

Геометрические методы моделирования структурно-неоднородных тел

С.А. Лычев¹, К.Г. Койфман²

¹ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва,
lychevsa@mail.ru

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва,
koifman.bmstu@yandex.ru

Москва 2017

Введение

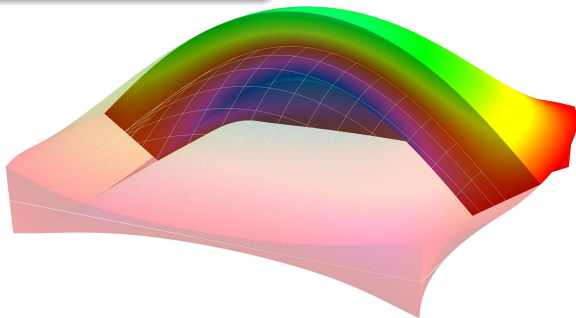


Диаграмма исследователей



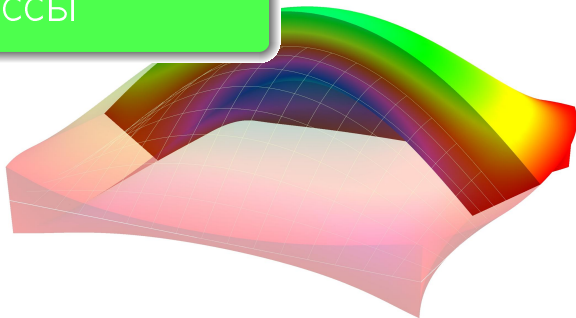
Eckart Carl. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity // Physical Review. — 1948. — Vol. 73, no. 4. — P. 373.

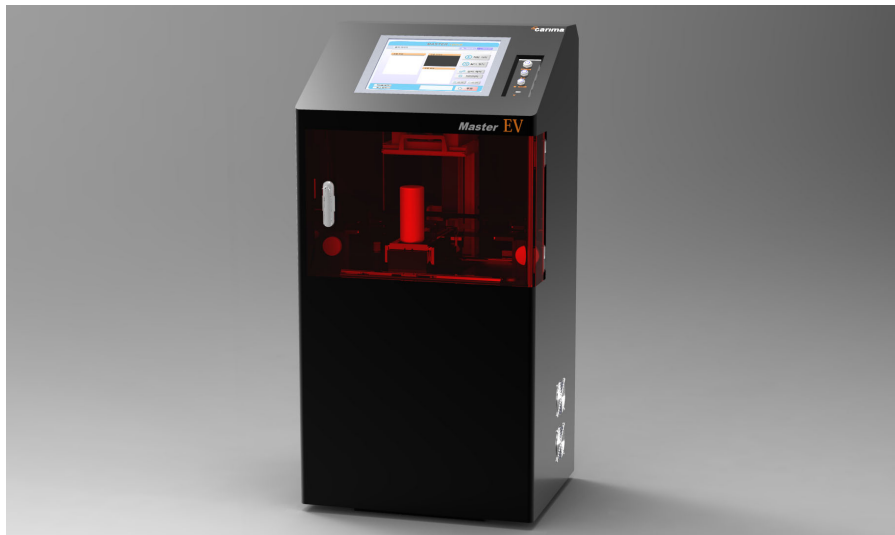
«The traditional theory of the solid state rests on two false assumptions. One is the principle of a constant relaxed (or standard) state. The other is the principle of relaxability-in-the-large, first formulated mathematically by de Saint-Venant. His equations are essentially identical with Riemann's equations expressing the condition that a geometry be Euclidean-in-the-large.»

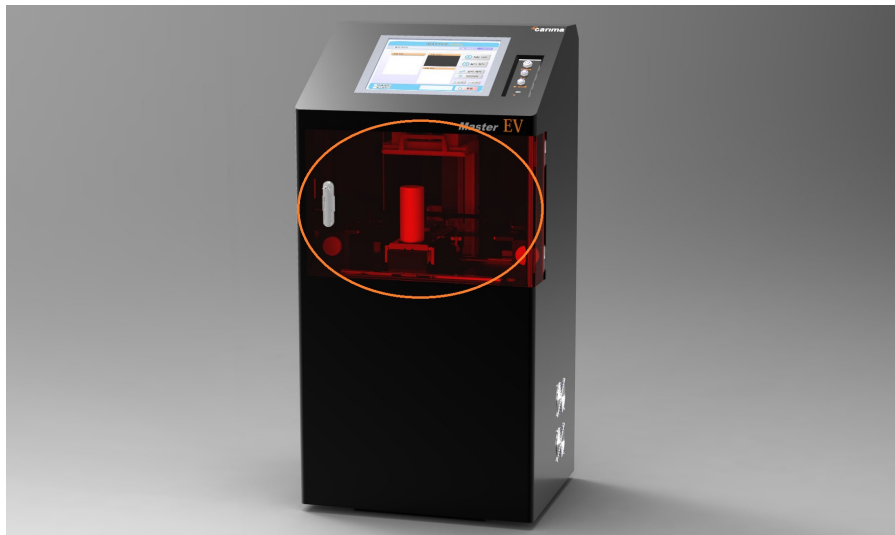
Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. — Cambridge University Press, 2010.

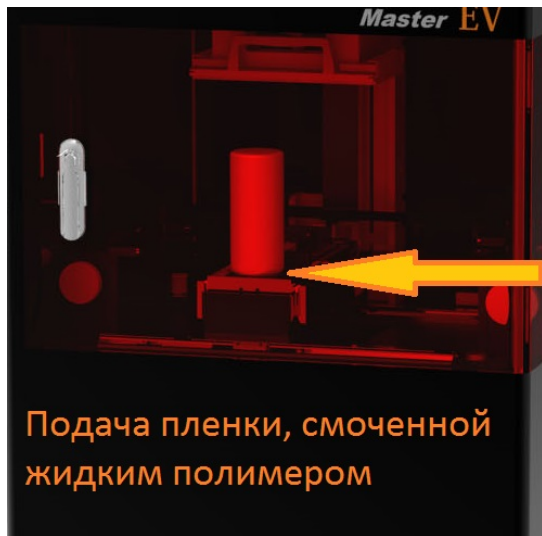
«The body itself dwells in the Platonic world of differentiable manifolds, of which we can only see the manifestations in the world of phenomena, amenable to perception, in this case, in the guise of configurations...»

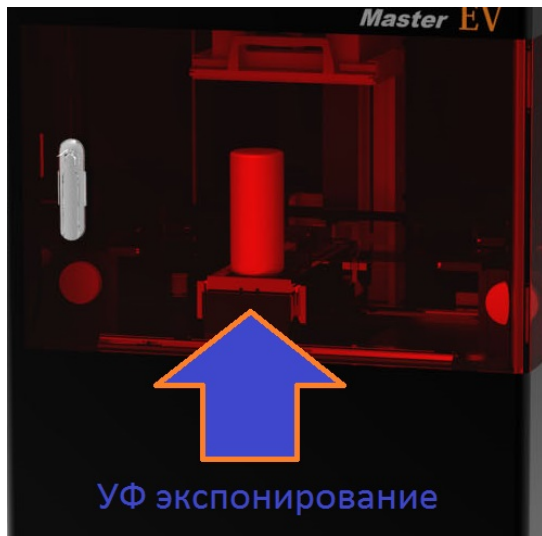
Технологические процессы

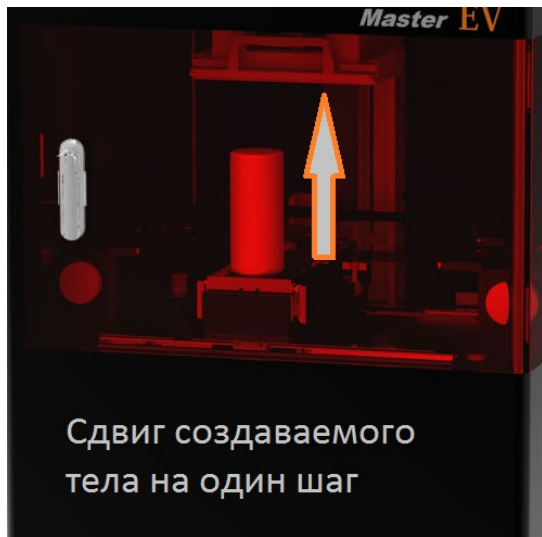








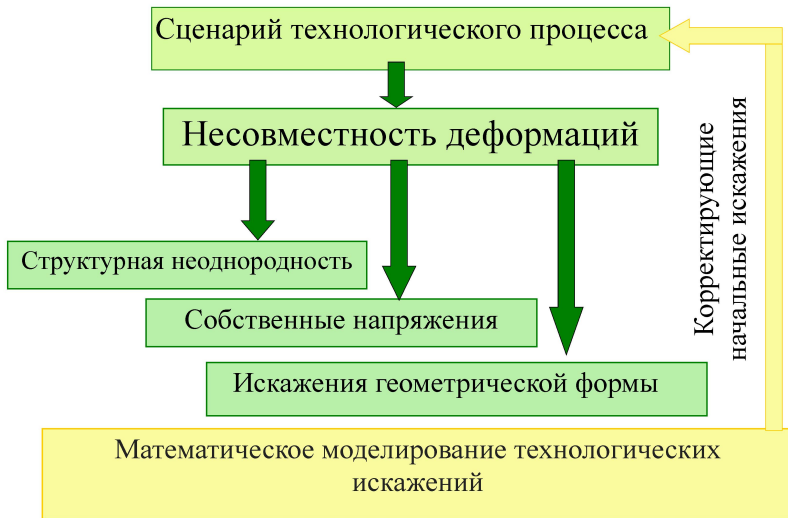








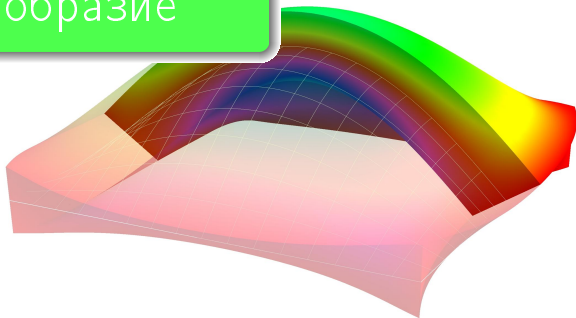




- Уменьшение толщины — увеличение производительности (тактовой частоты) микроэлектронных устройств.
- Начальное деформирование слоев и (или) подложки — создание предписанной анизотропии физических свойств покрытия и оптимизации его производительности (Strained Silicon).
- Создание асимметрии кристаллической структуры — электро-оптические модуляторы микроскопического масштаба — электронно-оптических сверхбольшие системы.
- Создание предписанной структуры областей локальной неустойчивости — квантовые точки, (Quantum Dots),
- Создание структур, обладающих свойствами самоорганизации (Self-Assembling Structures).
- Управление деформацией подложки в процессе создания многослойной эпитаксиальной системы — управление эффектом возникновения внутренних напряжений из-за различия периодов кристаллической структуры слоев (Mismatch Effect).
- Создание гибких многослойных структур для использования в биоэлектронике.

-  Bei Yu, Pan D.Z. Design for Manufacturability with Advanced Lithography. Springer 2016.
-  Xi Chen Ed. Mechanical Self-Assembly. Springer 2013.
-  Rune S. Jacobsen et.al. Strained silicon as a new electro-optic material // Nature 441, 199-202 (2006).
-  Rogers J. A., Ghaffari R., Dae-Hyeong Kim (Eds.). Stretchable Bioelectronics for Medical Devices and Systems. Springer 2016.

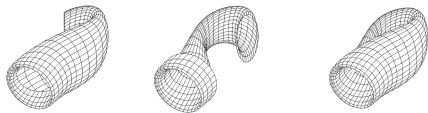
Тело как гладкое
многообразие



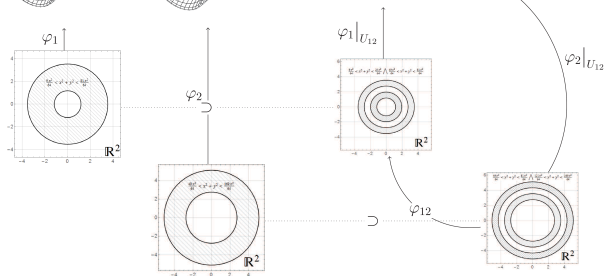
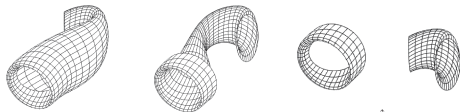
Математические концепции	Физические концепции
● Множество мощности континуума	● Непрерывное распределение материи
● Топологическое пространство	● Близкодействие
● Хаусдорфово пространство	● Возможность разбиения на независимые части
● Пространство со счетной базой	● Представление тела в виде «соединения» из стандартного набора конечного или счетного частей
● Картрируемо	● «Координатная» идентификация материальных точек
● Дифференцируемость функций перехода между картами	● Возможность определения дифференцируемых физических полей на теле

Картирование поверхности Клейна

$$U_1 \cup U_2 = \mathfrak{B}$$



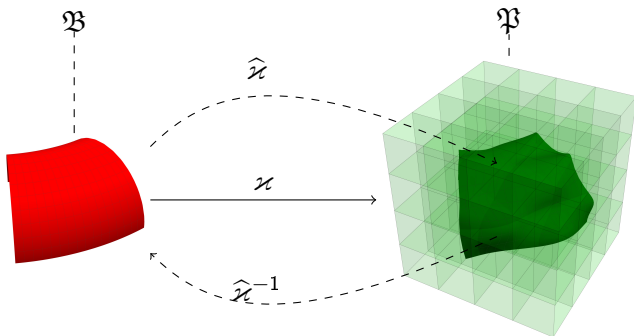
$$U_1 \cap U_2 = U_{12}$$



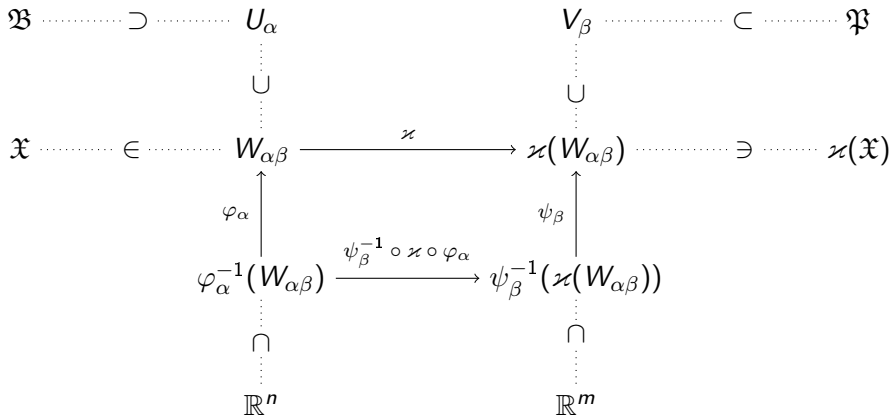
Физическое пространство \mathfrak{P} — гладкое m -мерное многообразие.

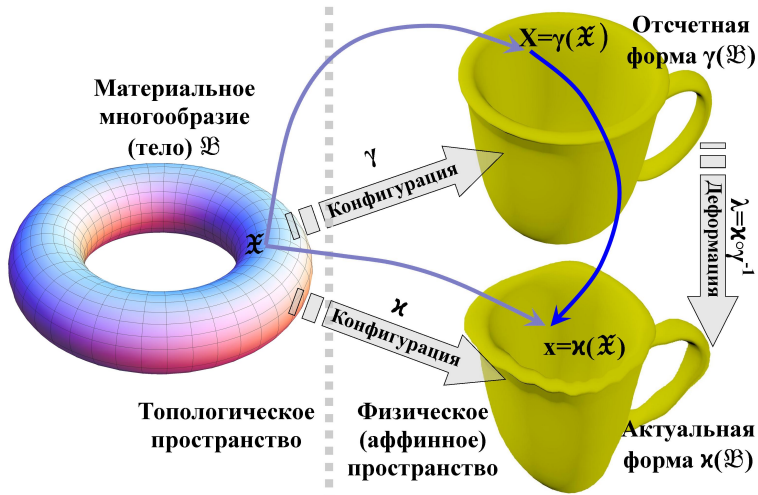
Конфигурация — это гладкое вложение $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$, т.е.:

- κ — гладкое отображение;
- в каждой точке \mathfrak{B} ранг матрицы Якоби координатного представления отображения κ равен n ;
- κ — гомеоморфизм на свой образ, т.е. на $\kappa(\mathfrak{B})$.

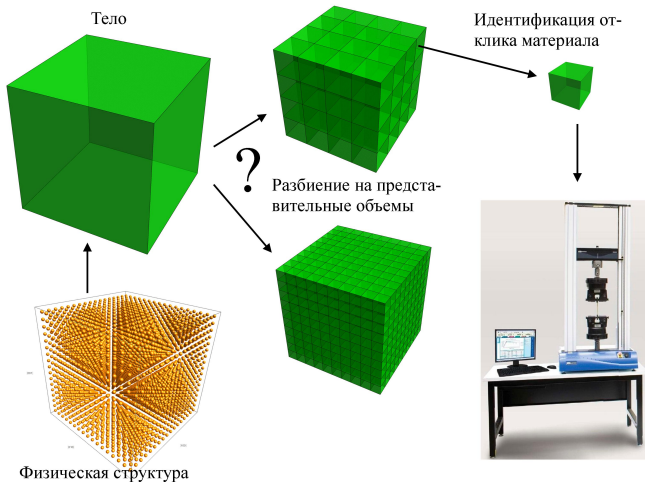


$$W_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap \varkappa^{-1}(V_\beta)$$





От физической структуры — к представительному объему



В физическом пространстве \mathfrak{R}

Риманова метрика g задается a priori и не зависит от тела.

Объект исследований — материальные кривые

Объект измерений — образы материальных кривых

Чувствительность — классы эквивалентности кривых



Cauchy A.-L. Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques // Bulletin de la Société philomatique. — 1823. — P. 9–13.



Cauchy A.-L. Sur la condensation et la dilatation des corps solides // Ex. de Math. — 1827. — P. 60–69.



Cauchy A.-L. Mémoire sur les dilatations, les condensations et les rotations produits par un changement de forme dans un système de points matériels // Oeuvres (2) Gauthier-Villars. — 1841. — Vol. 12. — P. 343–377.

Простой материал

Отклик характеризуется зависимостью

$$W = W(\mathfrak{X}, T_{\mathfrak{X}}, \mathbf{g}),$$

где W — плотность упругой энергии, $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, \mathbf{g} — риманова метрика в \mathfrak{B} , а $T_{\mathfrak{X}}: T\mathfrak{B} \rightarrow T\mathfrak{B}$ — градиент деформации.

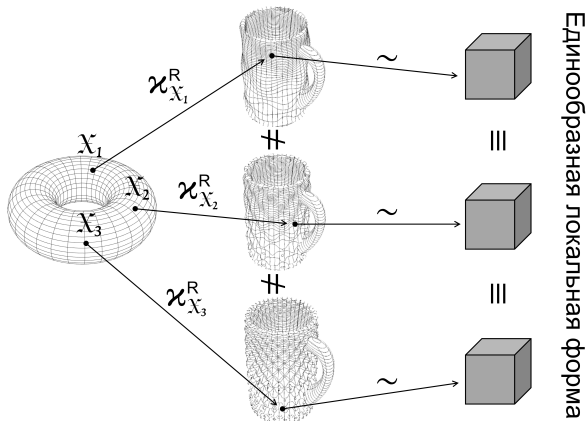
Отношение материальной изоморфности

Точки $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}$ материально изоморфны, если существует невырожденное линейное преобразование

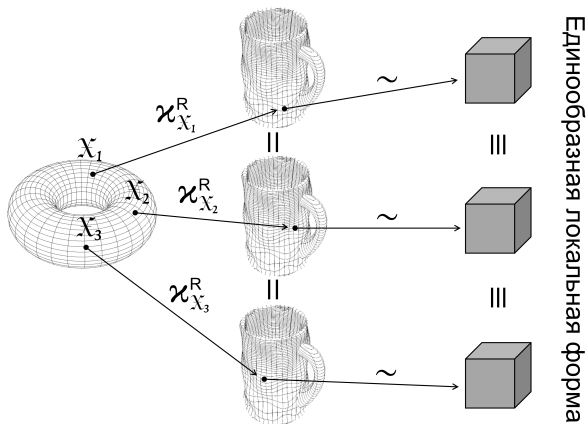
$$\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}: T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \rightarrow T_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}, \quad \text{такое, что}$$

$$W(\mathfrak{X}, T_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X} \circ \Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}, \mathbf{g}) = W(\mathfrak{Y}, T_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X}, \mathbf{g}),$$

для любой конфигурации \mathfrak{X} .



Единообразная локальная форма. Случай $\chi_{x_i}^R \neq \chi_{x_j}^R$,
 $i, j = 1, 2, 3$



Единообразная локальная форма. Случай $\chi^R_{x_i} = \chi^R_{x_j}$,
 $i, j = 1, 2, 3$

Гипотеза

Телу \mathfrak{B} из простого материала соответствует семейство $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}} = \{\kappa_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ глобальных конфигураций

$$\kappa_{\mathfrak{X}}^R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}, \quad \kappa_{\mathfrak{X}}^R : \mathfrak{V} \mapsto \kappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{V}),$$

каждая из которых преобразует элементарный объем, окружающий частицу \mathfrak{X} тела, в **единообразную форму**.

Семейство метрик

Семейство $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}} = \{\kappa_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ определяет семейство метрик $\{\mathbf{G}^{(\mathfrak{X})}\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ равенством

$$\mathbf{G}^{(\mathfrak{X})} = (\kappa_{\mathfrak{X}}^R)^* \mathbf{g},$$

т.е.

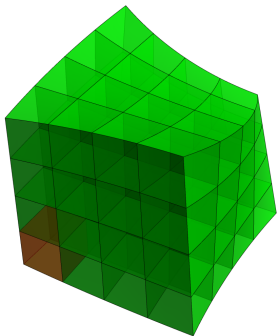
$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T\mathfrak{B} \quad \mathbf{G}^{(\mathfrak{X})}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{g}(T\kappa_{\mathfrak{X}}^R \mathbf{u}, T\kappa_{\mathfrak{X}}^R \mathbf{v}).$$

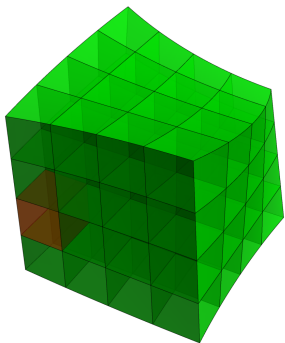
Синтез метрики по семейству $\{\mathbf{G}^{(\mathfrak{x})}\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}}$

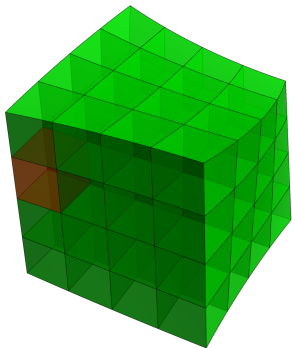
Гипотеза: Поле $\mathbf{G} : \mathfrak{B} \ni \mathfrak{x} \mapsto \mathbf{G}^{(\mathfrak{x})} |_{\mathfrak{x}} \in T_{\mathfrak{x}}^* \mathfrak{B} \otimes T_{\mathfrak{x}}^* \mathfrak{B}$ является гладким.

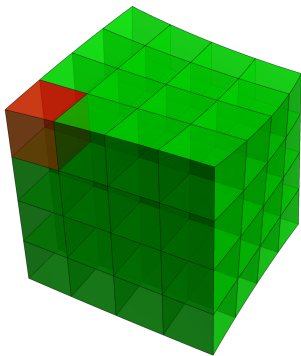
\mathbf{G} — материальная метрика:

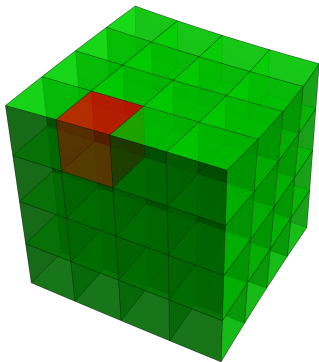
$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T\mathfrak{B} \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{g}(T_{\mathfrak{x}} \mathcal{I}_{\mathfrak{x}}^R \mathbf{u}, T_{\mathfrak{x}} \mathcal{I}_{\mathfrak{x}}^R \mathbf{v}).$$

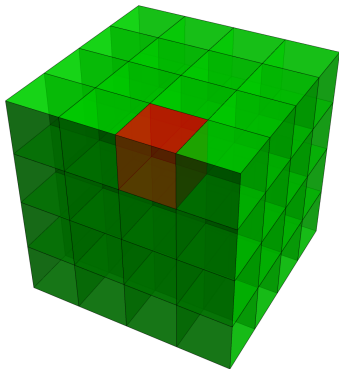


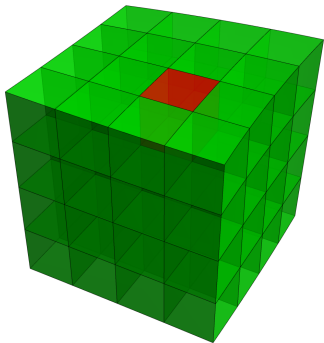


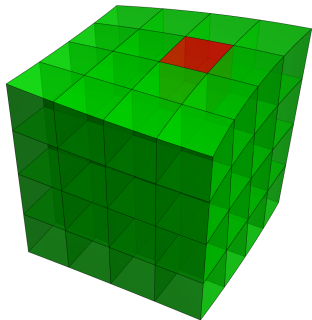


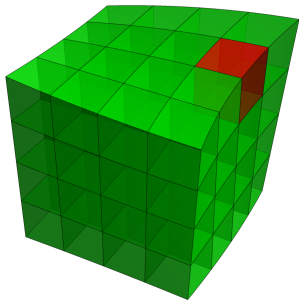


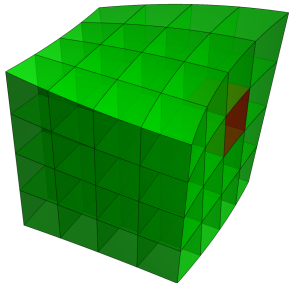


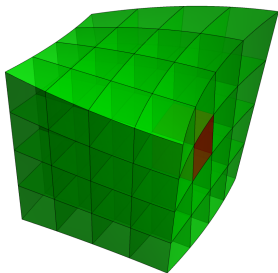


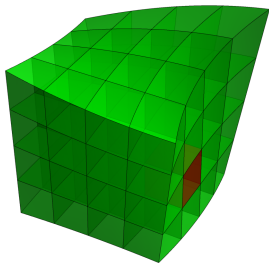


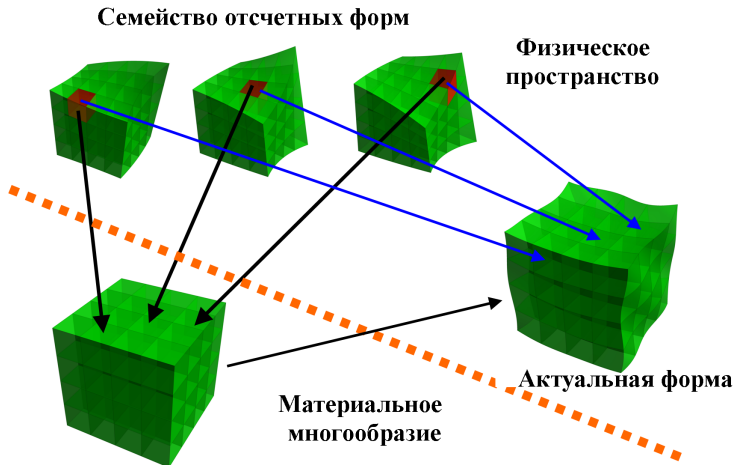












Локальные конфигурации

Гипотеза: Поле $\mathcal{K} : \mathfrak{X} \mapsto T_{\mathfrak{X}}\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}^R$ — гладкое.

\mathcal{K} — поле локальных конфигураций. В терминах \mathcal{K} :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T\mathfrak{B} \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{g}(\mathcal{K}\mathbf{u}, \mathcal{K}\mathbf{v}).$$

Имплант

Пусть $\dim \mathfrak{B} = \dim \mathfrak{F}$.

Гипотеза: Поле $\mathbf{K} = T\mathcal{K}_R \circ \mathcal{K}^{-1}$ — гладкое для любой конфигурации \mathcal{K}_R .

\mathbf{K} — поле импланта.



Noll W.

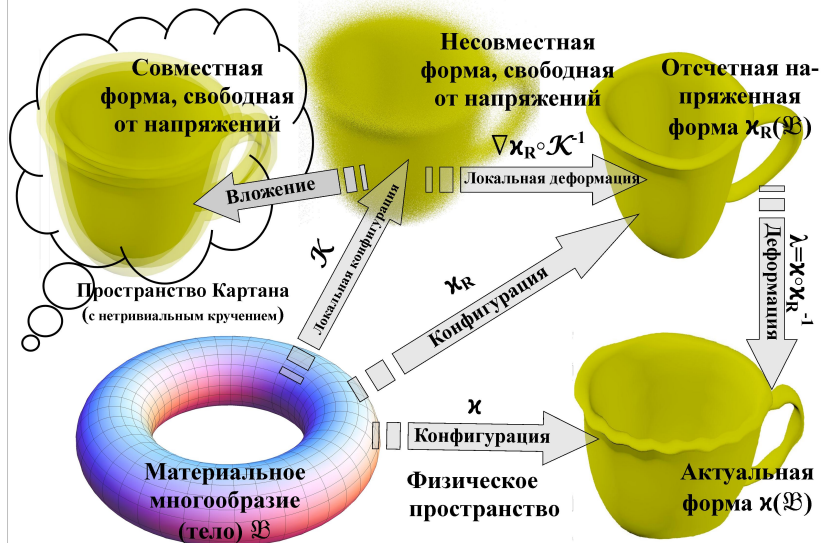
Materially Uniform Simple Bodies with Inhomogeneities.
Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 49. 27(1), P. 1–32. (1967).



Maugin G. A.

Material inhomogeneities in elasticity.
Chapman and Hall, London, 1993, p. 294.

Локальная конфигурация и имплант



Метрика \mathbf{G} порождает связность ∇ Леви-Чивита на теле \mathfrak{B}

Для $\mathbf{u} = u^i \partial_i$, $\mathbf{v} = v^j \partial_j$ — координатное представление ковариантной производной $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^i \left(\partial_i v^k + v^j \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} \right) \partial_k = u^i \nabla_i v^k \partial_k,$$

где $\nabla_i v^k = \langle dx^k, \nabla_{\partial_i} \mathbf{v} \rangle$.

Коэффициенты связности:

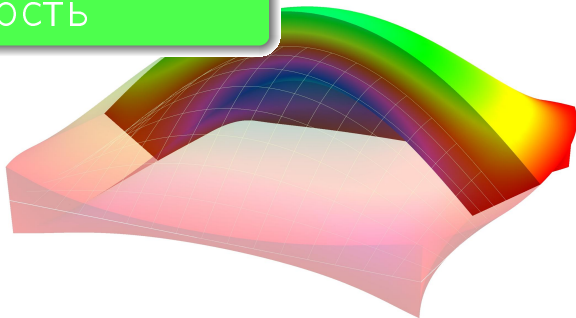
$$\Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} = \frac{G^{kl}}{2} (\partial_i G_{jl} + \partial_j G_{il} - \partial_l G_{ij}).$$

Здесь $G_{ij} = \mathbf{G}(\partial_i, \partial_j)$, $(G^{ij}) = (G_{ij})^{-1}$.

Кривизна связности ∇ :

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma_{lj}^i - \partial_l \Gamma_{kj}^i + \Gamma_{kr}^i \Gamma_{lj}^r - \Gamma_{lr}^i \Gamma_{kj}^r.$$

Материальная СВЯЗНОСТЬ



Пусть \mathcal{M} обозначает тело \mathfrak{B} или физическое пространство \mathfrak{P} .

Линейная (аффинная) связность ∇ — отображение

$$\nabla : \mathcal{V}(\mathcal{M}) \times \mathcal{V}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{M}), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v},$$

для которого выполнены условия:

(i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}(\mathcal{M}) \quad \nabla_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}\mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w};$

(ii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{M}) \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \quad \nabla_{f\mathbf{u}}\mathbf{v} = f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v};$

(iii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}(\mathcal{M}) \quad \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w};$

(iv) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{M}) \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \quad \nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}) = f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (u^i f_{,i})\mathbf{v}$

— правило Лейбница.

Коэффициенты связности $\Gamma^k_{\cdot ij} : \nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{\cdot ij}\partial_k$.

Для $\mathbf{u} = u^i\partial_i$, $\mathbf{v} = v^j\partial_j$ — координатное представление ковариантной производной $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = u^i \left(\partial_i v^k + v^j \Gamma^k_{\cdot ij} \right) \partial_k = u^i \nabla_i v^k \partial_k, \quad \text{где} \quad \nabla_i v^k = \langle dx^k, \nabla_{\partial_i}\mathbf{v} \rangle.$$

Кручение, кривизна, неметричность

\mathfrak{T} — кручение, \mathfrak{R} — кривизна, \mathfrak{Q} — неметричность:

$$\mathfrak{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}];$$

$$\mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}\mathbf{w};$$

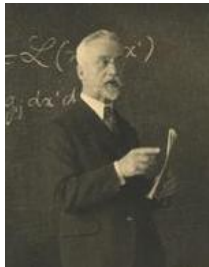
$$\mathfrak{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{g}(\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}) - \mathbf{u}[\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})],$$

где \mathbf{g} — метрика на \mathfrak{M} .

Связности на теле и физическом пространстве

\mathfrak{R}	\mathfrak{T}	\mathfrak{Q}	Пространство	Где используется
●	●	●	аффинно-метрическое	общий случай несовместных деформаций
●	●	○	Римана-Картана	ОТО (Эйнштейн-Картан)
●	○	●	Римана-Вейля	нелинейная термоупругость
●	○	○	Римана	ОТО (Эйнштейн)
○	●	●	Вейля-Картана	калибровочные теории гравитации
○	●	○	Вайценбока	континуальная теория дислокаций
○	○	●	Вейля	континуальная теория пористых сред
○	○	○	Евклида	механика Ньютона

Символ ● — поле, отличное от нуля, а ○ — поле, \equiv нулю.











Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1916. — dec. — Vol. 42, no. 1. — P. 173-204.



Weitzenböck R. Invariantentheorie // P. Noordhoff, Groningen. — 1923.



Cartan E. J. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. — 1923. — Vol. 40. — P. 325-412.

-  Maugin G. A. Material inhomogeneities in elasticity. — CRC Press, 1993. — Vol. 3.
-  Marsden J. E., Hughes T. J. Mathematical foundations of elasticity. — Courier Corporation, 1994.
-  Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. — М. : Мир, 1987.
-  Myasnikov V., Guzev M. Non-euclidean model of materials deformed at different structural levels // Physical Mesomechanics. — 2000. — Vol. 3, no. 1. — P. 5–16.
-  Катанаев М. О. Геометрическая теория дефектов // УФН. — 2005. — Т. 175. — С. 705–733.
-  Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan geometry of nonlinear disclination mechanics // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2012. — P. 1081286511436137.
-  Kleinert H. Gauge Fields in Condensed Matter (in 2 Volumes). — World Scientific Pub. Co Inc., 1989.
-  Aldrovandi R., Pereira J. G. Teleparallel Gravity. — Springer Netherlands, 2013.

Связность Вайценбока на форме тела $\varkappa_R(\mathfrak{B})$ вводится с помощью поля имплантов $\mathbf{K} = (\mathbf{K})^i_{\cdot j} \partial_i \otimes dX^j$. Этому полю соответствует поле реперов

$$\varkappa_R(\mathfrak{B}) \ni X \mapsto (z_i|_X)_{i=1}^n, \quad z_i = (\mathbf{K})^j_{\cdot i} \partial_j.$$

Связность Вайценбока ∇ :

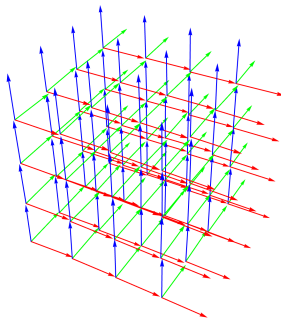
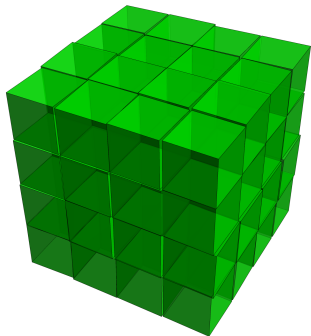
$$\nabla_{z_i} z_j = \mathbf{0}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

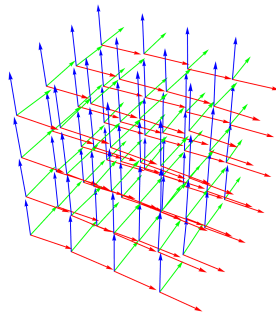
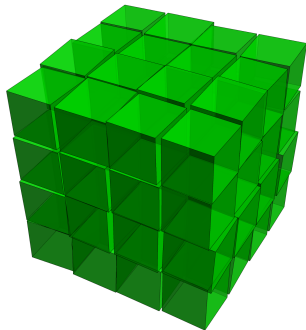
Теорема. В координатном репере (∂_i) :

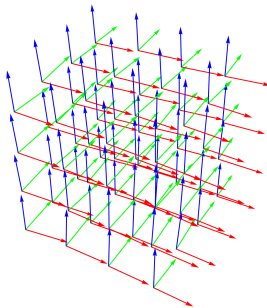
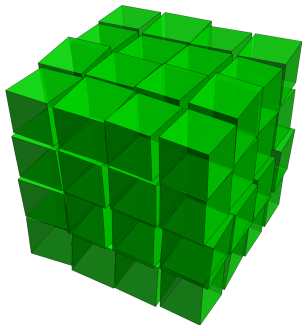
$$\Gamma^k_{\cdot ij} = (\mathbf{K})^k_{\cdot r} \partial_i (\mathbf{K}^{-1})^r_{\cdot j}.$$

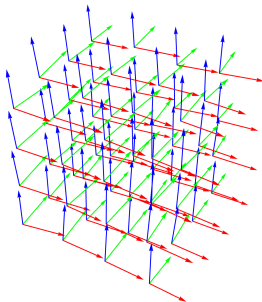
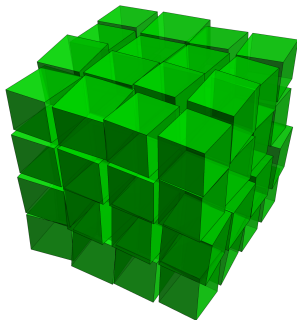
В доказательстве теоремы используется формула

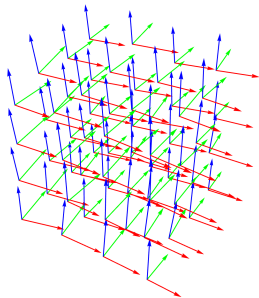
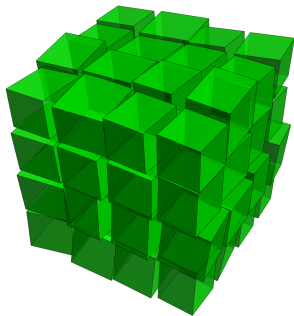
$$\Gamma^r_{\cdot sq} (\mathbf{K}^{-1})^i_{\cdot r} (\mathbf{K})^s_{\cdot j} (\mathbf{K})^q_{\cdot k} + (\mathbf{K}^{-1})^i_{\cdot r} (\mathbf{K})^s_{\cdot j} \partial_{X^s} (\mathbf{K})^r_{\cdot k} = 0.$$

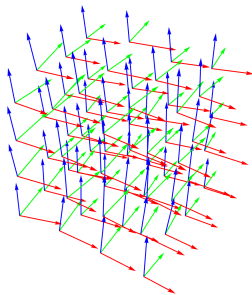
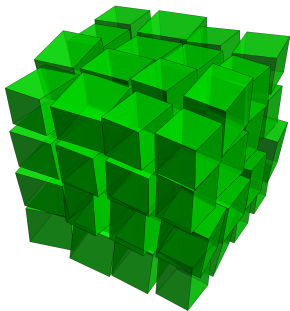


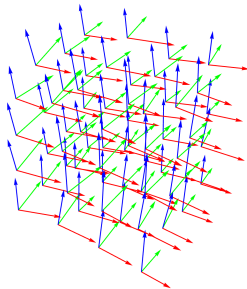
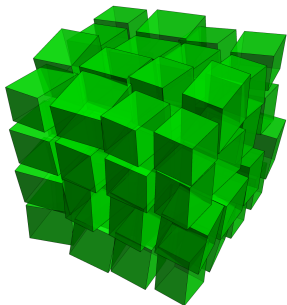


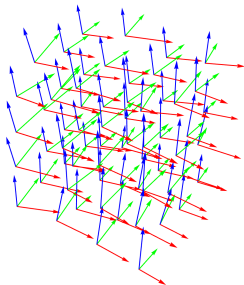
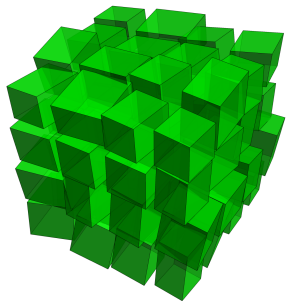


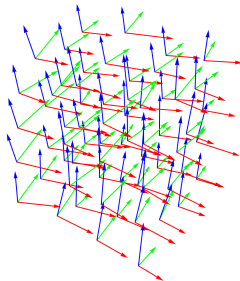
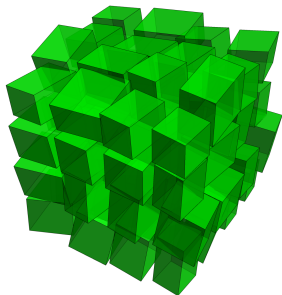


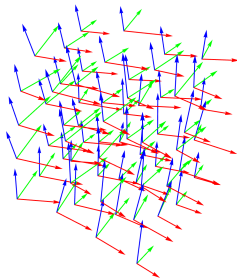
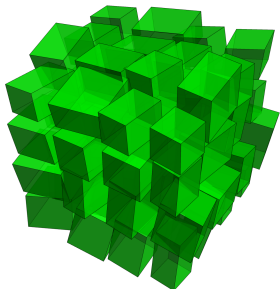




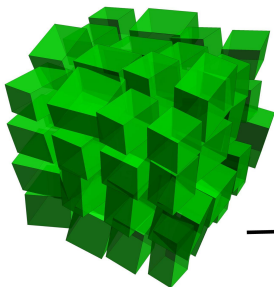




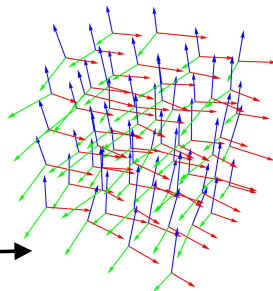




Соответствие между натуральными локальными формами и пространством с абсолютным параллелизмом

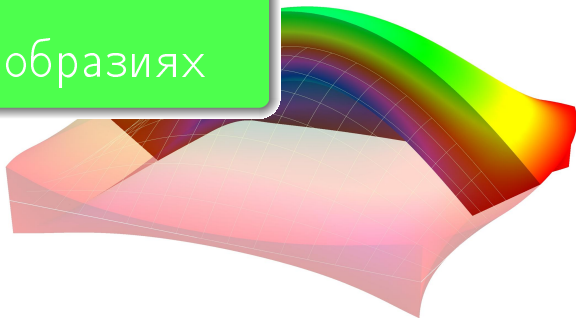


Натуральные локальные формы



Поле неголономных фреймов

Словарик
анализа на
многообразиях



Сравнение понятий

Понятия	Евклидова механика континуума	Неевклидова механика континуума
Место	Векторное поле мест \mathbf{r} (в евклидовом смысле)	Локальные координаты (x^k)
Инфинитезимальные материальные волокна	$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — векторы места	Класс эквивалентных кривых
Деформация	$\gamma: \mathcal{E} \supset S_R \rightarrow S_t \subset \mathcal{E}$, или, $\mathcal{V} \supset U_R \rightarrow U_t \subset \mathcal{V}$	$\mathfrak{B} \supset \varkappa_R(\mathfrak{B}) \rightarrow \varkappa_t(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}$
Конфигурация	Не используется	$\varkappa: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$
Вектор перемещений	$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$	Не используется
Градиент деформаций	$\mathbf{F} = \mathbf{1} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T$	$\mathbf{F} = T\varkappa$
Силы	Векторы	Ковекторы
Тензоры	$\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}, \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}, \dots$	$T_x \mathfrak{B} \otimes T_x \mathfrak{B}, T_x \mathfrak{B} \otimes T_x^* \mathfrak{B}, \dots$
Поля	$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$	Сечения
«Жонглирование индексами»	Евклидов метрический тензор, g_{ij}, g^{ij}	Музыкальные изоморфизмы $(\cdot)^b, (\cdot)^\sharp$
Замена формы	Преобразования Пиолы	«pull-back» и «push-forward», \varkappa^*, \varkappa_*

Меры деформаций

Понятия	Евклидова механика континуума	Неевклидова механика континуума
Деформация	$\gamma: \mathcal{E} \supset S_R \rightarrow S_t \subset \mathcal{E}$, или, $\mathcal{V} \supset U_R \rightarrow U_t \subset \mathcal{V}$	$\mathfrak{P} \supset \mathcal{K}_R(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{K}_t(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{P}$
Конфигурация	Не используется	$\mathcal{K}: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$
Градиент деформаций	$\mathbf{F} = \nabla \gamma$	$\mathbf{F} = T\mathcal{K}$
Транспонированный градиент деформаций \mathbf{F}^T	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{v}$	$\mathbf{g}(\mathbf{F}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{F}^T \mathbf{v})$
Левый тензор Коши–Грина	$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$	$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$
Правый тензор Коши–Грина	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$

Тензоры Коши–Грина (неевклидова механика континуума)

Правый тензор Коши-Грина \mathbf{C} определяет «pull-back»-отображение пространственной метрики, а левый, \mathbf{B} , — «push-forward»-отображение материальной метрики:

$$\mathbf{C}^{b_b} = \mathcal{K}^* \mathbf{g}, \quad \mathbf{B}^{\sharp_p} = \mathcal{K}_* (\mathbf{G}^{\sharp_b}),$$

где $(\cdot)^b$, $(\cdot)^\sharp$ — музыкальные изоморфизмы.

Понятия	Евклидова механика континуума	Неевклидова механика континуума
Внешняя нормаль	Вектор \mathbf{n} , $\mathbf{n} \perp dS$	Аннулятор, ковектор ν : $\langle \nu, \mathbf{u} \rangle = 0, \forall \mathbf{u} \in TS$
Ориентированная площадка	(\mathbf{n}, dS)	Инклинация на расслоении Грассмана
Плотность контактных сил	Вектор $\mathbf{t}_n(x)$	Сечение Коши
Тензор напряжений Коши	$\sigma : \mathfrak{B} \rightarrow T^*\mathfrak{P} \otimes T^*\mathfrak{P}$	Ковекторнозначная форма $\mathbf{T} \in \mathcal{F}_1(\mathfrak{P}) \otimes \mathcal{F}_{m-1}(\mathfrak{P})$
Тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа I рода	$\mathbf{p} : \mathfrak{B} \rightarrow T^*\mathfrak{P} \otimes T^*\mathfrak{B}$	Ковекторнозначная форма $\mathbf{P} \in \mathcal{F}_1(\mathfrak{P}) \otimes \mathcal{F}_{n-1}(\mathfrak{B})$
Тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа II рода	$\mathbf{s} : \mathfrak{B} \rightarrow T^*\mathfrak{B} \otimes T^*\mathfrak{B}$	Ковекторнозначная форма $\mathbf{S} \in \mathcal{F}_1(\mathfrak{B}) \otimes \mathcal{F}_{n-1}(\mathfrak{B})$
Преобразование Пиолы	$J\sigma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{F}^T$	$\mathbf{P} = \kappa^{*2}\mathbf{T}$

Пусть $t \mapsto \varkappa_t$ — движение, $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$ — произвольная часть тела.

В пространстве:

$$\int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \langle \mathbf{v}, b \rangle \rho \mu + \int_{\varkappa_t(\partial \mathfrak{B}_0)} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T} \rangle = \frac{d}{dt} \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{v}^b, \mathbf{v} \rangle + e \right) \rho \mu.$$

На теле:

$$\int_{\mathfrak{B}_0} \langle \mathbf{V}, b_0 \rangle \rho_0 \mu_0 + \int_{\partial \mathfrak{B}_0} \langle \mathbf{V}, \mathbf{P} \rangle = \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}_0} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}^b, \mathbf{V} \rangle + e_0 \right) \rho_0 \mu_0.$$

Здесь $b_0 = b \circ \varkappa_t$, $e_0 = e \circ \varkappa_t$, $\rho_0 = \rho \circ \varkappa_t$, $\mathbf{v} = \mathbf{V} \circ \varkappa_t^{-1}$.

Принцип ковариантности

Пусть теория описывается тензорными полями u_1, \dots, u_n , определенными в пространстве \mathfrak{S} и уравнения теории имеют вид $F_k(u_1, \dots, u_n) = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Уравнения — **ковариантные**, если для любого диффеоморфизма $\Phi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ выполняются соотношения:

$$(\Phi^* F_k)(u_1, \dots, u_n) = F_k(\Phi^* u_1, \dots, \Phi^* u_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Евклидова
механика континуума

Неевклидова
механика континуума

$$(CL1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(CL2) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

$$(CL3) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

$$(CL4) \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$\mathbb{L}_{\mathbf{v}}(\rho \mu) = 0$$

$$\partial \mathbf{T} + \mathbf{b} \otimes \mu = \dot{\mathbf{v}}^b \otimes \rho \mu$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) \dot{\wedge} \mathbf{T} = (\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) \dot{\wedge} \mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} = *_2 \left(2\rho \frac{\partial e}{\partial \mathbf{g}} \right)$$

Пусть \mathcal{M} обозначает гладкое многообразие со связностью ∇ , представляющее тело \mathfrak{B} или физическое пространство \mathfrak{P} , а Γ обозначает $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ или $\mathcal{F}_1(\mathcal{M})$. Дифференциальный оператор

$$\mathfrak{d} : \Gamma \otimes \mathcal{F}_{k-1}(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma \otimes \mathcal{F}_k(\mathcal{M}); \quad \mathbf{T} \mapsto \mathfrak{d}\mathbf{T},$$

где $1 \leq k$, определяется соотношением

$$d \langle \mathbf{u}, \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathfrak{d}\mathbf{T} \rangle + \nabla \mathbf{u} \dot{\wedge} \mathbf{T}.$$

Здесь $\dot{\wedge}$ — операция внутренне-внешнего произведения (inner–exterior product):

$$\dot{\wedge} : (\mathcal{V}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{F}_1(\mathcal{M})) \times (\mathcal{F}_1(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{F}_{k-1}(\mathcal{M})) \rightarrow \mathcal{F}_k(\mathcal{M}), \quad (\mathbf{T}, \mathbf{S}) \mapsto \mathbf{T} \dot{\wedge} \mathbf{S},$$

которая является билинейной и удовлетворяет свойству

$$(\mathbf{u} \otimes \beta) \dot{\wedge} (\vartheta \otimes \omega) = \langle \mathbf{u}, \vartheta \rangle \beta \wedge \omega.$$

Обозначим через \mathfrak{D} оператор Картана на \mathfrak{B} и сохраним символ \mathfrak{d} для оператора на \mathfrak{F} . Пусть $\gamma_{jk}^{i\cdot\cdot}$ — коэффициенты связности в физическом пространстве, $\Gamma_{\beta\kappa}^{\alpha\cdot\cdot}$ — коэффициенты связности на теле. Тогда

$$\langle \mathbf{v}, \mathfrak{d}\mathbf{T} \rangle = \left[\partial_k T_{a\cdot}^{\cdot k} + T_{a\cdot}^{\cdot k} \gamma_{\cdot qk}^{q\cdot\cdot} - \gamma_{\cdot ak}^{b\cdot\cdot} T_{b\cdot}^{\cdot k} \right] v^a \mu_{\cdot},$$

$$\langle \mathbf{V}, \mathfrak{D}\mathbf{P} \rangle = \left[\partial_{\kappa} P_{a\cdot}^{\cdot \kappa} + P_{a\cdot}^{\cdot \kappa} \Gamma_{\cdot \tau \kappa}^{\tau\cdot\cdot} - \gamma_{\cdot aj}^{b\cdot\cdot} F_{\cdot \kappa}^{j\cdot} P_{b\cdot}^{\cdot \kappa} \right] V^a \mu_0.$$

В скобках последнего выражения присутствуют коэффициенты связности как физического пространства, так и материального многообразия. В классическом случае оба выражения соответствуют **дивергенции поля напряжений в криволинейных координатах евклидова пространства**.

Закон сохранения массы, $\mathbb{L}_{\mathbf{v}}(\rho\mu) = 0$:

$$\frac{\partial \rho(X, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mu}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \text{где}$$

- $\mu = \mu_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ — форма объема на $\mathcal{X}_t(\mathfrak{B})$;
- \wedge — операция внешнего произведения;
- \mathbf{v} — пространственная скорость;
- div_{μ} — дивергенция, соответствующая форме объема μ .

Баланс импульса, $\partial \mathbf{T} + b \otimes \mu = \dot{\mathbf{v}}^b \otimes \rho \mu$:

$$\partial_k T_{a \cdot}^{\cdot k} + T_{a \cdot}^{\cdot k} \gamma_{qk}^q - \gamma_{ak}^b T_{b \cdot}^{\cdot k} + b_a = \rho g_{ak} \left[\frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \left(\partial_i v^k + v^j \gamma_{ij}^{k \cdot \cdot} \right) \right],$$

где $a = 1, 2, \dots, \dim \mathfrak{B}$, $g_{ak} = g(\partial_a, \partial_k)$, а $\gamma_{ij}^{k \cdot \cdot}$ — коэффициенты связности Леви-Чивита на \mathfrak{B} .

О дивергенции на гладком многообразии \mathfrak{M}

Пусть μ — форма объема, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}(\mathfrak{M})$.

Дивергенция векторного поля \mathbf{u} : $\operatorname{div}_\mu \mathbf{u} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_\mathbf{u} \mu = (\operatorname{div}_\mu \mathbf{u}) \mu.$$

Пусть на \mathfrak{M} задана аффинная связность ∇ .

Для $\mathbf{u} \in \mathcal{V}(\mathfrak{M})$ определим поле $\operatorname{div}_\nabla \mathbf{u} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\operatorname{div}_\nabla \mathbf{u} := \nabla_i u^i.$$

Пусть заданы метрика g и произвольная связность ∇ .

Форму объема μ , для которой при любом $\mathbf{u} \in \mathcal{V}(\mathfrak{M})$ выполняется равенство

$$\operatorname{div}_\mu \mathbf{u} = \operatorname{div}_\nabla \mathbf{u},$$

назовем **формой объема, совместной с аффинной связностью.**

Общее представление $\operatorname{div}_{\nabla} \mathbf{u}$:

$$\operatorname{div}_{\nabla} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k (u^k \sqrt{g}) + \\ + u^k (T_{\cdot j k}^{j \cdot \cdot} - T_{j k \cdot}^{\cdot \cdot j} + T_{k \cdot j}^{\cdot j \cdot})/2 + u^k (Q_{\cdot j k}^{j \cdot \cdot} + Q_{j k \cdot}^{\cdot \cdot j} - Q_{k \cdot j}^{\cdot j \cdot})/2.$$

Частный случай — риманово пространство,

$$dV = \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n:$$

$$\operatorname{div}_{dV} \mathbf{u} = \operatorname{div}_{\nabla} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k (u^k \sqrt{g}).$$

Если $\mu = f dV$, где функция $f \in C^\infty(\mathfrak{M}; \mathbb{R})$, $f(p) > 0$ для всех $p \in \mathfrak{M}$, то:

$$\operatorname{div}_{f dV} \mathbf{u} = \operatorname{div}_{dV} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}(f)}{f}.$$

Обозначим $\Theta = \ln f$, тогда








Теорема. Вид формы объема:

$$\mu = e^{\Theta} \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \text{где } \partial_k \Theta = S_k + V_k, \quad k=1, \dots, n.$$

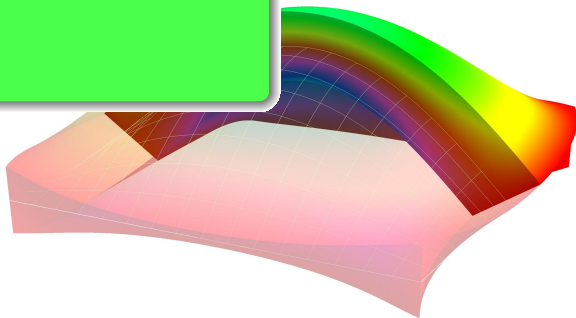
Условие совместности: форма μ существует в том и только в том случае, когда 1-форма $(S_k + V_k) dx^k$ точна, т.е. является дифференциалом Θ .

Физическое пространство \mathfrak{P} рассматривается как пространство со связностью Леви-Чивита и формой объема, согласованной с метрикой. Поэтому, закон сохранения массы имеет вид:

$$\frac{\partial \rho(X, t)}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k (\rho v^k \sqrt{g}) = 0.$$

-  Frankel T. The geometry of physics: an introduction. — Cambridge University Press, 2003.
-  Noll W. Materially Uniform Simple Bodies with Inhomogeneities. Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 49. **27(1)**, P. 1–32. (1967).
-  Saa A. Volume-forms and minimal action principles in affine manifolds // Journal of Geometry and Physics. — 1995. — Vol. 15. — P. 102–108.
-  Segev R., Rodnay G. Cauchy's theorem on manifolds // Journal of Elasticity. — 1999. — Vol. 56, no. 2. — P. 129–144.
-  Rodnay G., Segev R. Cauchy's flux theorem in light of geometric integration theory // Journal of Elasticity. — 2003. — Vol. 71, no. 1-3. — P. 183–203.
-  Yavari A., Marsden J. E., Ortiz M. On spatial and material covariant balance laws in elasticity // Journal of Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 47, no. 4. — P. 042903.
-  On the geometric character of stress in continuum mechanics / Eva Kanso, Marino Arroyo, Yiyong Tong et al. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. — 2007. — Vol. 58, no. 5. — P. 843–856.

Структурно
неоднородные
тела



Структурно неоднородные тела представляются семейством \mathfrak{G} гладких тел:

$$\mathfrak{G} = \{\mathfrak{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}},$$

где \mathbb{I} — линейно упорядоченное множество индексов.

Мгновенный материальный состав тела

Каждый элемент семейства \mathfrak{G} , т.е. множество \mathfrak{B}_α , характеризует **мгновенный материальный состав тела**.

При рассмотрении процессов роста мощность множества \mathbb{I} определяет их характер:

- $\text{Card } \mathbb{I} = N < \infty$ рост дискретен;
- $\text{Card } \mathbb{I} = \aleph_1$ рост непрерывен.

Вложенные тела



Упорядоченность \mathfrak{B} по вложению

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{I} \quad (\alpha < \beta) \Rightarrow (\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{B}_\beta).$$

\mathfrak{M} — материальное многообразие (аналог универсума тел, по Трусделлу).

Эволюция материальной структуры математически определяется указанием упорядоченной тройки $(\mathfrak{E}, \mathcal{M}, \mathfrak{Z})$, где

$\mathfrak{E} = \{(\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ — семейство, в котором:

- $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал;
- \mathfrak{B}_α — гладкие подмногообразия \mathfrak{M} ;
- \mathfrak{w}_α — гладкие отображения

$$\mathfrak{w}_\alpha : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}_\alpha,$$

где \mathfrak{B} — подмногообразие \mathfrak{M} .

Многообразие \mathfrak{B} одно и то же для всех α — **отсчетное многообразие эволюционной последовательности**.

$\mathcal{M} = \{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ — движение.

Отображение \mathfrak{Z} — диффеоморфизм пересчета временного параметра $t \in \mathbb{T}$ в эволюционный, $\alpha \in \mathbb{I}$:

$$\mathfrak{Z} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{I}, \quad t \mapsto \mathfrak{Z}(t) = \alpha.$$

Классический тензор энергии–импульса Эшелби:

$$\mathbf{e} = W\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{p}.$$

Поле Эшелби на многообразии:

$$\mathbf{e} = W\mathbf{I}^\# - \mathbf{F}^T \lrcorner \mathbf{p}^{1\#2\#}.$$

Уравнение баланса для конфигурационных сил:

$$\operatorname{div} \mathbf{e} + (\nabla \mathbf{F}^T) \lrcorner \mathbf{p}^{1\#2\#} - \rho_0 \mathbf{F}^T \lrcorner \mathbf{b}_0^\# = (\nabla_{\mathfrak{B}} W)^\#,$$

где $W : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ — плотность упругой энергии.

Структурно неоднородный цилиндр

Заранее размеры тел-слоев в отсчетной форме не известны и определяются из следующего рекуррентного соотношения:

внутренний радиус отсчетной формы тела-слоя \mathfrak{J}_{s+1} равен $R_i^{s+1} = S^{s+1} r_{e,s-1}^s$, где $0 < S^{s+1} < 1$ — коэффициенты усадки, а $r_{e,s-1}^s$ — внешний актуальный радиус тела-слоя \mathfrak{J}_s . Заданы радиус $R_i^1 = \rho$ и отсчетные толщины тел-слоев: $\Delta^k = R_e^k - R_i^k$, $k = 1, \dots, N$.

Деформации тел-слоев являются классическими неоднородными деформациями полого цилиндра:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}_k) = \mathbf{e}_{R^k} \sqrt{(\mathbf{e}_{R^k} \cdot \mathbf{X}_k)^2 + a_{s-1}^k} + \mathbf{e}_{\Xi^k} \otimes \mathbf{e}^{\Xi^k} \cdot \mathbf{X}_k.$$

Левый тензор Коши-Грина k -го слоя:

$$\mathbf{B}_k = \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}^r + \frac{r^2}{r^2 - a_{s-1}^k} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}^\theta + \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}^\xi.$$

Гиперупругий несжимаемый материал: $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + J_1\mathbf{B} + J_{-1}\mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{T}_k = T_k^{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + T_k^{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + T_k^{\xi\xi} \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi,$$

$$T_k^{rr} = \frac{\mu}{2} \left(\ln \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} - \frac{a_{s-1}^k}{r^2} \right) + p_{0,s-1}^k,$$

$$T_k^{\theta\theta} = \frac{T_k^{rr}}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{r^2}{r^2 - a_{s-1}^k} - \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} \right),$$

$$T_k^{\xi\xi} = T_k^{rr} + \mu a_{s-1}^k \frac{r^2 - (1 + \beta)a_{s-1}^k/2}{r^2(r^2 - a_{s-1}^k)}.$$

Параметры a_{s-1}^k и $p_{0,s-1}^k$, $k = 1, \dots, s$, являются решениями системы нелинейных уравнений:

$$\frac{\mu}{2} \left[\ln \frac{(R_i^1)^2}{(R_i^1)^2 + a_{s-1}^1} - \frac{a_{s-1}^1}{(R_i^1)^2 + a_{s-1}^1} \right] + p_{0,s-1}^1 = p_{i,s-1},$$

$$\frac{\mu}{2} \left[\ln \frac{(R_e^s)^2}{(R_e^s)^2 + a_{s-1}^s} - \frac{a_{s-1}^s}{(R_e^s)^2 + a_{s-1}^s} \right] + p_{0,s-1}^s = p_{e,s-1},$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \left[\ln \frac{(R_e^k)^2}{(R_e^k)^2 + a_{s-1}^k} - \frac{a_{s-1}^k}{(R_e^k)^2 + a_{s-1}^k} \right] + p_{0,s-1}^k &= \\ &= \frac{\mu}{2} \left[\ln \frac{(R_i^{k+1})^2}{(R_i^{k+1})^2 + a_{s-1}^{k+1}} - \frac{a_{s-1}^{k+1}}{(R_i^{k+1})^2 + a_{s-1}^{k+1}} \right] + p_{0,s-1}^{k+1}, \end{aligned}$$

$$(R_e^k)^2 + a_{s-1}^k = (R_i^{k+1})^2 + a_{s-1}^{k+1}, \quad k = 1, \dots, s-1.$$

Система s уравнений относительно параметров a_{s-1}^k :

$$\prod_{k=1}^s \gamma_k \frac{\alpha_k + \nu_k x_s}{\beta_k + \nu_k x_s} = W_s \exp \left[\sum_{k=1}^s (1 - \gamma_k) \frac{\alpha_k + \nu_k x_s - 1}{(\alpha_k + \nu_k x_s)(\beta_k + \nu_k x_s)} \right],$$

$$a_{s-1}^k = a_{s-1}^1 + A_k, \quad k = 2, \dots, s,$$

где $A_1 = 0$, $A_k = \sum_{p=2}^k ((R_e^{p-1})^2 - (R_i^p)^2)$, при $k = 2, \dots, s$,

$\gamma_k = (R_i^k/R_e^k)^2$, $\alpha_k = 1 + A_k/(R_e^k)^2$, $\beta_k = \gamma_k + A_k/(R_e^k)^2$,

$\nu_k = (R_e^1/R_e^k)^2$, $x_s = a_{s-1}^1/(R_e^1)^2$, $W_s = \exp \left[2 \frac{p_{i,s-1} - p_{e,s-1}}{\mu} \right]$.

Выражения для $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \nu_s$ могут быть представлены следующими рекуррентными соотношениями:

$$\alpha_{s+1} = 1 + \frac{\alpha_s - (S^{s+1})^2(\alpha_s + \nu_s x_s)}{\zeta_s}, \quad \gamma_{s+1} = \frac{(S^{s+1})^2(\alpha_s + \nu_s x_s)}{\zeta_s},$$

$$\beta_{s+1} = \gamma_{s+1} + \frac{\alpha_s - (S^{s+1})^2(\alpha_s + \nu_s x_s)}{\zeta_s}, \quad \nu_{s+1} = \frac{\nu_s}{\zeta_s},$$

$$\zeta_s = \left(S^{s+1} \sqrt{\alpha_s + \nu_s x_s} + \sqrt{\nu_s \xi_s} \right)^2, \quad \xi_s = \left(\frac{\Delta^{s+1}}{\rho + \Delta^1} \right)^2,$$

где $s \geq 1$. При этом, $\alpha_1 = \nu_1 = 1, \beta_1 = \gamma_1 = (\rho/(\rho + \Delta^1))^2$.

Структурно неоднородный цилиндр

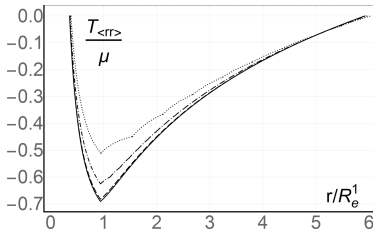
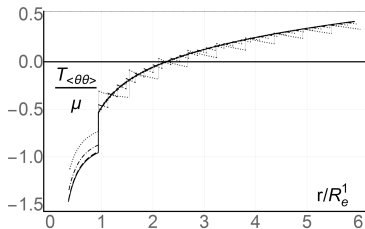
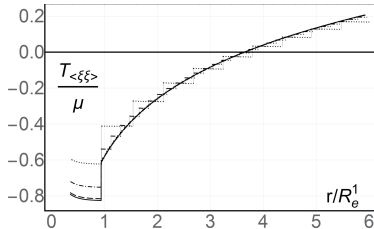


Рис.: Относительные радиальные напряжения

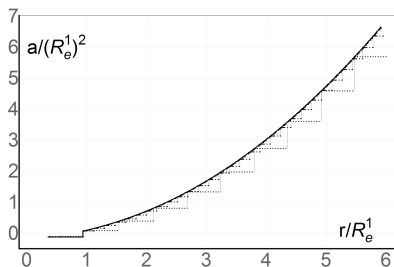


(a)

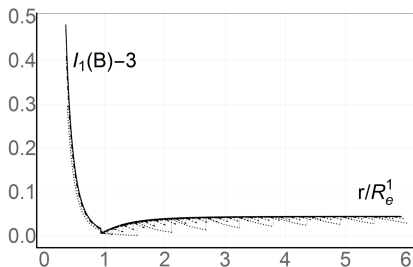


(b)

Рис.: Относительные окружные (a) и осевые (b) напряжения



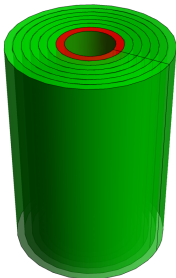
(a)



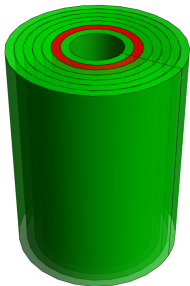
(b)

Рис.: Параметр раздувания a_{s-1}^k (a) и первый инвариант тензора B (b)

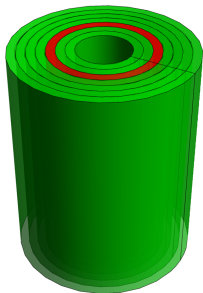
Геометрическая иллюстрация — дискретная структурная неоднородность



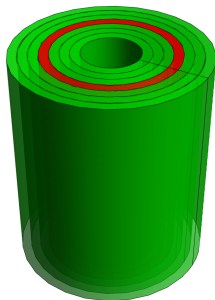
Геометрическая иллюстрация — дискретная структурная неоднородность



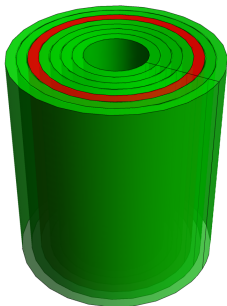
Геометрическая иллюстрация — дискретная структурная неоднородность



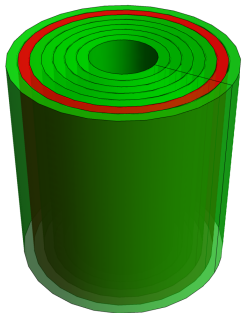
Геометрическая иллюстрация — дискретная структурная неоднородность



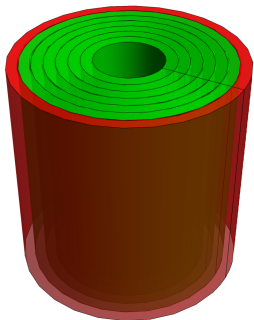
Геометрическая иллюстрация — дискретная структурная неоднородность



Геометрическая иллюстрация — дискретная структурная неоднородность



Геометрическая иллюстрация — дискретная структурная неоднородность



Аппроксимация параметра деформации,
 $a : [1.4234, 23.666] \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(r) = \begin{cases} -1.9738, & r < 3.7452, \\ -3.4948 + 7.1796 \cdot 10^{-1}r + 1.2406 \cdot 10^{-1}r^2 + 2.828 \cdot 10^3 r^3 - 4.5369 \cdot 10^{-5}r^4, & r > 3.7452. \end{cases}$$

Поле локальных деформаций $K_\alpha : \mathfrak{X} \mapsto T_{\mathfrak{X}}\mathcal{X}_\alpha^R$

$$K_\alpha|_{\mathfrak{X}} = \frac{r_\alpha}{\sqrt{r_\alpha^2 - \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}}} \Big|_{\mathfrak{X}, \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}=a(r)} e_{R_\alpha, \mathfrak{X}}|_X \otimes dr_\alpha|_{\mathfrak{X}} + \\ + e_{\Theta_\alpha, \mathfrak{X}}|_X \otimes d\theta_\alpha|_{\mathfrak{X}} + e_{\Xi_\alpha, \mathfrak{X}}|_X \otimes d\xi_\alpha|_{\mathfrak{X}},$$

где $X = \mathcal{X}_\alpha^R(\mathfrak{X})$.

Материальная метрика $\mathbf{G}_\alpha : \mathfrak{X} \mapsto \mathbf{G}_\alpha|_{\mathfrak{X}}$

$$\mathbf{G}_\alpha|_{\mathfrak{X}} = \frac{r_\alpha^2}{r_\alpha^2 - \rho_\alpha(r_\alpha)} \Big|_{\mathfrak{X}} dr_\alpha|_{\mathfrak{X}} \otimes dr_\alpha|_{\mathfrak{X}} + \\ + (r_\alpha^2 - \rho_\alpha(r_\alpha)) \Big|_{\mathfrak{X}} d\theta_\alpha|_{\mathfrak{X}} \otimes d\theta_\alpha|_{\mathfrak{X}} + d\xi_\alpha|_{\mathfrak{X}} \otimes d\xi_\alpha|_{\mathfrak{X}}.$$

Правый и левый тензоры Коши–Грина:

$$\mathbf{C} = G^{\alpha\gamma} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^j}{\partial x^\beta} \partial_{x^\alpha} \otimes dx^\beta.$$

$$\mathbf{B} = G^{\alpha\beta} g_{lj} \frac{\partial x^l}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial x^\alpha} \partial_{x^k} \otimes dx^j.$$

Ненулевые коэффициенты связности ∇_α Леви-Чивита имеют вид (в целях экономии места, индекс α далее опускается):

$$\Gamma^1_{\cdot 11} = \frac{-2\rho(r) + r\rho'(r)}{2(r^3 - r\rho(r))}, \quad \Gamma^1_{\cdot 22} = \frac{(r^2 - \rho(r))(-2r + \rho'(r))}{2r^2},$$

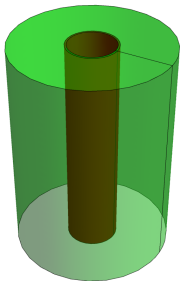
$$\Gamma^2_{\cdot 12} = \Gamma^2_{\cdot 21} = \frac{2r - \rho'(r)}{2r^2 - 2\rho(r)}.$$

В общем случае кривизна полученной связности нетривиальна: ее инвариант Риччи имеет вид:

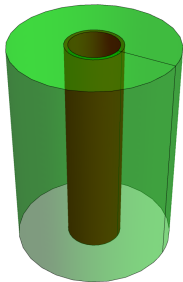
$$S_\alpha = \frac{r_\alpha \rho''_\alpha(r_\alpha) - \rho'_\alpha(r_\alpha)}{r_\alpha^3}$$

и обращается в нуль только при $\rho_\alpha(r_\alpha) = C_1 r_\alpha^2 + C_2$.

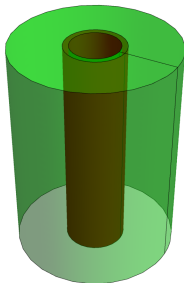
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



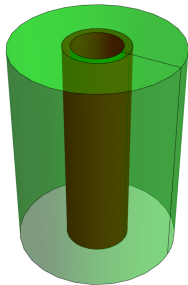
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



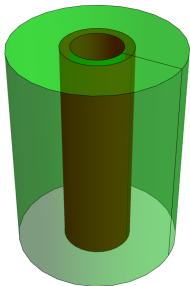
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



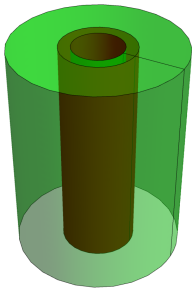
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



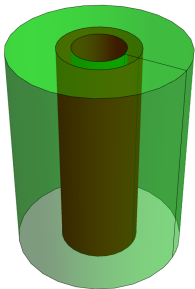
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



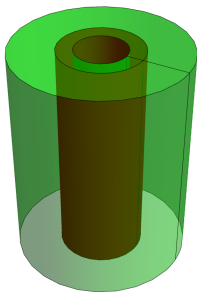
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



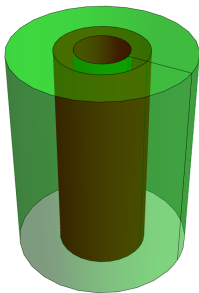
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



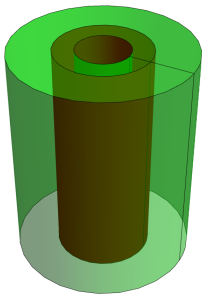
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



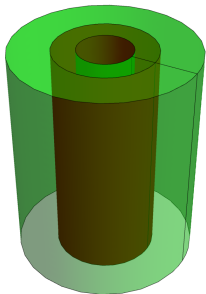
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



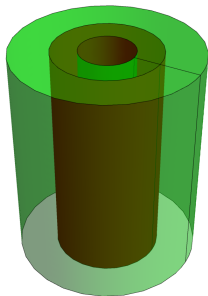
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



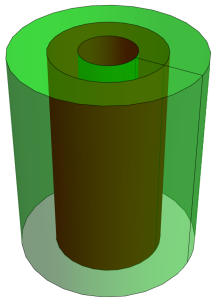
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



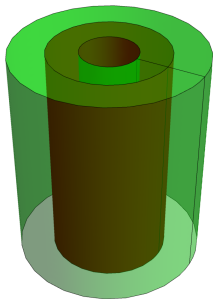
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



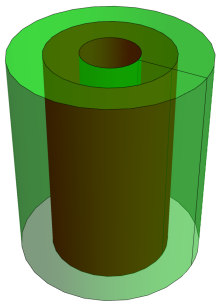
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



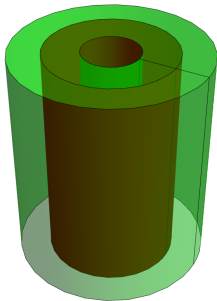
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



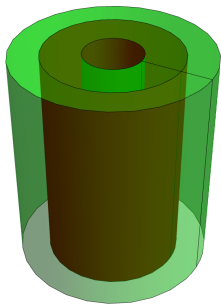
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



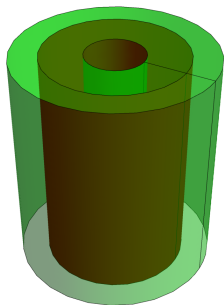
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



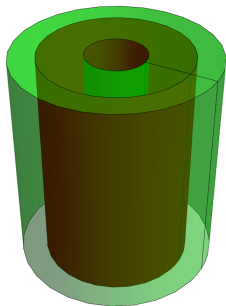
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



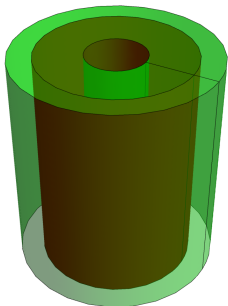
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



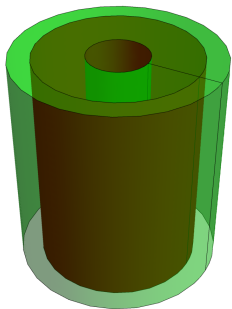
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



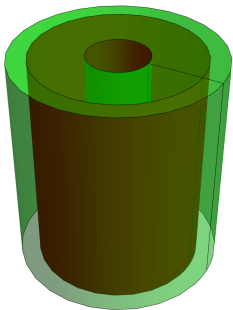
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



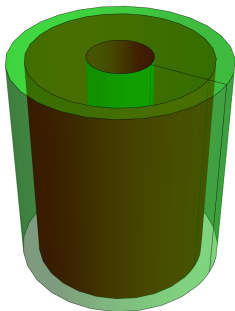
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



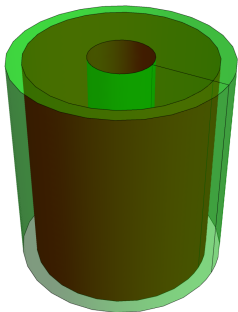
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



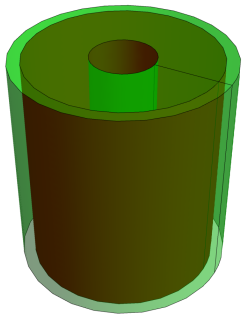
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



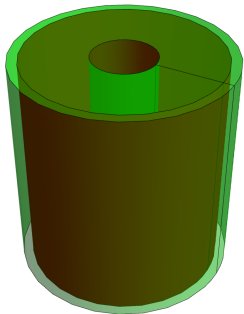
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



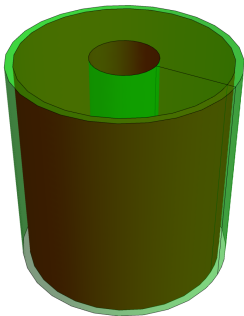
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



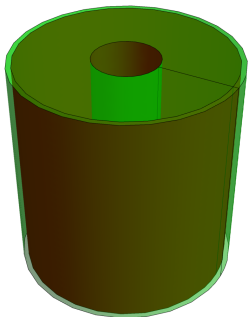
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



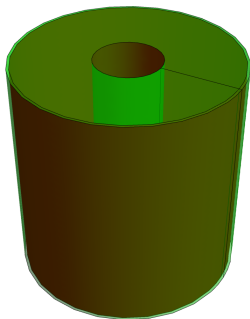
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность



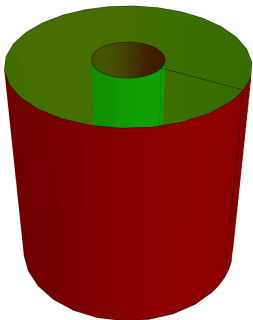
Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность











Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность

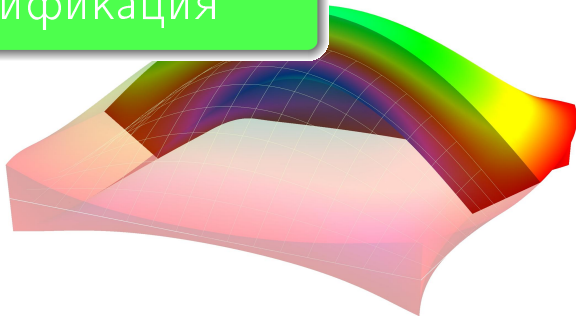


Геометрическая иллюстрация — непрерывная структурная неоднородность

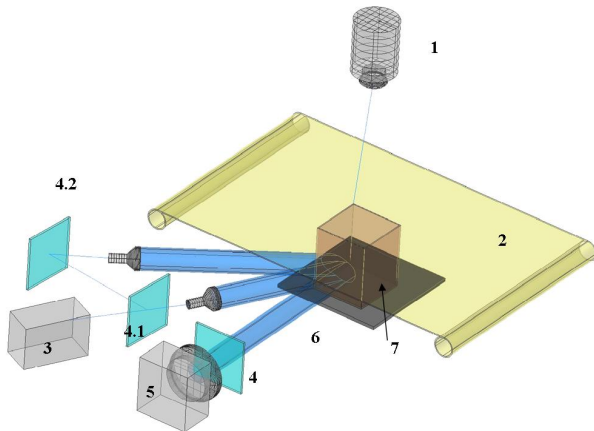


-  Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2012. — sep. — Vol. 468, no. 2148. — P. 3902–3922.
-  Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. — 2013. Т. 77. — С. 585–604.
-  Лычев С.А. Универсальные деформации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 63-79.
-  Лычев С.А., Марк А.В. Осесимметричное наращивание полого гиперупругого цилиндра // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14. — С. 209–226.
-  Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of surface growth for cylindrical and spherical elastic bodies // Journal of the Mechanics and Physics of Solids 98 — 2017. pp. 12-48.
-  Lychev S. A. Geometric aspects of the theory of incompatible deformations in growing solids // Advanced Structured Materials. — Springer International Publishing, 2017. — P. 327–347.
-  Lychev S., Koifman K. Geometric aspects of the theory of incompatible deformations. Part I. Uniform configurations // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. — 2016. — Vol. 7, no. 3. — P. 177–233.
-  Lychev S., Koifman K. Geometric aspects of the theory of incompatible deformations. Part II. Strain measures // To Appear.

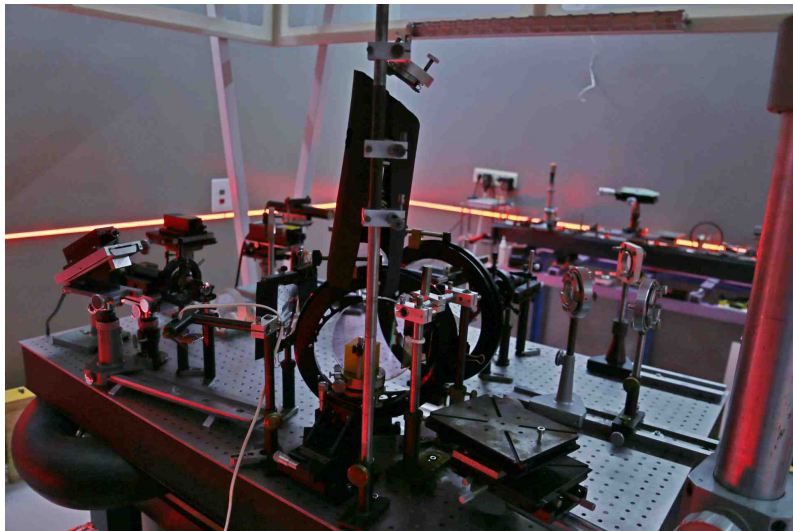
Экспериментальная идентификация



Голографическая интерферометрия искажений материально стационарной границы



Голографическая интерферометрия искажений материально стационарной границы



Голографическая интерферометрия искажений материально стационарной границы

