Нелинейная механика деформируемого твердого тела

Теоретическая часть
Часть II

С. А. Лычев

Составители презентации: С. А. Лычев и К. Г. Койфман

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН
Москва

lychevsa@mail.ru

http://ipmnet.ru/~lychev

15 декабря 2016 г.

Разделы курса

1. Тело как топологическое пространство
2. Математические основы-2
3. Тело как топологическое пространство (продолжение)
4. Элементы теории гладких многообразий
5. Отображения вида $\varphi : M \to N$
6. Касательное расслоение к многообразию

Тело как топологическое пространство

Тело и физическое пространство

■ Работаем с двумя объектами — телом и физическим пространством. Наблюдения происходят над «воплощениями» тела в физическом пространстве.

■ Тело, само по себе, не обязано повторять полностью геометрическую структуру физического пространства. В эксперименте мы наблюдаем лишь деформированные образы этого тела. Эта мысль аллегорически указана в работе Эпштейна: «Тело пребывает в платоновом мире чистых идей, который мы никогда не сможем увидеть, однако проявления этого мира мы ощущаем в облике конфигураций, т.е. «воплощений» тела в физическом пространстве».

Noll, W., A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. Arch. Rational Mech. Anal. 2,197-226 (1958).

A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media

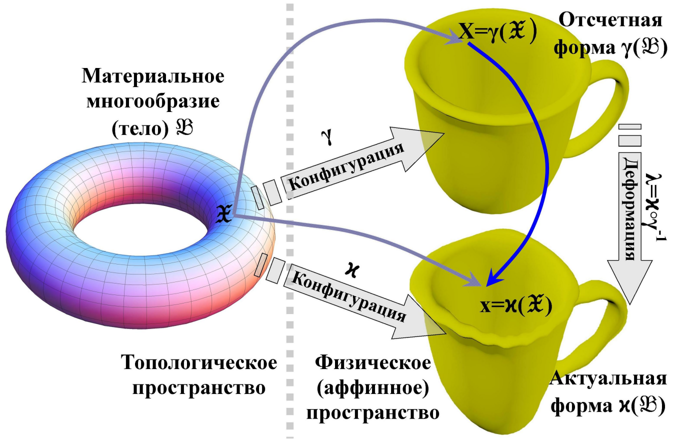
WALTER NOLL

Communicated by C. TRUESDELL

Contents Page

Тело как топологическое пространство

Конфигурации и деформации



Тело и его отсчетная конфигурация

В качестве тела $\mathfrak{B}$ рассматриваем куб, а в качестве образа отсчетной конфигурации в физическом пространстве $\mathcal{E}$ рассматриваем полый цилиндр.

Позиции в физическом пространстве

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{i}}x + \underline{\mathbf{j}}y + \underline{\mathbf{k}}z$$

Параметризация в цилиндрических координатах

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{i}}r\cos\theta + \underline{\mathbf{j}}r\sin\theta + \underline{\mathbf{k}}z,$$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

Конфигурации и деформации. Пример

Поле локальных векторных базисов (цилиндрические координаты)

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = \underline{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial r} = \underline{\mathbf{i}} \cos\theta + \underline{\mathbf{j}} \sin\theta,$$
$$\underline{\mathbf{e}}_2 = \underline{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \theta} = -\underline{\mathbf{i}} r \sin\theta + \underline{\mathbf{j}} r \cos\theta,$$
$$\underline{\mathbf{e}}_3 = \underline{\mathbf{e}}_z = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial z} = \underline{\mathbf{k}}$$

Поле взаимных базисов

$$\underline{\mathbf{e}}^1 = \underline{\mathbf{e}}^r = \underline{\mathbf{e}}_r, \quad \underline{\mathbf{e}}^2 = \underline{\mathbf{e}}^\theta = R^{-2}\underline{\mathbf{e}}_\theta, \quad \underline{\mathbf{e}}^3 = \underline{\mathbf{e}}^z = \underline{\mathbf{e}}_z$$

Поле физических базисов

$$\underline{\mathbf{e}}_{\hat{r}} = \frac{\underline{\mathbf{e}}_r}{\|\underline{\mathbf{e}}_r\|} = \underline{\mathbf{e}}_r, \quad \underline{\mathbf{e}}_{\hat{\theta}} = \frac{\underline{\mathbf{e}}_\theta}{\|\underline{\mathbf{e}}_\theta\|} = \frac{1}{r^2}\underline{\mathbf{e}}_\theta, \quad \underline{\mathbf{e}}_{\hat{z}} = \frac{\underline{\mathbf{e}}_z}{\|\underline{\mathbf{e}}_z\|} = \underline{\mathbf{e}}_z$$

Конфигурации и деформации. Пример

Отсчетная конфигурация

$$\gamma \,:\, (R, \Theta, Z) \mapsto \underline{\mathbf{X}},$$

$$\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{i}} R\cos\Theta + \underline{\mathbf{j}} R\sin\Theta + \underline{\mathbf{k}} Z,$$

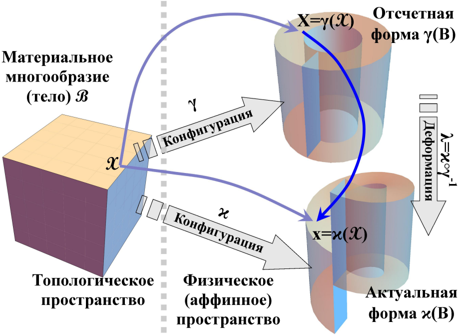
где (R, Θ, Z) — локальные координаты точек куба.

Текущая конфигурация

$$\varkappa \,:\, (R, \Theta, Z) \mapsto \underline{\mathbf{x}},$$

$$\underline{\mathbf{x}} = \sqrt{AR^2 + B}\left(\underline{\mathbf{i}}\cos(C\Theta + DZ) + \underline{\mathbf{j}}\sin(C\Theta + DZ)\right) + \underline{\mathbf{k}}(E\Theta + FZ),$$

где B, C, D, E, F – функции времени.



Замечание

Вложение может иметь разрыв на плоскости $\Theta = \pi$, что не нарушает гипотезу о гладкости, поскольку множество $\Theta = \pi$ – граница замыкания тела (на рис. отмечена цветом).
Иными словами, рассматриваем цилиндр с разрезом по плоскости, который меняет структуру связей. (соседние точки по разные стороны от разреза непосредственно не связаны).

Внимание!

Две конфигурации вводят две параметризации физического пространства, подобные цилиндрическим координатам!

Связь двух систем криволинейных координат

$$r = \sqrt{AR^2 + B}, \quad \theta = C\Theta + DZ, \quad z = E\Theta + FZ$$

Таким образом, в физическом пространстве определены пять семейств векторных базисов

Отсчетный		Текущий		Физический
$\underline{\mathbf{e}}_R$	$\underline{\mathbf{e}}^R$	$\underline{\mathbf{e}}_r$	$\underline{\mathbf{e}}^r$	$\underline{\mathbf{e}}_{\hat{r}}$
$\underline{\mathbf{e}}_\Theta$	$\underline{\mathbf{e}}^\Theta$	$\underline{\mathbf{e}}_\theta$	$\underline{\mathbf{e}}^\theta$	$\underline{\mathbf{e}}_{\hat{\theta}}$
$\underline{\mathbf{e}}_Z$	$\underline{\mathbf{e}}^Z$	$\underline{\mathbf{e}}_z$	$\underline{\mathbf{e}}^z$	$\underline{\mathbf{e}}_{\hat{z}}$

Конфигурации и деформации. Пример

Деформация $\lambda = \gamma^{-1} \circ \varkappa : \underline{\mathbf{X}} \mapsto \underline{\mathbf{x}}$ в декартовых координатах

$$\underline{\mathbf{x}} = \left\{\sqrt{A((\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{i}})^2 + (\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{j}})^2) + B}\right\} \left\{\underline{\mathbf{i}}\cos\left[C\arccos\left(\frac{\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{i}}}{\sqrt{(\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{i}})^2 + (\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{j}})^2}}\right) + D\underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\mathbf{X}}\right] + \right.$$
$$\left. +\underline{\mathbf{j}}\sin\left[C\arccos\left(\frac{\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{i}}}{\sqrt{(\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{i}})^2 + (\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{j}})^2}}\right) + D\underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\mathbf{X}}\right]\right\} +$$
$$+\underline{\mathbf{k}}\left\{E\arccos\left(\frac{\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{i}}}{\sqrt{(\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{i}})^2 + (\underline{\mathbf{X}}\cdot\underline{\mathbf{j}})^2}}\right) + F\underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\mathbf{X}}\right\}.$$

Деформация $\lambda = \gamma^{-1} \circ \varkappa : \underline{\mathbf{X}} \mapsto \underline{\mathbf{x}}$ в цилиндрических координатах

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{X}}\cdot\left(\underline{\mathbf{e}}^R \otimes \underline{\mathbf{e}}_r + \underline{\mathbf{e}}^Z \otimes \underline{\mathbf{e}}_z\right) = r\underline{\mathbf{e}}_r + z\underline{\mathbf{e}}_z.$$

Конфигурации и деформации. Пример

Градиент деформации

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \frac{AR}{\sqrt{AR^2 + B}}\, \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}^R + C\, \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}^\Theta + F\, \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{e}}^z + E\, \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{e}}^\Theta + D\, \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}^Z$$

Тензор деформаций Коши–Грина

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \frac{A^2R^2}{r^2}\, \underline{\mathbf{e}}_{\hat{r}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_{\hat{r}} + r^2 \left(\frac{C^2}{R^2} + D^2\right) \underline{\mathbf{e}}_{\hat{\theta}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_{\hat{\theta}} +$$
$$+ \left(\frac{E^2}{R^2} + F^2\right) \underline{\mathbf{e}}_{\hat{z}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_{\hat{z}} + r \left(\frac{CE}{R^2} + DF\right) \left(\underline{\mathbf{e}}_{\hat{\theta}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_{\hat{z}} + \underline{\mathbf{e}}_{\hat{z}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_{\hat{\theta}}\right)$$

Первый инвариант тензора деформаций Коши–Грина

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 = r^2 D^2 + F^2 + \frac{A(-2r^2 B + B^2 + r^4(1 + C^2) + r^2 E^2)}{r^4 - r^2 B}$$

Второй инвариант тензора деформаций Коши–Грина

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}}_2 = \frac{1}{r^4 - r^2 B} A(((r^2 - B)^2 + r^4 C^2) F^2 - 2r^4 CDFE + \\ + A(r^2 - B)(r^2 C^2 + E^2) + r^2 D^2((r^2 - B)^2 + r^2 E^2))$$

Мощность множества

■ Говорят, что множество $\mathcal{X}$ **равномощно** множеству $\mathcal{Y}$, если существует биективное отображение $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$.
■ Отношение равномощности есть отношение эквивалентности ($\sim$). Класс, которому принадлежит множество $\mathcal{X}$, называется **мощностью множества** $\mathcal{X}$, а также **кардиналом**, или **кардинальным числом множества** $\mathcal{X}$ и обозначают символом $\operatorname{card}\mathcal{X}$. Если $\mathcal{X}\sim\mathcal{Y}$, то пишут $\operatorname{card}\mathcal{X}=\operatorname{card}\mathcal{Y}$.
■ Говорят, что кардинальное число множества $\mathcal{X}$ **не больше** кардинального числа множества $\mathcal{Y}$, и пишут $\operatorname{card}\mathcal{X}\leqslant\operatorname{card}\mathcal{Y}$, если $\mathcal{X}$ равномощно некоторому подмножеству множества $\mathcal{Y}$. Итак,

$$(\operatorname{card}\mathcal{X}\leqslant\operatorname{card}\mathcal{Y}):=(\exists\mathcal{Z}\subset\mathcal{Y}\quad(\operatorname{card}\mathcal{X}=\operatorname{card}\mathcal{Z})).$$

Мощность множества

1. $(\operatorname{card}\mathcal{X} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{Y}) \wedge (\operatorname{card}\mathcal{Y} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{Z}) \Longrightarrow (\operatorname{card}\mathcal{X} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{Z})$ (очевидно).
2. $(\operatorname{card}\mathcal{X} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{Y}) \wedge (\operatorname{card}\mathcal{Y} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{X}) \Longrightarrow (\operatorname{card}\mathcal{X} = \operatorname{card}\mathcal{Y})$ (теорема Шрёдера — Бернштейна).
3. $\forall \mathcal{X}\ \forall \mathcal{Y}\ (\operatorname{card}\mathcal{X} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{Y}) \vee (\operatorname{card}\mathcal{Y} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{X})$ (теорема Кантора).

■ Говорят, что кардинальное число множества $\mathcal{X}$ **меньше** кардинального числа множества $\mathcal{Y}$, и пишут $\operatorname{card}\mathcal{X} < \operatorname{card}\mathcal{Y}$, если $\operatorname{card}\mathcal{X} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{Y}$ и в то же время $\operatorname{card}\mathcal{X} \neq \operatorname{card}\mathcal{Y}$.
Итак,

$$(\operatorname{card}\mathcal{X} < \operatorname{card}\mathcal{Y}) := (\operatorname{card}\mathcal{X} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{Y}) \wedge (\operatorname{card}\mathcal{X} \neq \operatorname{card}\mathcal{Y}).$$

■ **Теорема Кантора.** $\operatorname{card}\mathcal{X} < \operatorname{card}\mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Трансфинитные кардинальные числа

■ Множество называется **конечным** (по Дедекинду), если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству; в противном случае оно называется **бесконечным**.

■ Мощность бесконечного множества называется **трансфинитным кардинальным числом** (трансфинитным числом).

Пусть $\alpha = \operatorname{card} \mathcal{E}$, $\beta = \operatorname{card} \mathcal{F}$ — два кардинальных числа.
■ Через $\alpha + \beta$ обозначается мощность любого множества, являющегося объединением двух непересекающихся частей, одно из которых равномощно $\mathcal{E}$, а другое — $\mathcal{F}$.
■ Через $\alpha\beta$ обозначается мощность произведения $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$.
■ Через α^β обозначается мощность множества $\mathcal{E}^\mathcal{F}$ всех отображений из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{E}$.

Свойства введенных операций

i) ассоциативность и коммутативность сложения,
ii) ассоциативность и коммутативность умножения,
iii) дистрибутивность умножения по отношению к сложению,
iv) $(\alpha)^\beta(\alpha)^\gamma = (\alpha)^{\beta+\gamma}$, $\alpha^\gamma\beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$, $(\alpha^\beta)^\gamma = (\alpha)^{\beta\gamma}$.

Теорема. Если α и β — два кардинальных числа, отличные от 0 и если по крайней мере одно из них трансфинитно, то сумма $\alpha + \beta$ и произведение $\alpha\beta$ равны наибольшему из них.

■ **Отношением частичного порядка** на множестве $\mathcal{X}$ называют отношение $\mathcal{R}$, для которого выполнены следующие условия: $\forall x,\ y,\ z \in \mathcal{X}$

1° $x\mathcal{R}x$ (рефлексивность);

2° $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$ (антисимметричность);

3° $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$ (транзитивность).

Отношение частичного порядка обозначают символом $\preccurlyeq$, который используется вместо буквы $\mathcal{R}$.

■ Частично упорядоченное множество $\mathcal{X}$ с заданным на нём частичным порядком $\preccurlyeq_{\mathcal{X}}$ будем обозначать через $(\mathcal{X},\ \preccurlyeq_{\mathcal{X}})$.

■ Инъективное отображение $\mathrm{f} : (\mathcal{X}, \preccurlyeq_{\mathcal{X}}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \preccurlyeq_{\mathcal{Y}})$ называется **монотонным**, если

$$\forall x,\ y \in \mathcal{X}\ (x \preccurlyeq_{\mathcal{X}} y \Longrightarrow \mathrm{f}(x) \preccurlyeq_{\mathcal{X}} \mathrm{f}(y)).$$

■ Отображение $f : (\mathcal{X}, \preccurlyeq_{\mathcal{X}}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \preccurlyeq_{\mathcal{Y}})$ называется **подобным**, если:

1. f — биекция;
2. $f,\ f^{-1}$ монотонны.

При этом, множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ называются **подобными**.

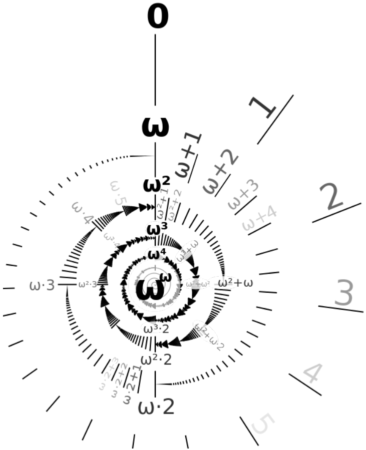
■ Порядок $\preccurlyeq$ на множестве $\mathcal{X}$ называется **полным**, а множество $\mathcal{X}$ — **вполне упорядоченным**, если выполнены условия:

1. $\preccurlyeq$ — линейный порядок (определение 2.18);
2. любое непустое подмножество $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ имеет минимальный элемент.

■ Вполне упорядоченное множество $(\mathcal{X}, \preccurlyeq_{\mathcal{X}})$ **эквивалентно** вполне упорядоченному множеству $(\mathcal{Y}, \preccurlyeq_{\mathcal{Y}})$, то есть $\omega(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, если $\mathcal{X}$ подобно $\mathcal{Y}$.

■ Каждый класс эквивалентности по рассматриваемому отношению называется **порядковым числом**, или **ординалом**, **ординальным числом**.

Спираль ординалов



Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное непустое множество. На множестве $\mathcal{X}$ определена структура **метрического пространства** $\Longleftrightarrow$ определена функция (метрика)

$$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R},$$

которая удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(d(x, y) = 0) \Rightarrow (x = y)$ (аксиома тождества);
2. $\forall x, y \in \mathcal{X} \quad (d(x, y) = d(y, x))$ (аксиома симметрии);
3. $\forall x, y, z \in \mathcal{X} \quad (d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y))$ (аксиома треугольника).

Пара $(\mathcal{X}, d)$ называется **метрическим пространством**.

■ Пусть $(\mathcal{X},\ d)$ — метрическое пространство. Множество

$$\mathcal{B}(a;\ r) := \{x \in \mathcal{X} \mid d(a,\ x) < r\}, \quad r > 0,$$

называется **открытым шаром** с центром в точке $a \in \mathcal{X}$ радиуса r, или r-окрестностью точки a.

■ Множество $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ называется **открытым** в $(\mathcal{X},\ d)$, если для любой точки $x \in \mathcal{Y}$ существует открытый шар $\mathcal{B}(x;\ r)$ с центром в этой точке, такой, что $\mathcal{B}(x;\ r) \subset \mathcal{Y}$.

■ Множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$ называется **замкнутым** в $(\mathcal{X},\ d)$, если множество $\mathcal{G} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}$ — открытое в $(\mathcal{X},\ d)$.

Примеры

■ $\varnothing$, $\mathcal{X}$ — открытые (и одновременно замкнутые) множества в $(\mathcal{X},\, d)$.

■ $\mathcal{B}(x;\, r)$ — открытое множество в $(\mathcal{X},\, d)$.

■ Если $\mathcal{O}$ — открытое множество в $(\mathcal{X},\, d)$, то найдя для каждой точки $x \in \mathcal{O}$ открытый шар $\mathcal{B}(x;\, r_x) \subset \mathcal{O}$, $r_x > 0$, имеем

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{B}(x;\, r_x).$$

Открытые и замкнутые множества

Утверждение

a) Пусть $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — совокупность открытых в $(\mathcal{X},\ d)$ множеств $\mathcal{G}_\alpha$, $\alpha\in I$. Тогда $\bigcup\limits_{\alpha\in I}\mathcal{G}_\alpha$ — открытое в $(\mathcal{X},\ d)$ множество.

b) Пусть $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^m$ — конечная совокупность открытых в $(\mathcal{X},\ d)$ множеств $\mathcal{G}_i$, $i=1,\ldots m$. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^m\mathcal{G}_i$ — открытое в $(\mathcal{X},\ d)$ множество.

c) Пусть $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^m$ — конечная совокупность замкнутых в $(\mathcal{X},\ d)$ множеств $\mathcal{F}_i$, $i=1,\ldots m$. Тогда $\bigcup\limits_{i=1}^m\mathcal{F}_i$ — замкнутое в $(\mathcal{X},\ d)$ множество.

d) Пусть $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — совокупность замкнутых в $(\mathcal{X},\ d)$ множеств $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha\in I$. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$ — замкнутое в $(\mathcal{X},\ d)$ множество.

Окрестность точки

Пусть $(\mathcal{X},\ d_{\mathcal{X}})$ — метрическое пространство. Множество $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{X}$ называется **окрестностью точки** $\in \mathcal{X}$, если оно содержит эту точку, и существует множество $\mathcal{O}$, открытое в $(\mathcal{X},\ d_{\mathcal{X}})$, такое, что

$$x \in \mathcal{O} \subset \mathcal{U}(x).$$

Пусть $(\mathcal{X},\ d_{\mathcal{X}})$ — метрическое пространство, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ — непустое множество. Его можно превратить в метрическое пространство, положив

$$d_{\mathcal{Y}} = (d_{\mathcal{X}})|_{\mathcal{Y}}.$$

Построенное метрическое пространство $(\mathcal{Y},\ d_{\mathcal{Y}})$ называется **подпространством** метрического пространства $(\mathcal{X},\ d_{\mathcal{X}})$.

Структура открытых и замкнутых множеств в подпространстве метрического пространства

Теорема. Пусть $(\mathcal{X},\, d_{\mathcal{X}})$ — метрическое пространство, $(\mathcal{Y},\, d_{\mathcal{Y}})$ — его подпространство. Тогда
a) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{Y}$ — открыто в $(\mathcal{Y},\, d_{\mathcal{Y}})$ тогда и только тогда, когда существует множество $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ — открытое в $(\mathcal{X},\, d_{\mathcal{X}})$, такое, что

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{Y} \cap \mathcal{O}.$$

b) $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{Y}$ — замкнуто в $(\mathcal{Y},\, d_{\mathcal{Y}})$ тогда и только тогда, когда существует множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$ — замкнутое в $(\mathcal{X},\, d_{\mathcal{X}})$, такое, что

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{Y} \cap \mathcal{F}.$$

Говорят, что множество $\mathcal{X}$ наделено **структурой топологического пространства**, или наделено **топологией**, или что $\mathcal{X}$ есть **топологическое пространство**, если указана система $\mathfrak{S}$ подмножеств $\mathcal{X}$ (называемых **открытыми множествами** в $\mathcal{X}$), обладающая следующими свойствами:

1. $\varnothing \in \mathfrak{S}, \quad \mathcal{X} \in \mathfrak{S}$.
2. $(\forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad (\mathcal{S}_\alpha \in \mathfrak{S})) \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{S}_\alpha \in \mathfrak{S}$.
3. $(\mathcal{S}_i \in \mathfrak{S}, \quad i = 1, \ldots, n) \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i \in \mathfrak{S}$.

Таким образом, топологическое пространство есть пара $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$, состоящая из множества $\mathcal{X}$ и системы $\mathfrak{S}$ выделенных его подмножеств, называемой **топологией** и обладающей свойствами 1, 2, 3.

Определение топологического пространства

Замечание

Объединение **любого** семейства элементов топологии $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{S}$, но пересечение **конечного числа** элементов $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{S}$.

Замкнутые множества топологического пространства

■ Пусть $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ — топологическое пространство. Множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$ называется **замкнутым** в $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$, если множество $\mathcal{G} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}$ — открытое в $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ (то есть, если $\mathcal{G} \in \mathfrak{S}$).

■ Совокупность $\mathfrak{D}$ всех замкнутых множеств $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{X} \in \mathfrak{D}, \quad \varnothing \in \mathfrak{D}.$
2. $(\forall \alpha \in \mathfrak{A}\,(\mathcal{D}_\alpha \in \mathfrak{D})) \Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{D}_\alpha \in \mathfrak{D}.$
3. $(\mathcal{D}_i \in \mathfrak{D}, \quad i = 1,\ \ldots,\ n) \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i \in \mathfrak{D}.$

Окрестность точки

Пусть $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ — топологическое пространство. Множество $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{X}$ называется **окрестностью точки** $\in \mathcal{X}$, если оно содержит эту точку, и существует множество $\mathcal{O} \in \mathfrak{S}$, такое, что

$$x \in \mathcal{O} \subset \mathcal{U}(x).$$

Замечание

Многие авторы определяют окрестность точки как открытое множество, содержащую данную точку. Но это сути не меняет.

Индуцированная топология

Пусть $(\mathcal{X}, \mathfrak{S}_\mathcal{X})$ — топологическое пространство, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ — непустое множество. Его можно превратить в топологическое пространство, определив семейство множеств

$$\mathfrak{S}_\mathcal{Y} = \{\mathcal{V} \subset \mathcal{Y} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{S}_\mathcal{X} \quad (\mathcal{V} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{U})\}.$$

Можно доказать (проверив выполнение аксиом топологического пространства), что $(\mathcal{Y}, \mathfrak{S}_\mathcal{Y})$ — топологическое пространство. Оно называется **подпространством** топологического пространства $(\mathcal{X}, \mathfrak{S}_\mathcal{X})$, а топология $\mathfrak{S}_\mathcal{Y}$ — **индуцированной**, или **наследственной топологией**.

Замечание

Ниже — аналог базиса векторного пространства.

Базой топологического пространства $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ (**открытой базой** или **базой топологии**) называется такое подсемейство $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}$ топологии $\mathfrak{S}$, что каждое открытое множество $\mathcal{O} \in \mathfrak{S}$ является объединением некоторой совокупности элементов семейства $\mathfrak{B}$. То есть

$$\forall \mathcal{O} \in \mathfrak{S}\ \exists \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B} \quad \Big(\mathcal{G} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{U}_\alpha\Big).$$

Замечание

Пустое множество можно рассматривать как объединение семейства по пустому множеству индексов.

База топологии

Критерий базы

■ Пусть $\mathcal{X} \neq \varnothing$ и пусть $\mathfrak{B} = \{\mathcal{U}_\gamma\}_{\gamma \in \mathfrak{H}}$ — некоторое семейство подмножеств $\mathcal{X}$. Оно является базой для некоторой топологии на $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{\gamma \in \mathfrak{H}} \mathcal{U}_\gamma$;
2. Для любых $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta \in \mathfrak{B}$ и каждого $x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ существует $\mathcal{U}_\gamma \in \mathfrak{B}$, такое, что $x \in \mathcal{U}_\gamma \subset \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$.

■ В доказательстве теоремы явно строится нужная топология. Это — пустое множество и всевозможные объединения элементов $\mathfrak{B}$.

Примеры

■ В метрическом пространстве $(\mathcal{X},\ d)$ семейство всевозможных открытых шаров $\{\mathcal{B}(x;\ r)\}_{x\in\mathcal{X},\ r\in\mathbb{R},\ r>0}$ образует базу. Соответствующую топологию $\mathcal{S}_d$, образованную пустым множеством и всевозможными объединениями открытых шаров, называют **метрической топологией**. Семейство открытых множеств, определенных метрикой d, и семейство $\mathcal{S}_d$ совпадают.

■ Пусть $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S}_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y},\ \mathfrak{S}_{\mathcal{Y}})$ — два топологических пространства с базами $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{\mathcal{U}_\alpha\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \{\mathcal{V}_\beta\}$ соответственно. Декартово произведение $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ снабжается структурой топологического пространства, а именно, семейство $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{V}_\beta\}$ всевозможных декартовых произведений $\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{V}_\beta$, где $\mathcal{U}_\alpha\in\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{V}_\alpha\in\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ удовлетворяет критерию базы. Соответствующую топологию на $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ образуют пустое множество и всевозможные объединения элементов $\mathfrak{B}$.

Вторая аксиома счетности

■ Говорят, что топологическое пространство $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, если оно обладает счетной базой (мощность базы равна мощности $\mathbb{N}$):

$$\exists\, \mathfrak{B} = \left\{ U_\alpha \middle| U_\alpha \in \mathfrak{S} \wedge \alpha \in \mathcal{I} \wedge \mathrm{Card}\mathcal{I} = \aleph_0 \right\} :$$

$$\forall\, \mathcal{D} \in \mathfrak{S} \quad \exists\, \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \quad \mathcal{D} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} U_\alpha .$$

■ Из второй аксиомы счётности следует сепарабельность (наличие счетного, всюду плотного подмножества).

■ **Теорема Линделёфа**. Если топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности, то из всякого открытого покрытия этого пространства можно выделить счётное подпокрытие.

Вторая аксиома счетности

Примеры

■ Множество $\mathbb{R}$ с естественной топологией (база которой — всевозможные интервалы с концами в рациональных точках) удовлетворяет второй аксиоме счетности.

■ Введем на множестве $\mathbb{R}$ дискретную топологию (открытое множество — любое подмножество $\mathbb{R}$). Такое топологическое пространство не имеет счетной базы.

Топологическое пространство $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ называется **хаусдорфовым** (или $\mathcal{T}_2$–пространством), если в нём выполнена **аксиома Хаусдорфа** (**вторая аксиома отделимости**): любые две различные точки пространства имеют непересекающиеся окрестности:

$$\forall\, x, y \in \mathcal{X} \quad \Big((x \neq y) \Rightarrow (\exists\, U_x \in \mathfrak{S}_x \quad \exists\, U_y \in \mathfrak{S}_y \quad (U_x \cap U_y = \varnothing))\Big),$$

где $\mathfrak{S}_x$ — совокупность всех окрестностей точки x.

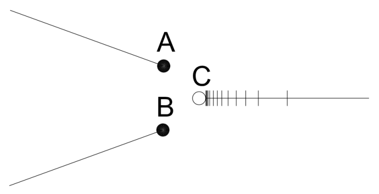
Пример хаусдорфова топологического пространства

Пусть $(\mathcal{X},\ d)$ — метрическое пространство. Оно является хаусдорфовым, так как для любых двух точек $x,\ y \in \mathcal{X}$, таких, что $d(x,\ y) > 0$ их шаровые окрестности $\mathcal{B}\Big(x;\ \dfrac{1}{4}d(x,\ y)\Big)$, $\mathcal{B}\Big(y;\ \dfrac{1}{4}d(x,\ y)\Big)$ не пересекаются.

Аксиома отделимости Хаусдорфа

Пример нехаусдорфова топологического пространства

Пусть $(-\infty,\ A]$, $(-\infty,\ B]$, $(C,\ +\infty)$, $A \neq B \neq C$ — числовые промежутки, лежащие на разных прямых. В их объединении введем топологию: окрестности точек на множестве $(-\infty,\ A) \cup (-\infty,\ B) \cup (C,\ +\infty)$ такие же, как на вещественной прямой. Окрестностями точек A и B назовем множества $(A-\varepsilon,\ C+\varepsilon)$, $(B-\varepsilon,\ C+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Тогда точки A и B не имеют непересекающихся окрестностей, и, следовательно, неотделимы.



Тело как топологическое пространство (продолжение)

Тело, как топологическое пространство размерности континуума

Согласно представлениям о сплошном теле, каждая его материальная точка имеет окрестность, заполненную материальными точками, причём это заполнение эквивалентно заполнению интервала числовой оси действительными числами. В этой связи, естественно говорить о теле, как о топологическом многообразии, мощность которого равна мощности континуума. Идея о «непрерывном заполнении» окрестности материальной точки другими материальными точками математически выражается в том, что каждая точка обладает открытой окрестностью, целиком лежащей во внутренности тела. Таким образом, тело следует рассматривать, как открытое множество, то есть, тело не содержит границу.

Тело как топологическое пространство (продолжение)

Тело, как топологическое пространство размерности континуума (продолжение)

С физической точки зрения, граница тела должна рассматриваться отдельно, так как, например, уравнения равновесия выводятся для внутренности и, отдельно, для границы тела.

Замечание

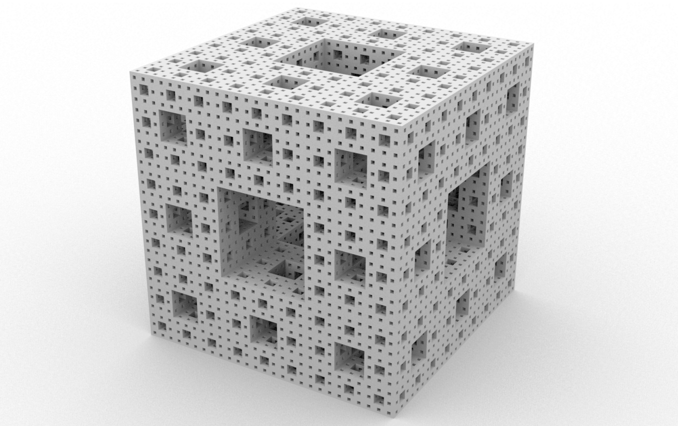
Как топологическое пространство, тело является открытым множеством. Как известно, любое подмножество топологического пространства в индуцированной топологии будет открытым множеством, а в исходной топологии не обязано быть открытым. Тело может быть частью некоторого объемлющего тела, но, по условию, всегда открытой в топологии объемлющего тела.

Тело как топологическое пространство (продолжение)

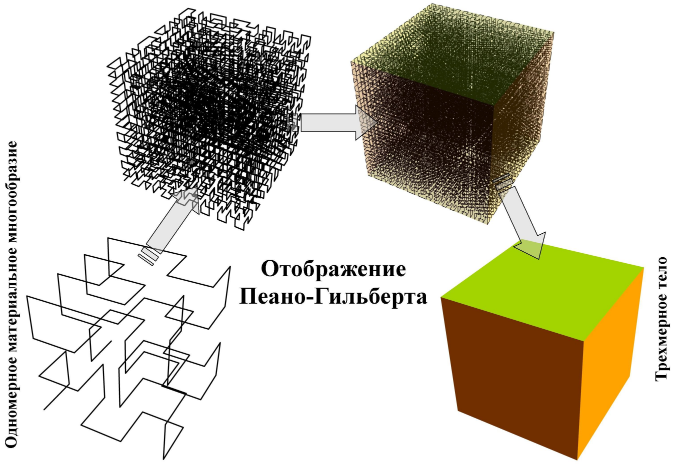
Размерность Менгера-Урысона

Размерность определяется индуктивным способом.
■ Пустое множество и только оно имеет размерность -1.
■ Пространство X имеет размерность не больше n ($n \geqslant 0$) в точке x, если любая ее окрестность U содержит такую окрестность V, что $\dim V \leqslant n-1$. Размерность X не превосходит n, если X имеет размерность, не превосходящую n, в каждой своей точке.
■ Пространство X имеет размерность n в точке x, если верно, что X имеет размерность, не превосходящую n, в x, и неверно, что X имеет размерность, не превосходящую $n-1$, в точке x. Пространство X имеет размерность n, если $\dim X \leqslant n$, но неверно, что $\dim X \leqslant n-1$.

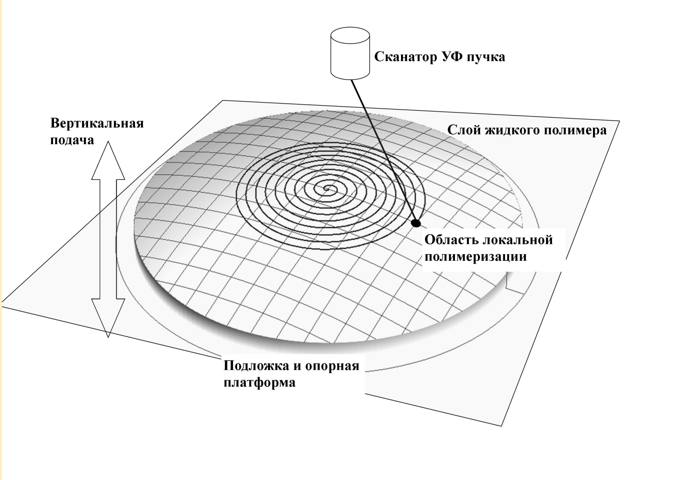
Тело как топологическое пространство (продолжение)



Отображение Пеано–Гильберта



Стереолитография



Alexander S. Balankin, A continuum framework for mechanics of fractal materials I: from fractional space to continuum with fractal metric. The European Physical Journal B, April 2015.

Eur. Phys. J. B (2015) 88: 90
DOI: 10.1140/epjb/e2015-60189-y

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL B

Regular Article

A continuum framework for mechanics of fractal materials I: from fractional space to continuum with fractal metric

Alexander S. Balankin[a]

Grupo "Mecánica Fractal", ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México D.F. 07738, Mexico

Received 12 October 2014 / Received in final form 18 December 2014
Published online 8 April 2015 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2015

Abstract. This paper is devoted to the mechanics of fractally heterogeneous media. A model of fractal continuum with a fractional number of spatial degrees of freedom and a fractal metric is suggested. The Jacobian matrix of the fractal continuum deformation is defined and the kinematics of deformations is elucidated. The symmetry of the Cauchy stress tensor for continua with the fractal metric is established. A homogenization framework accounting for the connectivity, topological, and metric properties of fractal domains in heterogeneous materials is developed. The mapping of mechanical problems for fractal media into the corresponding problems for the fractal continuum is discussed. Stress and strain distributions in elastic fractal bars are analyzed. An approach to fractal bar optimization is proposed. Some features of acoustic wave propagation and localization in fractal media are briefly highlighted.

1 Introduction

Most natural and engineering materials are inherently heterogeneous [1]. Traditional homogenization methods pro-

and dynamical degrees of freedom, as well as the scaling properties of fractal materials. Section 4 is devoted to the mechanics of fractal continua. The mapping of mechanical problems for fractal materials into the corresponding

Гомеоморфизмы

■ Отображение $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ множества $\mathcal{X}$ на множество $\mathcal{Y}$, где $(\mathcal{X}, \mathfrak{S}_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \mathfrak{S}_\mathcal{Y})$ — топологические пространства, непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого подмножества $\mathcal{Y}$ открыт в $\mathcal{X}$.

■ Пусть $(\mathcal{X}, \mathfrak{S}_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \mathfrak{S}_\mathcal{Y})$ — топологические пространства. Отображение $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ называется **гомеоморфизмом**, если
i) f биективно,
ii) f, f^{-1} непрерывны.
При этом, пространства $(\mathcal{X}, \mathfrak{S}_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \mathfrak{S}_\mathcal{Y})$ называются **гомеоморфными**.

■ Символ $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ обозначает множество всех гомеоморфизмов из $(\mathcal{X}, \mathfrak{S}_\mathcal{X})$ в $(\mathcal{Y}, \mathfrak{S}_\mathcal{Y})$.

Гомеоморфизмы

Примеры

Приведём примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств, в которых топология индуцирована из $\mathbb{R}^n$.

1. Интервал гомеоморфен прямой.
2. Любые два отрезка прямой гомеоморфны.
3. Прямая гомеоморфна окружности $\mathcal{S}^2 \setminus \{\mathfrak{p}\}$ с выколотой точкой.
4. Пространство $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно сфере $\mathcal{S}^{n+1} \setminus \{\mathfrak{p}\}$ с выколотой точкой.
5. Отрезок и интервал не гомеоморфны.
6. Окружность не гомеоморфна прямой.

Дополнительные примеры. Гомеоморфизм интервала и диска $\mathbb{R}^n$

Обозначим через I^n множество

$$I^n := \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, k = 1, \ldots, n \quad |x^k| < 1\},$$

называемое стандартным открытым n–мерным промежутком. Легко показать, что отображение $f : \ I^n \to \mathbb{R}^n$, задаваемое соотношениями

$$(y^1, \ldots, y^n) = f(x^1, \ldots, x^n), \quad y^k = \lg \frac{1 - x^k}{1 + x^k} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

является гомеоморфизмом между I^n и $\mathbb{R}^n$.

Дополнительные примеры. Гомеоморфизм интервала и диска $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

Любой открытый n–мерный промежуток $(a,\ b) = \{(x^1,\ \ldots,\ x^n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, k = 1,\ \ldots,\ n \quad a^k < x^k < b^k\}$, где $a = (a^1,\ \ldots,\ a^n)$, $b = (b^1,\ \ldots,\ b^n)$, преобразованиями растяжения–сжатия и/или параллельного переноса (гомеоморфизмы!) можно свести к I^n, поэтому $(a,\ b)$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathcal{D}^n$ множество

$$\mathcal{D}^n = \{x = (x^1,\ \ldots,\ x^n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

называемое открытым n–мерным диском единичного радиуса с центром в $(0,\ \ldots,\ 0)$ в $\mathbb{R}^n$. Покажем, что $\mathcal{D}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$.

Дополнительные примеры. Гомеоморфизм интервала и диска $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

Обозначим через $\mathcal{S}^{n+1}_+$ множество

$$\mathcal{S}^n_+ = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1, \quad x^{n+1} > 0\},$$

называемое открытой n–мерной полусферой единичного радиуса с центром в $(0, \dots, 0)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Достаточно доказать, что $\mathcal{S}^n_+$ гомеоморфна $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{D}^n$, тогда композиция соответствующих отображений будет искомым гомеоморфизмом.

Дополнительные примеры. Гомеоморфизм интервала и диска $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

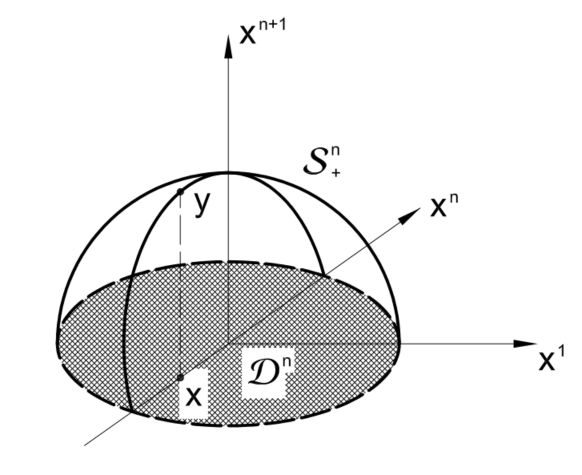
Начнем с доказательства гомеоморфности $\mathcal{S}_+^n$ и $\mathcal{D}^n$. Заметим, что существует гомеоморфизм между $\mathbb{R}^n$ и множеством $\mathbb{R}_1^n$ точек $\mathbb{R}^{n+1}$ вида $(x^1, \ldots, x^n, 0)$. Поэтому можно считать, что $\mathcal{D}^n$ содержится в $\mathbb{R}^{n+1}$ (с точностью до гомеоморфизма). Иными словами, считаем, что

$$\mathcal{D}^n = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1, \quad x^{n+1} = 0\}.$$

Рисунок ниже иллюстрирует идею доказательства.

Гомеоморфизмы

$\mathcal{S}^n_+$ и $\mathcal{D}^n$



Дополнительные примеры. Гомеоморфизм интервала и диска $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

Отображение (проекция)

$$f:\ (x^1,\ \ldots,\ x^n,\ x^{n+1}) \mapsto (x^1,\ \ldots,\ x^n,\ 0)$$

задает непрерывное биективное отображение $\mathcal{S}^n_+$ на $\mathcal{D}^n$.
Обратное отображение имеет вид

$$f^{-1}:\ (x^1,\ \ldots,\ x^n,\ 0) \mapsto (x^1,\ \ldots,\ x^n,\ (1-(x^1)^2-\ldots-(x^n)^2)^{1/2})$$

и также непрерывно. Таким образом, построен гомеоморфизм между $\mathcal{S}^n_+$ и $\mathcal{D}^n$.

Дополнительные примеры. Гомеоморфизм интервала и диска $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

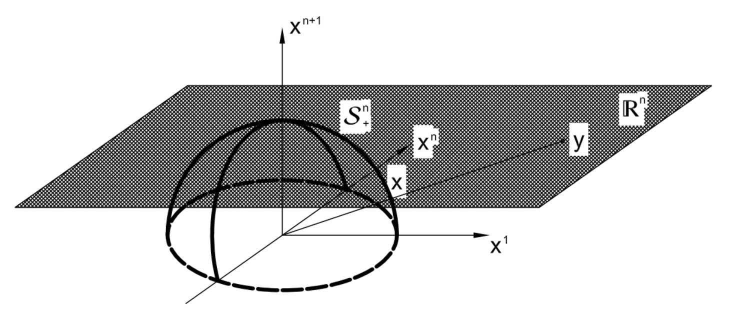
Теперь установим гомеоморфизм между $\mathcal{S}^n_+$ и $\mathbb{R}^n$. Существует гомеоморфизм между $\mathbb{R}^n$ и множеством $\mathbb{R}^n_2$ точек $\mathbb{R}^{n+1}$ вида $(x^1, \ldots, x^n, 1)$, где точка $(0, \ldots, 0, 1)$ — северный полюс $\mathcal{S}^n_+$. Через каждую точку $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \in \mathcal{S}^n_+$ проведем полупрямую

$$y = y(t) = (tx^1, \ldots, tx^{n+1}), \quad t \geqslant 0.$$

Эта прямая пересекает $\mathbb{R}^n_2$ в единственной точке, соответствующей значению $t = 1/x^{n+1}$ (см. рисунок ниже).

Гомеоморфизмы

$\mathcal{S}^n_+$ и $\mathbb{R}^n$



Дополнительные примеры. Гомеоморфизм интервала и диска $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

Сопоставляя точке $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \in \mathcal{S}^n_+$ эту точку пересечения, получаем отображение $\Phi : \mathcal{S}^n_+ \to \mathbb{R}^n_2$, задаваемое правилом

$$(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \mapsto (x^1/x^{n+1}, \ldots, x^n/x^{n+1}, 1).$$

Это отображение — гомеоморфизм между $\mathcal{S}^n_+$ и $\mathbb{R}^n_2$, а значит, $\mathcal{S}^n_+$ и $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны.
Композицией соответствующих гомеоморфизмов устанавливается, что $\mathcal{D}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$.

Дополнительные примеры. Гомеоморфизм интервала и диска $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

Используя преобразования растяжения–сжатия и/или параллельного переноса, можно показать, что любой открытый шар $\mathcal{B}(x,\ r) \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$, гомеоморфен $\mathbb{R}^n$.

Определение топологического многообразия

Хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой называется n–мерным многообразием, если оно локально гомеоморфно n–мерному евклидову пространству $\mathbb{R}^n$. Число n в определении многообразия называется размерностью многообразия M и обозначается через $\dim M = n$.

Замечания

■ Под локальной гомеоморфностью подразумевается, что каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$ (или открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$).

■ Далее окрестностью точки x мы называем открытое множество $U(x)$, содержащую данную точку.

■ Структура многообразия «в целом» может существенно отличаться от структуры пространстве $\mathbb{R}^n$. Примеры тому — лента Мёбиуса и бутылка Клейна.

Следствие из теоремы Линделёфа

Согласно определению, n–мерное многообразие M является пространством со счетной базой. Пусть для каждой точки многообразия M найдена окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим систему $\{U\}$ построенных окрестностей. Она образует открытое покрытие M (при этом, такое покрытие не является единственным), из которого, используя теорему Линделефа, можно извлечь счетное подпокрытие $\{U_i\}$.

Определение топологического многообразия с краем

Для полноты изложения кратко обсудим понятие многообразия с краем. Пусть

$$\mathbb{H}^n := \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leqslant 0\},$$

и M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, локально гомеоморфное либо $\mathbb{R}^n$, либо $\mathbb{H}^n$.
Если для точки $\mathfrak{X} \in M$ существует окрестность, гомеоморфная $\mathbb{H}^n$, и $h(\mathfrak{X}) \in \partial\mathbb{H}^n$, где h — соответствующий гомеоморфизм окрестности на $\mathbb{H}^n$, то $\mathfrak{X}$ назовем **точкой края** M; ∂M — край M.
Если $\partial M \neq \varnothing$, то M называется **многообразием с краем**; соответственно, ∂M — **край многообразия** M.
Термин **многообразие**, введенный выше, оставляют за многообразиями без края ($\partial M = \varnothing$).

NB. В книге [В.А. Зорич, Математический анализ, том II], только что введенное множество M называют n–мерным многообразием. То есть, случаи многообразий с краем и без не разделены.
Поскольку тела — открытые множества, то мы рассматриваем многообразия без края.

Пример

Замкнутый шар

$$\overline{\mathcal{B}}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$$

является многообразием с краем. Его край — $(n-1)$–мерная сфера

$$\partial\overline{\mathcal{B}}^n = \mathcal{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Проблема определения гладкого отображения многообразий

Замечание

Требуется определить понятие гладкости для отображений φ вида

$$\varphi: \ M \to \mathbb{R},$$

где M — многообразие, на основе классического определения дифференцируемости отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ибо с последними мы умеем работать, а большего и не знаем.

Дифференцируемость отображения $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$

Функция $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, называется **дифференцируемой в точке** $p \in \mathcal{D}$, если существует линейный оператор $\underline{\underline{\mathbf{J}}}_f\Big|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, называемый **производным отображением**, такой, что имеет место представление

$$f(p+h) = f(p) + \underline{\underline{\mathbf{J}}}_f\Big|_p[h] + o(\|h\|),$$

где $h \in \mathbb{R}^n$ — произвольный упорядоченный набор, но такой, что $x + h \in \mathcal{D}$.

Дифференцируемость отображения $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$

Замечание

Матрица оператора $\underline{\underline{\mathbf{J}}}_f\Big|_p$ в каноническом базисе $(\underline{\mathbf{e}}_i)_{i=1}^n$, $\underline{\mathbf{e}}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где единица занимает i–тое место, представляет собой **матрицу Якоби** для отображения f в точке p.

Теорема о дифференцировании сложной функции

Пусть $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ и $g : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^k$, где $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества, — функции, дифференцируемые в точках p и $f(p)$ соответственно; $f(p) \in \mathcal{G}$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке p, причем

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}_{g\circ f}\Big|_p = \underline{\underline{\mathbf{J}}}_g\Big|_{f(p)} \circ \underline{\underline{\mathbf{J}}}_f\Big|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k.$$

Координатные отображения

Основным инструментом дальнейших построений будут координатные отображения. Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{X}$ — некоторое множество. Определим арифметические проекции $\pi^i_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$:

$$\pi^i_m(x^1, \ldots, x^m) := x^i.$$

Тогда образ точки $p \in \mathcal{X}$ относительно отображения f может быть записан в виде

$$f(p) = (f^1(p), \ldots, f^m(p)), \quad f^i = \pi^i_m \circ f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Функции f^i будем называть **координатными отображениями**.

Договор (соглашение, приказ)

Следуя общепринятым обозначениям, используем символ C^1 для множества непрерывно дифференцируемых функций, C^k — для множества функций, допускающих рекуррентно непрерывную дифференцируемость k раз.
Множество функций $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, которые k раз непрерывно дифференцируемы во всех точках множества $\mathcal{A}$, будем обозначать через $C^k(\mathcal{A};\, \mathbb{R}^n)$.

Определение дифференцируемой структуры на многообразии M

Под **дифференцируемой структурой** на M понимается множество $\mathcal{F}_M$ вещественнозначных функций, каждая из которых определена на открытом подмножестве M, которые удовлетворяют следующим условиям (S. Sternberg):

1° если $U \subset V$ и функция $f \in \mathcal{F}_M$ определена на V, то $f|_U \in \mathcal{F}_M$;

2° если $U = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$, f определена на U и $\forall \alpha \in \mathcal{I} \quad f|_{U_\alpha} \in \mathcal{F}_M$, то $f \in \mathcal{F}_M$;

3° для каждой точки $\mathfrak{X} \in M$ имеются ее окрестность U и такой гомеоморфизм h этой окрестности на открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, что функция $f : D \to \mathbb{R}$, где $D \subset U$ — произвольное открытое множество, принадлежит $\mathcal{F}_M$ тогда и только тогда, когда $f \circ h^{-1}|_{h(D)} \in C^k(h(D); \mathbb{R})$, где $f \circ h^{-1}|_{h(D)} : h(D) \to \mathbb{R}$.

Пара $(M, \mathcal{F}_M)$ называется **дифференцируемым многообразием**.

$$\mathcal{F}_M = \left\{ f \;\middle|\; f : (M \supset V) \to \mathbb{R}^n \wedge V \in \mathfrak{S}_M \right\} :$$

$$D_1 \blacktriangleright \Big((f : V \to \mathbb{R}^n) \in \mathcal{F}_M \Big) \Rightarrow \Big(\forall U \in \mathfrak{S}_M \quad U \subset V \Rightarrow f\Big|_U \in \mathcal{F}_M \Big) ;$$

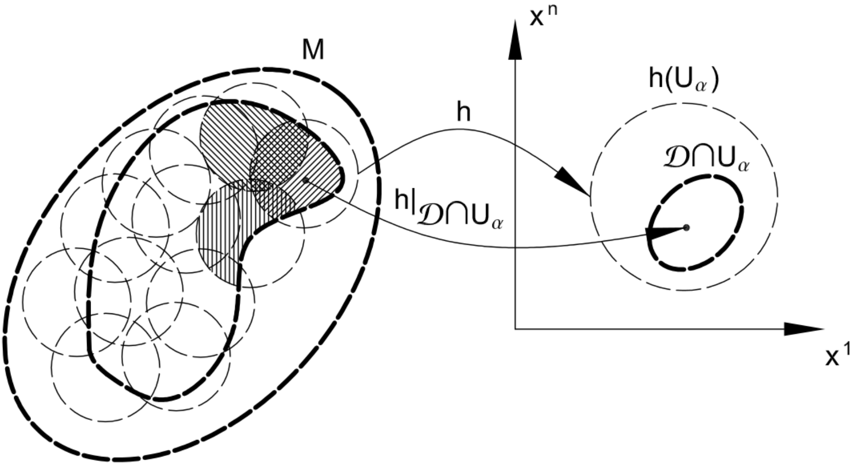
$$D_2 \blacktriangleright \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad \Big(U_\alpha \in \mathfrak{S}_M \wedge f\big|_{U_\alpha} \in \mathcal{F}_M \Big) \Rightarrow \Bigg(f\Big|_{\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha} \in \mathcal{F}_M \Bigg) ;$$

$$D_3 \blacktriangleright \forall x \in M \quad \exists\, U \in \mathfrak{S}_x \quad \exists\, h \in \mathrm{Hom}(U,\, \mathbb{R}^n) \quad \forall D \in \mathfrak{S}_U$$
$$\Big(f \circ h^{-1}\big|_{h(D)} \in C^k(h(D); \mathbb{R}^n) \Big) \Leftrightarrow \left(f\big|_D \in \mathcal{F}_M \right) .$$

Ради экономии места...

В дальнейшем будем придерживаться следующей договоренности. В композиции $f \circ h^{-1}|_{h(D)}$ мы будем опускать символ $|_{h(D)}$ за исключением некоторых случаев. То, что это сужение отображения, будет ясно из контекста.

Пересечение окрестностей с некоторым открытым множеством $\mathcal{D}$



Первые два условия определения 1 требуют, чтобы ограничения и объединения функций из $\mathcal{F}_M$ являлись допустимыми операциями. Как это работает?
Пусть для каждой точки $\mathfrak{X} \in M$ выбраны соответствующие условию 3° ее окрестность $U_\mathfrak{X}$ и гомеоморфизм $h_\mathfrak{X} : U_\mathfrak{X} \to W_\mathfrak{X}$, где $W_\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Система $\{U_\mathfrak{X}\}_{\mathfrak{X} \in M}$ образует открытое покрытие M. Рассмотрим произвольное отображение $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D} \subset M$ — открытое множество. Ясно, что $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{\mathfrak{X} \in \mathcal{D}} \mathcal{D} \cap U_\mathfrak{X}$. Если $f \in \mathcal{F}_M$, то для каждой точки $\mathfrak{X} \in \mathcal{D}$, в силу 1°, имеем $f|_{\mathcal{D} \cap U_\mathfrak{X}} \in \mathcal{F}_M$. Поскольку множество $\mathcal{D} \cap U_\mathfrak{X}$ — открытое, то согласно 3°, имеем

$$\forall \mathfrak{X} \in \mathcal{D} \quad f|_{\mathcal{D} \cap U_\mathfrak{X}} \circ h_\mathfrak{X}^{-1} \in C^k(h_\mathfrak{X}(\mathcal{D} \cap U_\mathfrak{X});\, \mathbb{R}).$$

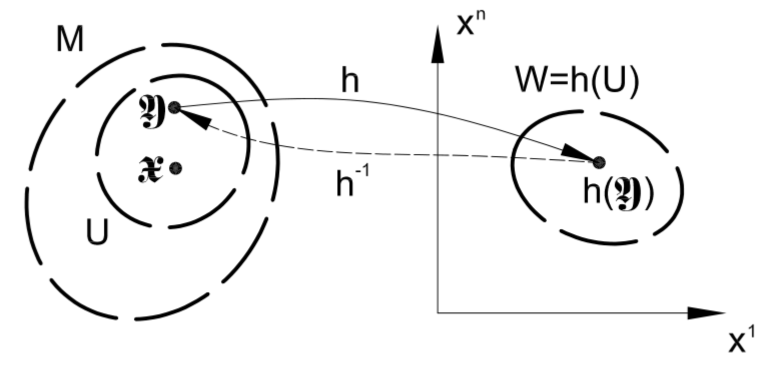
Обратно, пусть выполнено полученное условие. Это означает, по 3°, что для любого $\mathfrak{X} \in \mathcal{D}$ справедливы включения $f|_{\mathcal{D} \cap U_{\mathfrak{X}}} \in \mathcal{F}_M$. Тогда из 2° следует, что $f \in \mathcal{F}_M$.

Физический смысл условия 3°

С физической точки зрения, функции из $\mathcal{F}_M$ — это измерительные приборы. Условие 3° говорит о том, что выполняя измерения в окрестности любой точки многообразия, мы можем выразить полученные данные через известные параметры среды, будь то плотность, температуры, и т.д., то есть, получить уравнения состояния.

Дифференцируемая структура на многообразии M — условие 3°

Окрестность U точки $\mathfrak{X}$ и гомеоморфизм h



Дифференцируемая структура на многообразии M — условие 3°

Пусть $\mathfrak{X} \in M$ — произвольная точка, для которой выбраны (по 3°) соответствующая ее окрестность U и гомеоморфизм $h: U \to W$, где $W \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.
Мы все сводим к работе в $\mathbb{R}^n$. Пусть $f: D \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на открытом множестве $D \subset U$, тогда определим функцию

$$f_h = f \circ h^{-1}: h(D) \to \mathbb{R}.$$

Согласно условию 3°, $f \in \mathcal{F}_M$ тогда и только тогда, когда $f_h \in C^k(h(D); \mathbb{R})$. Возьмем в качестве f функцию $h^i = \pi_n^i \circ h$, тогда

$$f_h = \pi_n^i \circ h \circ h^{-1} = \pi_n^i.$$

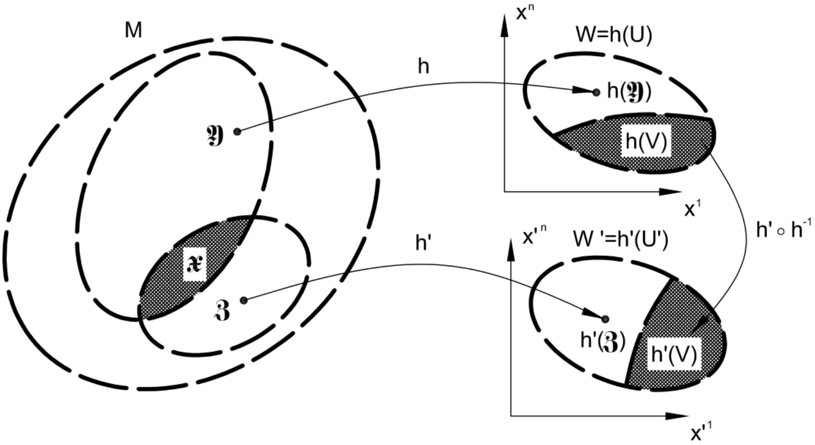
Функция π_n^i дифференцируема сколь угодное число раз и потому принадлежит классу $C^k(W; \mathbb{R})$. Следовательно, $h^i \in \mathcal{F}_M$.

Дифференцируемая структура на многообразии M — условие 3°

Связи измерений с различными эталонами

Измерения могут проводиться с различными эталонами, при этом, результат измерений не должен от этого зависеть. Поэтому соответствующие условию 3° гомеоморфизмы, которые отвечают различным эталонам, должны быть соответствующим образом связаны между собой.

Пересечение окрестностей



Пусть U' — другая окрестность точки $\mathfrak{X}$, h' — гомеоморфизм этой окрестности на $W' \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $V = U \cap U'$. Обозначим через $h_V = h|_V$, $h'_V = h'|_V$ сужения функций h и h' на общую область V. Тогда $h'_V \circ h_V^{-1}$ есть гомеоморфизм $h(V)$ на $h'(V)$. Рассуждения, проведенные для окрестности U и гомеоморфизма h справедливы для любых других окрестностей и гомеоморфизмов. В частности, $h'^i_n = \pi^i \circ h' \in \mathcal{F}_M$. Но тогда, в силу 2°, имеем $h'^i_V \in \mathcal{F}_M$. Теперь заметим, что для точки $\mathfrak{Y} \in V$ справедливо

$$(h'_V \circ h_V^{-1})(\mathfrak{Y}) = ([h'^1_V \circ h_V^{-1}](\mathfrak{Y}), \dots, [h'^n_V \circ h_V^{-1}](\mathfrak{Y})).$$

Каждое из $h'^i_V \circ h_V^{-1}$ является функцией класса $C^k(h(V); \mathbb{R})$, поэтому отображение $h'_V \circ h_V^{-1}$ имеет класс $C^k(h(V); h'(V))$.

Пересечение окрестностей

Пусть f — функция, определённая на V и принадлежащая $\mathcal{F}_M$. Тогда отображение f_{h_V} имеет класс $C^k(h(V); \mathbb{R})$. Справедливы равенства

$$f_{h_V} = f \circ h^{-1} = f_{h'_V} \circ (h'_V \circ h_V^{-1}),$$

формула $f_{h_V} = f_{h'_V} \circ (h'_V \circ h_V^{-1})$ устанавливает связь между представлениями функции f в разных системах координат (пересчет координат). С физической точки зрения полученная формула дает правило пересчета данных, полученных от одних эталонов к данным, полученных от других.

Пересечение окрестностей

Пусть $f = h^i$, тогда из полученной формулы следует

$$\pi^i_n = (h^i_V \circ h'^{-1}_V) \circ (h'_V \circ h^{-1}_V),$$

и, наконец,

$$I = (h_V \circ h'^{-1}_V) \circ (h'_V \circ h^{-1}_V),$$

где I — тождественное отображение. Отсюда мы получаем, что $\det(\underline{\underline{\mathbf{J}}}_{h'_V \circ h^{-1}_V}(x^1, \ldots, x^n)) \neq 0$, где $\underline{\underline{\mathbf{J}}}_{h'_V \circ h^{-1}_V}$ — производная отображения $h'_V \circ h^{-1}_V$.

Итоговые рассуждения

Каждая точка многообразия M, по определению, обладает окрестностью U и соответствующим гомеоморфизмом U и некоторого подмножества $\mathbb{R}^n$. Эти окрестности образуют открытое покрытие M, из которого можно извлечь счетное подпокрытие $\{U_i\}$ с соответствующими отображениями h_i. Предыдущие рассуждения, примененные к $V_{ij} = U_i \cap U_j$, $\mathfrak{X} \in V_{ij}$, говорят о том, что сужение отображения $h_i \circ h_j^{-1}$ на V_{ij} является дифференцируемым, с отличным от нуля якобианом.

Зададим дифференцируемую структуру по данными счетному открытому покрытию $\{U_i\}$ многообразия M и таких гомеоморфизмов $h_i:\ U_i \longrightarrow W_i$, где $W_i \subset \mathbb{R}^n$, что если $V_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то сужение отображения $h_i \circ h_j^{-1}$ на V_{ij} — дифференцируемые функции с ненулевым якобианом. Рассмотрим множество $\mathcal{J}$ всех функций f, области определения которых — открытые подмножества любых U_j и таких, что функции $f \circ h_j^{-1}$ дифференцируемы. Если f определена на подмножестве V_{ij} и композиция $f \circ h_j^{-1}$ дифференцируема, то и композиция $f \circ h_i^{-1}$ дифференцируема, ибо

$$f \circ h_i^{-1} = (f \circ h_j^{-1}) \circ (h_j \circ h_i^{-1}),$$

где по условию $h_j \circ h_i^{-1}$ — дифференцируемое отображение.

Итоговые рассуждения

Множество $\mathcal{J}$ удовлетворяет условию 3° определения $\mathcal{F}_M$. Определим дифференцируемую структуру $\mathcal{F}_{\min}$ следующим образом: $\mathcal{F}_{\min}$ содержит $\mathcal{J}$, а также функции, определенные на открытых подмножествах M, ограничения которых на все U_j принадлежат $\mathcal{J}$. Пусть $\mathcal{F}_M$ — любая дифференцируемая структура на M, содержащая $\mathcal{J}$. Покажем, что $\mathcal{F}_{\min} \subset \mathcal{F}_M$. Достаточно рассмотреть случай, когда $f : V \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на открытом множестве $V \subset M$, сужение которой на все непустые пересечения $U_i \cap V$ есть элементы $\mathcal{J}$. Ясно, что $V = \bigcup\limits_k V_k$, где $V_k = U_k \cap V \neq \varnothing$. Далее, для любого k имеем $f|_{V_k} \in \mathcal{J}$, но тогда $f|_{V_k} \in \mathcal{F}_M$. Следовательно, по свойству 2°, $f \in \mathcal{F}_M$. Таким образом, $\mathcal{F}_{\min}$ — минимальная дифференцируемая структура, содержащая $\mathcal{J}$.
Мы доказали теорему.

Теорема

Пусть M есть n–мерное многообразие и $\mathcal{F}_M$ — дифференцируемая структура на M. Тогда существуют счетное открытое покрытие $\{U_j\}$ многообразия M и множество таких гомеоморфизмов h_j окрестностей U_j на открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, что отображения $h_i \circ h_j^{-1}$ задаются n дифференцируемыми функциями с не обращающимся в нуль якобианом. Обратно, если задано такое открытое покрытие и такие отображения h_j, то существует единственная минимальная дифференцируемая структура $\mathcal{F}_{\min}$, для которой U_j — координатные окрестности, а h_j — координатные отображения.

Карты и атлас

Пусть U — открытое подмножество многообразия M, h — взаимно однозначное отображение множества U в $\mathbb{R}^n$. Пара (U, h) называется **координатной картой**, если $h_i \circ h^{-1} : \ h(U \cap U_i) \to h_i(U \cap U_i)$ — дифференцируемое отображение с отличным от нуля якобианом. Здесь h_i и U_i — из сформулированной выше теоремы. Совокупность карт, покрывающих многообразие, называется **атласом**.

Замечание

Заметим, что функции h_i из доказанной выше теоремы являются произвольными гомеоморфизмами (могут быть не дифференцируемыми), но композиция $h_i \circ h_j^{-1}$ есть функция класса C^k. Обратно, из соответствующих произвольных гомеоморфизмов, удовлетворяющих написанному условию мы можем сформировать дифференциальную структуру. Все такие мыслимые наборы гомеоморфизмов равноправны между собой. Выбор того или иного набора диктуется «внешними» соображениями.

Доказанная теорема во многих работах рассматривается как определение гладкого многообразия. В этом случае, картой многообразия M называется упорядоченная пара $(U,\ h)$ из данного выше определения многообразия; атласом многообразия называется всякая совокупность карт $\{(U_\alpha,\ h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, такая, что $M = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$. Введем понятие C^k–атласа.

Атлас $\{(U_\alpha,\ h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ координатных карт на n–мерном многообразии M называется атласом класса C^k, если гомеоморфизмы h_α удовлетворяют следующему условию: для любых $\alpha,\ \beta \in A$, таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, отображение

$$h_\beta \circ h_\alpha^{-1}:\ h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

является гладким отображением класса C^k с отличным от нуля якобианом.

Альтернативное определение гладкого многообразия

Два C^k–атласа называются **эквивалентными**, если их объединение снова образует C^k–атлас. Совокупность C^k–атласов разбивается на классы эквивалентности, называемые C^k**–структурами**, при $1 \leqslant k \leqslant \infty$ — дифференциальными (или гладкими) структурами. Многообразие M, наделенное C^k–структурой, называется C^k**–гладким многообразием**.

Сфера как гладкое многообразие

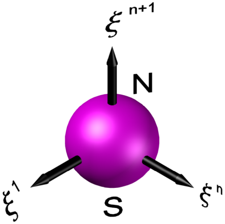
Введем на сфере

$$\mathcal{S}^n = \{\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\xi\| = 1\}$$

атлас, состоящий из двух карт. Пусть

$$N = (0, \ldots, 0, 1), \quad S = (0, \ldots, 0, -1)$$

— северный и южный полюса сферы.

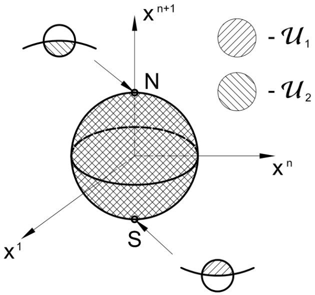


Положим

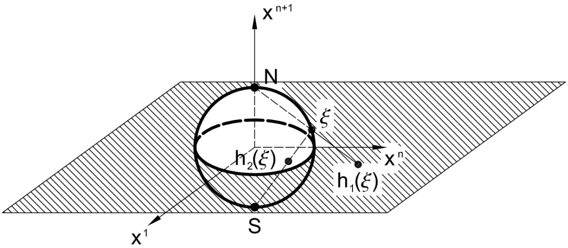
$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{S}^n \setminus \{N\}, \quad \mathcal{U}_2 = \mathcal{S}^n \setminus \{S\}$$

и будем рассматривать (с точностью до гомеоморфизма) $\mathbb{R}^n$ как координатную гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^{n+1} = 0\}.$$



Определим гомеоморфизм $h_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{R}^n$ следующим образом. Для точки $\xi \in \mathcal{U}_1$ прямая, проходящая через N и ξ пересекает $\mathbb{R}^n$ в единственной точке $x = h_1(\xi)$. Аналогично определен гомеоморфизм $h_2 : \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R}^n$: для точки $\xi \in \mathcal{U}_2$ прямая, проходящая через S и ξ пересекает $\mathbb{R}^n$ в единственной точке $x = h_2(\xi)$. Отображения h_1, h_2 — стереографические проекции.



Найдем аналитические выражения для стереографических проекций. Пусть $\xi \in \mathcal{U}_1$, $x = h_1(\xi)$. Векторы $\xi - N$ и $x - N$ коллинеарны, поэтому $\xi - N = \lambda(x - N)$ для некоторого числа λ. Поскольку $x^{n+1} = 0$, то $\xi^{n+1} - 1 = -\lambda$, то есть $\lambda = 1 - \xi^{n+1}$. Тогда, подставляя полученное значение λ в $\xi^i = \lambda x^i$, $i = 1, \ldots, n$, получаем

$$x^i = \frac{\xi^i}{1 - \xi^{n+1}} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Аналогично, если $y = h_2(\xi)$, $\xi \in \mathcal{U}_2$ то

$$y^i = \frac{\xi^i}{1 + \xi^{n+1}} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, мы построили на сфере $\mathcal{S}^n$ атлас $\mathcal{A}$, состоящий из двух карт:

$$\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_1,\ h_1),\ (\mathcal{U}_2,\ h_2)\},$$

и показали, что сфера $\mathcal{S}^n$ есть многообразие размерности $\dim \mathcal{S}^n = n$. Покажем теперь, что карты построенного атласа согласованы. Заметим, что пересечение $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ не содержит точек N и S, поэтому

$$h_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = h_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Отображение $h_2 \circ h_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеет вид

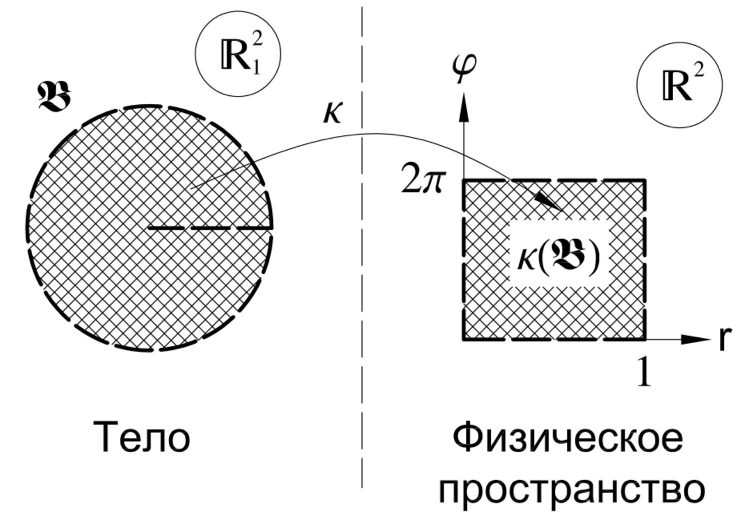
$$y = \frac{x}{\|x\|^2},$$

ибо $\|x\|^2 = \frac{1+\xi^{n+1}}{1-\xi^{n+1}}$. Тем самым доказана гладкая согласованность карт. Следовательно, $\mathcal{A}$ есть C^∞–атлас (согласно эквивалентному определению).

Для определения дифференцируемой структуры на многообразии достаточно указать один атлас, соответствующий требуемому порядку гладкости; этот атлас является представителем соответствующего класса эквивалентности атласов. Таким образом, $\mathcal{S}^n$ есть гладкое многообразие.

Отображения вида $\varphi: M \to N$

Пример тела и его образа в физическом пространстве



Пример тела и его образа в физическом пространстве (продолжение)

В качестве физического пространства возьмем евклидово пространство $\mathbb{R}^2$, в котором задана декартова система координат $\{x^1, x^2\}$. Пусть тело $\mathfrak{B}$ — открытый круг единичного радиуса и центром в $(0, 0)$, с разрезом вдоль радиуса (см. рис.), располагающийся в $\mathbb{R}^2_1$ — копии $\mathbb{R}^2$, в которой также введена декартова система координат, с ортонормированным базисом $\{\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}\}$. Этому телу гомеоморфен открытый прямоугольник в $\mathbb{R}^2$, задаваемый неравенствами $0 < r < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$, где $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$. Гомеоморфизм κ^{-1} определяется выражением

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{i}} r \cos\varphi + \underline{\mathbf{j}} r \sin\varphi.$$

Об $\mathrm{IIm}_\varphi(W)$ (обозначение произошло от Inverse Image)

Под $\mathrm{IIm}_\varphi(W)$ понимается множество — прообраз множества $W \subset Y$ при отображении $\varphi : X \to Y$, где X, Y — произвольные множества:

$$\mathrm{IIm}_\varphi(W) = \{\mathfrak{X} \in X \mid \varphi(\mathfrak{X}) \in W\}.$$

Вместо $\mathrm{IIm}_\varphi(W)$ принято писать $\varphi^{-1}(W)$, что приводит к путанице с образом обратного отображения, которого может и не быть. Поэтому в настоящих лекциях используется только что введенное нетрадиционное обозначение.

Pull–back

Пусть $\varphi: \ M \to N$ — некоторое отображение одного многообразия в другое. Для произвольной функции $f: \ W \to \mathbb{R}$, где $W \subset N$, определим операцию pull back, введя на $\mathrm{IIm}_\varphi(W)$ отображение $\varphi^*(f)$ по правилу

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi|_{\mathrm{IIm}_\varphi(W)}, \quad \varphi^*(f): \ \mathrm{IIm}_\varphi(W) \to \mathbb{R}.$$

Построенная таким образом функция φ^* отображает множество функций, заданных на подмножествах N, в множество функций, заданных на подмножествах M.

Вырожденный случай

Может так случиться, что $\mathrm{IIm}_\varphi(W) = \varnothing$. Поскольку

$$\varphi|_{\mathrm{IIm}_\varphi(W)} \subset \mathrm{IIm}_\varphi(W) \times N = \varnothing,$$

то и $\varphi|_{\mathrm{IIm}_\varphi(W)} = \varnothing$. В этом случае, $\varphi^*(f) = \varnothing$.

Пусть $\mathcal{F}_M$, $\mathcal{F}_N$ дифференцируемые структуры классов C^{k_1}, C^{k_2}, определенные на многообразиях M, N соответственно, причем $\dim M = m$, $\dim N = n$. Дополнив, если надо, соответствующую дифференцируемую структуру новыми функциями (или сузив другую), будем считать, что $k_1 = k_2 = k$. Определим гладкость функции следующим образом. Непрерывное отображение $\varphi : M \to N$ называется **дифференцируемым** класса C^k, если

$$\varphi^*(\mathcal{F}_N) \subset \mathcal{F}_M.$$

Замечание

Из последнего замечания следует, что может найтись такая функция $f \in \mathcal{F}_N$, для которой $\varphi^*(f) = \varnothing$. Но любое множество содержит пустое множество, поэтому $\varphi^*(f) \in \mathcal{F}_M$.

В терминах карт

Пусть $\varphi : M \to N$ — непрерывное отображение, (U', h') — координатная карта вблизи произвольной точки $\mathfrak{X} \in M$, а (V, g) — координатная карта вблизи ее образа $\mathfrak{Y} = \varphi(\mathfrak{X}) \in N$; отображения $h' : U' \to H' \subset \mathbb{R}^m$, $g : V \to G \subset \mathbb{R}^n$ — соответствующие гомеоморфизмы. Указанным гомеоморфизмам соответствуют координатные функции

$$h'^i = \pi^i_m \circ h', \quad g^i = \pi^i_n \circ h,$$

где $\pi^i_m(x^1, \ldots, x^m) = x^i$, $\pi^i_n(y^1, \ldots, y^n) = y^i$ — арифметические проекции.

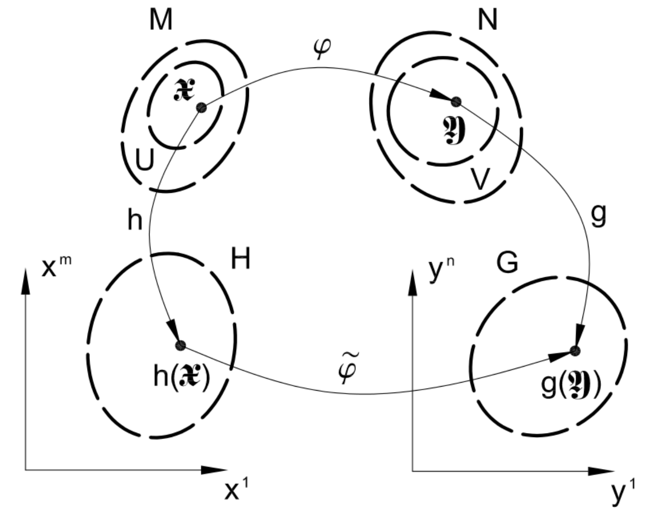
?! Проблема ?!

Окрестность U' может быть произвольной. Дальнейшие рассуждения требуют следующее: во первых, должно быть $U' \subset \mathrm{IIm}_{\varphi}(V)$, во вторых, чтобы U' не вылезло из окрестности, соответствующей 3° в определении дифференцируемой структуры. Это **существенно** для последующих рассуждений. Требование непрерывности отображения φ также существенно.

Сужение U'

Отображение φ непрерывно, прообраз V открыт в M. Пересечение $U = U' \cap \mathrm{IIm}_{\varphi}(V)$ прообраза с окрестностью U' открыто и содержит $\mathfrak{X}$. Следовательно, U — окрестность $\mathfrak{X}$, содержащаяся в $\mathrm{IIm}_{\varphi}(V)$ и U' (для нее, следовательно, 3° выполнено). Ей соответствует гомеоморфизм $h = h'|_U$. Построенную окрестность U рассматриваем как текущую окрестность точки $\mathfrak{X}$. При этом, обозначим $H = h(U)$.

Коммутативная диаграмма



В терминах карт. Продолжение

Если $\varphi : M \to N$ дифференцируемо, то, поскольку $g^i \in \mathcal{F}_N$, справедливо, что

$$\varphi^*(g^i) = g^i \circ \varphi|_{\mathrm{IIm}_\varphi(V)} \in \mathcal{F}_M.$$

Отображение $\varphi^*(g^i)$ определено на открытом множестве $\mathrm{IIm}_\varphi(V)$. При этом, $U \subset \mathrm{IIm}_\varphi(V)$. Согласно свойству 1° из определения дифференциальной структуры, $\varphi^*(g^i)|_U \in \mathcal{F}_M$. В свою очередь, по 3°, имеем, что отображение $[g^i \circ \varphi|_{\mathrm{IIm}_\varphi(V)}]|_U \circ h^{-1} \in C^k(H; \mathbb{R})$.

В терминах карт. Продолжение

Отсюда следует, что отображение $\widetilde{\varphi} : H \to G$, определенное как ($[\cdot]_{\mathrm{IIm}_{\varphi}(V)}$ и $[\cdot]|_U$ можно опустить)

$$\widetilde{\varphi} = g \circ \varphi \circ h^{-1},$$

имеет класс $C^k(H;\ G)$.

Таким образом, для произвольной точки $\mathfrak{X} \in M$ нашли такую окрестность в $\mathbb{R}^m$, что отображение $\widetilde{\varphi}$, определенное в этой окрестности, имеет класс C^k.

В терминах карт. Продолжение

Можно доказать, что справедливо и обратное: из того, что $\widetilde{\varphi} \in C^k(H;\ G)$, можно вывести, что $\varphi^*(f) \in \mathcal{F}_M$. Нетрудно показать, что результаты не зависят от выбора карт в силу свойств дифференцируемой структуры.

Таким образом, мы показали, что условие $\varphi^*(\mathcal{F}_N) \subset \mathcal{F}_M$, где $\mathcal{F}_M$, $\mathcal{F}_N$ дифференцируемые структуры класса C^k на многообразиях M, N, равносильно тому, что $g \circ \varphi \circ h^{-1} \in C^k(H;\ \mathbb{R})$, где $(U,\ h)$, $(V,\ g)$ — соответствующие координатные карты.

■ Рангом отображения φ в точке $\mathfrak{X} = h^{-1}(x^1, \ldots, x^m)$ называется ранг производного отображения $\underline{\underline{\mathbf{J}}}_{g\circ\varphi\circ h^{-1}}(x^1, \ldots, x^n)$:

$$\operatorname{rank}(\varphi)|_{\mathfrak{X}} = \operatorname{rank} \underline{\underline{\mathbf{J}}}_{g\circ\varphi\circ h^{-1}}(x^1, \ldots, x^n).$$

■ Дифференцируемое отображение $\varphi : M \to N$ называется погружением (immersion), если ранг φ равен размерности M во всех точках M. Если $\varphi : M \to N$ — погружение, а также гомеоморфизм на свой образ (в индуцированной топологии), то φ — вложение (embedding).

Некоторые классы отображений $\varphi : M \to N$

Замечания

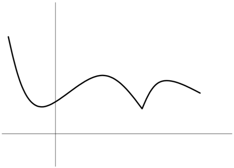
■ Погружение взаимно однозначно локально, но не обязательно глобально.

■ Известен следующий результат о вложениях, называемой **теоремой Уитни**. Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Тогда существует вложение $\varphi : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

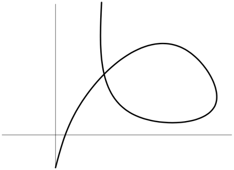
Некоторые классы отображений $\varphi : M \to N$

Примеры погружений и вложений

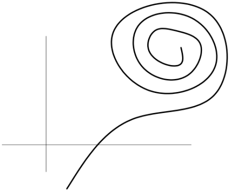
Пусть M — прямая линия, N — плоскость, $\varphi : M \to N$ — отображение. На рисунках ниже показаны различные случаи.



не погружение (острие)

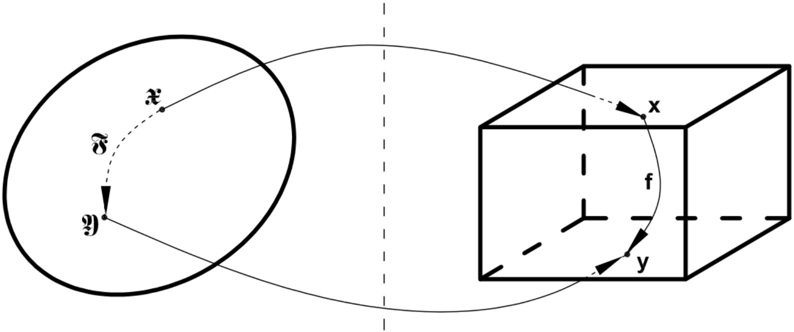


не взаимно однозначное погружение (самопересечение)



вложение

Волокна и траектории



Введение

Кривые на многообразии являются математическим отражением понятия материального волокна в теле. Их образ в физическом пространстве — траектории. Перейдем к математическому описанию. Рассмотрим множество $\mathfrak{Cu}(M)$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(\mathfrak{X}, \varphi)$, где $\mathfrak{X} \in M$, а $\varphi: \ I \to M$ — дифференцируемое отображение интервала $I = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, причем, $\varphi(0) = \mathfrak{X}$. Кривой на многообразии M, проходящей через точку $\mathfrak{X}$, будем называть множество $\varphi(I)$.

Замечание

Случай отображений вида $\varphi: \ I \to M$, где $I = (a, b)$ и $\varphi(c) = \mathfrak{X}$ для $c \in (a, b)$, соответствующей репараметризацией сводятся к случаю, описанному выше.

Отношение эквивалентности на $\mathfrak{Cu}(M)$

Введем на множестве $\mathfrak{Cu}(M)$ отношение эквивалентности $\sim$:

$$(\mathfrak{X},\ \varphi) \sim (\mathfrak{X}',\ \varphi'), \quad \text{если} \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}' \text{ и } \underline{\underline{\mathbf{J}}}_{h\circ\varphi}\Big|_{t=0} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}_{h\circ\varphi'}\Big|_{t=0},$$

где $(U,\ h)$ — координатная карта, покрывающая $\mathfrak{X}$.
Если $(U',\ h')$ другая координатная карта, покрывающая $\mathfrak{X}$, то

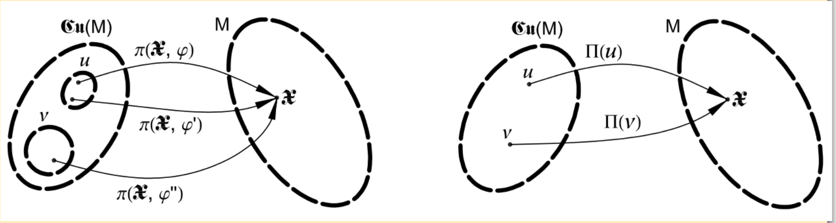
$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}_{h'\circ\varphi}\Big|_{t=0} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}_{h'\circ h^{-1}}\Big|_{[h\circ\varphi](0)} \circ \underline{\underline{\mathbf{J}}}_{h\circ\varphi}\Big|_{t=0},$$

поэтому введенное отношение эквивалентности не зависит от системы координат.

Множество $\mathfrak{Cu}(M)$ разбивается на попарно непересекающиеся классы эквивалентности. Обозначим соответствующее фактормножество через $\mathcal{T}(M)$, а элемент $\underline{\mathbf{u}}$ из $\mathcal{T}(M)$ (то есть класс эквивалентности) будем называть касательным вектором. Если $(\mathfrak{X}, \varphi) \in \underline{\mathbf{u}}$, то говорят, что вектор $\underline{\mathbf{u}}$ касается кривой, порожденной φ, в точке $\mathfrak{X}$.

Определим отображение $\pi : \mathfrak{Cu}(M) \to M$ формулой $\pi(\mathfrak{X}, \varphi) = \mathfrak{X}$. Это отображение постоянно на классах эквивалентности и индуцирует отображение $\Pi : \mathcal{T}(M) \to M$, определенное правилом: $\Pi(\underline{\mathbf{u}}) = \mathfrak{X}$, если $\pi(\underline{\mathbf{u}}) = \{\mathfrak{X}\}$ (рис. ниже). Множество $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M) = \mathrm{IIm}_{\Pi}(\{\mathfrak{X}\})$ будем называть касательным пространством многообразия M в точке $\mathfrak{X}$, а $\Pi : \mathcal{T}(M) \to M$ — касательным расслоением к многообразию M.

Отображения π и Π



$\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)$ как векторное пространство

Рассмотрим касательное пространство многообразия M в точке $\mathfrak{X}$. Пусть $h = (x^1, \ldots, x^n)$ — координатная карта вблизи $\mathfrak{X}$. Определим отображение $\overline{h} : \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M) \to \mathbb{R}^n$ следующим образом. Для касательного вектора $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)$ положим

$\overline{h}(\underline{\mathbf{u}}) = (u^1, \ldots, u^n)$, где $u^i = \underline{\mathbf{J}}_{h\circ\varphi}\Big|_{t=0}[\underline{\mathbf{e}}_i] = \dfrac{d(h^i \circ \varphi)}{dt}\Big|_{t=0}$, $(\mathfrak{X}, \varphi) \in \underline{\mathbf{u}}$. Корректность определения $\overline{h} : \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M) \to \mathbb{R}^n$ следует из введенного отношения эквивалентности, также это отображение взаимно однозначно.

$\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)$ как векторное пространство (продолжение)

Покажем, что $\overline{h}(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)) = \mathbb{R}^n$. Действительно, если $(u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$, то определим отображение $\varphi(t)$, полагая

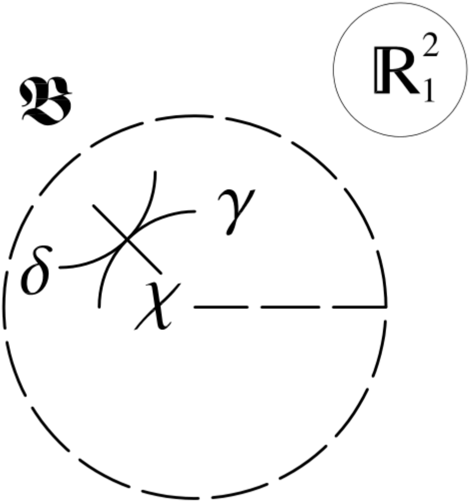
$$\varphi(t) = h^{-1}(h(\mathfrak{X}) + t(u^1, \ldots, u^n)).$$

Тогда непосредственным вычислением находим, что $\overline{h}(\underline{\mathbf{u}}) = (u^1, \ldots, u^n)$, где $\underline{\mathbf{u}} \ni (\mathfrak{X}, \varphi)$. Итак, $\overline{h}: \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M) \to \mathbb{R}^n$ — взаимно однозначное отображение. Введем на $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)$ **структуру векторного пространства**, полагая

$$\alpha\underline{\mathbf{u}} + \beta\underline{\mathbf{v}} = \overline{h}^{-1}(\alpha\overline{h}(\underline{\mathbf{u}}) + \beta\overline{h}(\underline{\mathbf{v}})),$$

для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)$.

Снова круг с разрезом



На рис. приведены кривые γ, δ, χ, лежащие в круге $\mathfrak{B}$ (см. пример выше) и пересекающиеся в точке $\mathfrak{X}$, соответствующей $r = \frac{1}{2}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Здесь χ — отрезок прямой $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $r \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, γ, δ — четверти окружностей. Параметрические уравнения этих кривых имеют вид:

$$\gamma : \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{r}}_1(t) = \tfrac{1}{2}\underline{\mathbf{i}} \cos\left(t + \tfrac{3\pi}{4}\right) + \tfrac{1}{2}\underline{\mathbf{j}} \sin\left(t + \tfrac{3\pi}{4}\right), \quad t \in \left(-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right);$$

$$\delta : \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{r}}_2(t) = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)\right]\underline{\mathbf{i}} + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)\right]\underline{\mathbf{j}},$$

$t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;

$$\chi : \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{r}}_3(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{t}{\pi}\right]\left(-\underline{\mathbf{i}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \underline{\mathbf{j}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Несложно проверить, что $\left.\frac{d\underline{\mathbf{r}}_1(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\underline{\mathbf{r}}_2(t)}{dt}\right|_{t=0}$, поэтому $(\mathfrak{X},\ \underline{\mathbf{r}}_1) \sim (\mathfrak{X},\ \underline{\mathbf{r}}_2)$. Поэтому эти две упорядоченные пары лежат в одном классе эквивалентности. В то же время, пара $(\mathfrak{X},\ \underline{\mathbf{r}}_3)$ принадлежит другому классу эквивалентности.

Замечание

В рассмотренном случае отображение $x^i \circ \varphi$ есть композиция отображения $\underline{\mathbf{r}}_i : \ (-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}) \to \mathfrak{B}$ и κ^{-1}. Каждое из этих отображений дифференцируемо, поэтому можно использовать правило дифференцирования сложной функции. При этом, $\left(\frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial \underline{\mathbf{r}}_i}\right)$ не зависит от $\underline{\mathbf{r}}_i$, поэтому принадлежность классу эквивалентности определяется лишь значением $\frac{d\underline{\mathbf{r}}_i(t)}{dt}$.

Снова круг с разрезом

Пусть $\underline{\mathbf{u}}$ — класс эквивалентности кривой γ, а $\underline{\mathbf{v}}$ — класс эквивалентности кривой χ. Следуя введенным определениям, найдем $\alpha\underline{\mathbf{u}}$, $\alpha\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Все сводится к работе с представителями классов $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}}$. Имеем:

$$\overline{h}(\underline{\mathbf{u}}) = (\tfrac{1}{2},\ t + \tfrac{3\pi}{4})'_{t=0} = (0,\ 1);$$

$$\overline{h}(\underline{\mathbf{v}}) = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{t}{\pi},\ \tfrac{3\pi}{4})'_{t=0} = (\tfrac{1}{\pi},\ 0).$$

Снова круг с разрезом

Далее получаем

$$\alpha\overline{h}(\underline{\mathbf{u}}) = (0,\ \alpha), \quad \alpha\overline{h}(\underline{\mathbf{v}}) = (\tfrac{\alpha}{\pi},\ 0);$$

$$\overline{h}(\underline{\mathbf{u}}) + \overline{h}(\underline{\mathbf{v}}) = (\tfrac{1}{\pi},\ 1).$$

Нам достаточно знать по одному представителю из классов $\alpha\underline{\mathbf{u}}$, $\alpha\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}$. Его можно определить по формуле, упомянутой выше:

$$\varphi(t) = h^{-1}(h(\mathfrak{X}) + t(u^1,\ \ldots,\ u^n)).$$

Снова круг с разрезом

Поскольку $h(\mathfrak{X}) = (\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4})$, то

$$\alpha\underline{\mathbf{u}}: \quad \underline{\mathbf{r}}_{1\alpha}(t) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{i}}\cos(\frac{3\pi}{4} + \alpha t) + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{j}}\sin(\frac{3\pi}{4} + \alpha t);$$

$$\alpha\underline{\mathbf{v}}: \quad \underline{\mathbf{r}}_{3\alpha}(t) = (\frac{1}{2} + \frac{\alpha t}{\pi})(-\underline{\mathbf{i}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \underline{\mathbf{j}}\frac{1}{\sqrt{2}});$$

$$\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}: \quad \underline{\mathbf{r}}_{1+3}(t) = (\frac{1}{2} + \frac{t}{\pi})[\underline{\mathbf{i}}\cos(\frac{3\pi}{4} + t) + \underline{\mathbf{j}}\sin(\frac{3\pi}{4} + t)].$$

Заметим, что если мы продифференцируем полученные соотношения по t и положим $t = 0$, то это будет не что иное, как соответственно, умножение на число и сумма векторов скорости (в «классическом смысле») соответствующих кривых $\underline{\mathbf{r}}_i$ при $t = 0$.

Между касательными векторами и линейными функциями существует естественная связь, которая выражается в следующей **Теореме**. Пусть $\mathcal{F}_U$ — линейное пространство дифференцируемых функций $f : M \supset U \to \mathbb{R}$. Каждому касательному вектору $\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}$ на многообразии M соответствует линейная функция

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}} : \mathcal{F}_U \to \mathbb{R},$$

для любого открытого множества U, содержащего $\mathfrak{X}$. Эта линейная функция удовлетворяет условиям:
i) $\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}}(fg) = f(\mathfrak{X})\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}}(g) + g(\mathfrak{X})\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}}(f)$ для всех $f,\ g \in \mathcal{F}_U$;
ii) $\mathcal{L}_{\alpha\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}+\beta\underline{\mathbf{v}}_{\mathfrak{X}}} = \alpha\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}} + \beta\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}_{\mathfrak{X}}}$ для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$;
iii) Если $\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}} = \mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}_{\mathfrak{X}}}$, то $\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}} = \underline{\mathbf{v}}_{\mathfrak{X}}$.

Отметим, что в доказательстве указанной теоремы указан вид функции $\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}}$. Она определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}}(f) = \left.\frac{d(f[\varphi(t)])}{dt}\right|_{t=0}.$$

Функционал такого вида мы можем отождествить с соответствующим вектором $\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}$.

В карте $(U,\ h)$ определим кривую φ^i равенством

$$h^j(\varphi^i(t)) = \delta^j_i t \quad (j = 1,\ \ldots,\ n).$$

Этой кривой в точке $\mathfrak{X} = \varphi^i(0) \in U$ соответствует векторное поле $\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}_U$ рассмотрим $\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}}(f)$:

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}}(f) = \left.\frac{d(f[\varphi^i(t)])}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}[(f \circ h^{-1}) \circ (h \circ \varphi^i)] =$$
$$= \left.\frac{\partial f_h}{\partial x^j}\right|_{(h\circ\varphi^i)(0)} \left.\frac{d(h^j \circ \varphi^i)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f_h}{\partial x^i}\right|_{(h\circ\varphi^i)(0)}.$$

Таким образом, вектор, касательный к рассматриваемой кривой, может быть отождествлен с линейным функционалом $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)\Big|_{(h\circ\varphi^i)(0)}$, где $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)\Big|_{(h\circ\varphi^i)(0)}(f) = \dfrac{\partial f_h}{\partial x^i}\Big|_{(h\circ\varphi^i)(0)}$.
Из определений следует, что $\overline{h}(\partial/\partial x^i)|_{(h\circ\varphi^i)(0)} = (\delta_i^1, \ldots, \delta_i^n)$, поэтому векторы $(\partial/\partial x^i)|_{(h\circ\varphi^i)(0)}$ образуют базис пространства $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)$; $\dim \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M) = n$.

Сопряженное к $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)$ пространство — $\mathcal{T}^*_{\mathfrak{X}}(M)$. С физической точки зрения, элементами пространства $\mathcal{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathcal{E})$ являются силы (гравитационные, электромагнитные, и т.д.), а элементами пространства $\mathcal{T}^*_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{B})$ — конфигурационные силы, отвечающие за движение дефектов в твердом теле. С математической точки зрения, ситуация выглядит следующим образом. Пусть f — дифференцируемая функция, определенная в точке $\mathfrak{X}$. Она порождает линейную функцию $df_{\mathfrak{X}} : \underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}} \mapsto \mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}}(f)$ из $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)$, где

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{X}}}(f) = \left.\frac{d(f[\varphi(t)])}{dt}\right|_{t=0}.$$

Пространство ковекторов

Согласно определениям, для любой карты (U, h) для локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$ справедливо соотношение

$$(dx^j)_{\mathfrak{x}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big|_{\mathfrak{x}} \right) = \delta^j_i,$$

откуда следует, что функции $(dx^j)|_{\mathfrak{x}}$ образуют базис $\mathcal{T}^*_{\mathfrak{x}}(M)$, дуальный к $(\partial/\partial x^i)|_{\mathfrak{x}}$. Элементы $\mathcal{T}^*_{\mathfrak{x}}(M)$ — ковекторы.

Семейство $\mathfrak{F}_t : M \to M$ диффеоморфизмов называется **потоком** на многообразии M, если отображение

$$\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times M \to M$$

удовлетворяет следующим условиям:

1. отображение $\mathfrak{F}$ дифференцируемо,
2. $\mathfrak{F}_{t+s} = \mathfrak{F}_t \circ \mathfrak{F}_s$ для всех t и s,
3. отображение $\mathfrak{F}_0$ — тождественное.

Рассмотренное семейство $\{\mathfrak{F}_t\}$ образует группу относительно операции $\circ$, она называется **группой Ли**. Это семейство порождает соответствующее семейство кривых на многообразии. Действительно, для любой точки $\mathfrak{X} \in M$ отображение $t \mapsto \mathfrak{F}_t(\mathfrak{X})$ является кривой, проходящей через $\mathfrak{X}$.

Для потока $\{\mathfrak{F}_t\}$ введем отображение $\underline{\mathbf{v}} : \mathfrak{X} \mapsto \underline{\mathbf{v}}_{\mathfrak{X}}$, где оператор $\underline{\mathbf{v}}_{\mathfrak{X}}$ определяется следующим образом. Для любой дифференцируемой на M функции f имеем

$$\underline{\mathbf{v}}_{\mathfrak{X}}(f) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathfrak{F}_t(\mathfrak{X})) - f(\mathfrak{X})}{t}.$$

Таким образом, отображение $\underline{\mathbf{v}}$ определяет векторное поле на M, называемое **инфинитиземальной образующей** потока $\{\mathfrak{F}_t\}$.

Замечание

Не всякое векторное поле на M порождает поток $\{\mathfrak{F}_t\}$. Но локально, это верно.

Теорема о локальном интегрировании векторного поля

■ Пусть $\underline{\mathbf{v}}$ — векторное поле на M. Для любого $\mathfrak{X} \in M$ существуют окрестность $U \ni \mathfrak{X}$, $\varepsilon > 0$ и единственное семейство дифференцируемых отображений $\mathfrak{F}_t : U \to M$, определенное при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, такие, что

1) отображение $\mathfrak{F} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, переводящее $(t, \mathfrak{X})$ в $\mathfrak{F}_t(\mathfrak{X})$, дифференцируемо;

2) если каждое из чисел $|t|$, $|s|$, $|t + s|$ меньше ε и $\mathfrak{Y} \in U$, $\mathfrak{F}_t(\mathfrak{Y}) \in U$, то
$$\mathfrak{F}_{t+s}(\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{F}_t \circ \mathfrak{F}_s)(\mathfrak{Y});$$

3) $\underline{\mathbf{v}}_{\mathfrak{Y}}$ есть касательный вектор к кривой $t \mapsto \mathfrak{F}_t(\mathfrak{Y})$, $\mathfrak{Y} \in U$.

■ Заметим, что на компактном многообразии любое векторное поле порождает поток.

Введем **производную Ли** векторного поля $\underline{\mathbf{u}}$ по направлению векторного поля $\underline{\mathbf{v}}$ на M. Пусть $\{\mathfrak{F}_t^*\}$ — семейство pull back'ов для потока $\{\mathfrak{F}_t\}$. Тогда производной Ли называется линейное отображение $\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(\underline{\mathbf{u}})_{\mathfrak{x}}$, такое, что

$$\mathfrak{F}_t^*(\underline{\mathbf{u}})_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{F}_0^*(\underline{\mathbf{u}})_{\mathfrak{x}} + \mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(\underline{\mathbf{u}})_{\mathfrak{x}} t + o(t),$$

где $\mathfrak{F}_t^*(\underline{\mathbf{u}})_{\mathfrak{x}} : \mathbb{R} \supset I \to \mathcal{T}M$, $\mathfrak{F}_0^*(\underline{\mathbf{u}})_{\mathfrak{x}} = \underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{x}}$. При этом,

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(\underline{\mathbf{u}})_{\mathfrak{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathfrak{F}_t^*(\underline{\mathbf{u}})_{\mathfrak{x}} - \underline{\mathbf{u}}_{\mathfrak{x}}}{t}.$$

Из определения следует линейность производной Ли:

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(\alpha\underline{\mathbf{u}} + \beta\underline{\mathbf{w}}) = \alpha\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(\underline{\mathbf{u}}) + \beta\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(\underline{\mathbf{w}}).$$

Производная Ли

Замечание

Аналогичным образом производная Ли определяется для произвольного тензорного поля на многообразии.

Рассмотрим выражения производной Ли для скалярных функций и векторных полей.
1. Функции. Если f — дифференцируемая функция на M, то $\mathfrak{F}_t^* f = f \circ \mathfrak{F}_t$, и

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(f)_{\mathfrak{X}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathfrak{F}_t(\mathfrak{X})) - f(\mathfrak{X})}{t}.$$

В локальных координатах имеем

$$f = f(x^1, \ldots, x^n),$$

$$\mathfrak{F}_t^* f = f(\mathfrak{F}_t^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \mathfrak{F}_t^n(x^1, \ldots, x^n)),$$

поэтому

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \frac{d\mathfrak{F}^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} v^i \frac{\partial f^i}{\partial x^j}.$$

Таким образом, если $\underline{\mathbf{v}} = \sum\limits_{j=1}^{n} v^i(\partial/\partial x^i)$, то

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(f) = \underline{\mathbf{v}}(f).$$

2. Векторные поля. Можно показать, что справедливо следующее выражение для производной Ли:

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{v}}}(\underline{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(v^i\frac{\partial u^j}{\partial x^j} - u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = \underline{\mathbf{v}}\circ\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}\circ\underline{\mathbf{v}} = [\underline{\mathbf{v}},\ \underline{\mathbf{u}}],$$

где $[\underline{\mathbf{v}},\ \underline{\mathbf{u}}] = \underline{\mathbf{v}}\circ\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}\circ\underline{\mathbf{v}}$ — коммутатор векторных полей, называемый **скобкой Ли**.

Производная Ли

Скобка Ли

Свойства скобки Ли:

i) скобки Ли $[\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}]$ являются билинейным отображением,

ii) $[\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}] = -[\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}]$ (антикоммутативность),

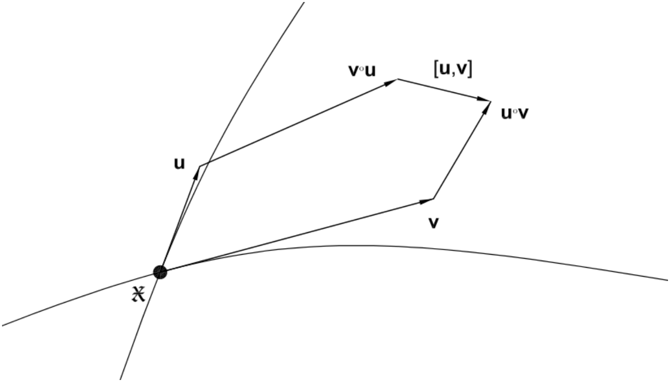
iii) $[\underline{\mathbf{u}}, [\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}]] + [\underline{\mathbf{w}}, [\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}]] + [\underline{\mathbf{v}}, [\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{u}}]] = \underline{\mathbf{0}}$ (**тождество Якоби**).

Замечание

■ Антикоммутативная алгебра, в которой выполнено тождество Якоби, называется **алгеброй Ли**.

■ Таким образом, пространство всех векторных полей на многообразии есть алгебра Ли, если в качестве умножения взять скобку Ли.

Рассмотрим композиции операторов $\mathbf{u}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbf{v}_{\mathfrak{X}}$ и $\mathbf{v}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbf{u}_{\mathfrak{X}}$, первая из которых трактуется как параллельное перенесение вектора $\mathbf{u}_{\mathfrak{X}}$ вдоль вектора $\mathbf{v}_{\mathfrak{X}}$, а вторая — наоборот. Геометрическая интерпретация этого приведена на рис. ниже. Замкнётся ли параллелограмм? В общем случае — нет. Мерой незамкнутости являются скобки Ли $[\mathbf{u}_{\mathfrak{X}}, \mathbf{v}_{\mathfrak{X}}] = \mathbf{u}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbf{v}_{\mathfrak{X}} - \mathbf{v}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbf{u}_{\mathfrak{X}}$.



Интерпретация скобок Ли

Вторая интерпретация скобок Ли заключается в следующем. Любое поле базисов $\underline{\mathbf{e}}_\beta$ касательного пространства $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(M)$ можно разложить по базису ∂_ν: $\underline{\mathbf{e}}_\beta = e^\nu_\beta \partial_\nu$. Для поля $\underline{\mathbf{e}}_\beta$ может не существовать системы координат $x^\beta(\xi^\nu)$, такой, что $e^\nu_\beta = \partial_\beta x^\nu$. В таком случае, поле базисов $\underline{\mathbf{e}}_\beta$ называется неголономным. скобки Ли, вычисленные для элементов голономного, в частности, натурального базиса, дают нулевой вектор, в то время как в общем случае $[\underline{\mathbf{e}}_i, \underline{\mathbf{e}}_j] = \underline{\mathbf{w}}_{ij} \neq \underline{\mathbf{0}}$. Компоненты векторных полей $\underline{\mathbf{w}}_{ij} = c^k_{ij} \underline{\mathbf{e}}_k$ называются структурными коэффициентами поля реперов $\underline{\mathbf{e}}_k$ и с геометрической точки зрения характеризуют его неголономность.

Пример

Рассмотрим две системы координат на плоскости: полярную систему координат $(r,\, \varphi)$ с локальным базисом $\{\underline{\mathbf{e}}_r,\, \underline{\mathbf{e}}_\varphi\}$ и декартову с базисом $\{\underline{\mathbf{i}},\, \underline{\mathbf{j}}\}$. Что будет, если мы в качестве базиса на плоскости возьмем $\{\underline{\mathbf{e}}_r,\, \underline{\mathbf{i}}\}$? Вычислим $[\underline{\mathbf{e}}_r,\, \underline{\mathbf{i}}]$:

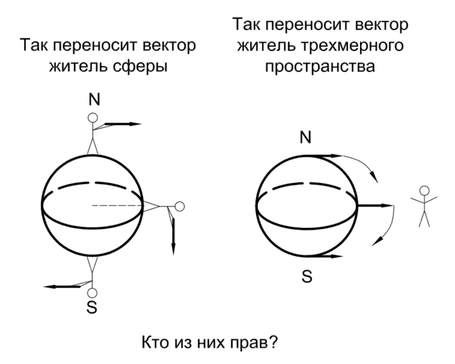
$$[\underline{\mathbf{e}}_r,\, \underline{\mathbf{i}}] = -\underline{\mathbf{i}}\partial_x \cos\varphi - \underline{\mathbf{j}}\partial_x \sin\varphi = -\partial_x \underline{\mathbf{e}}_r.$$

Аффинная связность

Мотивировка

На многообразиях нет «естественных» правил параллельного переноса. Правила переноса равноправны между собой. Они вводятся посредством аффинной связности.

Параллельный перенос вектора вдоль контура на сфере



Аффинная связность

Определение аффинной связности

Аффинной связностью Γ (другое обозначение — ∇) называется отображение

$$\Gamma:\ \mathcal{T}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}\times\mathcal{T}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}\to\mathcal{T}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B},$$

ставящее в соответствие каждой паре $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})\in\mathcal{T}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}\times\mathcal{T}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}$ векторное поле $\Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}\underline{\mathbf{v}}$, называемое **ковариантной производной** векторного поля $\underline{\mathbf{v}}$ по направлению $\underline{\mathbf{u}}$. При этом должны быть выполнены следующие соотношения: $\forall f,\ g\in C^n(\mathfrak{B})$,

$$
\begin{aligned}
&1^\circ \quad \Gamma_{\underline{\mathbf{u}}+\underline{\mathbf{v}}}(\underline{\mathbf{w}})=\Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}\underline{\mathbf{w}}+\Gamma_{\underline{\mathbf{v}}}\underline{\mathbf{w}},\\
&2^\circ \quad \Gamma_{g\underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{w}})=g\Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}\underline{\mathbf{w}},\\
&3^\circ \quad \Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{v}}+\underline{\mathbf{w}})=\Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}\underline{\mathbf{v}}+\Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}\underline{\mathbf{w}},\\
&4^\circ \quad \Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}(f\underline{\mathbf{v}})=f\Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}\underline{\mathbf{v}}+(\underline{\mathbf{u}}(f))\underline{\mathbf{v}}.
\end{aligned}
$$

Вычисления в карте. Общий случай

В базисе $\{\partial_i\}$ определим коэффициенты связности Γ_{ij}^k соотношениями:

$$\Gamma_{\partial_j}\partial_i = \Gamma_{ij}^k\partial_k,$$

тогда для полей $\underline{\mathbf{u}} = u^i\partial_i$, $\underline{\mathbf{v}} = v^j\partial_j$ имеем следующее координатное представление ковариантной производной $\Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}\underline{\mathbf{v}}$:

$$\Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}\underline{\mathbf{v}} = \Gamma_{u^i\partial_i}(v^j\partial_j) = u^i(\partial_i v^j + v^k\Gamma_{ik}^j)\partial_j.$$

Координатное представление для скобок Ли $[\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}]$ векторных полей $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}}$ имеет вид:

$$[\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}] = u^i\partial_i(v^j\partial_j) - v^j\partial_j(u^i\partial_i) = (u^i\partial_i v^j - v^i\partial_i u^j)\partial_j.$$

Вычисления в карте. Случай вложения

Пусть имеется вложение многообразия в $\mathcal{E}$, определяемое вектором мест $\underline{\mathbf{x}}$, который является функцией криволинейных координат. В этом случае, написанные выше формулы примут вид:

$$\Gamma_{\underline{\mathbf{e}}_j}\underline{\mathbf{e}}_i = \partial_j \underline{\mathbf{e}}_i = \Gamma^k_{ij}\underline{\mathbf{e}}_k,$$

$$\Gamma_{\underline{\mathbf{u}}}\underline{\mathbf{v}} = u^i(\partial_i v^j + v^k \Gamma^j_{ik})\underline{\mathbf{e}}_j,$$

$$[\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}] = (u^i \partial_i v^j - v^i \partial_i u^j)\underline{\mathbf{e}}_j,$$

где $\underline{\mathbf{e}}_i = \partial_i \underline{\mathbf{x}}$ — локальный базис.

Вычисление связности

Пусть на двумерном многообразии заданы базис $\{\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}\}$ и соответствующие связности $\Gamma_{\underline{\mathbf{i}}}\underline{\mathbf{i}}$, $\Gamma_{\underline{\mathbf{i}}}\underline{\mathbf{j}}$, $\Gamma_{\underline{\mathbf{j}}}\underline{\mathbf{i}}$, $\Gamma_{\underline{\mathbf{j}}}\underline{\mathbf{j}}$. Вычислим связности $\Gamma_{\underline{\mathbf{e}}_i}\underline{\mathbf{e}}_j$, $i, j = 1, 2$, где

$$\underline{\mathbf{e}}_k = a_{k1}\underline{\mathbf{i}} + b_{k2}\underline{\mathbf{j}}, \quad k = 1, 2.$$

Предварительно отметим, что $\underline{\mathbf{i}}$, $\underline{\mathbf{j}}$ действуют на произвольную скалярную функцию следующим образом:

$$\underline{\mathbf{i}}(f) = \partial_1 f, \quad \underline{\mathbf{j}}(f) = \partial_2 f,$$

где ∂_1, ∂_2 — частные производные по координатам, соответствующим $\underline{\mathbf{i}}$, $\underline{\mathbf{j}}$.

Вычисление связности (продолжение)

Тогда, согласно определению связности, имеем:

$$\Gamma_{\underline{\mathbf{e}}_p}\underline{\mathbf{e}}_q = \Gamma_{a_{p1}\underline{\mathbf{i}}+b_{p2}\underline{\mathbf{j}}}(a_{q1}\underline{\mathbf{i}} + b_{q2}\underline{\mathbf{j}}) =$$
$$= a_{p1}\Gamma_{\underline{\mathbf{i}}}(a_{q1}\underline{\mathbf{i}}) + a_{p1}\Gamma_{\underline{\mathbf{i}}}(b_{q2}\underline{\mathbf{j}}) + b_{p2}\Gamma_{\underline{\mathbf{j}}}(a_{q1}\underline{\mathbf{i}}) + b_{p2}\Gamma_{\underline{\mathbf{j}}}(b_{q2}\underline{\mathbf{j}}) =$$
$$= (a_{p1}\partial_1 a_{q1} + b_{p2}\partial_2 a_{q1})\underline{\mathbf{i}} + (a_{p1}\partial_1 b_{q2} + b_{p2}\partial_2 b_{q2})\underline{\mathbf{j}} +$$
$$+ a_{p1}a_{q1}\Gamma_{\underline{\mathbf{i}}}\underline{\mathbf{i}} + a_{p1}b_{q2}\Gamma_{\underline{\mathbf{i}}}\underline{\mathbf{j}} + b_{p2}a_{q1}\Gamma_{\underline{\mathbf{j}}}\underline{\mathbf{i}} + b_{p2}b_{q2}\Gamma_{\underline{\mathbf{j}}}\underline{\mathbf{j}},$$

$p,\ q = 1,\ 2$. В случае, когда $\Gamma_{\underline{\mathbf{i}}}\underline{\mathbf{i}} = \Gamma_{\underline{\mathbf{i}}}\underline{\mathbf{j}} = \Gamma_{\underline{\mathbf{j}}}\underline{\mathbf{i}} = \Gamma_{\underline{\mathbf{j}}}\underline{\mathbf{j}} = \underline{\mathbf{0}}$ (евклидова связность), соотношения примут вид:

$$\Gamma_{\underline{\mathbf{e}}_p}\underline{\mathbf{e}}_q = (a_{p1}\partial_1 a_{q1} + b_{p2}\partial_2 a_{q1})\underline{\mathbf{i}} + (a_{p1}\partial_1 b_{q2} + b_{p2}\partial_2 b_{q2})\underline{\mathbf{j}}.$$

Кривизна и кручение

Кручение аффинной связности определяется выражением

$$T(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = \Gamma_{\underline{\mathbf{u}}} \underline{\mathbf{v}} - \Gamma_{\underline{\mathbf{v}}} \underline{\mathbf{u}} - [\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}].$$

Кривизна риманова многообразия выражается с помощью тензора кривизны, который определяется следующим образом ($\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{w}}$ — векторы касательного пространства)

$$K(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})\underline{\mathbf{w}} = \Gamma_{\underline{\mathbf{u}}} \Gamma_{\underline{\mathbf{v}}} \underline{\mathbf{w}} - \Gamma_{\underline{\mathbf{v}}} \Gamma_{\underline{\mathbf{u}}} \underline{\mathbf{w}} - \Gamma_{[\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}]} \underline{\mathbf{w}}.$$

Из определения видно, что тензор кривизны определяет некоммутативность ковариантных производных.

Замечание

Кривизна и кручение имеют следующий смысл. Рассмотрим в произвольной карте замкнутый контур и заданное на нём векторное поле. Будем это поле переносить параллельно самому себе. Если пространство евклидово, то кривизна и кручение равны нулю. В этом случае, после обхода контура вектор совпадёт с самим собой. Если пространство риманово, то в нём отлична от нуля кривизна. В этом случае, вектор, пришедший в исходную точку, будет повёрнут относительно своего начального положения.