят из плотностей сил, которые, действуя на скорость, в результате дают плотности мощности (объемную или поверхностную). Последние представлены дифференциальными формами и могут быть проинтегрированы (по части тела или ее границе), что даст суммарные мощности.

Пусть $M = \{\mathcal{X}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ — гладкое движение, а $\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B})$ — часть тела \mathfrak{B} . Напомним, что под частью тела мы понимаем n -мерное вложенное подмногообразие тела с краем. Рассмотрим плотности сил в материальном и пространственном описаниях.

Плотность объемных сил в материальном описании определяется как семейство $\{\beta_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}}\}_{t \in \mathbb{T}}$ сечений

$$\forall t \in \mathbb{T} : \quad \beta_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}} \in \text{Sec}(\mathcal{X}_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^n(T^* \mathfrak{P})).$$

Плотность поверхностных сил в материальном описании есть семейство $\{\tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}}\}_{t \in \mathbb{T}}$ сечений

$$\forall t \in \mathbb{T} : \quad \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}} \in \text{Sec}(\mathcal{X}_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(T^* \partial \mathfrak{P})).$$

Мы постулируем, что суммарная мощность в материальном описании, развиваемая объемными и поверхностными силами в момент $t \in \mathbb{T}$, имеет вид

$$p_t^{\text{mat}} := \int_{\mathfrak{P}} V_{M;t} \lrcorner \beta_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}} + \int_{\partial \mathfrak{P}} V_{M;t} \lrcorner \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}}.$$

Отметим, что интегралы берутся от дифференциальных форм.

Плотность объемных сил в пространственном описании есть семейство $\{\beta_{\mathfrak{P};t}^{\text{spat}}\}_{t \in \mathbb{T}}$ сечений

$$\forall t \in \mathbb{T} : \quad \beta_{\mathfrak{P};t}^{\text{spat}} \in \text{Sec}(l_{\mathcal{X}_t(\mathfrak{P})}^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^n(T^* \mathcal{X}_t(\mathfrak{P}))).$$

Плотность поверхностных сил в пространственном описании определяется как семейство $\{\tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{spat}}\}_{t \in \mathbb{T}}$ сечений

$$\forall t \in \mathbb{T} : \quad \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{spat}} \in \text{Sec}(l_{\mathcal{X}_t(\mathfrak{P})}^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(T^* \partial \mathcal{X}_t(\mathfrak{P}))).$$

Как и в случае материального описания, постулируем, что суммарная мощность в пространственном описании, развиваемая объемными и по-

верхностными силами в момент времени $t \in \mathbb{T}$, имеет вид

$$p_t^{\text{spat}} := \int_{\varkappa_t(\mathfrak{P})} v_t \lrcorner \beta_{\mathfrak{P};t}^{\text{spat}} + \int_{\partial \varkappa_t(\mathfrak{P})} v_t \lrcorner \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{spat}}.$$

Обычно предполагается, что значение объемной силы в точке не зависит от части тела, содержащей данную точку:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{T} : \quad \beta_t^{\text{mat}} &\in \text{Sec}(\varkappa_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^n(T^* \mathfrak{B})). \\ \forall t \in \mathbb{T} : \quad \beta_t^{\text{spat}} &\in \text{Sec}(\iota_{\mathcal{S}_{\varkappa_t}}^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^n(T^* \mathcal{S}_{\varkappa_t})). \end{aligned}$$

В этой связи, только поверхностная сила зависит от части. Семейство $\{(\beta_t^{\text{mat}}, \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}})\}_{\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B}), t \in \mathbb{T}}$ представляет систему сил на \mathfrak{B} в материальном описании, а семейство $\{(\beta_t^{\text{spat}}, \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{spat}})\}_{\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B}), t \in \mathbb{T}}$ представляет систему сил на \mathfrak{B} в пространственном описании. Таким образом, суммарная сила F_t , действующая на часть \mathfrak{P} в момент времени $t \in \mathbb{T}$, есть функционал, заданный на скоростях. В материальном и пространственном описаниях он представлен значениями

$$F_t^{\text{mat}}(V) := \int_{\mathfrak{P}} V_{M;t} \lrcorner \beta_t^{\text{mat}} + \int_{\partial \mathfrak{P}} V_{M;t} \lrcorner \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}}, \quad (16.3.1)$$

$$F_t^{\text{spat}}(v) := \int_{\varkappa_t(\mathfrak{P})} v_t \lrcorner \beta_t^{\text{spat}} + \int_{\partial \varkappa_t(\mathfrak{P})} v_t \lrcorner \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{spat}}. \quad (16.3.2)$$

3.2. Гиперплоскости с инклинацией

Понятие тензора напряжений предполагает возможность выбрать гиперплоскость (поверхностный элемент) с заданной ориентацией. Для этой цели на римановом многообразии можно использовать поле единичных нормальных векторов. Вместе с тем, на теле \mathfrak{B} не задана риманова метрика G ; она должна быть получена из определенных физических рассуждений, которые могут использовать понятие напряжений. В этой связи, необходим способ построения напряжений на \mathfrak{B} без апелляции к метрике. В частности, это означает, что понятие ориентированной гиперплоскости должно быть введено независимым от метрики способом. В работе [7] предложено определение ориентированной гиперплоскости на основе понятия гиперплоскости с инклинацией.

Пусть $\dim \mathfrak{B} = n$, а $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$. Рассмотрим касательное пространство $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$. Под *гиперплоскостью* $H_{\mathfrak{X}}$ в точке \mathfrak{X} будем понимать $(n-1)$ -мерное векторное подпространство $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$. Обозначим совокупность всех гиперплоскостей в точке \mathfrak{X} через $G_{n-1}(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B})$. Множество $G_{n-1}(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B})$ может быть снабжено структурой $(n-1)$ -мерного гладкого многообразия, которое называется **многообразием Грассмана** [5, 8]. Объединение

$$G_{n-1}(T\mathfrak{B}) = \coprod_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}} G_{n-1}(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}),$$

представляет тотальное пространство **расслоения Грассмана**.

Пусть $H_{\mathfrak{X}}$ — гиперплоскость. Обозначим через

$$\text{Ann}(H_{\mathfrak{X}}) := \{\nu \in T_{\mathfrak{X}}^*\mathfrak{B} \mid \forall u \in H_{\mathfrak{X}} : \nu(u) = 0\}$$

векторное пространство всех аннуляторов $H_{\mathfrak{X}}$. Поскольку $\dim \text{Ann}(H_{\mathfrak{X}}) = 1$, то

$$\forall \nu \in \text{Ann}(H_{\mathfrak{X}}) : \ker \nu = \begin{cases} T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}, & \nu = 0, \\ H_{\mathfrak{X}}, & \nu \neq 0. \end{cases}$$

Используя пространство аннуляторов $\text{Ann}(H_{\mathfrak{X}})$, можно выделить **сторону** $H_{\mathfrak{X}}$. Определим отношение эквивалентности $\sim_{H_{\mathfrak{X}}}$ на $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \setminus H_{\mathfrak{X}}$:

$$\forall u_1, u_2 \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \setminus H_{\mathfrak{X}} : (u_1 \sim_{H_{\mathfrak{X}}} u_2) \Leftrightarrow (\exists \nu \in \text{Ann}(H_{\mathfrak{X}}) : \nu(u_1)\nu(u_2) > 0).$$

Если $\nu(u_1)\nu(u_2) > 0$ для некоторого $\nu \in \text{Ann}(H_{\mathfrak{X}})$, то отсюда следует, что $\nu \neq 0$. Любой другой ненулевой ковектор $\tilde{\nu} \in \text{Ann}(H_{\mathfrak{X}})$ может быть выражен через ν : $\tilde{\nu} = \alpha\nu$, для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\tilde{\nu}(u_1)\tilde{\nu}(u_2) > 0$ и отношение $\sim_{H_{\mathfrak{X}}}$ определено корректно. Если $u_1 \sim_{H_{\mathfrak{X}}} u_2$, то мы скажем, что **векторы u_1 и u_2 находятся на одной стороне $H_{\mathfrak{X}}$** . Если же $u_1 \not\sim_{H_{\mathfrak{X}}} u_2$, то тогда скажем, что **векторы u_1 и u_2 находятся на противоположных сторонах $H_{\mathfrak{X}}$** . Заметим, что если $u \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \setminus H_{\mathfrak{X}}$ то векторы u и $-u$ находятся на противоположных сторонах. Таким образом, фактормножество состоит из двух классов — двух *сторон* $H_{\mathfrak{X}}$:

$$(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \setminus H_{\mathfrak{X}}) / \sim_{H_{\mathfrak{X}}} = \{[u], [-u]\}.$$

Гиперплоскостью с инклинацией назовем любую из пар $h_{\mathfrak{X}} = (H_{\mathfrak{X}}, [u])$ и $-h_{\mathfrak{X}} = (H_{\mathfrak{X}}, [-u])$. Совокупность всех гиперплоскостей с

инклинацией в точке \mathfrak{X} обозначим через $G_{n-1}^\perp(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B})$. Определим отображение

$$p_{\mathfrak{X}} : G_{n-1}^\perp(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}) \rightarrow G_{n-1}(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}), \quad p_{\mathfrak{X}}(H_{\mathfrak{X}}, [u]) := H_{\mathfrak{X}},$$

«стирающее» инклинацию.

Пусть снова $H_{\mathfrak{X}}$ — гиперплоскость. Выбор **положительной инклинации** означает выбор в точности одного из классов $(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \setminus H_{\mathfrak{X}}) / \sim_{H_{\mathfrak{X}}}$. Пусть $h_{\mathfrak{X}} = (H_{\mathfrak{X}}, [v])$ — гиперплоскость $H_{\mathfrak{X}}$ вместе с выбранной положительной инклинацией. Обозначим

$$\text{Ann}^+(H_{\mathfrak{X}}) := \{\nu \in \text{Ann}(H_{\mathfrak{X}}) \mid \forall u \in [v] : \nu(u) > 0\}.$$

Определим следующее отношение эквивалентности $\sim_{\mathfrak{X},+}$ на $T_{\mathfrak{X}}^*\mathfrak{B} \setminus \{0\}$:

$$\forall \nu_1, \nu_2 \in T_{\mathfrak{X}}^*\mathfrak{B} \setminus \{0\} : (\nu_1 \sim_{\mathfrak{X},+} \nu_2) \Leftrightarrow (\exists a > 0 : \nu_2 = a\nu_1).$$

По определению, любая пара элементов из $\text{Ann}^+(H_{\mathfrak{X}})$ связана отношением $\sim_{\mathfrak{X},+}$. Это влечет включение $\text{Ann}^+(H_{\mathfrak{X}}) \in (T_{\mathfrak{X}}^*\mathfrak{B} \setminus \{0\}) / \sim_{\mathfrak{X},+}$. Поскольку любой ненулевой ковектор $\nu \in T_{\mathfrak{X}}^*\mathfrak{B}$ определяет единственную гиперплоскость, $\ker \nu$, то пространства $G_{n-1}^\perp(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B})$ и $(T_{\mathfrak{X}}^*\mathfrak{B} \setminus \{0\}) / \sim_{\mathfrak{X},+}$ можно отождествить. Выбирая любое скалярное произведение⁹ на $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$, можно отождествить $\text{Ann}^+(H_{\mathfrak{X}})$ с единичным нормальным вектором к $H_{\mathfrak{X}}$. Таким образом, множество $G_{n-1}^\perp(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B})$ можно снабдить гладкой структурой $(n-1)$ -мерной сферы. Обозначим

$$G_{n-1}^\perp(T\mathfrak{B}) = \coprod_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}} G_{n-1}^\perp(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}).$$

Приходим к расслоению $\pi : (G_{n-1}^\perp(T\mathfrak{B})) \rightarrow \mathfrak{B}$ и морфизму

$$p : G_{n-1}^\perp(T\mathfrak{B}) \rightarrow G_{n-1}(T\mathfrak{B}).$$

Пусть $\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B})$ — некоторая часть тела. Выберем точку $\mathfrak{X} \in \partial\mathfrak{P}$ и рассмотрим множество $\mathbf{Cu}_{\mathfrak{X};\mathfrak{B}}$ всевозможных гладких кривых $\chi : [0, \varepsilon[\rightarrow \mathfrak{B}$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих условиям:

⁹Это скалярное произведение играет техническую роль и не требует метрики на \mathfrak{B} . Если (U, φ) — карта на \mathfrak{B} , район действия которой содержит \mathfrak{X} , то на U определяется поле $G = \varphi^*\bar{G}$, где \bar{G} — риманова метрика на \mathbb{R}^n . Тогда значение $G_{\mathfrak{X}}$ поля G представляет скалярное произведение на $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$.

- (i) $\chi(0) = \mathfrak{X}$;
(ii) $\chi(]0, \varepsilon[) \subset \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{P}$.

Иными словами, все кривые из множества $\mathbf{Cu}_{\mathfrak{X}; \mathfrak{B}}$ проходят через \mathfrak{X} и лежат вне \mathfrak{P} . Каждый вектор из¹⁰ $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \setminus T_{\mathfrak{X}}\partial\mathfrak{P}$, касательный к некоторой кривой χ из $\mathbf{Cu}_{\mathfrak{X}; \mathfrak{B}}$ в точке \mathfrak{X} , объявляется внешним (по отношению к \mathfrak{P}). Если u — внешний вектор, то выберем гиперплоскость с инклинацией $h_{\mathfrak{X}} := (T_{\mathfrak{X}}\partial\mathfrak{P}, [u])$. Повторяя эту процедуру для всех $\mathfrak{X} \in \partial\mathfrak{P}$, получим совокупность $\{h_{\mathfrak{X}}\}_{\mathfrak{X} \in \partial\mathfrak{P}}$ «материальных поверхностных элементов с внешней ориентацией».

3.3. Сечение Пиолы

Мы снова предполагаем, что никакой метрики на теле \mathfrak{B} не определено. Пусть $M = \{\mathcal{X}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ — гладкое движение. Понятие гиперплоскости с инклинацией позволяет придать постулату Коши точный смысл.

Расслоение плотности взаимодействия

Рассмотрим векторное расслоение

$$\pi : \mathcal{X}_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(G_{n-1}^*(T\mathfrak{B})) \rightarrow G_{n-1}(T\mathfrak{B}),$$

слой которого есть $T_{\mathcal{X}_t(\mathfrak{X})}^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(H_{\mathfrak{X}}^*)$. «Pullback» этого расслоения посредством морфизма $p : G_{n-1}^\perp(T\mathfrak{B}) \rightarrow G_{n-1}(T\mathfrak{B})$ дает

$$\tilde{\pi} : p^* (\mathcal{X}_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(G_{n-1}^*(T\mathfrak{B}))) \rightarrow G_{n-1}^\perp(T\mathfrak{B}).$$

Следуя работе [7] мы называем полученное расслоение **расслоением плотности взаимодействия**¹¹. Все готово для математической формулировки постулата Коши.

Постулат Коши

Предположим, что справедливо следующее утверждение. Для каждого момента времени $t \in \mathbb{T}$ существует сечение

$$\tau_t^P : G_{n-1}^\perp(T\mathfrak{B}) \rightarrow p^* (\mathcal{X}_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(G_{n-1}^*(T\mathfrak{B}))),$$

¹⁰Пространство $T_{\mathfrak{X}}\partial\mathfrak{P}$ есть $(n-1)$ -мерная гиперплоскость $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$.

¹¹В работе [7] используется термин **interaction density bundle**.

называемое **сечением Пиолы**¹², такое, что для каждой части $\mathfrak{B} \in \text{Part}(\mathfrak{B})$ и соответствующего семейства $\{h_{\mathfrak{x}}\}_{\mathfrak{x} \in \partial\mathfrak{B}}$ гиперплоскостей с инклинацией в точках $\partial\mathfrak{B}$ справедливо равенство

$$\forall \mathfrak{x} \in \partial\mathfrak{B} : \tau_{\mathfrak{B};t}^{\text{mat}}(\mathfrak{x}) = \tau_t^P(h_{\mathfrak{x}}).$$

Это равенство является обобщением постулата Коши в евклидовом пространстве, согласно которому вектор плотности контактных сил зависит лишь от точки поверхности и нормали к ней.

Форма напряжений Пиолы

Нашей следующей целью является связать $\tau_{\mathfrak{B};t}^{\text{mat}}$, $t \in \mathbb{T}$, с ковекторнозначной **формой напряжений Пиолы**

$$P_t \in \text{Sec}(\varkappa_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(T^* \mathfrak{B})), \quad (16.3.3)$$

определенной на \mathfrak{B} . Для любой материальной точки $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$ выберем произвольную гиперплоскость с инклинацией $h_{\mathfrak{x}} = (H_{\mathfrak{x}}, [v])$. Отображение $\iota_{H_{\mathfrak{x}}} : H_{\mathfrak{x}} \rightarrow T_{\mathfrak{x}} \mathfrak{B}$ порождает соответствие

$$I^* : T_{\varkappa_t(\mathfrak{x})}^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(T_{\mathfrak{x}}^* \mathfrak{B}) \rightarrow T_{\varkappa_t(\mathfrak{x})}^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(H_{\mathfrak{x}}^*),$$

такое, что

$$I^*(\omega)(u_1, \dots, u_{n-1}) := \omega(\iota_{H_{\mathfrak{x}}} u_1, \dots, \iota_{H_{\mathfrak{x}}} u_{n-1}).$$

Определим элемент¹³

$$\iota_{h_{\mathfrak{x}}}^*(P_t(\mathfrak{x})) \in T_{\varkappa_t(\mathfrak{x})}^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(H_{\mathfrak{x}}^*),$$

следующим образом:

$$\iota_{h_{\mathfrak{x}}}^*(P_t(\mathfrak{x}))(u_1, \dots, u_{n-1}) := I^*(P_t(\mathfrak{x}))(u_1, \dots, u_{n-1}),$$

¹²В работе [7] сечение τ_t называлось сечением Коши. Вместе с тем, поскольку это сечение определено на теле, то термин «сечение Пиолы» представляется более предпочтительным.

¹³В работе [7] для названия этого элемента используется термин **inclined restriction** of $P_t(\mathfrak{x})$.

если упорядоченная совокупность (v, u_1, \dots, u_{n-1}) положительно ориентирована, и

$$\iota_{h_{\mathfrak{X}}}^*(P_t(\mathfrak{X}))(u_1, \dots, u_{n-1}) := -I^*(P_t(\mathfrak{X}))(u_1, \dots, u_{n-1}),$$

если (v, u_1, \dots, u_{n-1}) отрицательно ориентирована. Это определение влечет третий закон Ньютона в форме

$$\iota_{-h_{\mathfrak{X}}}^*(P_t(\mathfrak{X})) = -\iota_{h_{\mathfrak{X}}}^*(P_t(\mathfrak{X})).$$

Послойное отображение $h \mapsto \iota_h^*(P_t)$ играет роль сечения Пиолы.

Теорема Коши

Финальной стадией построений является формулировка теоремы Коши [7]. Следующая совокупность пунктов составляет обобщенный востулат Коши для системы сил¹⁴ $\{(\beta_t^{\text{mat}}, \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}})\}_{\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B}), t \in \mathbb{T}}$:

(i) Существует сечение Пиолы

$$\tau_t^P : G_{n-1}^\perp(T\mathfrak{B}) \rightarrow p^*(\varkappa_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(G_{n-1}^*(T\mathfrak{B}))),$$

такое что для любой части $\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B})$,

$$\tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}}(\mathfrak{X}) = \tau_t^P(h_{\mathfrak{X}}),$$

где $h_{\mathfrak{X}}$ — гиперплоскость с «внешней» инклинацией в точке $\mathfrak{X} \in \partial\mathfrak{P}$.

(ii) Сечение Пиолы τ_t^P непрерывно.

(iii) Существует ковекторнозначная форма $\varsigma_t \in \text{Sec}(\varkappa_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(T^*\mathfrak{B}))$, такая, что

$$|F_t^{\text{mat}}(V)| = \left| \int_{\mathfrak{P}} V_{M;t} \lrcorner \beta_t^{\text{mat}} + \int_{\partial\mathfrak{P}} V_{M;t} \lrcorner \tau_{\mathfrak{P};t}^{\text{mat}} \right| \leq \int_{\mathfrak{P}} V_{M;t} \lrcorner \varsigma_t,$$

для любой части \mathfrak{P} .

¹⁴В работе [7] к этой совокупности добавлено требование независимости плотности объемных сил от части тела. Но мы это уже постулировали ранее.

Тогда существует единственная ковекторнозначная форма P_t (16.3.3), такая, что

$$\tau_{\mathfrak{B};t}^{\text{mat}} = \iota_h^*(P_t),$$

или, поточечно,

$$\forall \mathfrak{x} \in \partial\mathfrak{B} : \tau_{\mathfrak{B};t}^{\text{mat}}(\mathfrak{x}) = \iota_{h_{\mathfrak{x}}}^*(P_t(\mathfrak{x})).$$

Это обобщение соотношения $\tau_{\mathfrak{B};t}^{\text{mat}} = P_t[N]$, выполняющегося в классической механике.

3.4. Сечение Коши

Для определения напряжений Коши необходимо рассматривать формы тела \mathfrak{B} . В отличие от напряжений Пиолы, можно использовать дополнительную информацию, предоставленную римановой метрикой g физического пространства \mathcal{P} [7]. Вместе с тем, в работе мы используем подход, связанный с гиперплоскостями с инклинацией, как для материального, так и для пространственного описаний.

Гиперплоскости с инклинацией для форм

Пусть $M = \{\mathfrak{x}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ — гладкое движение. Зафиксируем $t \in \mathbb{T}$ и рассмотрим форму $\mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}$ тела \mathfrak{B} . Если $x \in \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}$ то совокупность всех $(n-1)$ -мерных векторных подпространств $H_x \subset T_x \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}$ (гиперплоскостей в точке x) образует многообразие Грассмана $G_{n-1}(T_x \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t})$. Таким образом, тотальное пространство расслоения Грассмана имеет вид $G_{n-1}(\mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}) = \bigsqcup_{x \in \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}} G_{n-1}(T_x \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t})$.

Поскольку физическое пространство \mathcal{P} снабжено метрикой g , то эту метрику можно отобразить на $\mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}$: $g^{(\mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t})} = \iota_{\mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}}^* g$. Для точки $x \in \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}$ и любой гиперплоскости $H_x \subset T_x \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t}$ можно записать прямую сумму $T_x \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t} = H_x \oplus H_x^\perp$, в которой H_x^\perp — одномерное векторное пространство,

$$H_x^\perp := \{u \in T_x \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t} \mid \forall v \in H_x : g^{(\mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t})}(v, u) = 0\}.$$

Выберем произвольный вектор $n \in H_x^\perp$. По построению, ковектор $n^\flat := g_x^{(\mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t})}(n, \cdot)$ является аннулятором H_x ; $\ker n^\flat = H_x$, что влечет $n^\flat \in \text{Ann}(H_x)$. Следовательно, ковектор n^\flat может быть использован для проверки векторов $u_1, u_2 \in T_x \mathcal{S}_{\mathfrak{x}_t} \setminus H_x$ на свойство «быть по одну сторону

от» $H_x (n^b(u_1)n^b(u_2) > 0)$ или на свойство «быть по разные стороны от» $H_x (n^b(u_1)n^b(u_2) < 0)$. Отношение эквивалентности \sim_{H_x} на $T_x \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t} \setminus H_x$ в этом случае может быть введено следующим частным образом:

$$\forall u_1, u_2 \in T_x \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t} \setminus H_x : (u_1 \sim_{H_x} u_2) \Leftrightarrow (n^b(u_1)n^b(u_2) > 0).$$

Фактормножество состоит из двух элементов — двух *сторон* H_x :

$$(T_x \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t} \setminus H_x) / \sim_{H_x} = \{[u], [-u]\}.$$

Тогда под **гиперплоскостью с инклинацией** будем понимать любую из пар $h_x = (H_x, [u])$ и $-h_x = (H_x, [-u])$. Приходим к совокупности $G_{n-1}^\perp(T_x \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t})$ всех гиперплоскостей с инклинацией в точке $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}$ и к расслоению

$$G_{n-1}^\perp(T \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}) = \coprod_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}} G_{n-1}^\perp(T_x \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}).$$

Расслоение плотности взаимодействия и инклинация для края

Определим расслоение

$$\pi : \iota_{\mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}}^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(G_{n-1}^*(T \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t})) \rightarrow G_{n-1}(T \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}),$$

слоем которого является $T_x^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(H_x^*)$ и определим морфизм

$$p : G_{n-1}^\perp(T \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}) \rightarrow G_{n-1}(T \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}),$$

который послойно отображает $(H_x, [u])$ в H_x . Тогда приходим к расслоению плотности взаимодействия

$$\tilde{\pi} : p^* \left(\iota_{\mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}}^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(G_{n-1}^*(T \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t})) \right) \rightarrow G_{n-1}^\perp(T \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}).$$

Фиксируем момент времени $t \in \mathbb{T}$ и часть $\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B})$. Выберем точку $x \in \partial \mathcal{M}_t(\mathfrak{P})$. Как и в случае тела, рассмотрим множество $\mathbf{C}u_x; \mathcal{M}_t(\mathfrak{P})$ всех гладких кривых $\chi : [0, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t}$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих условиям:

- (i) $\chi(0) = x$;
- (ii) $\chi(]0, \varepsilon[) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}_t} \setminus \mathcal{M}_t(\mathfrak{P})$.

Каждый вектор из $T_x \mathcal{S}_{\mathcal{K}_t} \setminus T_x \partial \mathcal{K}_t(\mathfrak{P})$, касательный к некоторой кривой χ из $\mathbf{C}u_{x; \mathcal{K}_t(\mathfrak{P})}$ в x , может быть объявлен внешним (относительно $\mathcal{K}_t(\mathfrak{P})$). Если u — внешний вектор, то выберем гиперплоскость с инклинацией $h_{t,x} := (T_x \partial \mathcal{K}_t(\mathfrak{P}), [u])$. Повторяя эту процедуру для всех $x \in \partial \mathcal{K}_t(\mathfrak{P})$, приходим к семейству $\{h_{t,x}\}_{x \in \partial \mathcal{K}_t(\mathfrak{P})}$ «пространственных поверхностных элементов с внешней ориентацией».

Постулат Коши

Постулат Коши для случая форм заключается в следующем. Для каждого момента времени $t \in \mathbb{T}$ существует сечение

$$\tau_t^C : G_{n-1}^\perp(T\mathcal{S}_{\mathcal{K}_t}) \rightarrow p^* \left(\iota_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_t}}^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(G_{n-1}^*(T\mathcal{S}_{\mathcal{K}_t})) \right),$$

называемое *сечением Коши*, такое, что для каждой части $\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B})$ и соответствующего семейства $\{h_{t,x}\}_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}_t}}$ гиперплоскостей с инклинацией, построенного для края $\partial \mathcal{K}_t(\mathfrak{P})$ справедливо равенство

$$\forall x \in \partial \mathcal{K}_t(\mathfrak{P}) : \tau_{\mathfrak{P}; t}^{\text{spat}}(x) = \tau_t^C(h_{t,x}).$$

Форма напряжений Коши

Как и в случае тела, можно связать $\tau_{\mathfrak{P}; t}^{\text{spat}}$, $t \in \mathbb{T}$, с ковекторнозначной **формой напряжений Коши**

$$T_t \in \text{Sec}(\iota_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_t}}^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(T^* \mathcal{S}_{\mathcal{K}_t})), \quad (16.3.4)$$

определенной на $\mathcal{S}_{\mathcal{K}_t}$. В этом случае утверждением теоремы Коши будет равенство

$$\tau_{\mathfrak{P}; t}^{\text{spat}} = \iota_{h_t}^*(T_t),$$

или, поточечно,

$$\forall x \in \partial \mathcal{K}_t(\mathfrak{P}) : \tau_{\mathfrak{P}; t}^{\text{spat}}(x) = \iota_{h_{t,x}}^*(T_t(x))$$

Это равенство является обобщением соотношения $\tau_{\mathfrak{P}; t}^{\text{spat}} = \mathbf{T}_t[n]$ классической механики.

3.5. Выражения для мощности в терминах напряжений Коши и Пиола

Пусть, как и прежде, $M = \{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ — гладкое движение, а $\{(\beta_t^{\text{mat}}, \tau_{\mathfrak{P}; t}^{\text{mat}})\}_{\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B}), t \in \mathbb{T}}$, $\{(\beta_t^{\text{spat}}, \tau_{\mathfrak{P}; t}^{\text{spat}})\}_{\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B}), t \in \mathbb{T}}$ — системы сил. Форма напряжений Пиола (16.3.3) определена на теле \mathfrak{B} , а форма напряжений Коши (16.3.4) — на формах $\mathcal{S}_{\varkappa_t}$, $t \in \mathbb{T}$.

Если $\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B})$, то выражения для мощности (16.3.1) и (16.3.2) в материальном и пространственном описаниях принимают вид

$$F_t^{\text{mat}}(V) = \int_{\mathfrak{P}} V_{M; t} \lrcorner \beta_t^{\text{mat}} + \int_{\partial \mathfrak{P}} V_{M; t} \lrcorner \iota_h^*(P_t),$$

$$F_t^{\text{spat}}(v) = \int_{\varkappa_t(\mathfrak{P})} v_t \lrcorner \beta_t^{\text{spat}} + \int_{\partial \varkappa_t(\mathfrak{P})} v_t \lrcorner \iota_{h_t}^*(T_t).$$

В дальнейшем будем опускать символы ι_h^* и $\iota_{h_t}^*$ и писать

$$F_t^{\text{mat}}(V) = \int_{\mathfrak{P}} V_{M; t} \lrcorner \beta_t^{\text{mat}} + \int_{\partial \mathfrak{P}} V_{M; t} \lrcorner P_t,$$

$$F_t^{\text{spat}}(v) = \int_{\varkappa_t(\mathfrak{P})} v_t \lrcorner \beta_t^{\text{spat}} + \int_{\partial \varkappa_t(\mathfrak{P})} v_t \lrcorner T_t. \quad (16.3.5)$$

3.6. Переход от пространственного описания к материальному

Формы напряжений Пиола и Коши определены независимо и возникают в выражениях (16.3.5) для F_t^{mat} и F_t^{spat} . Вместе с тем, эти выражения являются представлениями одной и той же результирующей силы в материальном и пространственном описаниях.

Преобразование Пиолы

Для того, чтобы получить законы преобразования подынтегральных выражений в (16.3.5), соответствующих интегралам по краю, рассмотрим гладкое движение $M = \{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ и системы сил $\{\tau_{\mathfrak{P}; t}^{\text{mat}}\}_{\mathfrak{P} \in \text{Part}(\mathfrak{B}), t \in \mathbb{T}}$,

$\{\tau_{\mathfrak{B};t}^{\text{spat}}\}_{\mathfrak{B} \in \text{Part}(\mathfrak{B}), t \in \mathbb{T}}$. При этом, объемные силы отсутствуют. Для произвольного момента времени $t \in \mathbb{T}$ потребуем, чтобы

$$\int_{\partial \mathfrak{B}} V_{M;t} \lrcorner P_t = \int_{\partial \mathcal{X}_t(\mathfrak{B})} v_t \lrcorner T_t.$$

Напомним, что $v_t = V_{M;t} \circ \widehat{\mathcal{X}}_t^{-1}$ и предположим, что $\widehat{\mathcal{X}}_t$ является диффеоморфизмом, сохраняющим ориентацию¹⁵ для каждого $t \in \mathbb{T}$. Тогда теорема о замене переменных дает равенство

$$\int_{\partial \mathfrak{B}} V_{M;t} \lrcorner P_t = \int_{\partial \mathfrak{B}} \widehat{\mathcal{X}}_t^*(v_t \lrcorner T_t).$$

Пусть $(e_i)_{i=1}^m \subset \text{Vec}(\mathcal{P})$ — репер на \mathcal{P} . Тогда имеем разложения

$$v_t = v_t^i e_i, \quad T_t = T_{i\alpha}^{\cdot\cdot} e^i \otimes \omega_t^\alpha,$$

в которых $\omega_t^\alpha \in \Omega^{n-1}(T^* \mathcal{S}_{\mathcal{X}_t})$. В этой связи, $v_t \lrcorner T_t = v_t^i T_{i\alpha}^{\cdot\cdot} \omega_t^\alpha$ и

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{X}}_t^*(v_t \lrcorner T_t) &= (v_t^i \circ \widehat{\mathcal{X}}_t)(T_{i\alpha}^{\cdot\cdot} \circ \widehat{\mathcal{X}}_t) \widehat{\mathcal{X}}_t^* \omega_t^\alpha = \\ &= (v_t^i \circ \widehat{\mathcal{X}}_t)(e_i \circ \widehat{\mathcal{X}}_t) \lrcorner (T_{j\alpha}^{\cdot\cdot} \circ \widehat{\mathcal{X}}_t)(e^j \circ \widehat{\mathcal{X}}_t) \otimes \widehat{\mathcal{X}}_t^* \omega_t^\alpha. \end{aligned}$$

Определим отображение, которое осуществляет «pullback» «геометрической части» ковекторнозначной формы:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{X}}_t^{*2} : \text{Sec}(\iota_{\mathcal{S}_{\mathcal{X}_t}}^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(T^* \mathcal{S}_{\mathcal{X}_t})) &\rightarrow \text{Sec}(\mathcal{X}_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^{n-1}(T^* \mathfrak{B})), \\ \widehat{\mathcal{X}}_t^{*2}(\vartheta \otimes \omega) &:= (\vartheta \circ \widehat{\mathcal{X}}_t) \otimes \widehat{\mathcal{X}}_t^* \omega. \end{aligned} \tag{16.3.6}$$

Будем называть отображение $\widehat{\mathcal{X}}_t^{*2}$ частичным «pullback»-отображением. Здесь $\vartheta \circ \widehat{\mathcal{X}}_t$ — композиция диффеоморфизма $\widehat{\mathcal{X}}_t$ и сечения ϑ кокасательного расслоения $\iota_{\mathcal{S}_{\mathcal{X}_t}}^* T^* \mathcal{P}$. Используя операцию (16.3.6) и равенство $V_{M;t} = (v_t^i \circ \widehat{\mathcal{X}}_t)(e_i \circ \widehat{\mathcal{X}}_t)$, приходим к соотношению

$$\widehat{\mathcal{X}}_t^*(v_t \lrcorner T_t) = V_{M;t} \lrcorner \widehat{\mathcal{X}}_t^{*2}(T_t).$$

¹⁵Диффеоморфизм называется сохраняющим ориентацию, если его касательное отображение переводит ориентированные базисы области определения в ориентированные базисы области прибытия [5]. Таким образом, движение M предполагается не только гладким, но еще и сохраняющим ориентацию. Это требование к M появляется здесь впервые. Отметим, что в классическом случае требование, чтобы деформация γ сохраняла ориентацию сводится к следующему условию на ее градиент \mathbf{F} : $\det \mathbf{F} > 0$.

Наконец,

$$\int_{\mathfrak{B}} V_{M;t} \lrcorner P_t = \int_{\mathfrak{B}} V_{M;t} \lrcorner \widehat{\varkappa}_t^{*2}(T_t).$$

Поскольку \mathfrak{B} и $V_{M;t}$ могут быть произвольными, то заключаем отсюда, что

$$P_t = \widehat{\varkappa}_t^{*2} T_t. \quad (16.3.7)$$

Полученное равенство соответствует преобразованию Пиолы.

Преобразование объемных сил

Рассмотрим гладкое движение $M = \{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ и системы сил $\{\beta_t^{\text{mat}}\}_{t \in \mathbb{T}}$, $\{\beta_t^{\text{spat}}\}_{t \in \mathbb{T}}$. Теперь уже поверхностные силы отсутствуют. Для каждого $t \in \mathbb{T}$ потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{\mathfrak{B}} V_{M;t} \lrcorner \beta_t^{\text{mat}} = \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B})} v_t \lrcorner \beta_t^{\text{spat}}.$$

Снова предполагая, что диффеоморфизм $\widehat{\varkappa}_t$ сохраняет ориентацию для каждого $t \in \mathbb{T}$ и используя теорему о замене переменных, приходим к равенству

$$\int_{\mathfrak{B}} V_{M;t} \lrcorner \beta_t^{\text{mat}} = \int_{\mathfrak{B}} \widehat{\varkappa}_t^*(v_t \lrcorner \beta_t^{\text{spat}}).$$

Будем использовать рассуждения, аналогичные тем, что привели к преобразованию Пиолы. Пусть $(e_i)_{i=1}^m \subset \text{Vec}(\mathcal{P})$ — репер на \mathcal{P} . Тогда имеем разложения:

$$v_t = v_t^i e_i, \quad \beta_t^{\text{spat}} = e^i \otimes \eta_{t;i},$$

где $\eta_{t;i} \in \Omega^n(T^* \mathcal{S}_{\varkappa_t})$. Отсюда следует, что

$$\widehat{\varkappa}_t^*(v_t \lrcorner \beta_t^{\text{spat}}) = (v_t^i \circ \widehat{\varkappa}_t)(e_i \circ \widehat{\varkappa}_t) \lrcorner (e^j \circ \widehat{\varkappa}_t) \otimes \widehat{\varkappa}_t^* \eta_{t;j}.$$

Определим операцию, которая осуществляет «pullback» «геометрической части»:

$$\begin{aligned} \widehat{\varkappa}_t^{*2} : \text{Sec}(\iota_{\mathcal{S}_{\varkappa_t}}^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^n(T^* \mathcal{S}_{\varkappa_t})) &\rightarrow \text{Sec}(\varkappa_t^* T^* \mathcal{P} \otimes \Lambda^n(T^* \mathfrak{B})), \\ \widehat{\varkappa}_t^{*2}(\vartheta \otimes \omega) &:= (\vartheta \circ \widehat{\varkappa}_t) \otimes \widehat{\varkappa}_t^* \omega. \end{aligned} \quad (16.3.8)$$

Использование отображения (16.3.8) дает

$$\widehat{\mathfrak{X}}_t^*(v_t \lrcorner \beta_t^{\text{spat}}) = V_{M;t} \lrcorner \widehat{\mathfrak{X}}_t^{*2}(\beta_t^{\text{spat}}),$$

и мы получаем

$$\int_{\mathfrak{F}} V_{M;t} \lrcorner \beta_t^{\text{mat}} = \int_{\mathfrak{F}} V_{M;t} \lrcorner \widehat{\mathfrak{X}}_t^{*2}(\beta_t^{\text{spat}}).$$

Поскольку \mathfrak{F} и $V_{M;t}$ могут быть выбраны произвольно, получаем окончательный результат:

$$\beta_t^{\text{mat}} = \widehat{\mathfrak{X}}_t^{*2} \beta_t^{\text{spat}}.$$

4. Материальное единообразие и структурная неоднородность

4.1. Отклик

В рамках механики континуума предполагается, что физическое состояние тела (распределение упругой энергии, напряжений и т.д.) зависит только от формы. Если форма меняется, то и физическое состояние тоже меняется. Для количественного описания физического состояния тела \mathfrak{B} необходимо указать множество R упорядоченных наборов математических объектов которые формализуют физические величины, определяемые прибором (в частности, R может состоять из координатнозначных форм, представляющих напряжения). Следуя работе [2] назовем элементы множества R **дескрипторами отклика** (**response descriptors**). В общем случае отклик тела \mathfrak{B} в точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ может зависеть от конфигурации, то есть,

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P}) \rightarrow R, \quad \mathfrak{R}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) = r, \quad r \in R. \quad (16.4.1)$$

Такой вид зависимости является слишком общим для целей настоящей работы и далее мы рассматриваем частный случай, соответствующий разложению по формуле Тейлора первого порядка.

4.2. Локальные конфигурации

Рассмотрим идею локализации. Предположим, что если наблюдателя поместить в материальную точку \mathfrak{X} , то он сможет различать конфигурации лишь в пределах некоторой окрестности этой точки. Ограничимся **инфинитезимальной локализацией первого порядка**: конфигурации, имеющие одинаковые значения в точке \mathfrak{X} и одинаковые линейные приближения, неразличимы для наблюдателя.

Выберем локальные координаты на теле \mathfrak{B} и физическом пространстве \mathcal{P} . Тогда для координатных представлений $\tilde{\varkappa}_1, \tilde{\varkappa}_2$ конфигураций \varkappa_1, \varkappa_2 справедливы следующие разложения по формуле Тейлора:

$$\tilde{\varkappa}_s^i(\tilde{\mathfrak{X}} + h) = \tilde{\varkappa}_s^i(\tilde{\mathfrak{X}}) + \left. \frac{\partial \tilde{\varkappa}_s^i}{\partial \tilde{\mathfrak{X}}^j} \right|_{\tilde{\mathfrak{X}}} h^j + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \tilde{\varkappa}_s^i}{\partial \tilde{\mathfrak{X}}^j \partial \tilde{\mathfrak{X}}^k} \right|_{\tilde{\mathfrak{X}}} h^j h^k + \dots,$$

для $i \in \{1, \dots, m\}$ и $s = 1, 2$. Здесь $\tilde{\mathfrak{X}} \in \mathbb{R}^n$ является набором координат \mathfrak{X} , а $h \in \mathbb{R}^n$ — приращением. Тогда, согласно принципу инфинитезимальной локализации, конфигурации \varkappa_1, \varkappa_2 неразличимы для наблюдателя в том и только в том случае, когда

$$\tilde{\varkappa}_1^i(\tilde{\mathfrak{X}}) = \tilde{\varkappa}_2^i(\tilde{\mathfrak{X}}), \quad \left. \frac{\partial \tilde{\varkappa}_1^i}{\partial \tilde{\mathfrak{X}}^j} \right|_{\tilde{\mathfrak{X}}} = \left. \frac{\partial \tilde{\varkappa}_2^i}{\partial \tilde{\mathfrak{X}}^j} \right|_{\tilde{\mathfrak{X}}}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Заметим, что если конфигурации неразличимы по отношению к одной паре систем локальных координат на \mathfrak{B} и \mathcal{P} , то они неразличимы и в другой, что следует из правила цепного дифференцирования. Отношение $\sim_{\mathfrak{X}}$ «быть неразличимым в точке \mathfrak{X} » является отношением эквивалентности на $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$ и может быть выражено в бескоординатной форме следующим образом [2, 9, 10]:

$$(\varkappa_1 \sim_{\mathfrak{X}} \varkappa_2) \Leftrightarrow (\varkappa_1(\mathfrak{X}) = \varkappa_2(\mathfrak{X})) \wedge (T_{\mathfrak{X}}\varkappa_1 = T_{\mathfrak{X}}\varkappa_2). \quad (16.4.2)$$

Следуя работе [2], мы называем класс эквивалентности $K_{\mathfrak{X}} = [\varkappa]_{\mathfrak{X}}$ **локальной конфигурацией в точке \mathfrak{X}** . По определению, локальная конфигурация состоит из конфигураций, неразличимых наблюдателем, помещенным в точку \mathfrak{X} . Обозначим множество всех локальных конфигураций (фактормножество по отношению $\sim_{\mathfrak{X}}$) через $\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$.

4.3. Локальная конфигурация как линейное отображение

В механике континуума сравниваются длины и направления отсчетных и актуальных форм инфинитезимальных материальных волокон, которые формализуются как касательные векторы из пространства $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$. В этой связи, касательное пространство $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$ к телу \mathfrak{B} может быть интерпретировано как инфинитезимальная окрестность \mathfrak{X} . Локальная конфигурация $K_{\mathfrak{X}}$ порождает линейное отображение, заданное на $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$, следующим образом:

$$K_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \rightarrow T_{\mathfrak{X}(\mathfrak{x})}\mathcal{P}, \quad K_{\mathfrak{X}}u := T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{K}(u),$$

для $\mathfrak{K} \in K_{\mathfrak{X}}$. Согласно определению отношения эквивалентности (16.4.2), такое линейное отображение определено корректно, то есть, не зависит от представителя \mathfrak{K} .

Поскольку локальная конфигурация является линейным отображением, ее можно представить в виде диадного разложения. Пусть $\mathfrak{K} \in K_{\mathfrak{X}}$ является некоторой конфигурацией. Выберем гладкие атласы $A_{\mathfrak{B}} = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ и $A_{\mathcal{P}} = \{(V_{\beta}, \psi_{\beta})\}_{\beta \in \mathbb{J}}$ на \mathfrak{B} и \mathcal{P} и пусть $\alpha \in \mathbb{I}$ такой индекс, что $\mathfrak{X} \in U_{\alpha}$, а $\beta \in \mathbb{J}$ — индекс, для которого¹⁶ $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \in V_{\beta}$. Тогда отображение

$$\tilde{\mathfrak{K}} = \psi_{\beta} \circ \mathfrak{K} \circ \varphi_{\alpha}^{-1} : (\mathfrak{X}^j)_{j=1}^n \mapsto (x^i)_{i=1}^m$$

является координатным представлением \mathfrak{K} в паре карт $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ и $(V_{\beta}, \psi_{\beta})$. Для локальной конфигурации имеем разложение

$$K_{\mathfrak{X}} = K_{\cdot j}^{i \cdot} \partial_{x^i} |_{\mathfrak{K}(\mathfrak{X})} \otimes d\mathfrak{X}^j |_{\mathfrak{X}}, \quad K_{\cdot j}^{i \cdot} = \left. \frac{\partial x^i}{\partial \mathfrak{X}^j} \right|_{\varphi_{\alpha}(\mathfrak{X})}.$$

В частности, если физическое пространство евклидово ($\mathcal{P} = \mathcal{E}$) и $(i_k)_{k=1}^m$ — ортонормированный базис трансляционного пространства \mathcal{V} , то отображение $K_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{V}$ может быть представлено в виде

$$K_{\mathfrak{X}} = K_{\cdot l}^{k \cdot} i_k \otimes d\mathfrak{X}^l |_{\mathfrak{X}}, \quad K_{\cdot l}^{k \cdot} = \left. \frac{\partial x^k}{\partial \mathfrak{X}^l} \right|_{\varphi_{\alpha}(\mathfrak{X})}.$$

Здесь $\tilde{\mathfrak{K}} = \mathcal{D}_{(\sigma, (i_k)_{k=1}^m)} \circ \mathfrak{K} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$.

¹⁶Заметим, что индекс β не зависит от представителя \mathfrak{K} .

4.4. Простое тело

Предположим, что отклик тела \mathfrak{B} в точке \mathfrak{X} зависит только от локальных конфигураций в \mathfrak{X} . То есть, вместо (16.4.1) имеем

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{C}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{B}; \mathcal{P}) \rightarrow R, \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}(K_{\mathfrak{X}}) = r. \quad (16.4.3)$$

В этом случае материал в точке \mathfrak{X} называется **простым** [2]. Дадим другую интерпретацию (16.4.3). Предположим, что $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}(K_{\mathfrak{X}}) = r$. Если выбрать конфигурацию $\kappa_1 \in K_{\mathfrak{X}}$ и приложить измерительный прибор к точке $\kappa_1(\mathfrak{X})$, то прибор покажет значение r . Теперь выберем другую конфигурацию $\kappa_2 \in K_{\mathfrak{X}}$, тогда прибор покажет такое же значение r в точке $\kappa_2(\mathfrak{X})$. Таким образом, несмотря на то, что формы \mathcal{S}_{κ_1} и \mathcal{S}_{κ_2} в общем случае различны, их физические состояния в инфинитезимальной окрестности точки $\kappa_1(\mathfrak{X}) = \kappa_2(\mathfrak{X})$ являются неразличимыми.

Если для всех $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ материал в точке \mathfrak{X} прост, то \mathfrak{B} называется **простым телом** [2]. В настоящей работе рассматриваются только простые тела.

4.5. Материальное единообразие

Пусть \mathfrak{B} — простое тело. Его материал в каждой точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ характеризуется функционалом отклика $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$. Дадим математическую формализацию высказывания «точки \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} состоят из одного и того же материала». Отметим, что при сравнении откликов в точках \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} нужно исходить из одной локальной конфигурации, например, из $K_{\mathfrak{X}}$, поскольку, образно говоря, в испытательной машине точки \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} должны подвергаться одной и той же деформации. Вместе с тем, непосредственно подставить $K_{\mathfrak{X}}$ в аргумент $\mathcal{R}_{\mathfrak{Y}}$ нельзя: необходимо предварительно откалибровать $K_{\mathfrak{X}}$ так, чтобы получилась локальная конфигурация в точке \mathfrak{Y} . Эта калибровка осуществляется за счет материального изоморфизма.

Рассмотрим множество $\text{Diff}(\mathfrak{B})$ всех диффеоморфизмов $\Phi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$. Введем на $\text{Diff}(\mathfrak{B})$ отношение эквивалентности $\sim_{\mathfrak{X}} : \Phi_1 \sim_{\mathfrak{X}} \Phi_2$ тогда и только тогда, когда

$$(\Phi_1(\mathfrak{X}) = \Phi_2(\mathfrak{X})) \wedge (T_{\mathfrak{X}}\Phi_1 = T_{\mathfrak{X}}\Phi_2). \quad (16.4.4)$$

Для конфигурации $\kappa \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$ и диффеоморфизма $\Phi \in \text{Diff}(\mathfrak{B})$ опре-

делим операцию \circ над их классами эквивалентности:

$$[\varkappa]_{\Phi(x)} \circ [\Phi]_x := [\varkappa \circ \Phi]_x.$$

Поскольку $\varkappa \circ \Phi$ — гладкое вложение, то $[\varkappa \circ \Phi]_x$, также как и $[\varkappa]_{\Phi(x)}$, является локальной конфигурацией, то есть, классом эквивалентности по отношению (16.4.2). Множество $[\Phi]_x$ является классом эквивалентности по отношению (16.4.4).

Дадим основное определение настоящего пункта. Материальные точки \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} материально изоморфны [2, 9], если существует диффеоморфизм $\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} \in \text{Diff}(\mathfrak{B})$, такой, что $\mathfrak{X} = \Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}(\mathfrak{Y})$, и для любого¹⁷ $K_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$,

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}(K_{\mathfrak{X}}) = \mathcal{R}_{\mathfrak{Y}}(K_{\mathfrak{X}} \circ [\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}]_{\mathfrak{Y}}).$$

Класс эквивалентности $[\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}]_{\mathfrak{Y}}$ называется **материальным изоморфизмом из $T_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}$ в $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$** . Будем называть отображение $\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ **материальным автоморфизмом из \mathfrak{Y} в \mathfrak{X}** . Справедливы следующие свойства [10]:

- а) $\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{X}} = \text{Id}_{\mathfrak{B}}$ является материальным автоморфизмом из \mathfrak{X} в \mathfrak{X} .
- б) Если $\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ — материальный автоморфизм из \mathfrak{Y} в \mathfrak{X} , а $\Phi_{\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}$ — материальный автоморфизм из \mathfrak{Z} в \mathfrak{Y} то $\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Z}} \circ \Phi_{\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}$ — материальный автоморфизм из \mathfrak{Z} в \mathfrak{X} .
- с) Если $\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ — материальный автоморфизм из \mathfrak{Y} в \mathfrak{X} , то $\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}^{-1}$ — материальный автоморфизм из \mathfrak{X} в \mathfrak{Y} .

Замечание 16.4. Подобно локальной конфигурации, материальный изоморфизм можно отождествить с некоторым линейным отображением. Действительно, если $\Phi \in [\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}]_{\mathfrak{Y}}$, то $[\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}]_{\mathfrak{Y}}(u) := T_{\mathfrak{Y}}\Phi(u)$ для $u \in T_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}$. Полученное линейное отображение является изоморфизмом векторных пространств $T_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}$ и $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$, что соответствует определению материального изоморфизма, которое дал Noll в [2].

Предположим, что все точки тела \mathfrak{B} попарно материально изоморфны. Такое тело будем называть *материально единообразным*. С этого момента будем рассматривать только материально единообразные простые

¹⁷Заметим, что композиция $K_{\mathfrak{X}} \circ [\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}]_{\mathfrak{Y}}$ является локальной конфигурацией в точке \mathfrak{Y} .

тела. С физической точки зрения, материально единообразное простое тело состоит из инфинитезимальных представительных объемов со следующим свойством. Если каждый из этих объемов отделить от других и поместить в испытательную машину, то он даст один и тот же отклик на одну и ту же деформацию.

Предположим, что фиксирована точка $\mathfrak{X}_0 \in \mathfrak{B}$ и выбраны некоторая локальная конфигурация $K_{\mathfrak{X}_0}^R$ и семейство $\{\Phi_{\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}}\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ материальных автоморфизмов. Для точек $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}_0$, обозначим $K_{\mathfrak{X}}^R := K_{\mathfrak{X}_0}^R \circ [\Phi_{\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}}]_{\mathfrak{X}}$. Таким образом, получено семейство $\text{Ref}_{\mathfrak{B}} = \{K_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ локальных конфигураций, каждая из которых дает один и тот же отклик:

$$\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{B} : \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}(K_{\mathfrak{X}}^R) = \mathcal{R}_{\mathfrak{X}_0}(K_{\mathfrak{X}_0}^R).$$

Будем называть семейство $\text{Ref}_{\mathfrak{B}}$ **единообразной отсчетной** (uniform reference, [2]).

Предположим, что выбрана некоторая единообразная отсчетная $\text{Ref}_{\mathfrak{B}} = \{K_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$. Выбирая для каждой точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ представитель $\varkappa_{\mathfrak{X}}^R \in K_{\mathfrak{X}}^R$, приходим к семейству $\bar{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}} = \{\varkappa_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ конфигураций. Ему можно дать следующую интерпретацию. Семейство $\{\mathcal{S}_{\varkappa_{\mathfrak{X}}^R}\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ форм является наблюдаемым в физическом пространстве. Разобьем каждый элемент семейства на элементарные объемы. Те из объемов, которые соответствуют точкам $\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{X})$, дают одинаковый отклик. Вместе с тем, если фиксировать точку \mathfrak{X} и рассмотреть элементарные объемы в точках $\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{Y})$, то их отклик, в общем случае, не совпадает с откликом в точке \mathfrak{X} . Эти рассуждения проиллюстрированы на Рис. 16.2.

4.6. Структурная неоднородность

Пусть $\text{Ref}_{\mathfrak{B}} = \{K_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ — единообразная отсчетная. Если существует конфигурация $\varkappa_R \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$ такая, что $\varkappa_R \in K_{\mathfrak{X}}^R$ для любого $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, то каждый элементарный объем формы $\mathcal{S}_{\varkappa_R}$ обладает одним и тем же откликом¹⁸. Образно говоря, если приложить измерительный прибор к каждой точке $\mathcal{S}_{\varkappa_R}$, то на шкале будет показано одно и то же значение. В этом случае тело \mathfrak{B} будем называть *структурно однородным*. Если такой конфигурации не существует, то тело называется *структурно неод-*

¹⁸То есть, с точки зрения отклика, элементарные объемы не различимы между собой.

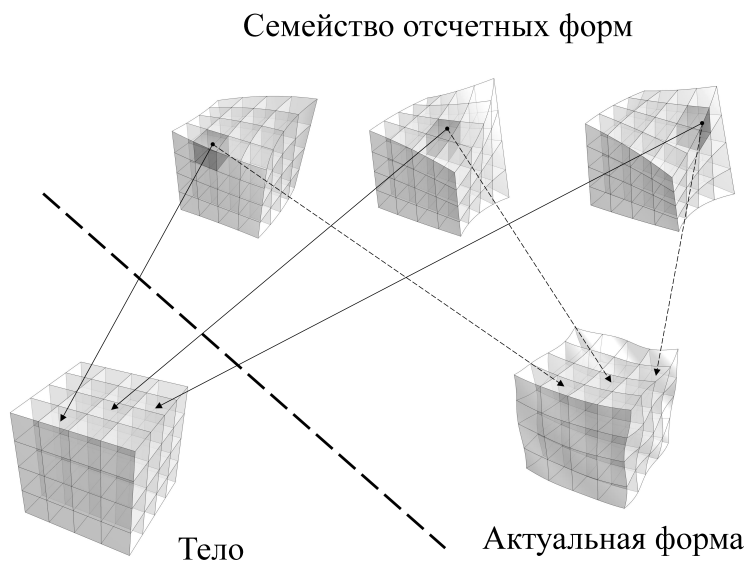


Рис. 16.2. Материально единообразное тело

нородным. Рис. 16.3 и 16.4 иллюстрируют различие между однородными и неоднородными телами. Кубы представляют единообразные формы.

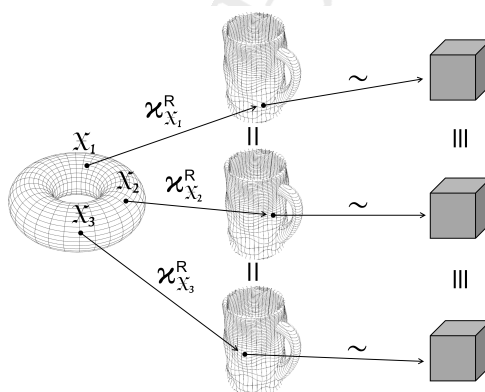


Рис. 16.3. Структурно однородное тело

5. Материальные связности

Геометрическая идея заключается в построении над структурно неоднородным телом \mathfrak{B} структуры $(\mathfrak{B}, G, \nabla)$ пространства аффинной связности с метрикой, рассматриваемого как **глобальная** единообразная отсчетная форма с **материальной метрикой** G и **материальной связностью** ∇ .

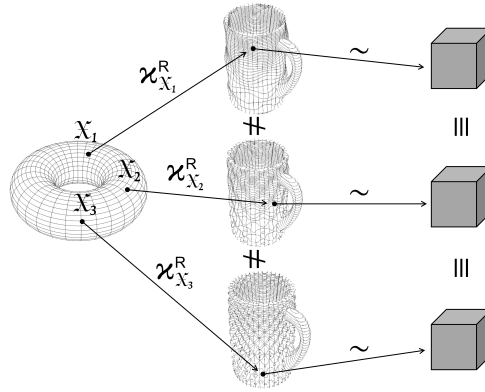


Рис. 16.4. Структурно неоднородное тело

5.1. Гладкая единообразная отсчетная

Единообразную отсчетную $\text{Ref}_{\mathfrak{B}} = \{K_{\mathfrak{x}}^R\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}}$ можно эквивалентным образом представить в виде поля $K^R : \mathfrak{X} \mapsto K_{\mathfrak{x}}^R$ локальных конфигураций, то есть линейных отображений. В дальнейших рассуждениях предполагается, что это поле (которое также будет называться единообразной отсчетной) обладает свойством гладкости. Мы ставим цель придать этому свойству точный смысл.

Построим специальное векторное расслоение. Обозначим

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{B}) = \coprod_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}} \mathbb{R}^m \otimes T_{\mathfrak{x}}^* \mathfrak{B},$$

и определим отображение $\pi : \mathfrak{E}(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}$ следующим образом: $\pi(\mathfrak{X}, \nu) = \mathfrak{x}$. Тогда упорядоченная тройка $(\mathfrak{E}(\mathfrak{B}), \mathfrak{B}, \pi)$ будет векторным расслоением с тотальным пространством $\mathfrak{E}(\mathfrak{B})$, базой \mathfrak{B} и проекцией π .

Выберем системы локальных координат на \mathfrak{B} и \mathcal{P} . Им соответствуют координатные реперы $(\partial_{x^i})_{i=1}^n$, $(\partial_{x^j})_{j=1}^m$ и кореперы $(d\mathfrak{x}^i)_{i=1}^n$, $(d\mathfrak{x}^j)_{j=1}^m$. Пусть $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}} = \{\kappa_{\mathfrak{x}}^R\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}}$ — семейство конфигураций, соответствующее единообразной отсчетной. Тогда обозначим через $I_{\mathfrak{x}} : T_{\kappa_{\mathfrak{x}}^R(\mathfrak{x})} \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^m$ изоморфизм с диадным представлением $I_{\mathfrak{x}} = e_j \otimes d\mathfrak{x}^j|_{\kappa_{\mathfrak{x}}^R(\mathfrak{x})}$. Здесь $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, где 1 стоит на j -м месте. Тогда локальной конфигурации

$$K_{\mathfrak{x}}^R = [K_{\mathfrak{x}}^R]_{\cdot i}^{j \cdot} \partial_{x^j}|_{\kappa_{\mathfrak{x}}^R(\mathfrak{x})} \otimes d\mathfrak{x}^i|_{\mathfrak{x}}$$

соответствует линейное отображение $\tilde{K}_{\mathfrak{x}}^R : T_{\mathfrak{x}} \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\tilde{K}_{\mathfrak{x}}^R := I_{\mathfrak{x}} \circ K_{\mathfrak{x}}^R = [K_{\mathfrak{x}}^R]_{\cdot i}^{j \cdot} e_j \otimes d\mathfrak{x}^i|_{\mathfrak{x}}.$$

Отметим, что по построению компоненты двух линейных отображений $K_{\mathfrak{X}}^R$ и $\tilde{K}_{\mathfrak{X}}^R$ совпадают¹⁹. Поле $\tilde{K}^R : \mathfrak{X} \mapsto \tilde{K}_{\mathfrak{X}}^R$ является сечением расслоения $(\mathfrak{E}(\mathfrak{B}), \mathfrak{B}, \pi)$.

Скажем, что поле K^R гладкое, если соответствующее ему сечение \tilde{K}^R является гладким как отображение многообразия \mathfrak{B} в многообразии $\mathfrak{E}(\mathfrak{B})$. Необходимым и достаточным условием этого является гладкость отображения $\mathfrak{X} \mapsto [[K_{\mathfrak{X}}^R]_{\cdot i}^{j \cdot}]$ многообразия \mathfrak{B} в многообразии вещественных матриц $m \times n$.

Замечание 16.5. Мы могли изначально определить гладкость отображения K^R через гладкость его компонент. Однако нам хотелось связать это отображение с сечением некоторого расслоения.

5.2. Материальная метрика

Предположим, что тело \mathfrak{B} является структурно неоднородным. В этом случае, в физическом пространстве \mathcal{P} у него нет глобальной единообразной формы. Геометрический подход заключается в превращении самого тела \mathfrak{B} в глобальную единообразную форму, что достигается за счет введения специальной неевклидовой связности. Поскольку тело рассматривается как отсчетная форма, то необходим прибор, позволяющий измерять длины инфинитезимальных материальных волокон и углы между ними в отсчетном состоянии. Этот прибор — риманова метрика $G \in \text{Sec}(T^*\mathfrak{B} \otimes T^*\mathfrak{B})$. В отличие от физического пространства \mathcal{P} , в котором *a priori* задана некоторая риманова метрика g , риманова метрика G неизвестна и должна быть построена исходя из рассматриваемого физического процесса.

Пусть \mathfrak{B} — тело с гладкой единообразной отсчетной K^R . Определим риманову метрику $G \in \text{Sec}(T^*\mathfrak{B} \otimes T^*\mathfrak{B})$ следующим образом [2, 10]:

$$\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{B} \forall u, v \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} : G_{\mathfrak{X}}(u, v) = g(K_{\mathfrak{X}}^R(u), K_{\mathfrak{X}}^R(v)). \quad (16.5.1)$$

В локальных координатах $G_{ij} = g_{kl} [K^R]_{\cdot i}^{k \cdot} [K^R]_{\cdot j}^{l \cdot}$ и этим доказывается гладкость сечения G , поскольку поле матриц $[[K^R]_{\cdot i}^{k \cdot}]$ гладкое. Метрику G будем называть **материальной метрикой**.

¹⁹Это является следствием выбора изоморфизма $I_{\mathfrak{X}}$.

К материальной метрике можно прийти другим путем, синтезировав ее из римановых метрик. Пусть $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}} = \{\varkappa_{\mathfrak{x}}^R\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}}$ — семейство конфигураций, построенное по единообразной отсчетной. Используя элементы семейства $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}}$, можно получить семейство $\{(B, G^{(\mathfrak{x})})\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}}$ римановых пространств с метриками $G^{(\mathfrak{x})} := (\varkappa_{\mathfrak{x}}^R)^* g$, каждая из которых является «pullback» физической метрики g относительно вложения $\varkappa_{\mathfrak{x}}^R$. Таким образом,

$$\forall \mathfrak{y} \in \mathfrak{B} \forall u, v \in T_{\mathfrak{y}}\mathfrak{B} : G^{(\mathfrak{x})}|_{\mathfrak{y}}(u, v) = g(T_{\mathfrak{y}}\varkappa_{\mathfrak{x}}^R(u), T_{\mathfrak{y}}\varkappa_{\mathfrak{x}}^R(v)).$$

Связность Леви-Чивита, порождаемая каждой метрикой $G^{(\mathfrak{x})}$, не отличается по своим свойствам от связности на \mathcal{P} . В частности, если \mathcal{P} — евклидово аффинное пространство, то и связность на \mathfrak{B} будет евклидовой (с нулевыми кручением, неметричностью и кривизной). Теперь синтезируем новую метрику, которая, в общем случае, будет неевклидовой. Определим сечение $G : \mathfrak{B} \rightarrow T^*\mathfrak{B} \otimes T^*\mathfrak{B}$ формулой

$$G_{\mathfrak{x}} := G^{(\mathfrak{x})}|_{\mathfrak{x}}.$$

Каждое из значений $G^{(\mathfrak{x})}|_{\mathfrak{x}}$ представляет симметричную положительно определенную билинейную форму. Следовательно, G — метрика, синтезированная из римановых метрик $\{G^{(\mathfrak{x})}\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}}$, то есть,

$$\forall \mathfrak{x} \in \mathfrak{B} \forall u, v \in T_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B} : G_{\mathfrak{x}}(u, v) = g(T_{\mathfrak{x}}\varkappa_{\mathfrak{x}}^R(u), T_{\mathfrak{x}}\varkappa_{\mathfrak{x}}^R(v)). \quad (16.5.2)$$

Поскольку $\varkappa_{\mathfrak{x}}^R \in K_{\mathfrak{x}}^R$, то формулы (16.5.1) и (16.5.2) представляют одну и ту же метрику.

5.3. Материальная связность Леви-Чивита

Материальная метрика G определяет связность Леви-Чивита, коэффициенты $\Gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot}$ которой в координатном репере (∂_i) представлены выражениями

$$\Gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot} = \frac{G^{kl}}{2} (\partial_i G_{jl} + \partial_j G_{il} - \partial_l G_{ij}).$$

Здесь $[G^{ij}] = [G_{ij}]^{-1}$.

Полученная связность в общем случае неевклидова и ее отличие от евклидовости определяется тензором кривизны Римана, представленным в координатном репере следующим образом:

$$\mathfrak{R}_{\cdot ijk}^{t\cdot\cdot\cdot} = \partial_i \Gamma_{\cdot jk}^{t\cdot\cdot} - \partial_j \Gamma_{\cdot ik}^{t\cdot\cdot} + \Gamma_{\cdot jk}^{l\cdot\cdot} \Gamma_{\cdot il}^{t\cdot\cdot} - \Gamma_{\cdot ik}^{l\cdot\cdot} \Gamma_{\cdot jl}^{t\cdot\cdot}$$

Отклонение от евклидовой структуры может быть охарактеризовано скалярной кривизной Ric, которая определяется как свертка

$$\text{Ric} = G^{ij} R_{ij}.$$

Здесь $R_{ij} = \mathfrak{R}_{ilj}^{\dots}$ — компоненты тензора Риччи. Таким образом, скалярная кривизна может служить мерой структурной неоднородности.

5.4. Материальная связность Вайценбока

Ограничимся частным случаем, когда физическое пространство евклидово ($\mathcal{P} = \mathcal{E}$) и $\dim \mathfrak{B} = \dim \mathcal{E} = 3$. Помимо связности Леви-Чивита, порождаемой материальной метрикой, на теле можно построить другую связность, используя метод подвижного репера, который предложил Е. Cartan. Отклик простого тела зависит от поля локальных конфигураций (линейных отображений). Вместе с тем, метод подвижного репера выполняется для репера, полученного из ортогонального с помощью некоторого поля линейных преобразований. Имеется соответствие между локально единообразными формами и пространством с абсолютным параллелизмом (пространство Вайценбока). Это соответствие будет рассмотрено далее.

Имплант и архетип

Пусть \mathfrak{B} — материально единообразное простое тело с единообразной отсчетной $\text{Ref}_{\mathfrak{B}} = \{K_{\mathfrak{x}}^R\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}}$ и семейством $\{\Psi_{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}}\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}}$ материальных изоморфизмов²⁰, где \mathfrak{x}_0 — некоторая выделенная точка тела. Единообразная отсчетная порождает поле $K^R : \mathfrak{X} \mapsto K_{\mathfrak{x}}^R$ локальных конфигураций $K_{\mathfrak{x}}^R : T_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{V}$, каждая из которых — изоморфизм.

Любое касательное пространство $T_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}$ к телу \mathfrak{B} в произвольной точке \mathfrak{x} может быть получено из касательного пространства $T_{\mathfrak{x}_0}\mathfrak{B}$ к телу \mathfrak{B} в выделенной точке \mathfrak{x}_0 следующим образом: $T_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B} = \Psi_{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_0}[T_{\mathfrak{x}_0}\mathfrak{B}]$. Это равенство означает, что инфинитезимальная окрестность $T_{\mathfrak{x}_0}\mathfrak{B}$ может быть принята в качестве эталона (**архетип**, по терминологии [11]). Пространственное представление $T_{\mathfrak{x}_0}\mathfrak{B}$ есть образ $K_{\mathfrak{x}_0}^R[T_{\mathfrak{x}_0}\mathfrak{B}]$, совпадающий с \mathcal{V} . Любая другая инфинитезимальная окрестность $T_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}$ может быть

²⁰Напомним, что каждый материальный изоморфизм является изоморфизмом соответствующих касательных слоев тела.

получена из пространственного представления архетипа, то есть, из \mathcal{V} , посредством линейного отображения

$$\Omega_{\mathfrak{X}} = [K_{\mathfrak{X}}^R]^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}.$$

Поле $\Omega : \mathfrak{X} \mapsto \Omega_{\mathfrak{X}}$, по терминологии, принятой в [12], называется **имплантом**. В настоящих рассмотрениях вместе с обозначением Ω мы будем использовать обозначение $\mathcal{U} = K^R$.

Метод подвижного репера

Выберем некоторый ортонормированный базис $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^3$ пространства \mathcal{V} . Он, вместе с полем $\Omega = \Omega_{\cdot l}^k \partial_{\mathfrak{X}^k} \otimes \mathbf{i}^l$, определяет **подвижный кристаллографический репер** $(z_k)_{k=1}^3$ равенством

$$z_k := \Omega(\mathbf{i}_k) = \Omega_{\cdot k}^i \partial_i,$$

где $(\partial_i)_{i=1}^3$ — координатный репер на \mathfrak{B} . Репер $(z_k)_{k=1}^3$ является G -ортонормированным, то есть,

$$G(z_m, z_n) = \delta_{mn}.$$

В самом деле, согласно формуле (16.5.1), в которой g порождается скалярным произведением, имеем

$$\begin{aligned} G(z_m, z_n) &= K^R[z_m] \cdot K^R[z_n] = \\ &= ([K^R]_{\cdot s}^r \mathbf{i}_r \otimes d\mathfrak{X}^s \lrcorner z_m) \cdot ([K^R]_{\cdot l}^q \mathbf{i}_q \otimes d\mathfrak{X}^l \lrcorner z_n) = \\ &= [K^R]_{\cdot i}^r [(K^R)^{-1}]_{\cdot m}^i [K^R]_{\cdot j}^q [(K^R)^{-1}]_{\cdot n}^j \delta_{qr} = \delta_{\cdot m}^r \delta_{\cdot n}^q \delta_{qr} = \delta_{mn}. \end{aligned}$$

Если тело структурно неоднородно, то репер $(z_i)_{i=1}^3$ не является голономным, то есть скобки Ли не равны нулю:

$$[z_i, z_j] = -c_{ij}^{\cdot k} z_k.$$

Здесь $c_{ij}^{\cdot k}$ — **объекты анголономии**. Параллелизуем репер $(z_i)_{i=1}^3$, введя аффинную связность ∇ на \mathfrak{B} , удовлетворяющую условию:

$$\nabla_{z_i} z_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

То есть, ∇ представляет такое правило параллельного перенесения, при котором поле z_j параллельно переносится вдоль кривой, порождаемой полем z_i . Образно говоря, соответствующие векторы базисов $(z_k|_{\mathfrak{X}})_{k=1}^3$ и $(z_k|_{\mathfrak{Y}})_{k=1}^3$, где $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}$, взаимно «параллельны». Связность ∇ называется **связностью Вайценбока**. Тело \mathfrak{B} с геометрией, индуцированной связностью ∇ , превращается в единообразную отсчетную форму, неевклидову в общем случае.

Коэффициенты связности ∇ в репере $(z_i)_{i=1}^3$ равны нулю, то есть $\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = 0$. Используя равенство (14.2.2)

$$\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = \Gamma_{\cdot sq}^{m\cdot\cdot} \mathcal{U}_{\cdot m}^i \Omega_{\cdot j}^s \Omega_{\cdot k}^q + \mathcal{U}_{\cdot m}^i \Omega_{\cdot j}^s \partial_s \Omega_{\cdot k}^m,$$

между функциями $\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot}$ и $\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot}$, где последние представляют коэффициенты связности в координатном репере (∂_{x^i}) , получаем

$$\Gamma_{\cdot sq}^{m\cdot\cdot} \mathcal{U}_{\cdot m}^i \Omega_{\cdot j}^s \Omega_{\cdot k}^q + \mathcal{U}_{\cdot m}^i \Omega_{\cdot j}^s \partial_s \Omega_{\cdot k}^m = 0.$$

Из этого выражения вытекают следующие формулы для $\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot}$:

$$\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = -\mathcal{U}_{\cdot k}^c \partial_j \Omega_{\cdot c}^i = \Omega_{\cdot c}^i \partial_j \mathcal{U}_{\cdot k}^c. \quad (16.5.3)$$

В терминах K^R ,

$$\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = -[K^R]_{\cdot k}^c \partial_j [(K^R)^{-1}]_{\cdot c}^i = [(K^R)^{-1}]_{\cdot c}^i \partial_j [K^R]_{\cdot k}^c.$$

Материально постоянное векторное поле

Пусть $u \in \text{Vec}(\mathfrak{B})$ — векторное поле со свойством: $K^R u = \mathbf{a} = \text{const} \in \mathcal{V}$. Поточечно, это означает, что

$$\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{B} : K_{\mathfrak{X}}^R u|_{\mathfrak{X}} = \mathbf{a}.$$

Следуя работе [2], назовем поле u **материально постоянным**. Оно имеет следующий физический смысл: инфинитезимальные материальные волокна $u|_{\mathfrak{X}}$ имеют одну и ту же единообразную форму \mathbf{a} . В частности, каждый элемент репера $(z_k)_{k=1}^3$ является материально постоянным.

Материально постоянное векторное поле u имеет следующее свойство: $\nabla_v u = 0$ для всех векторных полей $v \in \text{Vec}(\mathfrak{B})$. Для проверки справедливости этого свойства достаточно показать, что $\nabla_{\partial_i} u = 0$ для

всех $i \in \{1, 2, 3\}$. Действительно, $\nabla_{\partial_i} u = (\partial_i u^k + u^j \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}) \partial_k$. Используя первое выражение из (16.5.3) (то, которое со знаком минус), для $\Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}$ получим

$$\partial_i u^k + u^j \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} = \partial_i u^k - u^j \mathcal{U}_{\cdot j}^c \partial_i \Omega_{\cdot c}^k = a^c \partial_i \Omega_{\cdot c}^k - a^c \partial_i \Omega_{\cdot c}^k = 0,$$

поскольку $u^j \mathcal{U}_{\cdot j}^c = a^c$, $u^k = \Omega_{\cdot c}^k a^c$, а \mathbf{a} — постоянный вектор. Установленное свойство означает, в частности, что материально постоянное векторное поле может быть параллельно перенесено вдоль любой кривой на \mathfrak{B} .

Связность Вайценбока ∇ является единственной связностью, для которой выполнено свойство « $\nabla u = 0$ для любого материально постоянного векторного поля u ». Действительно, пусть $\tilde{\nabla}$ — аффинная связность с таким же свойством, а u — материально постоянное векторное поле. Тогда $\tilde{\nabla}_{\partial_i} u = 0$ для всех $i \in \{1, 2, 3\}$. Это влечет $a^c (\partial_i \Omega_{\cdot c}^k + \Omega_{\cdot c}^j \tilde{\Gamma}_{ij}^{k\cdot\cdot}) = 0$, где $u^k = \Omega_{\cdot c}^k a^c$, а $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k\cdot\cdot}$ — коэффициенты связности $\tilde{\nabla}$ в координатном репере. Поскольку u предполагается произвольным материально постоянным, то и вектор $\mathbf{a} = K^R u$ также является произвольным. В этой связи, $\partial_i \Omega_{\cdot c}^k + \Omega_{\cdot c}^j \tilde{\Gamma}_{ij}^{k\cdot\cdot} = 0$ и, наконец, $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k\cdot\cdot} = -\mathcal{U}_{\cdot j}^c \partial_i \Omega_{\cdot c}^k = \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}$. Таким образом, $\nabla = \tilde{\nabla}$.

Связь материально постоянного векторного поля с автопараллельной кривой

Кривые, порождаемые материально постоянными векторными полями, являются автопараллельными [13]. Действительно, пусть \mathfrak{B} — тело, снабженное связностью Вайценбока ∇ . Если $u \in \text{Vec}(\mathfrak{B})$ — материально постоянное векторное поле, то $\nabla_v u = 0$ для любого $v \in \text{Vec}(\mathfrak{B})$. В частности, $\nabla_u u = 0$. Теперь, пусть $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathfrak{B}$ — кривая, порождаемая u , то есть, $\chi'(t) = u|_{\chi(t)}$ для всех $t \in \mathbb{I}$. Тогда $\nabla_{\chi'} \chi' = 0$ и χ является автопараллельной кривой.

Кручение материальной связности

Тензор кручения связности Вайценбока в координатном репере определяется как

$$\mathfrak{T} = (\Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} - \Gamma_{ji}^{k\cdot\cdot}) \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j.$$

Его компоненты, в общем случае, отличны от нуля:

$$\mathfrak{T}_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot} = [(K^R)^{-1}]_{\cdot r}^{k\cdot} \partial_i [K^R]_{\cdot j}^{r\cdot} - [(K^R)^{-1}]_{\cdot r}^{k\cdot} \partial_j [K^R]_{\cdot i}^{r\cdot},$$

и служат мерой структурной неоднородности. Действительно, если тело структурно однородно, то $K^R = T\kappa$ для некоторого $\kappa \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B})$. В локальных координатах, $[K^R]_{\cdot j}^{i\cdot} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$, и

$$\mathfrak{T}_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot} = [(K^R)^{-1}]_{\cdot r}^{k\cdot} \left(\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^j \partial x^i} \right) = 0,$$

вследствие теоремы о перестановочности частных производных.

6. Меры деформаций

6.1. Градиент конфигурации

Любое сечение $u \in \text{Vec}(\mathfrak{B})$ векторного расслоения $T\mathfrak{B}$ (то есть, векторное поле) определяет материальное волокно $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathfrak{B}$ как интегральную кривую, то есть, согласно правилу $u_{\chi(t)} = \chi'(t)$, для всех $t \in \mathbb{I}$. Образно говоря, материальное волокно «собрано» из значений этого поля. Обратное, для материального волокна существует гладкое векторное поле его скоростей. В этой связи, мы рассматриваем касательные векторы как **инфинитезимальные материальные волокна**²¹. В фиксированной материальной точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ инфинитезимальные материальные волокна формируют **инфинитезимальную окрестность** точки \mathfrak{X} , которая формализуется как касательное пространство $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$. Каждый элемент из $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$ является вектором скорости в точке \mathfrak{X} некоторого материального волокна, которое проходит через \mathfrak{X} .

Конфигурация $\kappa \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{P})$ преобразует материальные волокна в наблюдаемые пространственные волокна. Такую же роль, но только для инфинитезимальных волокон, играет **градиент конфигурации** $F = T\kappa$, являющийся гомоморфизмом касательных расслоений, или, эквивалентно, полем двухточечных тензоров. То есть,

$$F : T\mathfrak{B} \rightarrow T\mathcal{P}, \quad \text{или} \quad F \in \text{Sec}(\kappa^* T\mathcal{P} \otimes T^*\mathfrak{B}).$$

²¹В книге [14] инфинитезимальное материальное волокно называется дифференциальным элементом (**differential element**).

Как следует из первой строки (10.5.3), поле F имеет диадное представление $F = F_{\alpha}^i e_i \otimes E^{\alpha}$. Здесь (E^{α}) — локальный репер на \mathfrak{B} , а (e_i) — локальный репер на \mathcal{P} . В частности, выбирая координатные реперы, приходим к разложению

$$F = \frac{\partial \kappa^i(\mathfrak{x}^1, \dots, \mathfrak{x}^n)}{\partial \mathfrak{x}_{\alpha}} \partial_i \otimes d\mathfrak{x}^{\alpha},$$

в котором $\kappa^i : (\mathfrak{x}^1, \dots, \mathfrak{x}^n) \mapsto \kappa^i(\mathfrak{x}^1, \dots, \mathfrak{x}^n)$, $i = 1, \dots, m$, является координатным представлением конфигурации κ .

Если $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$ то через $F_{\mathfrak{x}}$ обозначается соответствующее линейное отображение, которое действует между касательными слоями. То есть, $F_{\mathfrak{x}} = T_{\mathfrak{x}}\kappa \in \text{Lin}(T_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}; T_{\kappa(\mathfrak{x})}\mathcal{P})$.

Пусть над телом \mathfrak{B} возведена надстройка в виде глобальной единообразной формы $(\mathfrak{B}, G, \nabla)$. В этом случае любая конфигурация κ приобретает смысл деформации из отсчетной формы $(\mathfrak{B}, G, \nabla)$ в актуальную, вложенную в физическое пространство \mathcal{P} . Тогда градиент конфигурации F становится подобным градиенту деформации, то есть, он переводит инфинитезимальные волокна в отсчетном состоянии в инфинитезимальные волокна в актуальном состоянии.

6.2. Меры Коши – Грина

Определение

В классических рассуждениях меры Коши – Грина появляются в силу теоремы о полярном разложении Коши. Подобные рассуждения могут быть обобщены на гладкие многообразия [6]. Для каждого $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$ существуют ортогональный тензор $R_{\mathfrak{x}} : T_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B} \rightarrow T_{\kappa(\mathfrak{x})}\mathcal{P}$, такой, что

$$\begin{aligned} F &= R \circ U, & F_{\mathfrak{x}} &= R_{\mathfrak{x}} \circ U_{\mathfrak{x}}, \\ F &= V \circ R, & F_{\mathfrak{x}} &= V_{\kappa(\mathfrak{x})} \circ R_{\mathfrak{x}}, \end{aligned}$$

где симметричные²² положительно определенные тензоры $U_{\mathfrak{x}} : T_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B} \rightarrow T_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}$ и $V_x : T_x\mathcal{P} \rightarrow T_x\mathcal{P}$ называются, согласно классической терминологии, **правым и левым тензорами искажений**.

²² $U_{\mathfrak{x}} = U_{\mathfrak{x}}^T$ и $V_x = V_x^T$.

Для простых тел используются следующие комбинации элементов пары (F, F^T) : **правый C и левый B тензоры Коши – Грина**, которые являются гомоморфизмами векторных расслоений:

$$\begin{aligned} C &= F^T \circ F : T\mathfrak{B} \rightarrow T\mathfrak{B}, \\ B &= F \circ F^T : \iota_{\mathcal{S}_x}^* T\mathcal{P} \rightarrow T\mathcal{P}. \end{aligned}$$

На соответствующих касательных слоях:

$$\begin{aligned} C_x : T_x\mathfrak{B} \rightarrow T_x\mathfrak{B}, \quad C_x &= F_x^T \circ F_x; \\ B_x : T_x\kappa(\mathfrak{B}) \rightarrow T_x\kappa(\mathfrak{B}), \quad B_x &= F_x \circ F_x^T, \quad x = \kappa(\mathfrak{X}). \end{aligned}$$

Правый и левый тензоры искажений выражаются через тензоры Коши – Грина следующим образом:

$$\begin{aligned} U_x &= \sqrt{F_x^T \circ F_x} = \sqrt{C_x}, \\ V_x &= \sqrt{F_x \circ F_x^T} = \sqrt{B_x}. \end{aligned}$$

Координатное представление мер Коши – Грина

Пусть $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, $x = \kappa(\mathfrak{X})$. Для любого вектора $u \in T_x\mathfrak{B}$, выполняется следующее соотношение:

$$C_x(u) = F_x^T(F_x u) = (F_x^T)_{\cdot i}^{\alpha} (F_x)^{i \cdot}{}_{\beta} \partial_{x^\alpha}|_x \otimes d\mathfrak{X}^\beta|_x \lrcorner u.$$

Равенство (10.5.5) влечет, что

$$C_x = (G_x)^{\alpha\gamma} (g_x)_{ij} (F_x)^{i \cdot}{}_{\gamma} (F_x)^{j \cdot}{}_{\beta} \partial_{x^\alpha}|_x \otimes d\mathfrak{X}^\beta|_x.$$

Окончательно, опуская значения аргументов, получаем

$$C = G^{\alpha\gamma} g_{ij} \frac{\partial \mathfrak{X}^i}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \mathfrak{X}^j}{\partial x^\beta} \partial_{x^\alpha} \otimes d\mathfrak{X}^\beta. \quad (16.6.1)$$

Аналогично, для любого $u \in T_x\mathcal{P}$ получаем

$$B_x(u) = F_x(F_x^T u) = (F_x)_{\cdot \alpha}^i (F_x^T)_{\cdot j}^{\alpha} \partial_{x^i}|_x \otimes dx^j|_x \lrcorner u,$$

откуда следует разложение

$$B = G^{\alpha\beta} g_{lj} \frac{\partial \mathfrak{X}^l}{\partial x^\beta} \frac{\partial \mathfrak{X}^k}{\partial x^\alpha} \partial_{x^k} \otimes dx^j. \quad (16.6.2)$$

Здесь (∂_{x^k}) и (dx^j) — сужение координатного репера и корепера физического пространства \mathcal{P} на $\kappa(\mathfrak{B})$.

Связь между метриками и мерами Коши – Грина

Обозначим²³ $C^{b_b} := C^{1^b b}$ (образно говоря, опускается первый индекс). По определению музыкального изоморфизма $(\cdot)^b$, и согласно (16.6.1), такой тензор представлен диадным разложением

$$C^{b_b} = g_{ij} \frac{\partial \varkappa^i}{\partial \varkappa^\alpha} \frac{\partial \varkappa^j}{\partial \varkappa^\beta} d\varkappa^\alpha \otimes d\varkappa^\beta.$$

Таким образом, C^{b_b} является «pullback» пространственной метрики:

$$C^{b_b} = \varkappa^* g.$$

Похожее соотношение выполняется для левого тензора Коши – Грина, построенного по отображению $\widehat{\varkappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B})$. Касательное отображение $\widehat{F} = T\widehat{\varkappa} : T\mathfrak{B} \rightarrow T\varkappa(\mathfrak{B})$ служит «внутренней» мерой деформации (то есть недоступной внешнему наблюдателю) и связан с $F = T\varkappa$ равенством $F = \text{In}_{\mathcal{S}_\varkappa} \circ \widehat{F}$, где $\text{In}_{\mathcal{S}_\varkappa} := T\iota_{\mathcal{S}_\varkappa}$ – оператор вложения [10]. Использование $\iota_{\mathcal{S}_\varkappa}^* g$ в качестве метрики на \mathcal{S}_\varkappa и равенства (10.5.4), позволяет определить $\widehat{F}^T : T\mathcal{S}_\varkappa \rightarrow T\mathfrak{B}$. Таким образом, можно построить «внутренний» тензор Коши – Грина $\widehat{B} = \widehat{F} \circ \widehat{F}^T$.

Положим $\widehat{B}^{\sharp p} := \widehat{B}^{2^{\sharp p}}$ (образно говоря, поднимается второй индекс). По определению музыкального изоморфизма $(\cdot)^\sharp$ и согласно разложению, аналогичному (16.6.2), получаем

$$\widehat{B}^{\sharp p} = G^{\alpha\beta} \frac{\partial \widehat{\varkappa}^k}{\partial \varkappa^\alpha} \frac{\partial \widehat{\varkappa}^l}{\partial \varkappa^\beta} \partial_{x^k} \otimes \partial_{x^l}.$$

Отметим, что $(\partial_{x^i})_{i=1}^n$ – координатный репер на \mathcal{S}_\varkappa , порожденный локальными координатами на \mathcal{S}_\varkappa . Из полученного равенства следует, что

$$\widehat{B}^{\sharp p} = \widehat{\varkappa}_* (G^*),$$

где $G^* := G^{1^{\sharp b} 2^{\sharp b}}$.

Таким образом, правый тензор Коши – Грина есть «pullback» пространственной метрики, а левый тензор Коши – Грина – «pushforward» материальной метрики [6].

²³Здесь и далее индекс b означает, что музыкальный изоморфизм построен по материальной метрике, а индекс p – что музыкальный изоморфизм построен по пространственной метрике.

Библиография

1. Truesdell Clifford, Noll Walter. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics* / Ed. by Stuart S. Antman. — Springer Berlin Heidelberg, 2004.
2. Noll Walter. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1967. — Vol. 27, no. 1. — P. 1–32.
3. Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1967. — Vol. 27, no. 1. — P. 33–94.
4. Gurtin Morton E, Murdoch A Ian. A continuum theory of elastic material surfaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1975. — Vol. 57, no. 4. — P. 291–323.
5. Lee John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. — Springer New York, 2012.
6. Marsden Jerrold E, Hughes Thomas JR. *Mathematical foundations of elasticity*. — Courier Corporation, 1994.
7. Segev R., Rodnay G. Cauchy's Theorem on Manifolds // *J. Elast.* — 1999. — Vol. 56, no. 2. — P. 129–144.
8. Milnor John, Stasheff James D. *Characteristic Classes*. — Princeton University Press, 1974.
9. Epstein M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. — Cambridge University Press, 2010.
10. Lychev S., Koifman K. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. — De Gruyter, 2018.
11. Epstein Marcelo, Elzanowski Marek. *Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach*. — Springer Science & Business Media, 2007.
12. Maugin Gérard A. *Material inhomogeneities in elasticity*. — CRC Press, 1993. — Vol. 3.

13. Sfyris D. Autoparallel curves and Riemannian geodesics for materially uniform but inhomogeneous bodies // *Math. Mech. Solids*. — 2014. — Vol. 19, no. 2. — P. 152–167.
14. Truesdell Clifford, Toupin Richard. The classical field theories. — Springer, 1960.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

ГЛАВА 17

Электродинамика

Библиография

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1. Ньютоново пространство время

1.1. Определение

Место и время, мыслимые вместе, образуют **событие**. Совокупность всех событий составляет **пространство время**. Теперь перейдем на точный язык. Событие рассматривается как первичная сущность, подобно точке в евклидовой геометрии, и мы дадим следующее определение¹.

Определение 18.1. *Ньютоново пространство время — это структура*

$$(\mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{D}, \nabla, t),$$

где \mathcal{M} — множество, элементы которого называются **событиями**, \mathcal{T} — топология на \mathcal{M} , \mathcal{D} — гладкая структура на \mathcal{M} , ∇ — связность на \mathcal{M} , а $t: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция **абсолютного времени**. При этом должны быть выполнены следующие условия:

(N_1) Подструктура $(\mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{D})$ является гладким 4-многообразием.

¹Изложение основано на лекции 9 Frederic P Schuller, которую он прочел в International Winter School on Gravity and Light (2015) <https://www.youtube.com/watch?v=IB1Cu1zgD4Y>.

(N_2) $\forall p \in \mathcal{M} : (dt)_p \neq 0$ (время никогда не останавливается).

(N_3) $\forall p \in \mathcal{M} : (\nabla dt)_p = 0$ (время течет равномерно).

(N_4) Кручение связности ∇ равно нулю.

Здесь и далее символ d в (N_2) и (N_3) означает операцию внешнего дифференцирования. Мы предполагаем, что $t(\mathcal{M}) = \mathbb{R}$. Для любого $\tau \in \mathbb{R}$ обозначим

$$\mathcal{S}_\tau = \{p \in \mathcal{M} \mid t(p) = \tau\}.$$

Аксиома (N_2) утверждает, что \mathcal{S}_{τ_1} и \mathcal{S}_{τ_2} при различных $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ не пересекаются. Таким образом, \mathcal{M} представлено в виде дизъюнктного объединения

$$\mathcal{M} = \coprod_{\tau \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_\tau.$$

Каждый слой \mathcal{S}_τ называется **абсолютным пространством в момент времени τ** .

Замечание 18.1. Абсолютное пространство может иметь евклидову аффинную структуру (классическая 3D-механика) или иметь структуру риманова пространства (2D-механика материальных поверхностей).

Пусть $p \in \mathcal{M}$. Согласно (N_2), справедлива следующая классификация касательных векторов.

Определение 18.2. Вектор $u \in T_p\mathcal{M}$ называется

- **вектором с положительной проекцией на ось времени, если $dt(u) > 0$;**
- **пространственноподобным, если $dt(u) = 0$;**
- **вектором с отрицательной проекцией на ось времени, если $dt(u) < 0$.**

1.2. Законы Ньютона

Гладкие кривые на \mathcal{M} называются **мировыми линиями** частиц. Поскольку связность ∇ известна, то можно определить автопараллельные мировые линии. Эти кривые играют роль эталона — «прямых», вдоль которых частица движется равномерно в отсутствии сил. Первый закон Ньютона может быть сформулирован следующим образом: *мировая линия частицы, движущейся в отсутствии сил, есть автопараллельная кривая, вектор скорости которой имеет положительную проекцию на ось времени*. Если χ — такая мировая линия, то, по определению:

$$(i) \quad \nabla_{\chi'} \chi' = 0;$$

$$(ii) \quad dt(\chi') > 0.$$

Пусть χ — мировая линия. Второй закон Ньютона утверждает, что отклонение $\nabla_{\chi'} \chi' = 0$ от нуля вызывается силами, действующими на частицу. Формально,

$$\nabla_{\chi'} \chi' = \frac{1}{m} f,$$

где $f \in \text{Vec}(\mathcal{M})$ — сила, действующая на частицу. Мы полагаем, что сила является пространственноподобным вектором, то есть, $dt(f) = 0$, поскольку сила ускоряет в пространственном направлении. Коэффициент m является положительной постоянной, **массой** частицы. В этой связи, поле $\nabla_{\chi'} \chi'$ является **ускорением** частицы.

Пусть выбран атлас \mathcal{A} из гладкой структуры \mathcal{D} , имеющий специальный вид. Для любой карты (U, φ) этого атласа, координатное отображение $\varphi : x \mapsto (x^0, x^1, x^2, x^3)$ таково, что $\varphi^0 : x \mapsto x^0$ совпадает с функцией абсолютного времени t : $\varphi^0 = t|_U$. Постулат (N_3) принимает вид

$$\nabla_{\partial_i} dx^0 = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

который поскольку $(\nabla_{\partial_i} dx^0)_j = -\Gamma^0_{:ji}$, означает, что $\Gamma^0_{:ji} = 0$ для всех $i, j = 0, 1, 2, 3$. Будем называть такой атлас стратифицированным.

Рассмотрим второй закон Ньютона в стратифицированном атласе \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} (\chi^0)'' + \Gamma^0_{:ij} (\chi^i)' (\chi^j)' &= 0, \\ (\chi^q)'' + \Gamma^q_{:ij} (\chi^i)' (\chi^j)' &= \frac{1}{m} f^q, \quad q = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Правая часть первого уравнения равна нулю, поскольку F пространственноподобен. Из $\Gamma_{ij}^0 = 0$ мы получаем, что $(\chi^0)' = 0$. В этой связи, имеются постоянные $a, b \in \mathbb{R}$, такие, что $\chi^0(\lambda) = a\lambda + b$. Другие три уравнения можно представить следующим образом:

$$(\chi^q)'' + \Gamma_{\gamma\delta}^q (\chi^\gamma)' (\chi^\delta)' + \Gamma_{00}^q (\chi^0)' (\chi^0)' + 2\Gamma_{\gamma 0}^q (\chi^\gamma)' (\chi^0)' = \frac{1}{m} f^q,$$

где $q, \gamma, \delta = 1, 2, 3$. Здесь был использован постулат (N_4) . Теперь параметризуем мировую линию посредством абсолютного времени. Тогда $d/d\lambda = ad/d\tau$. Заменяя штрихи на точки, имеем

$$\ddot{\chi}^q + \Gamma_{\gamma\delta}^q \dot{\chi}^\gamma \dot{\chi}^\delta + \Gamma_{00}^q \dot{\chi}^0 \dot{\chi}^0 + 2\Gamma_{\gamma 0}^q \dot{\chi}^\gamma \dot{\chi}^0 = \frac{1}{ma^2} f^q, \quad q, \gamma, \delta = 1, 2, 3.$$

Левая часть полученного равенства представляет q -ю компоненту вектора ускорения. Ни одно из слагаемых в правой части не преобразуется как вектор, но они имеют следующий смысл:

- $\Gamma_{\gamma\delta}^q \dot{\chi}^\gamma \dot{\chi}^\delta$ — член координатной коррекции;
- $\Gamma_{00}^q \dot{\chi}^0 \dot{\chi}^0$ центробежное «ускорение»;
- $2\Gamma_{\gamma 0}^q \dot{\chi}^\gamma \dot{\chi}^0$ «ускорение» Кориолиса.

2. Релятивистское пространство время

2.1. Многообразия Лоренца

Пусть \mathcal{M} — гладкое m -мерное многообразие.

Определение 18.3. *Псевдоримановой метрикой* называется сечение $g \in \text{Sec}(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$, такое, что для каждой точки $p \in \mathcal{M}$ выполняются следующие условия:

$$(L_1) \quad \forall u, v \in T_p\mathcal{M} : g_p(u, v) = g_p(v, u);$$

$$(L_2) \quad \forall u \in T_p\mathcal{M} : (\forall v \in T_p\mathcal{M} : g_p(u, v) = 0) \Leftrightarrow (u = 0).$$

Отметим, что в отличие от римановой метрики, условие положительной определенности отсутствует. В гладкой карте (U, φ) псевдориманова метрика, подобно любому полю билинейных форм, может быть представлена в виде разложения $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. В каждой точке $p \in \mathcal{M}$ матрица $[g_{ij}(p)]$ имеет m вещественных ненулевых собственных значений. Количества m_+ , m_- положительных и отрицательных собственных значений не зависят от выбора точки p ; их сумма равна $m_+ + m_- = m$.

Определение 18.4. Пара (m_+, m_-) называется *сигнатурой метрики* g .

В рамках этого определения, риманова метрика является псевдоримановой метрикой с сигнатурой $(m, 0)$.

Пусть \mathcal{M} — гладкое многообразие размерности 4.

Определение 18.5. Псевдориманова метрика g с сигнатурой $(1, 3)$ называется *лоренцевой метрикой*.

Определение 18.6. Пара (\mathcal{M}, g) , в которой g — лоренцева метрика, называется *лоренцевым многообразием*.

Сигнатура лоренцевой метрики часто обозначается через $(+, -, -, -)$. Пусть $p \in \mathcal{M}$ — некоторая точка. Можно выбрать базис $(e_i)_{i=0}^3$ касательного пространства $T_p\mathcal{M}$ со свойством²:

$$g_p(e_i, e_j) = \eta_{ij}, \quad \text{где} \quad [\eta_{ij}] = \text{diag} \{1, -1, -1, -1\}.$$

Для любого вектора $u \in T_p\mathcal{M}$, $u = u^i e_i$, имеем, что

$$g_p(u, u) = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2.$$

Теперь рассмотрим векторное пространство \mathbb{R}^4 всех кортежей (u^0, u^1, u^2, u^3) . Множество

$$C_{T_p\mathcal{M}} = \{u \in T_p\mathcal{M} \mid g_p(u, u) = 0\}$$

представлено в \mathbb{R}^4 совокупностью

$$C_{\mathbb{R}^4} = \{(u^0, u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^4 \mid (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = 0\},$$

являющейся круговым двойным конусом с вершиной $(0, 0, 0, 0)$.

²В случае лоренцевых многообразий мы рассматриваем значения индекса из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

2.2. Ориентация времени

Пусть (\mathcal{M}, g) — лоренцево многообразие. Поле g определяет семейство $(C_{T_p\mathcal{M}})_{p \in \mathcal{M}}$ двойных конусов в касательных пространствах. Напомним, что в случае ньютонова пространства времени была определена функция абсолютного времени t . Условие $dt(u) = 0$ определяет гиперплоскость в касательном пространстве, и векторы с положительной проекцией на ось времени расположены по одну сторону от нее. Таким образом, функция абсолютного времени позволяет задать распределение полупространств касательных пространств. Вместе с тем, в релятивистской физике не предполагается никакого абсолютного времени. Согласно одному из релятивистских постулатов, скорости массовых частиц должны располагаться внутри конусов в направлении к будущему. Иными словами, необходимо правило, которое позволяет выбрать семейство $(C_{T_p\mathcal{M}}^{1/2})_{p \in \mathcal{M}}$ круговых конусов из заданного семейства $(C_{T_p\mathcal{M}})_{p \in \mathcal{M}}$ двойных конусов. Это означает, что для каждой точки $p \in \mathcal{M}$ необходимо выбрать в точности один из двух конусов, составляющих $C_{T_p\mathcal{M}}$. Подобный выбор может быть сделан с помощью ориентации времени.

Определение 18.7. *Ориентация времени на \mathcal{M} — это векторное поле $T \in \text{Vec}(\mathcal{M})$ со свойствами [1]:*

$$(T_1) \quad T \neq 0,$$

$$(T_2) \quad g(T, T) > 0.$$

По определению, для каждой точки $p \in \mathcal{M}$ значение $T(p)$ принадлежит одному из двух конусов, составляющих $C_{T_p\mathcal{M}}$. В этой связи, это в точности то самое правило, которое определяет семейство $(C_{T_p\mathcal{M}}^{1/2})_{p \in \mathcal{M}}$ круговых конусов. Роль функции абсолютного времени, таким образом, играет пара (g, T) , состоящая из лоренцевой метрики и ориентации времени.

2.3. Определение релятивистского пространства времени

Все готово для того, чтобы сформулировать следующее определение [2].

Определение 18.8. *Релятивистское пространство время* — это структура

$$(\mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{D}, g, \nabla, T, \mu),$$

где \mathcal{M} — это множество, элементы которого называются **событиями**, \mathcal{T} — топология на \mathcal{M} , \mathcal{D} — гладкая структура на \mathcal{M} , $g \in \text{Sec}(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$ — сечение, ∇ — связность на \mathcal{M} , $T \in \text{Vec}(\mathcal{M})$ — векторное поле на \mathcal{M} , а μ — форма объема на \mathcal{M} . При этом выполняются следующие условия:

R_1) Подструктура $(\mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{D})$ является гладким 4-мерным многообразием.

R_2) Поле g является лоренцевой метрикой.

R_3) ∇ — связность Леви-Чивита.

R_4) Поле T — ориентация времени.

Гладкие кривые на \mathcal{M} называются **мировыми линиями** частиц.

В отличие от ньютонова пространства времени, в релятивистском пространстве выделяют два вида частиц: **массовые** и **безмассовые**. Требуется, чтобы они удовлетворяли следующим двум постулатам:

(P_1) Мировая линия $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{M}$ массовой частицы такова, что:

(i) $\forall t \in \mathbb{I} : g_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi'(t)) > 0$ (то есть, скорость лежит внутри двойного конуса $C_{T_{\chi(t)}\mathcal{M}}$);

(ii) $\forall t \in \mathbb{I} : g_{\chi(t)}(T_t, \chi'(t)) > 0$ (то есть, скорость лежит в точности в том конусе, который выбран T);

(P_2) Мировая линия $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{M}$ безмассовой частицы такова, что:

(i) $\forall t \in \mathbb{I} : g_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi'(t)) = 0$ (то есть, скорость лежит на границе двойного конуса $C_{T_{\chi(t)}\mathcal{M}}$);

(ii) $\forall t \in \mathbb{I} : g_{\chi(t)}(T_t, \chi'(t)) > 0$ (то есть, скорость принадлежит границе того конуса, который выбран T).

2.4. Наблюдатели

Время и скорость частицы являются параметрами, зависящими от наблюдателя.

Определение 18.9. Наблюдатель — это мировая линия $\gamma : \mathbb{J} \rightarrow \mathcal{M}$ массовой частицы вместе с базисом

$$(e_0(t), e_1(t), e_2(t), e_3(t))$$

в каждом пространстве $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$, $t \in \mathbb{I}$. Совокупность таких базисов должна подчиняться условиям:

- (i) $\forall t \in \mathbb{I} : e_0(t) = \gamma'(t)$;
- (ii) $\forall t \in \mathbb{I} : g_{\gamma(t)}(e_i(t), e_j(t)) = \eta_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, 3$.

Любой наблюдатель должен подчиняться следующим постулатам:

(P₁) **Часы** наблюдателя (γ, e) измеряют время

$$\tau := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

между двумя событиями. Здесь

- $\gamma(t_1)$ — «начало отсчета времени»;
- $\gamma(t_2)$ — «конец отсчета времени».

Число τ называется **собственным временем**.

(P₂) Пусть (γ, e) — наблюдатель, а $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{M}$ — мировая линия массовой частицы, параметризованная так, что

$$\forall t \in \mathbb{I} : g_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi'(t)) = 1.$$

Пусть наблюдатель и частица встречаются в пространстве времени. То есть, $\chi(t_1) = \gamma(t_2)$, для некоторых $t_1 \in \mathbb{I}$, $t_2 \in \mathbb{J}$. Тогда наблюдатель измеряет **3-скорость (пространственную скорость)** этой частицы как

$$v := e_{t_2}^\alpha(\chi'(t_1))e_\alpha(t_2), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

где $(e_{t_2}^i)_{i=0}^3$ — дуальный базис $(e_i(t_2))_{i=0}^3$.

2.5. Преобразование Лоренца

Пусть (γ, e) и $(\tilde{\gamma}, \tilde{e})$ наблюдатели, встречающиеся в точке p : $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = p = \gamma(t)$. Репараметризуя кривые, если необходимо, предположим, что $\tilde{t} = t = 0$. Тогда $(e_i(0))_{i=0}^3$ и $(\tilde{e}_i(0))_{i=0}^3$ являются базисами касательного пространства $T_p\mathcal{M}$. Существует матрица $\Omega \in \text{GL}(4; \mathbb{R})$, такая, что

$$\tilde{e}_i(0) = \Omega_{\cdot i}^j e_j(0).$$

Поскольку $g_p(\tilde{e}_i(0), \tilde{e}_j(0)) = \eta_{ij}$, $g_p(e_k(0), e_l(0)) = \eta_{kl}$ и используя соотношение между векторами с тильдой и векторами без тильды, приходим к преобразованию Лоренца:

$$\Omega_{\cdot i}^k \Omega_{\cdot j}^l \eta_{kl} = \eta_{ij}.$$

Таким образом, преобразование Лоренца связывает реперы двух наблюдателей в одной точке. Мы имеем, что $\Omega \in \text{O}(1, 3)$.

3. Материя

Выделяют два вида материи: точечная материя и полевая материя. Пусть известны g и T .

3.1. Точечная материя

Постулаты (P_1) and (P_2) , касающиеся массовых и безмассовых частиц накладывают ограничения на возможные мировые линии частиц. Для определения мировых линий необходим закон движения. Рассмотрим действия частиц в случае отсутствия внешних полей.

Действие массовой частицы с мировой линией χ имеет вид

$$\mathfrak{A}_{\text{massive}}[\chi] = m \int \sqrt{g_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi'(t))} dt.$$

Здесь $m > 0$ — постоянная, **масса** частицы. Динамические законы движения (уравнения Эйлера — Лагранжа) могут быть получены из условия $\delta \mathfrak{A}_{\text{massive}}[\chi] = 0$. Возможные мировые линии χ должны удовлетворять ограничению $g_{\chi(t)}(T_t, \chi'(t)) > 0$, for all $t \in \mathbb{I}$.

Действие безмассовой частицы с мировой линией χ имеет вид

$$\mathfrak{A}_{\text{massless}}[\chi, \lambda] = \int \lambda(t) \sqrt{g_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi'(t))} dt.$$

Здесь $\lambda(t)$ — множитель Лагранжа. Частная вариация $\mathfrak{A}_{\text{massless}}[\chi, \lambda]$ по λ дает условие $g_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi'(t)) = 0$, для всех t . Динамические законы движения (уравнения Эйлера — Лагранжа) выводятся из частной вариации $\mathfrak{A}_{\text{massless}}[\chi, \lambda]$ по χ .

Причина описания уравнений движения с помощью действий заключается в том, что действие составной системы является суммой действий ее частей и, возможно, членов взаимодействия.

Пример 18.1. Пусть массовая частица взаимодействует с электромагнитным полем, которое порождается ковекторным полем $A \in \text{CVec}(\mathcal{M})$ (электромагнитный потенциал). Пусть q — заряд этого поля. Тогда действие имеет вид

$$\mathfrak{A}[\chi; A] = \int \left(m \sqrt{g_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi'(t))} + qA(\chi'(t)) \right) dt.$$

Точка с запятой означает, что поле A фиксировано, то есть, по нему не производится варьирование. Уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$m(\nabla_{\chi'} \chi')^i = -qF_j^i \dot{\chi}^j,$$

где $F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$ — компоненты тензора Фарадея. Выражение $-qF_j^i \dot{\chi}^j$ является силой Лоренца, действующей на заряженную частицу в электромагнитном поле. Заметим, что действие $\mathfrak{A}[\chi; A]$ имеет вид

$$\mathfrak{A}[\chi; A] = \mathfrak{A}_{\text{massive}}[\chi] + \mathfrak{A}_{\text{interact}}[\chi; A],$$

в котором $\mathfrak{A}_{\text{interact}}[\chi; A]$ — член взаимодействия.

3.2. Полевая материя

Классическая полевая материя — это любое тензорное поле на \mathcal{M} , уравнения движения которого определяются из условия стационарности действия.

Пример 18.2. Действие для электромагнитного поля, в предположении, что \mathcal{M} — тривиальное многообразие, имеет вид (в атласе с одной картой)

$$\mathfrak{A}_{\text{Maxwell}}[A] = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} F_{ab} F_{cd} g^{ac} g^{bd} d^4x,$$

где $g = \det[g_{ij}] < 0$.

Замечание 18.2. Заметим, что плотность действия $\mathfrak{A}_{\text{Maxwell}}$ зависит от первых производных электромагнитного потенциала A . Аналогичная ситуация выполняется для простых материалов в механике континуума. Функционал отклика для простого материала зависит от градиента деформации, который представлен в базисе частными производными первого порядка.

4. Уравнение Эйнштейна

4.1. Тензор энергии-импульса

Предположим теперь, что метрический тензор g неизвестен и является искомым. Тогда необходимо записать действие $\mathfrak{A}_{\text{grav}}[g]$ для метрического тензора. Это действие будет добавляться к любому действию $\mathfrak{A}_{\text{matter}}[A, \dots]$ для описания системы в целом. В частности,

$$\mathfrak{A}[A, g] = \mathfrak{A}_{\text{grav}}[g] + \mathfrak{A}_{\text{Maxwell}}[A, g].$$

Частная вариация действия $\mathfrak{A}[A, g]$ по отношению к δA приводит к уравнению Максвелла. Только $\mathfrak{A}_{\text{Maxwell}}$ дает вклад для них. В случае частной вариации $\mathfrak{A}[A, g]$ по отношению к δg , и $\mathfrak{A}_{\text{grav}}$ и $\mathfrak{A}_{\text{Maxwell}}$ дают вклад. Таким образом, уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\underbrace{\frac{1}{16\pi G_{\text{Newt}}} G^{ij}}_{\text{вклад из } \mathfrak{A}_{\text{grav}}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} T^{ij}\right)}_{\text{вклад из } \mathfrak{A}_{\text{Maxwell}}} = 0,$$

где G_{Newt} — гравитационная постоянная Ньютона. В другом виде это уравнение можно записать как

$$G^{ij} = 8\pi G_{\text{Newt}} T^{ij}.$$

Это **уравнение Эйнштейна**. Величины T^{ij} образуют **тензор энергии-импульса**. В общем случае, если $\mathfrak{A}_{\text{matter}}[\Phi, g]$ является действием некоторой материи с плотностью L_{matter} , то тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{ij} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial L_{\text{matter}}}{\partial g_{ij}} - \partial_s \frac{\partial L_{\text{matter}}}{\partial \partial_s g_{ij}} + \dots \right).$$

4.2. Вывод уравнения Эйнштейна

В ньютоновом пространстве времени закон Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi\rho G_{\text{Newt}}$ можно записать в терминах тензора кривизны Риччи:

$$R_{00} = 4\pi\rho G_{\text{Newt}}.$$

Основываясь на этом уравнении, Эйнштейн предположил, что релятивистские уравнения поля для метрики g релятивистского пространства времени должны иметь вид

$$R_{ij} = 8\pi G_{\text{Newt}} T_{ij}.$$

Вместе с тем, это уравнение неверно. Поскольку T_{ij} являются компонентами тензора энергии-импульса, определяемого из действия, дивергенция правой части равна нулю. В то же время, дивергенция правой части уравнения в общем случае отлична от нуля, что ведет к противоречию.

Для определения левой части уравнения, Гильберт предложил рассмотреть действие

$$\mathfrak{A}_{\text{Hilbert}}[g] = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R_{ij} g^{ij} d^4x.$$

Стационарные точки функционала $\mathfrak{A}_{\text{Hilbert}}$ могут быть определены как решения соответствующих уравнений Эйлера-Лагранжа. Для их получения определим вариацию $\mathfrak{A}_{\text{Hilbert}}$:

$$\delta\mathfrak{A}_{\text{Hilbert}}[g] = \int_{\mathcal{M}} \{ \delta\sqrt{-g} R_{ab} g^{ab} + \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab} + \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} \} d^4x. \quad (18.4.1)$$

Используя формулу производной детерминанта (формулу Фосса–Вейля), получаем

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)g^{ab}\delta g_{ab} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}\delta g_{ab}.$$

Принимая во внимание тождество $g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a$, приводящее к уравнению

$$\delta(g^{ab})g_{bc} + g^{ab}\delta g_{bc} = 0,$$

мы приходим к равенству

$$\delta g^{ab} = -g^{am}g^{bn}\delta g_{mn}.$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что координаты, порожденные выбранной картой, являются нормальными относительно точки p . Тогда все $\Gamma_{jk}^{i\cdot\cdot}$ (но не их производные) равны нулю в p и вариация тензора Риччи может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta R_{ab} &= \delta\partial_b\Gamma_{\cdot am}^{m\cdot\cdot} - \delta\partial_m\Gamma_{\cdot ab}^{m\cdot\cdot} = \partial_b\delta\Gamma_{\cdot am}^{m\cdot\cdot} - \partial_m\delta\Gamma_{\cdot ab}^{m\cdot\cdot} = \\ &= \nabla_b\delta\Gamma_{\cdot am}^{m\cdot\cdot} - \nabla_m\delta\Gamma_{\cdot ab}^{m\cdot\cdot}, \end{aligned}$$

поскольку δ и ∂ перестановочны, то все слагаемые, содержащие Γ , равны нулю, а частные производные (в точке p) совпадают соответствующими ковариантными производными. Имея в виду, что многообразие \mathcal{M} снабжено связностью Леви-Чивиты, (и потому $\nabla_c g^{ab} = 0$), получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab} &= \sqrt{-g}g^{ab}\nabla_b\delta\Gamma_{\cdot am}^{m\cdot\cdot} - \sqrt{-g}g^{ab}\nabla_m\delta\Gamma_{\cdot ab}^{m\cdot\cdot} = \\ &= \sqrt{-g}\nabla_b(g^{ab}\delta\Gamma_{\cdot am}^{m\cdot\cdot}) - \sqrt{-g}\nabla_m(g^{ab}\delta\Gamma_{\cdot ab}^{m\cdot\cdot}). \end{aligned}$$

Наконец, используя формулу Фосса–Вейля, приходим к равенству

$$\sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab} = \partial_b(\sqrt{-g}\delta A^b) - \partial_m(\sqrt{-g}\delta B^m) = \partial_b(\sqrt{-g}(\delta A^b - \delta B^b)),$$

в котором $\delta A^b = g^{ab}\delta\Gamma_{\cdot am}^{m\cdot\cdot}$, $\delta B^b = g^{am}\delta\Gamma_{\cdot am}^{b\cdot\cdot}$.

Собирая все слагаемые в (18.4.1), получаем выражение:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{A}_{\text{Hilbert}}[g] &= \int_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{mn} \delta g_{mn} R_{ab} g^{ab} - \sqrt{-g} g^{am} g^{bn} \delta g_{mn} R_{ab} + \right. \\ &\quad \left. + \partial_b (\sqrt{-g} (\delta A^b - \delta B^b)) \right\} d^4x = \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left\{ \sqrt{-g} \delta g_{mn} \left(\frac{1}{2} g^{mn} S - R^{mn} \right) \right\} d^4x + \int_{\mathcal{M}} \partial_b (\sqrt{-g} (\delta A^b - \delta B^b)) d^4x. \end{aligned}$$

Здесь S — скалярная кривизна. Последнее слагаемое является интегралом от дивергенции, следуя стандартным обоснованиям (см. [3]) мы считаем его равным нулю. В этой связи, ввиду функциональной независимости компонент g_{mn} ,

$$(\delta \mathfrak{A}_{\text{Hilbert}}[g] = 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} g^{mn} S - R^{mn} = 0 \right). \quad (18.4.2)$$

Используется следующее обозначение для **тензора Эйнштейна**:

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} S, \quad G_{ij} = g_{ia} g_{jb} G^{ab}.$$

Тогда уравнения (18.4.2) могут быть переписаны в виде

$$\nabla_i G^{ij} = 0. \quad (18.4.3)$$

Заметим, что с чисто геометрической точки зрения, тензор Эйнштейна удовлетворяет тождеству Бианки, которое имеет вид (18.4.3).

Если пространство наполнено материей, то действие $\mathfrak{A}_{\text{Hilbert}}$ усложняется. Например, если мы примем во внимание электромагнитное взаимодействие, то $\mathfrak{A}_{\text{Hilbert}}$ зависит от метрики и электромагнитного потенциала, что приводит к теории Эйнштейна – Максвелла. Таким образом, в случае наличия материи, уравнения имеют вид:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} S g_{ij} = 8\pi G_{\text{Newt}} T_{ij}. \quad (18.4.4)$$

Эти уравнения были получены Гильбертом. Используя физические рассуждения, Эйнштейн пришел к тем же уравнениям примерно в то же время [4]. Уравнения (18.4.4) называются **уравнениями Эйнштейна**, а действие $\mathfrak{A}_{\text{Hilbert}}$ называется **действием Эйнштейна – Гильберта**.

5. Частные решения уравнений Эйнштейна

Уравнения Эйнштейна являются уравнениями в частных производных. Далее приведены некоторые частные решения.

5.1. Решение Шварцшильда

Пусть \mathcal{M} — плоское пространство (Минковского), снабженное псевдо-декартовой картой (x^0, x^1, x^2, x^3) , а \mathcal{B} — открытый $3D$ -шар радиуса R с центром в начале псевдо-декартовой системы координат $(\sigma, (\mathbf{i}_k)_{k=0}^3)$, то есть,

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{B} := \{ \sigma + x^1 \mathbf{i}_1 + x^2 \mathbf{i}_2 + x^3 \mathbf{i}_3 \mid \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} < R \}.$$

Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{B}}$ — открытое подмножество \mathcal{M} — внешность \mathcal{B} . Следуя К. К. Шварцшильду, определим кривизну \mathcal{M} , вызванную наполнением \mathcal{B} невзаимодействующей материей (пыль) массы M . Для этого используем полуобратный метод. Принимая во внимание сферическую симметрию, выберем карту (\mathcal{U}, h) на \mathcal{M} , которая связана с псевдо-декартовой картой с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x^0 &= t, \\ x^1 &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ x^2 &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ x^3 &= r \cos \theta. \end{aligned} \tag{18.5.1}$$

Компоненты метрики, порожденной (18.5.1), и ее обратной, имеют вид

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{g}_{00} &= 1, & \overset{\circ}{g}_{11} &= -1, & \overset{\circ}{g}_{22} &= -r^2, & \overset{\circ}{g}_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta, \\ \overset{\circ}{g}^{00} &= 1, & \overset{\circ}{g}^{11} &= -1, & \overset{\circ}{g}^{22} &= -\frac{1}{r^2}, & \overset{\circ}{g}^{33} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Квадрат интервала, $d \overset{\circ}{s}^2$, может быть записан как (здесь и далее мы полагаем, что скорость света равна $c = 1$)

$$\overset{\circ}{g} = dt \otimes dt - dr \otimes dr - r^2 d\theta \otimes d\theta - r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi. \tag{18.5.2}$$

Теперь предположим, что множество B наполнено массовыми частицами, не порождающими полевого взаимодействия, которые превращают \mathcal{M} в искривленное пространство время. Для определения метрики искривленного многообразия \mathcal{M} , сконструируем обобщение (18.5.2),

$$g = U dt \otimes dt - V dr \otimes dr - W r^2 d\theta \otimes d\theta - X r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi,$$

где U, V, W, X — функции координат. Принимая во внимание:

- (i) сферическую симметрию по отношению к пространственным координатам;
- (ii) статический характер задачи,

мы заключаем, что U, V, W, X не зависят от θ, φ ; более того, $W = X = 1$ и все эти функции не зависят от t . В этой связи,

$$ds^2 = U(r) dt \otimes dt - V(r) dr \otimes dr - r^2 d\theta \otimes d\theta - r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi.$$

Следовательно,

$$g_{00} = U(r), \quad g_{11} = -V(r), \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (18.5.3)$$

$$g^{00} = \frac{1}{U(r)}, \quad g^{11} = -\frac{1}{V(r)}, \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (18.5.4)$$

Для компонент метрики (18.5.3) мы можем определить коэффициенты связности $\Gamma^i{}_{jk}$:

$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{01} = \Gamma^0{}_{10} &= \frac{U'}{2U}, & \Gamma^1{}_{00} &= \frac{U'}{2V}, & \Gamma^1{}_{11} &= \frac{V'}{2V}, \\ \Gamma^1{}_{22} &= -\frac{r}{V}, & \Gamma^1{}_{33} &= -\frac{r}{V} \sin^2 \theta, & \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2{}_{33} &= -\cos \theta \sin \theta, & \Gamma^3{}_{13} = \Gamma^3{}_{31} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{32} &= \cot \theta. \end{aligned} \quad (18.5.5)$$

Теперь мы можем определить компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{U''}{2V} + \frac{U'V'}{4V^2} + \frac{(U')^2}{4UV} - \frac{1}{r} \frac{U'}{V}, \\ R_{11} &= \frac{U''}{2U} - \frac{(U')^2}{4U^2} - \frac{U'V'}{4UV} - \frac{1}{r} \frac{V'}{V}, \\ R_{22} &= \frac{rU'}{2UV} + \frac{1}{V} - \frac{rV'}{2V^2} - 1, \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

и скалярную кривизну $R = g^{ij}R_{ij}$,

$$S = -\frac{U''}{UV} + \frac{U'V'}{2UV^2} + \frac{(U')^2}{2U^2V} - \frac{2U'}{rUV} + \frac{2V'}{rV^2} + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V}\right).$$

Тензорное уравнение Эйнштейна сводится к следующей системе трех нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{V'}{V} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V}\right) &= 0, \\ -\frac{U'}{rUV} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V}\right) &= 0, \\ -\frac{U'}{U} + \frac{V'}{V} - \frac{rU''}{U} + \frac{rU'V'}{2UV} + \frac{r(U')^2}{2U^2} &= 0, \end{aligned} \quad (18.5.6)$$

допускающей решение³

$$V = \frac{1}{1 - A/r}, \quad U = B \left(1 - \frac{A}{r}\right),$$

где A и B — постоянные интегрирования. Они могут быть выбраны таким образом, чтобы полученная метрика в нерелятивистском приближении давала закон тяготения Ньютона [5]:

$$A = 2MG_{\text{Newt}}, \quad B = 1.$$

Таким образом, метрика Шварцшильда g имеет вид

$$g = \left(1 - \frac{2MG_{\text{Newt}}}{r}\right) dt \otimes dt - \left(1 - \frac{2MG_{\text{Newt}}}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr - r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 d\varphi \otimes d\varphi).$$

Заметим, что метрика Шварцшильда:

- (i) сферически симметрична
- (ii) асимптотически плоская (когда $r \rightarrow \infty$, она стремится к метрике Минковского).

Постоянная A обозначается через r_s и называется **радиусом Шварцшильда**. То есть, $r_s = 2MG_{\text{Newt}}$.

³Функция V может быть определена из первого уравнения (18.5.6), а функция — из второго уравнения (18.5.6), при найденной функции V . Легко проверить, что полученные таким образом функции U и V удовлетворяют третьему уравнению (18.5.6).

5.2. Решение Керра

Пусть имеется тело массы M , вращающееся с моментом импульса J . Введем координаты (t, r, θ, φ) , связанные с псевдо-декартовыми координатами равенствами [6]:

$$\begin{aligned} x^0 &= t, \\ x^1 &= \sqrt{r^2 + a^2} \cos \varphi \sin \theta, \\ x^2 &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \varphi \sin \theta, \\ x^3 &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (18.5.7)$$

в которых $a = J/M$. В координатах (t, r, θ, φ) (18.5.7) метрика Керра может быть представлена как [7]

$$\begin{aligned} g &= \left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2}\right) dt \otimes dt - \frac{\rho^2}{\Delta} dr \otimes dr - \rho^2 d\theta \otimes d\theta - \\ &- \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi + \frac{r_s r a}{\rho^2} \sin^2 \theta (d\varphi \otimes dt + dt \otimes d\varphi), \end{aligned}$$

где r_s — радиус Шварцшильда, а

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - r_s r + a^2.$$

Определим тетрады $h_i = h_i^{\cdot j} \partial_j$ и $h^i = h^i_{\cdot j} dx^j$ со свойством $g(h_i, h_j) = \eta_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, 3$. То есть,

$$\eta_{ij} = g_{kl} h_i^{\cdot k} h_j^{\cdot l}.$$

Справедливы обратные соотношения:

$$g_{ij} = \eta_{kl} h^{\cdot k}_i h^{\cdot l}_j.$$

Используя эти соотношения, можно определить компоненты тетрады Керра [7]:

$$[h^{\cdot i}_{\cdot j}] = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & 0 & 0 & \eta \\ 0 & \gamma_{11} \sin \theta \cos \varphi & \gamma_{22} \cos \theta \cos \varphi & -\beta \sin \varphi \\ 0 & \gamma_{11} \sin \theta \sin \varphi & \gamma_{22} \cos \theta \sin \varphi & \beta \cos \varphi \\ 0 & \gamma_{11} \cos \theta & -\gamma_{22} \sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_{00} = \sqrt{g_{00}}$, $\gamma_{ii} = \sqrt{-g_{ii}}$, $\beta^2 = \eta^2 - g_{33}$ и $\eta = g_{03}/\gamma_{00}$. Далее,

$$[h_{i\cdot}^{\cdot j}] = \begin{pmatrix} \gamma_{00}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta g^{03} \sin \varphi & \gamma_{11}^{-1} \sin \theta \cos \varphi & \gamma_{22}^{-1} \cos \theta \cos \varphi & -\beta^{-1} \sin \varphi \\ \beta g^{03} \cos \varphi & \gamma_{11}^{-1} \sin \theta \sin \varphi & \gamma_{22}^{-1} \cos \theta \sin \varphi & \beta^{-1} \cos \varphi \\ 0 & \gamma_{11}^{-1} \cos \theta & -\gamma_{22}^{-1} \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

В рамках теории гравитации, основанной на абсолютном параллелизме, гравитация представлена кручением, а не кривизной. Связность Вайценбока является примером аффинной связности, которая обладает ненулевым кручением, но нулевыми кривизной и неметричностью⁴. Ее коэффициенты связаны с тетрадой (h_i) следующим образом:

$$\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot} = h_i^{\cdot i} \partial_k h_{\cdot j}^l. \quad (18.5.8)$$

5.3. Решение Рейснера-Нордстрема

Предположим, что имеется массивное заряженное сферическое тело. Тогда, в координатах (t, r, θ, φ) имеем

$$g = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_q^2}{r^2}\right) dt \otimes dt - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_q^2}{r^2}\right)^{-1} dr \otimes dr - r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 d\varphi \otimes d\varphi),$$

где r_s — радиус Шварцшильда, а $r_q^2 = \frac{q^2 G_{\text{Newt}}}{4\pi\epsilon_0}$. Здесь q — заряд, а $1/(4\pi\epsilon_0)$ — постоянная Кулона.

Библиография

1. Schuller Frederic P. All spacetimes beyond Einstein (Obergurgl Lectures) // arXiv. — 2011. — P. 1–44. — 1111.4824.
2. Sachs Rainer, Wu H.-H. **General Relativity for Mathematicians**. — Springer-Verlag New York, 1977.

⁴Связность Вайценбока определяется путем применения метода подвижного репера к тетраде (h_i) .

3. Poisson Eric. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. — Cambridge University Press, 2004.
4. Logunov Anatolii A, Mestvirishvili Mirian A, Petrov Vladimir A. How were the Hilbert-Einstein equations discovered? // *Physics-Uspekhi*. — 2004. — Vol. 47, no. 6. — P. 607.
5. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* / Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum et al. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. — 2 edition. — Cambridge University Press, 2003.
6. Boyer Robert H., Lindquist Richard W. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric // *Journal of Mathematical Physics*. — 1967. — Vol. 8.
7. Aldrovandi Ruben, Pereira Jose G. Teleparallel Gravity. An Introduction. — Springer Netherlands, 2013. — Vol. 173.

1. Уравнения Эделена и калибровочная теория дефектов

1.1. 1-формы дисторсии

Классическая механика континуума основывается на следующем предположении: для тела \mathfrak{B} существует форма \mathcal{S}_R в трехмерном евклидовом пространстве, свободная от напряжений. Отклик тела определяется относительно этой формы. Если $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — деформация из отсчетной формы \mathcal{S}_R в некоторую другую форму \mathcal{S} , то ее локализация первого порядка определяется тремя точными 1-формами. Действительно, в точке $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}_R$ градиент деформации определяется равенством $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{p}} = T_{\boldsymbol{p}}\gamma$. Предположим, что по каким-то причинам на отсчетной и актуальной формах ввели криволинейные координаты с помощью координатных отображений

$$\begin{aligned} H : \mathcal{S}_R &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \boldsymbol{p} &\mapsto (Q^1, Q^2, Q^3), \\ h : \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \boldsymbol{p} &\mapsto (q^1, q^2, q^3). \end{aligned}$$

Тогда отображение γ представлено скалярными функциями $\gamma_q^k : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, где $\gamma_q^k = h^k \circ \gamma$. Здесь h^k — компонента координатного

отображения¹ h . Композиция $\gamma_{q;Q}^k = \gamma_q^k \circ H^{-1}$ является координатным представлением γ относительно карт на гладких многообразиях \mathcal{S}_R и \mathcal{S} . Градиент деформации имеет следующее координатное представление:

$$\mathbf{F}_{\mathcal{P}} = \frac{\partial \gamma_{q;Q}^k}{\partial Q^n} \Big|_{H(\mathcal{P})} \partial_k|_{\gamma(\mathcal{P})} \otimes dQ^n|_{\mathcal{P}}.$$

Вместе с тем²,

$$d_{\mathcal{P}} \gamma_q^k = \frac{\partial \gamma_{q;Q}^k}{\partial Q^n} \Big|_{H(\mathcal{P})} dQ^n|_{\mathcal{P}},$$

и по этой причине

$$\mathbf{F} = \partial_{\mathfrak{k}} \otimes F^{\mathfrak{k}}, \quad F^{\mathfrak{k}} = d\gamma_q^{\mathfrak{k}}.$$

Здесь используется фрактурное обозначение \mathfrak{k} для индекса в $F^{\mathfrak{k}}$ для того, чтобы подчеркнуть, что поля $F^{\mathfrak{k}}$ не являются компонентами вектора. Поскольку $dF^{\mathfrak{k}} = d \circ d\gamma_q^{\mathfrak{k}} = 0$, то 1-формы $F^{\mathfrak{k}}$ точны.

Замечание 19.1. Отметим, что $F^1 \wedge F^2 \wedge F^3 \neq 0$. Действительно,

$$F^1 \wedge F^2 \wedge F^3 = \det \left[\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \right] dQ^1 \wedge dQ^2 \wedge dQ^3,$$

где $\det \left[\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \right] \neq 0$, поскольку γ — диффеоморфизм.

Условие $dF^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, для полей $F^i \in \Omega^1(\mathcal{S}_R)$ является необходимым для существования деформации γ . Теория непрерывно распределенных дефектов начинается с отказа от этого условия [1]. То есть, зафиксирована некоторая форма \mathcal{S}_R и заданы не обязательно точные 1-формы³ $\beta^i \in \Omega^1(\mathcal{S}_R)$. От этих форм лишь требуется, чтобы они удовлетворяли условию $\beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \beta^3 \neq 0$ (поскольку материя не исчезает). Мы будем называть поля β^i **1-формами полной дисторсии**.

¹То есть, $h(\mathcal{P}) = (h^1(\mathcal{P}), h^2(\mathcal{P}), h^3(\mathcal{P}))$.

²Здесь символ d обозначает операцию внешнего дифференцирования.

³То есть, в общем случае, $d\beta^i \neq 0$.

1.2. Реперы и формы объема

В настоящем разделе трехмерное евклидово аффинное пространство будет обозначаться как \mathcal{E}^3 . Индексы, меняющиеся от 1 до 3, обозначаются заглавными латинскими буквами. Выбраны декартовы координаты $(x^i)_{i=1}^3$ и ориентация. Форма объема на \mathcal{E}^3 представлена полем $\mu = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Координатный репер $(\partial_A)_{A=1}^3$ на \mathcal{E}^3 определяет совокупность $(\mu_A)_{A=1}^3$ дифференциальных 2-форм $\mu_A := \partial_A \lrcorner \mu$, составляющих репер для $\Omega^2(\mathcal{E}^3)$. Можно интерпретировать поля μ_A как элементы площади.

Через $\vec{\mathcal{E}}^4$ будем обозначать произведение $\vec{\mathcal{E}}^3 \times \mathbb{R}$. Множество $\vec{\mathcal{E}}^4$ можно снабдить структурой 4-мерного векторного пространства с покоординатными операциями сложения векторов и умножения их на скаляр. Тогда приходим к следующей прямой сумме: $\vec{\mathcal{E}}^4 = (\vec{\mathcal{E}}^3 \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathbb{R})$. В силу изоморфизмов $\vec{\mathcal{E}}^3 \times \{0\} \cong \vec{\mathcal{E}}^3$ и $\{0\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, мы можем записать представление $(\mathbf{h}, t) = h^A \partial_A + t$ для вектора $(\mathbf{h}, t) \in \vec{\mathcal{E}}^4$.

Структуры евклидовых аффинных пространств \mathcal{E}^3 и \mathbb{R} индуцируются на произведение $\mathcal{E}^4 = \mathcal{E}^3 \times \mathbb{R}$, превращая последнее в четырехмерное евклидово аффинное пространство с трансляционным векторным пространством $\vec{\mathcal{E}}^4$. Индексы, меняющиеся от 1 до 4, обозначаются строчными латинскими символами. Координатный репер $(\partial_A)_{A=1}^3$ на \mathcal{E}^3 индуцирует координатный репер $(\partial_i) = ((\partial_I)_{I=1}^3, \partial_t)$ на \mathcal{E}^4 . Здесь символ t обозначает естественную координаты на \mathbb{R} . Также будет часто использоваться обозначение ∂_4 для ∂_t . Форма объема на \mathcal{E}^4 обозначается как π и имеет вид $\pi = \mu \wedge dt$. Репер $(\partial_i)_{i=1}^4$ позволяет определить дифференциальные формы $\pi_a = \partial_a \lrcorner \pi$, $a = 1, 2, 3, 4$. Семейство $(\pi_a)_{a=1}^4$ составляет репер пространства $\Omega^3(\mathcal{E}^4)$.

Используются две операции взятия внешней производной. Первая из них, \bar{d} , определяется равенством $\bar{d} = dx^I \wedge \partial_I$, а вторая, d , определяется как $d = dx^i \wedge \partial_i$. Эти операции связаны соотношением

$$d = \bar{d} + dt \wedge \partial_4,$$

где dt — дуальный корепер к ∂_4 . Здесь операция сложения (+) понимается в смысле изоморфизмов $\vec{\mathcal{E}}^3 \times \{0\} \cong \vec{\mathcal{E}}^3$, $\{0\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

1.3. Уравнения Эделена

Для описания плотностей дефектов и их токов, определим следующие дифференциальные формы [2]:

(a) 2-формы плотности дислокации: $\alpha^i = \alpha^{Ai}\mu_A$;

(b) 1-формы тока дислокации: $J^i = J_A^i dx^A$;

(c) 2-формы тока дисклинации: $S^i = S^{Ai}\mu_A$;

(d) 3-формы плотности дисклинации: $Q^i = q^i\mu$,

зависящие как от временных, так и от пространственных переменных. Поля α^i , J^i , S^i и Q^i удовлетворяют уравнениям [2]:

$$\partial_t \alpha^i = -\bar{d}J^i - S^i, \quad \partial_t Q^i = -\bar{d}S^i, \quad \bar{d}\alpha^i = Q^i, \quad \bar{d}Q^i = 0, \quad (19.1.1)$$

которые можно представить в компонентах как (здесь e^{ABC} — альтернатор):

$$\partial_t \alpha^{Ai} = -e^{ABC} \partial_B J_C^i - S^{Ai}, \quad \partial_A \alpha^{Ai} = q^i, \quad \partial_t q^i = -\partial_A S^{Ai}.$$

Отметим, что последнее уравнение (19.1.1), $\bar{d}Q^i = 0$, удовлетворяется автоматически, поскольку поле Q^i является 3-формой.

Кинематические уравнения поля [2]

$$\partial_t k^i = \bar{d}w^i - S^i, \quad \bar{d}k^i = Q^i, \quad \partial_t \beta^i = \bar{d}V^i - J^i - w^i, \quad \bar{d}\beta^i = \alpha^i - k^i, \quad (19.1.2)$$

определяются первыми интегралами системы (19.1.1). Здесь

(a) $k^i = k^{Ai}\mu_A$ — 2-формы изгиба-кручения;

(b) $w^i = w_A^i dx^A$ — 1-формы спина;

(c) $\beta^i = \beta_A^i dx^A$ — 1-формы дисторсии;

(d) V^i — 0-формы скорости.

Уравнения (19.1.2) имеют следующие представления в компонентах:

$$\begin{aligned} \partial_t k^A &= -S^{Ai} + e^{ABC} \partial_B w_C^i, & \partial_A k^{Ai} &= q^i, \\ \partial_t \beta_A^i &= \partial_A V^i - J_A^i - w_A^i, & e^{ABC} \partial_B \beta_C^i &= \alpha^{Ai} - k^{Ai}. \end{aligned}$$

Введем 3-формы Ω^i дисклинации and 2-формы D^i дислокации в \mathcal{E}^4 [1, 2]:

$$\begin{aligned}\Omega^i &= -S^i \wedge dt + Q^i = S^{Ai} \mu_A \wedge dt + q^i \mu, \\ D^i &= J^i \wedge dt + \alpha^i = J_A^i dx^A \wedge dt + \alpha^{Ai} \mu_A\end{aligned}\quad (19.1.3)$$

Использование этих полей позволяет представить уравнения (19.1.1) в лаконичном виде:

$$d\Omega^i = 0, \quad dD^i = \Omega^i. \quad (19.1.4)$$

Первые интегралы уравнений (19.1.1), а свою очередь, могут быть представлены как

$$D^i = dH^i + K^i,$$

где

$$(a) \quad H^i = V^i dt + \beta^i;$$

$$(b) \quad K^i = -w^i \wedge dt + k^i.$$

1.4. Баланс импульса

Полевые уравнения теории дефектов необходимо дополнить балансом импульса. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}(H_{\cdot 4}^i)$ — плотность кинетической энергии, а $\Psi = \Psi(H_{\cdot A}^i)$ — плотность потенциальной энергии⁴. Определим 3-формы z_i на \mathcal{E}^4 равенствами [1]

$$z_i = \frac{\partial(\mathcal{T} - \Psi)}{\partial H_{\cdot a}^i} \pi_a = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial H_{\cdot 4}^i} \pi_4 - \frac{\partial \Psi}{\partial H_{\cdot A}^i} \pi_A.$$

Используя стандартную терминологию, мы будем называть $p_i := \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial H_{\cdot 4}^i}$

компонентами импульса, а $\sigma_i^{\cdot A} := \frac{\partial \Psi}{\partial H_{\cdot A}^i}$ — компонентами тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа. Тогда

$$z_i = -\sigma_i^{\cdot A} \pi_A + p_i \pi_4 = -\sigma_i^{\cdot A} \mu_A \wedge dt + p_i \mu.$$

Баланс импульса эквивалентен утверждению, что поля z_i являются точными 3-формами, то есть,

$$dz_i = (\partial_4 p_i - \partial_A \sigma_i^{\cdot A}) \pi = 0. \quad (19.1.5)$$

⁴Мы заменили зависимость потенциальной энергии от градиента деформации на зависимость от дисторсии.

1.5. Звездообразная область

Пусть $\mathcal{S}_R \subset \mathcal{E}^3$ является формой тела \mathfrak{B} . Она называется **звездообразной**, если существует точка $\rho_0 \in \mathcal{S}_R$ (центр), такая, что отрезок прямой, соединяющий ρ_0 и любую другую точку $\rho \in \partial\mathcal{S}_R$ пересекает $\partial\mathcal{S}_R$ только в ρ . Далее рассматривать только звездообразную область \mathcal{S}_R . В этом случае, в силу леммы Пуанкаре [1, 3], условия $\bar{d}F^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, и $F^1 \wedge F^2 \wedge F^3 \neq 0$ для 1-форм $F^i \in \Omega^1(\mathcal{S}_R)$ становятся достаточными для существования деформации $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{E}^3$, такой, что $F^i = \bar{d}\gamma^i$.

1.6. Оператор гомотопии

Полную дисторсию можно разложить в сумму двух слагаемых, одно из которых является точной формой, а другое — точной формой не является. Для этого определим специальное линейное отображение, называемое **оператором гомотопии** [1]. Это отображение $\mathcal{H} : \Omega^p(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{p-1}(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R})$, $p = 1, 2, 3, 4$, такое, что для любой p -формы $\omega \in \Omega^p(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\mathcal{H}\omega = \int_0^1 \lambda^{p-1} \mathcal{X} \lrcorner \tilde{\omega}(\lambda) d\lambda,$$

где $\mathcal{X} = (x^i - x_0^i)\partial_i$, сумма по $i = 1, 2, 3, 4$, (x_0^i) — координаты центра, а

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \omega_{i_1 \dots i_p}(x_0^b + \lambda(x^b - x_0^b)) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Определенное таким образом отображение \mathcal{H} имеет свойство [1]:

$$d\mathcal{H} + \mathcal{H}d = \text{Id}_{\Omega^p(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R})}.$$

В этой связи, 1-форму H^i можно представить в виде

$$H^i = d\mathcal{H}H^i + \mathcal{H}dH^i. \quad (19.1.6)$$

Определим гладкую скалярную функцию $\gamma^i = \mathcal{H}H^i + h^i$, где $dh^i = 0$. Тогда $d\gamma^i = d\mathcal{H}H^i$ и 1-форма $d\mathcal{H}H^i$ является точной частью H^i . Второе слагаемое в (19.1.6), то есть, 1-форма $\mathcal{H}dH^i$, называется антиточной частью H^i . Именно в ней содержится вся информация о несовместности.

Пусть $E^1(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R})$ — пространство всех точных 1-форм, а $A^1(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R})$ — пространство всех антиточных 1-форм. Тогда справедливы прямая сумма [1]

$$\Omega^1(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R}) = E^1(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R}) \oplus A^1(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R}),$$

и утверждение: если $\nu \in A^1(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R})$, то $\nu = \mathcal{H}d\nu$. Это означает, что $\mathcal{H}d = \text{Id}_{A^1(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R})}$ и оператор гомотопии \mathcal{H} является обратным к d в пространстве $A^1(\mathcal{S}_R \times \mathbb{R})$.

1.7. Матричное представление

Уравнения (19.1.4) и (19.1.5) могут быть представлены в матричной форме. Определим матрицы

$$H = \begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix},$$

$$Z = (z_1 \ z_2 \ z_3).$$

Тогда, используя их, придем к представлениям

$$d\Omega = 0, \quad \Omega = dD = dK, \quad D = dH + K, \quad dZ = 0,$$

для уравнений (19.1.4) и (19.1.5).

1.8. Структурные уравнения и их интерпретация

Пусть ω является 1-формой связности расслоения реперов над \mathcal{S}_R , а R , T и ν , соответственно, — 2-форма кривизны, 2-форма кручения и каноническая 1-форма. Эти поля связаны структурными уравнениями

$$\begin{aligned} d\nu &= -\omega \wedge \nu + T, \\ dT &= -\omega \wedge T + R \wedge \nu, \\ d\omega &= -\omega \wedge \omega + R, \\ dR &= R \wedge \omega - \omega \wedge R, \end{aligned} \tag{19.1.7}$$

которые можно формально разрешить относительно полей ν , T , ω and R , если подействовать на них оператором гомотопии \mathcal{H} [1]:

$$\begin{aligned}\nu &= A[d\gamma + \eta - \mathcal{H}(\omega_A \wedge d\gamma)], \\ T &= A[d\eta + \omega_A \wedge \eta + \mathcal{H}(d\omega_A \wedge d\gamma) - \omega_A \wedge \mathcal{H}(\omega_A \wedge d\gamma)], \\ \omega &= A\omega_A A^{-1} - (dA)A^{-1}, \\ R &= A(d\omega_A + \omega_A \wedge \omega_A)A^{-1}.\end{aligned}$$

Здесь A — решение матричного интегрального уравнения $A = I - \mathcal{H}(\omega_A)$, а γ , η и ω_A определены как

$$\gamma = \gamma_0 + \mathcal{H}(A^{-1}\nu), \quad \eta = \mathcal{H}(A^{-1}T), \quad \omega_A = \mathcal{H}(A^{-1}RA).$$

0-форма γ_0 такова, что $d\gamma_0 = 0$.

Отождествим матрицы H и D с формами ν и T соответственно, и выберем [1]

$$\Omega = R \wedge \nu - \omega \wedge T, \quad K = \omega \wedge \nu. \quad (19.1.8)$$

Полученные кинематические уравнения дефектов удовлетворяются при любом выборе ω и R . Используя разрешенные структурные уравнения, приходим к эквивалентным представлениям для H и D :

$$\begin{aligned}H &= A(d\gamma + \eta - \mathcal{H}(\omega_A \wedge d\gamma)), \\ D &= A(d\eta + \omega_A \wedge \eta + \mathcal{H}(d\omega_A \wedge d\gamma) - \omega_A \wedge \mathcal{H}(\omega_A \wedge d\gamma)).\end{aligned}$$

Их подстановка в (19.1.8) дает

$$\begin{aligned}K &= A(\omega_A - A^{-1}dA) \wedge (d\gamma + \eta - \mathcal{H}(\omega_A \wedge d\gamma)), \\ \Omega &= A[(d\omega_A - \omega_A \wedge \omega_A) \wedge (d\gamma + \eta - \mathcal{H}(\omega_A \wedge d\gamma)) - \\ &\quad - (\omega_A - A^{-1}dA) \wedge (d\eta + \omega_A \wedge \eta + \mathcal{H}(\omega_A \wedge d\gamma) - \omega_A \wedge \mathcal{H}(\omega_A \wedge d\gamma))].\end{aligned}$$

Полученные выражения для H , D , K и Ω являются уравнениями относительно γ , η , ω_A , A . Задача решения кинематических уравнений равносильна задаче определения этих полей.

Пусть дисклинации отсутствуют. Тогда $\Omega = 0$, $K = 0$, $A = I$ (единичная матрица), а выражения, полученные выше, примут вид [1]

$$H = d\gamma + \eta, \quad D = d\eta, \quad \text{или} \quad \eta = \mathcal{H}(D).$$

Если дислокации также отсутствуют, то есть, в теле вообще нет дефектов, то приходим к классическим кинематическим соотношениям:

$$D = K = 0, \quad \Omega = 0, \quad \omega_A = 0, \quad \eta = 0, \quad A = I, \quad H = d\eta.$$

1.9. Калибровочный формализм

Рассмотрим лагранжиан $\mathcal{L}_0(d\gamma)$, описывающий напряженно-деформированное состояние простого тела в классической теории упругости. Пусть $A \in G_0$ — элемент группы Ли G_0 , действующий на γ слева, то есть, $\gamma' = A \triangleright \gamma$. Если A осуществляет однородное действие (то есть, не зависящее от пространственных переменных и времени), то d и A коммутируют:

$$d\gamma' = d(A \triangleright \gamma) = A \triangleright d\gamma.$$

В этом случае лагранжиан (построенный в соответствии с принципом материальной индифферентности) инвариантен по отношению к A :

$$\mathcal{L}_0(d\gamma') = \mathcal{L}_0(A \triangleright d\gamma) = \mathcal{L}_0(d\gamma).$$

Если A осуществляет неоднородное действие, то соотношение между γ' и γ становится более сложным:

$$d\gamma' = (dA) \triangleright \gamma + A \triangleright d\gamma,$$

а лагранжиан больше не инвариантен под действием A :

$$\mathcal{L}_0(d\gamma') = \mathcal{L}_0((dA) \triangleright \gamma + A \triangleright d\gamma) \neq \mathcal{L}_0(d\gamma).$$

принцип минимального смещения, принятый в теории Янга–Миллса, возвращает инвариантность лагранжиана путем замены

$$d \mapsto D : \quad d\gamma \mapsto D\gamma := d\gamma + B[\gamma].$$

Поля $B[\gamma]$ называются **калибровочными полями**. Выбор подходящих калибровочных полей позволяет сохранить инвариантность лагранжиана путем одновременной замены $\gamma \mapsto A \triangleright \gamma$ и $d \mapsto D$. В работе [1] показано, что эти калибровочные поля определяются некоторым полем связности Γ и кручением φ :

$$B[\gamma] := \Gamma\gamma + \varphi.$$

Это означает, что для заданных форм дислокации и дисклинации можно единственным образом определить структурные уравнения Картана и,

соответственно, форму связности и формы кручения, кривизны и каноническую форму, а после этого — определить калибровочные поля, компенсирующие возмущение лагранжиана вследствие неоднородного действия A . Это действие локально определяет преобразование элементарного объема в ненапряженную форму, что невозможно для дефектной среды в евклидовом пространстве. Но, совместно с действием A , осуществляется замена $d \mapsto D$. Это означает переход к неевклидовой геометрии (внутренней геометрии) среды, делающей возможной преобразования элементарных объемов «в большом», то есть, для всего тела.

Принцип минимального смещения использует определение расширенного лагранжиана, в соответствии с концепцией минимального спаривания [1]. Расширенный лагранжиан для дефектной простой среды может быть записан как

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(D\gamma) + s_1 \mathcal{L}_1(\Gamma) + s_2 \mathcal{L}_2(\varphi),$$

где $\mathcal{L}_0(D\gamma)$ описывает влияние упругих свойств материала, $\mathcal{L}_1(\Gamma)$ описывает влияние дисклинаций, а $\mathcal{L}_2(\varphi)$ описывает влияние дислокаций.

Условие стационарности действия при вариации γ дает уравнение

$$DZ = -2R \wedge \Theta, \quad (19.1.9)$$

при вариации Γ — уравнение

$$DG = \frac{1}{2}J, \quad (19.1.10)$$

а при вариации φ — уравнение

$$Z = 2DR, \quad (19.1.11)$$

в котором $R = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D}$ (детали см. в [1]). Уравнения (19.1.9), (19.1.10) и (19.1.11) называются уравнениями эволюции.

Библиография

1. Kadic A., Edelen D. G. B. A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983. — Vol. 174.

2. Edelen Dominic G.B. A four-dimensional formulation of defect dynamics and some of its consequences // *Int. J. Eng. Sci.* — 1980. — Vol. 18, no. 9. — P. 1095–1116.
3. Lee John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. — Springer New York, 2012.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

ГЛАВА 20

Термодинамика

Библиография

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

1. Макроскопический мир vs микроскопический мир

Мы привыкли к тому, что если мы возьмем камешек или мячик и сообщим ему некоторый импульс, то он будет двигаться по определенной траектории; эту траекторию мы можем найти, используя законы Ньютона. Математика даст всю исчерпывающую информацию о том, как будет двигаться этот шарик. Теперь возьмем очень большую лупу (которой не существует в природе) с тем, чтобы увидеть электрон и протон, образующие атом водорода. Что мы ожидаем увидеть? Мы ожидаем увидеть ядро, состоящее из протона, и электрон, который каким-то образом движется вокруг этого ядра. Существует ли траектория такого электрона? Нет! Бессмысленно говорить о траектории электрона. Мы не можем применять те соображения, которые применяли для мячика. Честно говоря, и у мячика нет траектории. Можно лишь говорить, что мячик с некоторой вероятностью будет двигаться по некоторой траектории, одной из бесконечного множества возможных траекторий. Однако, в нашей макроскопической лаборатории этот мячик обладает большой массой и все траектории, которые мы должны учитывать в вероятностном распределении движения шарика, настолько близко находятся друг к другу, что

мы с помощью нашего зрения не можем отличить одну от другой. Все траектории склеиваются в единую. На уровне микроструктуры такого уже сказать нельзя, поскольку массы электрона и протона принципиально меньше масс, которые обычно рассматриваются в макроскопической лаборатории. Возможные траектории (их континуум) становятся существенно отличными одна от другой. Поэтому говорить о какой-то единой траектории мы не имеем права. В этом состоит отличие между классической механикой и квантовой механикой. Особенности, связанные с квантовой механикой впервые увидели в известном со школы опыте с двумя щелями (20 век, с потоками электронов). Если один электрон попадает на экран с двумя щелями, то за экраном возникают полосы интерференции, поэтому говорить о том, что электрон движется по какой-то конкретной траектории мы не можем.

Такое сопоставление классической и квантовой механики говорит нам о том, что когда мы опускаемся на уровень микроструктуры, наши интуитивные понятия, порожденные наблюдениями за макроскопическими телами, уже играют дурную роль и уводят нас от постижения истины. Необходим математический аппарат, адекватно описывающий квантовую систему, в котором не говорилось бы о фиксированных траекториях, фиксированных измерениях, а был бы предложен иной способ оценки этих понятий.

2. Наблюдаемая

2.1. Классическая наблюдаемая

Квантовая физика основана на нескольких положениях, которые мы по очереди обсудим. Первое положение — понятие наблюдаемой. Наблюдаемая — это некоторые параметры, которые мы измеряем. В классической механике наблюдаемая определяется с помощью некоторого отображения множества Γ состояний системы на действительную ось \mathbb{R} («стрелка прибора»).

Классическая механика описывается с помощью лагранжева или гамильтонова формализма и характеризуется конфигурационным пространством Q (позиции точек). Тогда положим $\Gamma := T^*Q$. Элемент Γ — это «щуп», которым мы определяем состояние системы. Тогда **наблю-**

даемая — это непрерывное отображение

$$F : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$$

касательного расслоения конфигурационного пространства на числовую ось. Непрерывность означает, что если мы на числовой оси определяем стандартную топологию, порожденную открытыми интервалами, а на касательном расслоении над Q определяем стандартную топологию, которая характеризуется способом картирования этого касательного расслоения, то каждому открытому подмножеству \mathbb{R} будет соответствовать открытый прообраз относительно отображения F . То есть, если $O \subset \mathbb{R}$ открыто, то $F^{-1}(O) \subset \Gamma$ открыто. Предположим, что если мы подействуем отображением F на Γ , то в результате получим некоторый интервал, вложенный в \mathbb{R} . Это отражает представления экспериментатора: стрелка прибора бежит по шкале; шкала — это интервал \mathbb{R} . Здесь же мы можем акцентировать внимание на том, что мы будем понимать под наблюдаемой. Наблюдаемая есть ни что иное, как отображение, которое характеризует стрелку прибора.

Замечание 21.1. *Рассмотрим наблюдаемую материальной точки. Состояние системы будет определяться некоторой кривой в конфигурационном пространстве Q , т.е. гладким отображением $\chi : [t_0, t_1] \rightarrow Q$, где $[t_0, t_1]$ — отрезок действительной оси. Каждая точка $\chi([t_0, t_1])$ характеризуется значением позиции и скорости, которыми обладает материальная точка в соответствующий момент времени. В качестве \mathbb{R} мы можем брать полную энергию (гамильтониан), кинетическую или потенциальную энергию материальной точки. Вопрос о том, что мы выберем на шкале, — это вопрос, на который мы должны отвечать технически. Поэтому, наблюдаемая в рамках теории определяется как непрерывное отображение состояний системы на некоторые числовые значения на оси. А какие это числовые значения — должен сказать экспериментатор.*

Замечание 21.2. *Требование о том, чтобы $F(\Gamma)$ было интервалом — существенно для классической механики. Если возникают два интервала или более сложное множество, то непонятно, как мы сможем оценивать значения на этом, более сложном множестве.*

2.2. Задача двух тел

Классический пример — задачу двух тел — рассматривали Ньютон, Кулон и др. Имеются два тела (условно, Земля и Луна), которые движутся в пустом пространстве. За счет некоторого математического трюка можно от задачи о движении двух масс перейти к задаче движения одной массы относительно некоторого барицентра. Сам барицентр тоже будет описывать какую-то траекторию, которую можно найти. Если мы предположим, что потенциал, описывающий взаимодействие двух тел, — ньютоновский (или кулоновский), то есть имеет вид $V \sim -\frac{1}{r}$ (r — расстояние между телами), то тогда в этом случае, вычислив эффективный потенциал, соответствующий приведению задачи двух тел к задаче для одного тела, получим, что ему соответствует кривая на Рис. 21.1. Здесь важно, что система двух тел обладает ненулевым угловым моментом, то есть тела вращаются относительно барицентра. Если бы они не вращались, то за счет центрального притяжения одно тело упало бы на другое. Минимальной точке эффективного потенциала соответствует круговая орбита, описываемая одним телом относительно другого.

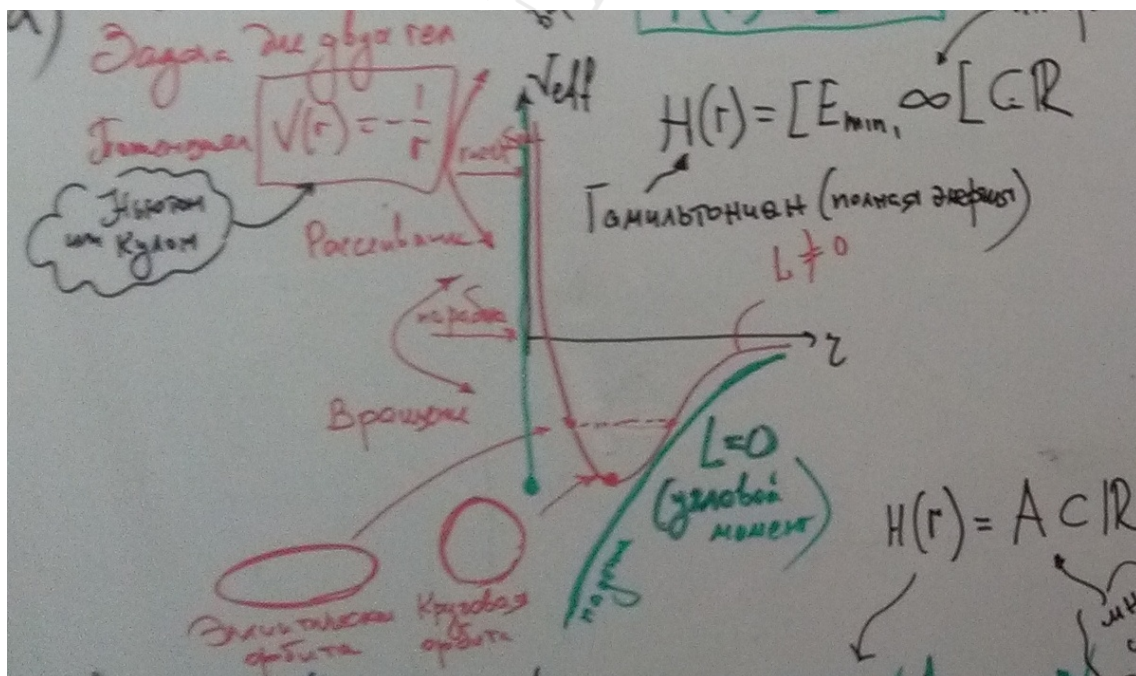


Рис. 21.1. Эффективный потенциал задачи двух тел

2.3. Атом водорода

Применим модель двух тел к атому водорода, состоящего из электрона, движущегося по некоторым орбитам вокруг ядра. Гамильтониан (полная энергия) системы объявляется наблюдаемой и соответствует расстоянию между телами. В этом случае состояние — положительная полуось. Происходит отображение на интервал $[E_{\min}, +\infty[\subset \mathbb{R}$. Это — классическая механическая система. Теперь зайдем в другую комнату, где находятся экспериментаторы, работающие с «лупой». Они изучают устройство атома водорода. Можно сказать, что атом водорода — это та пробная модель, на которой оттачивали всю теорию в течение многих десятилетий и для которой получены основные результаты, связанные с квантовой механикой. Экспериментаторы нам говорят о том, что ситуация с движением электрона вокруг ядра атома водорода существенно более сложная. Мы имеем точно такую же картинку для эффективного потенциала, ибо взаимодействие между электроном и протоном соответствует кулоновским силам электростатического взаимодействия. Казалось бы, электрону, также как и планетам, могут соответствовать различные энергетические уровни и его орбиты будут разными. Но нет, так не получается, ведь если мы будем говорить о движении электрона, то мы будем говорить о некотором токе, который течет по некоторой траектории, согласно законам электродинамики. Этот ток должен постоянно создавать электромагнитное поле вокруг себя, он должен излучать энергию в пространство; в конце концов, энергия должна исчезнуть. Электрон должен затратить всю энергию на создание этого поля и по определенной траектории упасть на протон. Ядро схлопнется и не будет существовать. В действительности, этого не происходит. Чтобы с этой неприятностью разобраться, еще в начале 20 века Бор предложил модифицировать картинку, постулировав существование лишь разрешенных энергетических состояний на Рис. 21.2. И экспериментаторы их нашли. Оказывается, что $E_{\min} = -13.6 \text{ eV}$. Следующее энергетическое состояние, реализуемое в атоме водорода, которое может быть определено спектральным методом (была получена связь энергии и частоты излучения атома), находится на $E_{\min}/4$, а следующее — на $E_{\min}/9$. И вообще, оказалось, что разрешенные энергетические уровни, которые экспери-

ментально наблюдаются, соответствуют

$$\frac{1}{n^2} E_{\min}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оказывается, что разрешенные уровни, по мере того, как мы приближаемся к нулю (при $n \rightarrow \infty$), становятся все плотнее и ноль есть точка накопления, в окрестности которой есть сколь угодно много энергетических уровней. После точки накопления, когда наблюдается рассеяние электрона, его энергетическое состояние может быть каким угодно.

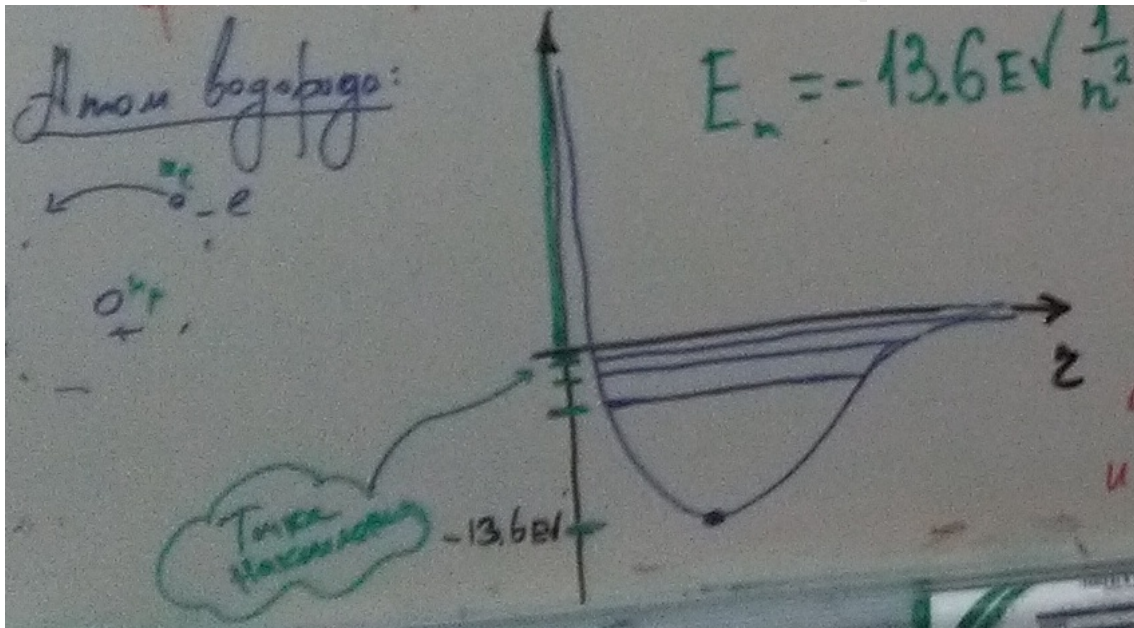


Рис. 21.2. Эффективный потенциал атома водорода

Замечание 21.3. Почему n^2 ? На уровне гипотезы предполагается, что электронное облако атома водорода обладает сферической симметрией. Если записать энергию системы в форме разложения по сферическим функциям, то собственные сферические гармоники (собственные функции оператора, который характеризует сферические гармоники, т.е. те самые зональные, тессеральные и секториальные гармоники), вычисляемые через функции Лежандра, дают множитель $1/n^2$ в предположении, что при возбуждении электрон переходит на соседнюю орбиталь, которая также обладает сферической симметрией.

Замечание 21.4. Если значение эффективного потенциала оказывается в окрестности нуля, то электрон уже не находится на замкнутой

орбите. При возбуждении электрона наблюдаемые спектральные линии начинают «концентрироваться» вокруг точки накопления. Это и есть нулевое значение. В какой-то момент мы не сможем различать эти линии и будет казаться, что наблюдается непрерывный спектр. Если еще подвести энергию, то атом разрушится и превратится в ион водорода, перестав излучать.

Получается, что если мы запишем гамильтониан системы, то с учетом рассмотренных условий образ гамильтониана на всех допустимых состояниях — отнюдь не интервал, а некоторое сложное множество, которое содержит как дискретную часть, так и непрерывную. Итак, для того, чтобы каким-то образом математически описать новый способ оценки наблюдаемых, требуется указать новый смысл, который мы вкладываем в понятие наблюдаемой.

2.4. Какой математический аппарат нужен?

Итак, нужна новая математика, которая не опирается на понятие непрерывного отображения. Мы должны работать с понятием наблюдаемой и понятием измерения. Обозначим наблюдаемую через A (например, это энергия системы), а ее множество значений — через $\sigma(A)$. Множество $\sigma(A)$, как мы видим на примере атома водорода, может иметь довольно сложную структуру. При $A = H$ (гамильтониан) оно содержит дискретную и непрерывную части¹:

$$\sigma(H) = \left\{ \frac{1}{n^2} E_{\min} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \mathbb{R}_+.$$

Более того, забегаая вперед, можно привести несколько примеров того, как устроено $\sigma(A)$. Так, для квантового гармонического осциллятора, энергия будет соответствовать лишь фиксированным значениям числовой оси с одинаковым шагом²:

$$\sigma(H) = \left\{ \hbar\nu \left(n + \frac{1}{2} \right) \mid n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \right\}.$$

¹Здесь $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

²Здесь \hbar — постоянная Планка, ν — частота.

Вместе с тем, если $A = Q$ (позиция), то $\sigma(A) = \mathbb{R}$. Пример говорит о том, что в квантовых системах вполне могут быть ситуации, аналогичные классическим системам, где область значений наблюдаемой является интервалом числовой оси и потому сама наблюдаемая может быть представлена непрерывным отображением. Еще один пример — кристалл. Рассмотрим одномерный кристалл. Он состоит из цепочки атомов; имеются свободные электроны, которые могут переходить из атома в атом. Этот кристалл обладает периодическим потенциалом; описывая этот потенциал, мы должны сказать, что здесь будут непересекающиеся замкнутые интервалы на числовой оси, соответствующей гамильтониану системы, в которых содержатся значения H . Число этих интервалов бесконечно, между ними имеются открытые интервалы — «запрещенные» состояния рассматриваемой периодической структуры.

Как мы выяснили, при описании множества значений наблюдаемой могут быть ситуации, когда область значений наблюдаемой — интервал (в частности, вся числовая ось), совокупность интервалов и множество дискретных значений с точкой накопления в нуле. Может быть ситуация, когда множество значений состоит только из дискретного множества. Все это подсказывает некоторый математический аппарат, который можно было бы использовать для описания подобных ситуаций. Он был разработан в 19 веке для описания совершенно иных систем — колебательных механических систем. Когда рассматривались колебания пластины, струны, трехмерных тел, то работали с дифференциальными операторами и их спектрами. Спектр дифференциального оператора определялся математически, из решения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля, и экспериментально. Была построена некоторая теория, в рамках которой можно было описать колебания механических систем с помощью дифференциального оператора и найти его спектр. Когда стали рассматривать неограниченные тела, например, полубесконечную струну, полубесконечную или бесконечную пластину, то оказалось, что собственные значения «склеиваются» в непрерывный континуум. Это привело к идее построения операторов с дискретным спектром и операторов с непрерывным спектром. Долгое время этот вопрос был математически сложным, но в конце 19 века была построена довольно универсальная теория, которая имела и хорошее приложение: в классической физике разложения по собственным функциям использовались для исследования колебаний, распространения тепла. Для неограниченных тел использовались анало-

гичные формулы, только они образованы не рядами Фурье, а интегралом Фурье. Математики построили общую теорию операторов в гильбертовых пространствах, в которой дифференциальные операторы могли иметь композитный спектр: спектр, состоящий из дискретных значений, и спектр, состоящий из непрерывных значений. Построение этой теории было завершено в середине 20 века в работах фон Неймана. Оказалось, что математическое описание спектра операторов очень похоже на описание множества $\sigma(A)$. Математики показали, что для каждого из множеств $\sigma(A)$, рассмотренных выше, можно подобрать дифференциальный оператор, для которого $\sigma(A)$ — спектр. Поэтому, в начале 20 века было провозглашено следующее направление развития квантовой механики: наблюдаемая рассматривается не как непрерывное отображение, а как линейный оператор, спектр которого характеризует процесс наблюдения. Здесь, конечно, приходится ломать стереотипы, поскольку мы привыкли к тому, что показание прибора — это число, на которое указывает непрерывное отображение («стрелка»). И что значит спектр значений, мы не совсем понимаем. Однако, здесь нужно вспомнить, что когда мы работаем с экспериментом, то мы проводим повторно многие эксперименты, и каждый эксперимент не похож на предыдущий. Мы говорим, что да, действительно, есть погрешность в эксперименте и поэтому мы оцениваем некоторое среднее значение, а потом оцениваем разброс этих значений. Можем даже вычислить вероятность того, что в следующем эксперименте мы получим некоторое фиксированное значение. Когда мы подойдем к экспериментатору, то он скажет, что мы получили значение с некоторой вероятностью. Если мы теперь синтезируем понятие вероятности получения заданного результата и понятие спектрального представления оператора, то мы получим очень удобный механизм для описания квантовомеханических систем. Это наверняка не единственный способ описания экспериментальных результатов, но на сегодняшний день это — единственно известный способ.

Вывод: математический аппарат представляется самосопряженными линейными операторами, действующими в комплексном гильбертовом пространстве. Это удобный формализм для описания наблюдаемых.

Замечание 21.5. *Используем пространство над полем \mathbb{C} с тем, чтобы применять формулы типа формулы Эйлера, $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Это пространство со скалярным произведением, которое несет в себе идею вычисления энергии или работы, когда скалярно перемножаются*

две величины. Мы требуем самосопряженность, поскольку прибор не может измерять комплексные числа (у самосопряженного оператора собственные числа вещественны).

3. Измерения vs состояние квантовой системы

Оказывается, что каждое наблюдение изменяет состояние квантовой системы. Это экспериментальный факт, установленный в ходе эксперимента Штерна – Герлаха (1922), который заключался в следующем. Серебро поместили в печь. В результате испарения серебра образовались потоки атомов, которые через маленькое отверстие в печи выходили наружу и попадали в систему «экран с отверстием». Основная масса ионов, конечно, оседала на экране, но некоторые из них проходили сквозь отверстие и образовывали узкий пучок атомов серебра. Заметим, что атомы серебра довольно хитроумно устроены. Есть ядро атома, состоящее из протонов и нейтронов; 47 электронов движутся по орбиталиям вокруг этого ядра. При этом, 47-й электрон особый: у него есть магнитный момент. Для исследования этого магнитного момента Штерн и Герлах поместили поток атомов серебра в неоднородное магнитное поле (магниты S и N имеют разную форму, поэтому напряженность магнитного поля меняется в пространстве) Рис. 21.3. Если мы помещаем систему с магнитным моментом — «волчок» — в неоднородное магнитное поле, то тогда в зависимости от ориентации магнитного момента будет отклонение электрона в магнитном поле в ту или иную сторону. Это отклонение определяется скалярным произведением вектора магнитного момента и вектора напряженности магнитного поля. Ожидалось, что на экране будут видны равномерно засвеченные области, куда попадают атомы с различными моментами. Однако, Штерн и Герлах обнаружили, что вместо засвеченной области имеются две точки. То есть, атомы серебра не имеют никаких промежуточных значений ориентации магнитного момента, кроме двух фиксированных. $W\tau\varphi!$? Результат этого эксперимента является одним из первых обоснований квантования физической системы. Магнитный момент, которым обладают атомы серебра, не заполняет непрерывно интервал, как ожидается в рамках классической механики, а принимает только лишь два значения -1 и 1 (с учетом масштабирования). То

есть, состояние системы определяется дискретным множеством из двух элементов.

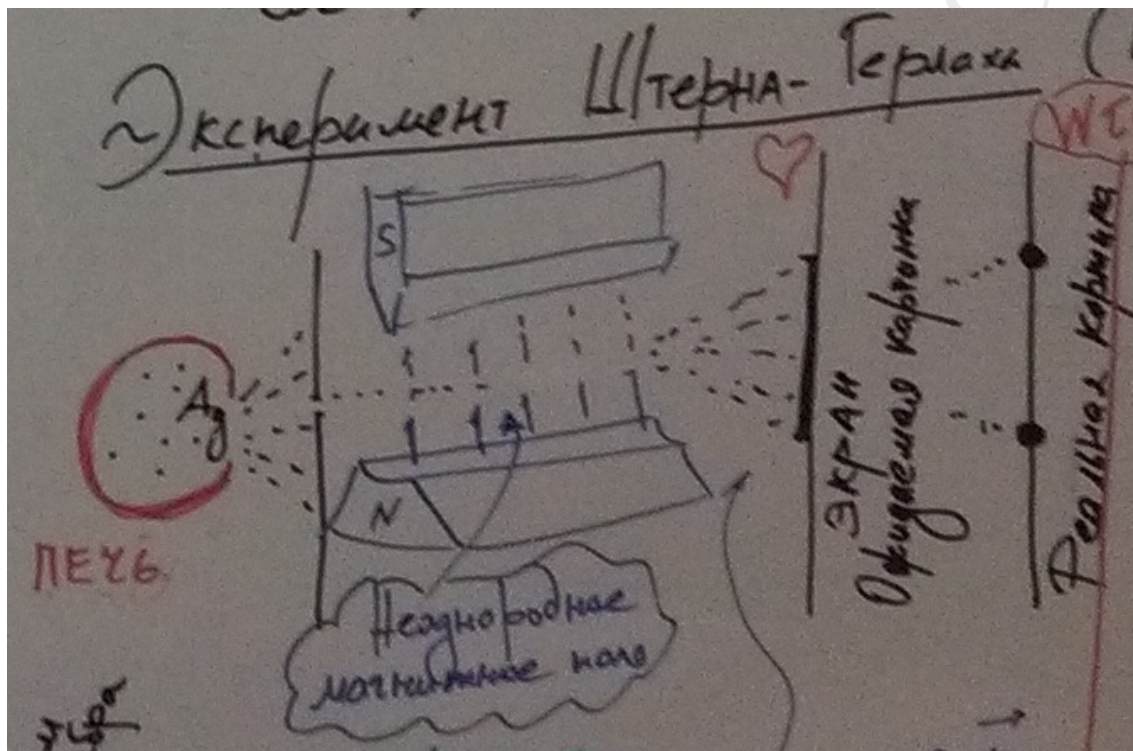


Рис. 21.3. Схема эксперимента Штерна – Герлаха

Рассмотрим следующий эксперимент. Систему «цель-магниты» будем называть аппаратом Штерна – Герлаха. У него есть ориентация (в данном случае, «вертикальная»). Расставим последовательно печку и два аппарата Штерна – Герлаха. Печка дает узкий пучок атомов серебра, который проходит через первый аппарат Штерна – Герлаха. Получаются две точки. Нижний поток блокируем, ставя непрозрачный экран, а верхний поток направляем в еще один аппарат Штерна – Герлаха (Рис. 21.4). На выходе получаем 100% атомов в одной точке и 0% атомов в другой. Этого следовало ожидать, так как мы удалили атомы, у которых «неправильный» магнитный момент. Теперь повернем второй аппарат Штерна – Герлаха на 90° . Тогда на выходе получаем по 50% атомов (Рис. 21.5). Наконец, возьмем три аппарата Штерна – Герлаха и расставим их последовательно. Первый и третий поставим вертикально, а второй повернем на 90° (Рис. 21.6). Оказывается, что фильтрация не работает. После третьего аппарата мы получаем по 50% атомов. Этот экспериментальный факт говорит о том, что измерения изменяют квантовую систему. Мы

не можем провести измерения, не вмешавшись в квантовую систему, т.е. как только мы что то померяли, то мы изменили саму систему³. Поэтому, для того, чтобы построить математический аппарат, описывающий энергетическое состояние квантовых систем, нам нужно не просто описать характеристики наблюдения, но и еще учитывать влияние наблюдателя на состояние квантовой системы.

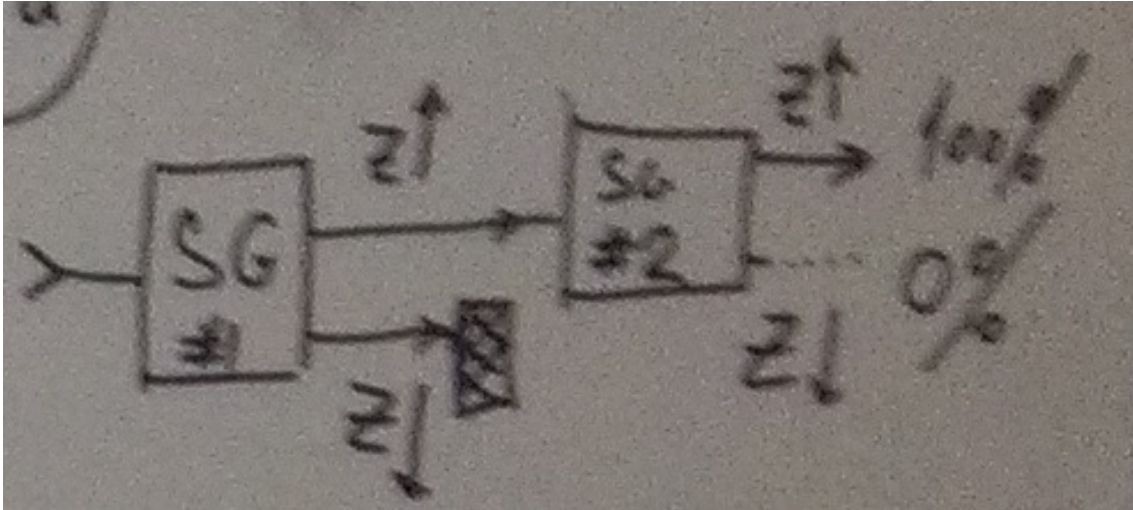


Рис. 21.4. Два вертикально ориентированных аппарата Штерна – Герлаха

4. Измерения vs вероятность

Мы будем говорить о наблюдаемой A и ее значениях; $\sigma(A)$ — значения наблюдаемой. Примем **постулат**: даже если состояние квантовой системы ρ полностью определено, об измерении наблюдаемой можно сказать только как о вероятности, с которой числовое значение измерения содержится в некотором измеримом по Борелю множестве $E \subset \mathbb{R}$. То есть, измерение характеризуется с помощью некоторых вероятностных распределений. Здесь требуется пояснение того, что такое множество E . Мы привыкли работать с интервалами, когда мера интервала — это разность между его концами. Если же имеется более сложная

³Промежуточный аппарат Штерна – Герлаха (Рис. 21.6) можно рассматривать как измерительный прибор. Измерение привело к изменению распределения атомов на выходе из третьего аппарата.

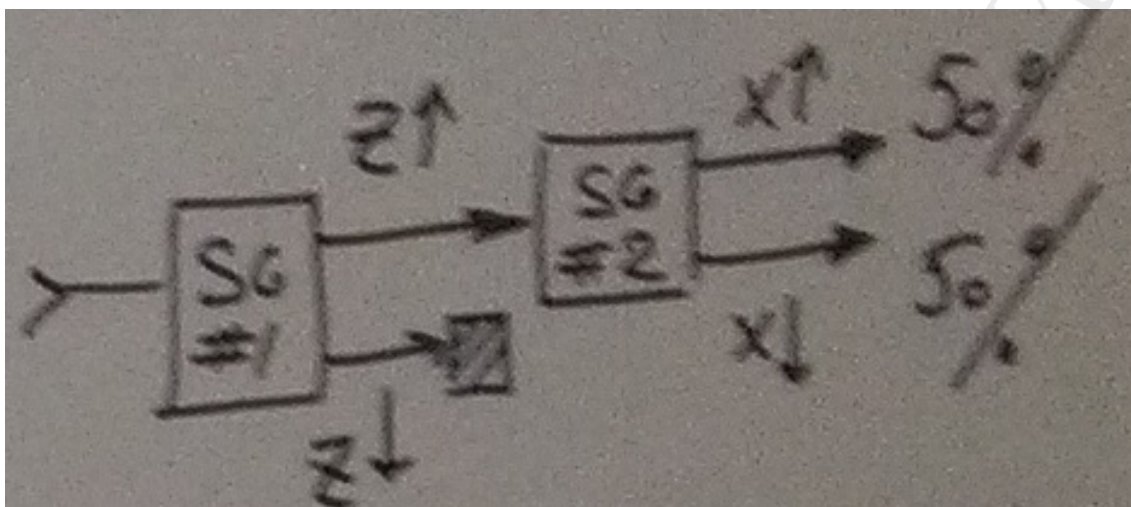


Рис. 21.5. Два различно ориентированных аппарата Штерна – Герлаха

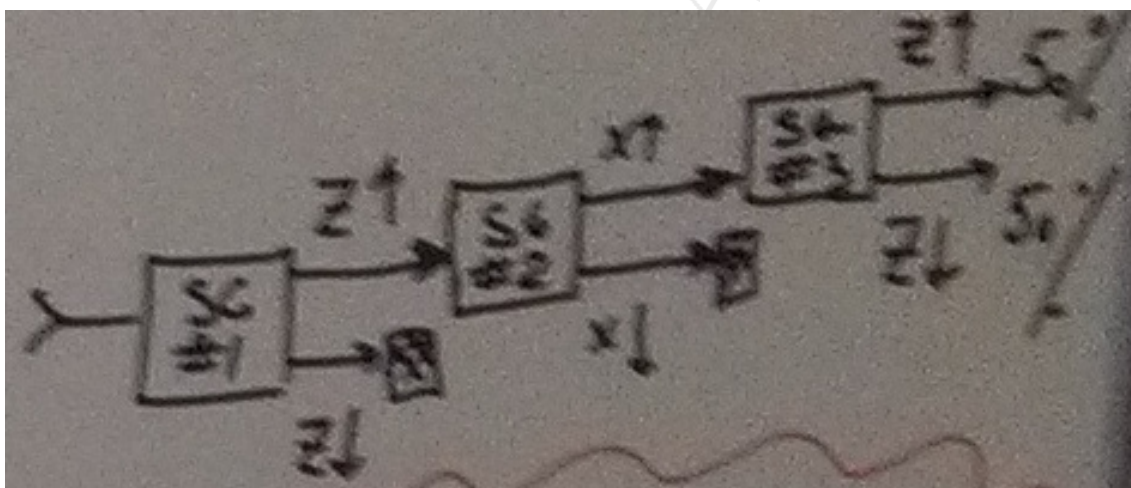


Рис. 21.6. Три аппарата Штерна – Герлаха

структура, то такая разность не может определять значение измерения и мы должны более деликатно вводить понятие меры на множестве, которое характеризует измеряемую величину.

Замечание 21.6. Не всякое разбиение множества на подмножества позволяет корректно определить меру. Корректность понимается в следующем смысле. Если есть два множества (например, треугольники на плоскости) и они совмещаются друг с другом (конгруэнтны), то тогда их мера должна совпадать. Если из двух множеств образовать составную фигуру, то мера этой фигуры должна быть равна сумме мер ее частей. На очень простом примере можно показать, что раз-

биение исходного множества на подмножества может привести к ситуации, в которой мы этим подмножествам не можем придать никакой меры.

Рассмотрим единичную окружность S^1 . Ее мера (длина) равна 2π . Разобьем S^1 на совокупность подмножеств следующим способом. Пусть $\alpha \in \mathbb{Q}$ — некоторый угол на окружности. Затем рассмотрим $2\alpha, 3\alpha, \dots$. Мы получаем совокупность точек на окружности. Поскольку весь угол равен $2\pi \notin \mathbb{Q}$, то пробежав по всей окружности, мы будем получать различные точки, которые друг на друга не попадут. Таким образом, на всей окружности выбрано счетное множество точек. Обозначим его через $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \dots\} \subset S^1$. Мощность S^1 — континуум, а мы получили счетное множество точек. Значит, есть неучтенные точки. Выберем какую-нибудь из них и обозначим через $b_1 \in \mathbb{Q}$. Повторив процесс как для \mathfrak{A} мы получим снова счетное множество точек $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \dots\} \subset S^1$ которое также не исчерпывает все точки на окружности. Снова найдем какую-нибудь точку и построим множество $\mathfrak{C} = \{c_1, c_2, \dots\} \subset S^1$. Так мы можем повторять континуум раз и построить континуум множеств, каждое из которых счетно. Выберем первые элементы этого семейства множеств и соберем из них множество $B_1 = \{a_1, b_1, c_1, \dots\}$, а из всех вторых элементов соберем множество $B_2 = \{a_2, b_2, c_2, \dots\}$ и т.д. Теперь возьмем B_1 и сдвинем его элементы на α , тогда B_1 совпадет с B_2 . При определенном движении B_3 будет совмещаться с B_1 и B_2 . Таким образом, континуальные множества B_n совмещаются друг с другом движением. По построению, эти множества не пересекаются, а их объединение дает все точки единичной окружности:

$$S^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Поскольку все B_n конгруэнтны, они имеют одну и ту же меру μ , поэтому $2\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu$. Но $\sum_{n=1}^{\infty} \mu$ есть либо 0, если $\mu = 0$, либо $+\infty$, если $\mu > 0$. То есть, 2π мы никогда не получим. Таким образом, если при таком разбиении мы хотим назначить какую-то меру множествам B_n , то мы нарушим правила игры: меры не будут аддитивной, либо меры конгруэнтных множеств не равны.

Таким образом, меру можно построить только на «правильных» подмножествах заданного множества. В конце 19 века была построе-

на теория измеримых множеств. Совокупность таких множеств называется борелевым телом исходного множества. Поскольку в квантовой механике состояние системы характеризуется весьма экзотическим распределением значений наблюдаемой величины, а отнюдь не интервалами, то здесь теория меры существенна. Все эти соображения используются в определении вероятности того, что наблюдаемая величина A окажется внутри некоторого измеримого по Борелю подмножества, которое находится на шкале измерений.

Таким образом, само измерение приобретает следующий статус. Мы должны вычислить вероятность того, что система в состоянии ρ относительно наблюдаемой A окажется после измерения в значениях, принадлежащих множеству E .

5. АКСИОМЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Аксиома 1. С каждой квантовой системой ассоциировано комплексное гильбертово пространство

$$(H, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Состояние квантовой системы определяется положительным линейным самосопряженным оператором с ограниченным следом:

$$\rho : H \rightarrow H, \quad \text{tr } \rho = 1.$$

Из всех состояний выделяются **чистые состояния**. Состояние $\rho : H \rightarrow H$ называется чистым, если существует элемент $\psi \in H$, такой, что

$$\alpha \mapsto \rho(\alpha) = \frac{\langle \psi, \alpha \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \psi.$$

В противном случае, состояние называется **смешанным**.

Несколько слов о том, что такое линейный оператор. Прежде всего, это отображение $A : D_A \rightarrow H$, где $D_A \subset H$ — область определения — линейное подпространство, плотное в H , т.е.

$$\forall \psi \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in D_A \quad \|\psi - \alpha\| < \varepsilon.$$

Кроме того, справедливы свойства аддитивности и однородности:

$$A(\psi + \varphi) = A(\psi) + A(\varphi), \quad A(k\psi) = kA(\psi),$$

для любых $\psi, \varphi \in H$, $k \in \mathbb{C}$.

Линейный оператор $A : D_A \rightarrow H$ является **положительным**, если

$$\forall \psi \in D_A \quad \langle \psi, A(\psi) \rangle \geq 0.$$

Линейный оператор $A : H \rightarrow H$ имеет **ограниченный след**, если для базиса H , $(e_n)_{n=1}^{\dim H}$,

$$\text{tr } A = \sum_n \langle e_n, A(e_n) \rangle < \infty.$$

Аксиома 2. С каждой наблюдаемой квантовой системы связан самосопряженный линейный оператор $A : D_A \rightarrow H$.

Обозначим

$$D_{A^*} = \{\psi \in H \mid \forall \alpha \in D_A \quad \exists \eta \in H \quad \langle \psi, A(\alpha) \rangle = \langle \eta, \alpha \rangle\},$$

и определим $A^* : D_{A^*} \rightarrow H$ так, что $A^*(\psi) = \eta$. Таким образом определенный оператор A^* называется **сопряженным**. Если $D_A = D_{A^*}$ и для всех $\psi \in D_A$ значения $A(\psi)$ и $A^*(\psi)$ совпадают, то оператор A называют **самосопряженным**. У самосопряженного оператора спектр действителен и поэтому мы можем говорить о том, что измерения производятся на действительной оси, несмотря на то, что сам оператор комплекснозначный.

Аксиома 3. Вероятность $\mu_\rho^A(E)$ того, что измерение наблюдаемой A в квантовой системе, которая находится в состоянии ρ , даст результат в измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}$ определяется формулой

$$\mu_\rho^A(E) = \text{tr} (P_A(E) \circ \rho),$$

где P_A — это проектор на спектральные значения оператора A .

В силу самосопряженности A ,

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dP_A(\lambda),$$

и для каждой наблюдаемой A мы можем восстановить ее спектральный оператор P_A . Мы можем оператором проектирования подействовать на множество E и, таким образом, мы можем выделить на шкале прибора ту часть, за которой будем следить.

Осталось лишь оговорить, как действуют измерения на квантовую систему. Но это содержится в двух последних аксиомах.

Аксиома 4. Если измерения не производились то система непрерывно эволюционирует и ее эволюция определяется как

$$\rho(t_2) = U(t_2 - t_1)\rho(t_1)U^{-1}(t_2 - t_1),$$

где $U(t) = \exp\left(-\frac{Ht}{\hbar}\right)$, в котором H — энергия системы (оператор).

Аксиома 5. Если мы производим измерение, то в системе возникает скачок, качественным образом изменяющий ее состояние:

$$\rho_{\text{after}} = \frac{P_A(E)\rho_{\text{before}}P_A^{-1}(E)}{\text{tr } A},$$

где E — наименьшее борелево множество, содержащее актуальные результаты измерения.

До того, как мы провели измерение, мы не можем ничего сказать по поводу изменения состояния системы. Мы можем о нем сказать лишь после того, как провели измерение, т.е. оценить, на сколько измерение изменило квантовую систему. Предсказать это изменение мы не можем.

Библиография