
Математическая теория растущих тел

А.В. Манжиров, С.А. Лычев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Работа посвящена развитию математической теории наращиваемых тел при конечных деформациях. Характерной особенностью растущих тел является то, что в процессе роста в них возникают несовместные деформации, вызываемые неоднородными полями напряжений и температур в присоединяемых элементах. В связи с этим математические модели напряженно-деформированного состояния растущего тела оказываются эквивалентными моделям тел с непрерывным распределением дислокаций. Растущее тело моделируется как тело, которое не имеет свободной от напряжений конфигурации в евклидовом пространстве, однако такая конфигурация имеется на некотором трехмерном многообразии с неевклидовой аффинной связностью. Кручение связности является мерой несовместности деформаций растущего тела. Рассматривается один из возможных вариантов наращивания, в ходе которого рост происходит за счет непрерывного присоединения к трехмерному телу напряженных материальных поверхностей. Приводится полная система уравнений механики наращиваемых тел. В отличие от задач для тел постоянного состава в эти уравнения входит тензорное поле несовместной дисторсии, которое может быть найдено из условия равновесия границы роста — материальной поверхности, контактирующей с деформируемым трехмерным телом.

Введение

Традиционные методы изготовления деталей сложной формы подразумевают технологические процессы обработки, связанные со снятием материала, например, резку, фрезеровку, сверление и т. п. Альтернативный класс технологических процессов основан на синтезе деталей путем последовательного нанесения материала на подложку или поверхность произвольной формы, например, в результате локальной полимеризации, электрохимической реакции, наклейки, наплавки, локального спекания и т. д. Подобные процессы принято относить к классу аддитивных технологий. В настоящее время технологии аддитивного изготовления изделий находятся в стадии интенсивного развития [1–3]. Они позволяют быстро и относительно дешево создать пространственную деталь сколь угодно сложной формы и, теоретически, из любого материала. Обзор существующего состояния, перспектив развития и ожидаемого влияния аддитивных технологий на развитие современного общества см., например, в [4]. Аддитивные технологии базируются на современных принципах построения прецизионных систем с программным управлением (СNC). Однако, несмотря на возможность позиционирования элементов технологической установки с высокой точностью, отклонения геометрической формы изделия от проекта остается высокой, в первую очередь, в силу собственных деформаций (тепловых,

усадочных и т. п.) изготавливаемого тела. С этими деформациями связаны остаточные (собственные) напряжения, неминуемо возникающие в изделии при применении аддитивных технологий. Остаточные напряжения могут вызывать потерю устойчивости для тонкостенных изделий и разрушение для массивных тел, причем потеря устойчивости и разрушение могут произойти уже в процессе изготовления. Все эти факторы существенно влияют на организацию и качество аддитивных технологических процессов. В этой связи актуальным является развитие методов математического моделирования эволюции напряженно-деформированного состояния (НДС) тела в ходе аддитивного технологического процесса. Моделирование позволяет расчетным путем предсказать нежелательные искажения НДС и оптимизировать качество процесса, в частности, учитывать при проектировании контрдеформации, нивелирующие технологические искажения [5].

Методы математического моделирования деформации тела в процессе его аддитивного изготовления развиты в работах [6–11]. Математические модели основаны на идее описания структурной неоднородности, вызванной соединением несовместно деформированных частей, мера несовместности которых зависит от сценария аддитивного процесса. Еще в пионерских исследованиях механики растущих тел отмечалось, что напряженно-деформируемое состояние тела, которое деформировалось в процессе наращивания, характеризуется несовместной деформацией. Это означает, что локальная деформация, определяемая для простых материалов тензорным полем второго ранга, не может быть представлена как градиент некоторого векторного поля, роль которого в классической механике играет поле мест. Подобное тензорное поле общего вида, удовлетворяющее лишь требуемым условиям гладкости, принято называть полем дисторсии, подчеркивая тем самым его неградиентную структуру.

Исследование НДС деформируемого твердого тела, вызванного дисторсией, не удовлетворяющей условиям совместности, восходят к работам Вейнгартена [12] и Вольтерра [13], а также к работам по теории распределенных дефектов Крёнера и Де Витта [14, 15]. В этих работах, в основном, развивалась линейная теория упругих сред с распределенными дефектами, которые математически характеризовались тензорным полем, определяющим неоднородный член в тензорном уравнении совместности малых деформаций.

Развитие теории конечных деформаций потребовало переосмысления понятия дисторсии. Действительно, градиент деформации — частный случай дисторсии, удовлетворяющий уравнениям совместности, в классической теории упругости определяет линейный член в разложении отображения, задающего деформацию, т. е. преобразования геометрической области, занимаемой телом в образе отсчетной конфигурации, в область, которую тело занимает в образе актуальной конфигурации. При этом важным является понятие отсчетного состояния, определяемого отсчетной конфигурацией: в окрестности каждой точки, составляющей тело, это состояние должно быть идентично состоянию, воспроизводимому в стандартном эксперименте. По терминологии [29] это состояние называется единообразным, а все тело в таком отсчетном состоянии — единообразной отсчетной формой.

Как правило, единообразное состояние полагают свободным от напряжений (натуральное состояние). Отказ от совместности в определении дисторсии неизбежно ведет к утрате глобального единообразного состояния как состояния, реализуемого в теле путем некоторой его деформации. Отметим, что деформация здесь понимается как изменение формы в евклидовом пространстве.

Возможны следующие способы возвращения глобального единообразного состояния. Первый состоит в отказе от связанности и представлении образа отсчетной конфигурации как совокупности инфинитезимальных частей, не складываемых в единый массив без деформирования. Это приводит к так называемой поликристаллической отсчетной конфигурации (*gefeegense crystal*) [31, p. 126]. Название отражает физическую интерпретацию: единственный способ убрать собственные напряжения в поликристаллической структуре — позволить ей разделиться на несвязанные микроскопические кристаллы, которые по отдельности вернутся в ненапряженное состояние. Второй способ позволяет трактовать единообразную отсчетную как связанную область, но погружаемую в пространство с дополнительными геометрическими «степенями свободы», а именно, в пространство аффинной связности, кривизна и кручение которого определяются несовместной дисторсией. Эта идея в приложении к теории распределенных дефектов была сформулирована Кондо, а затем получила развитие в работах Нолла и Вана [29, 30].

В качестве примера приведем процесс лазерной стереолитографии, принципиальная схема которого показана на рис. 1. Узкий пучок, генерируемый лазером в ультрафиолетовом диапазоне, посредством сканатора (системы зеркал на гальванических электроприводах) позиционируется в локальную область поверхностного слоя жидкого полимера, вызывая его полимериза-

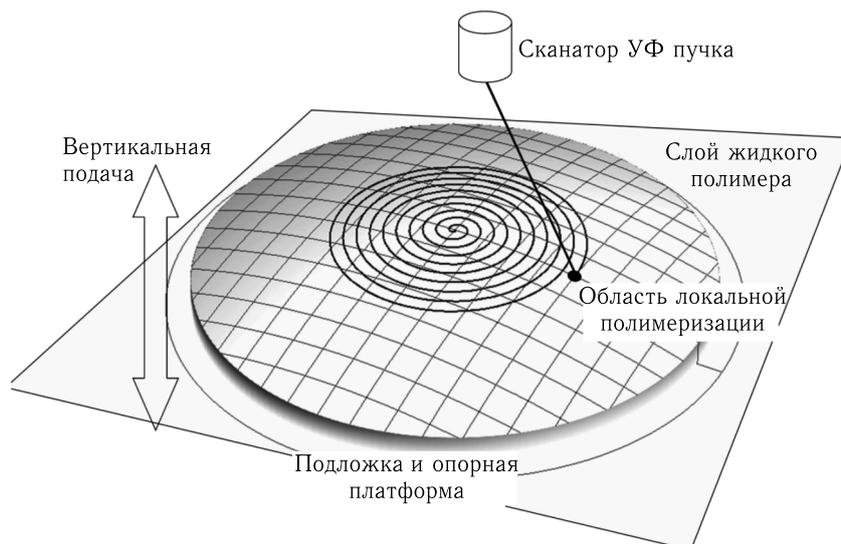


Рис. 1. Принципиальная схема процесса стереолитографии

цию. В ходе этого процесса происходят химические реакции, возникает локальный нагрев, что приводит к остаточным деформациям. При этом распределение остаточных деформаций зависит от траектории позиционирования пучка, изменяя которую можно добиваться оптимизации процесса, в частности, минимизации дисторсии финальной формы тела.

1. Геометрические методы механики растущих тел

Геометрические методы построения моделей механики сплошной среды в настоящее время интенсивно развиваются. Эти методы привносят в теорию концепции, язык и методологию современной дифференциальной геометрии (теории гладких многообразий), что обогащает, но в то же время в значительной степени усложняет саму механику. Конечно же, переход к более абстрактному стилю изложения должен быть оправдан. В настоящей работе такой абстрактный способ построения теории обусловлен тем, что он позволяет наиболее полно и ясно описать феномен *искусственной неоднородности*, возникающий в силу особой геометрической структуры тела, которое образуется *материально единообразными* частями, т. е. «выполненными» из одного и того же материала, но соединенными друг с другом в деформированном состоянии. Именно такие тела моделируются в рамках механики растущих тел.

В рамках механики растущих тел рассматриваются деформируемые твердые тела переменного состава: в процессе деформирования к телу присоединяются части, которые могли деформироваться до присоединения независимо. Историю возникновения и развития механики растущих тел можно найти в ряде монографий и статей, среди которых отметим [16–25].

В большинстве опубликованных работ теория растущих тел строилась как некоторый специальный вариант теории деформируемых твердых тел в трехмерном евклидовом пространстве. Однако оказывается, что геометрических свойств евклидова пространства недостаточно для описания напряженно-деформированного состояния тела, которое было образовано путем непрерывного объединения предварительно напряженных частей. Представляется важным, что растущие тела могут быть рассмотрены как частный класс неоднородных тел, в которых неоднородность возникает в силу несовместной деформации, вызванной соединением несогласованно деформированных элементов. С этой точки зрения механика растущих тел имеет много общего с теорией дефектов, в частности с геометрической теорией непрерывно распределенных дислокаций, построенной во второй половине XX в. Следует отметить, что на развитие этой теории значительное влияние оказали геометрические методы теории Эйнштейна–Картана и общей теории относительности. По-видимому, первым, кто применил методы геометрии Картана [26] в механике сплошной среды, был Кондо (1955 г.). Эти идеи быстро получили развитие в серии работ Билби с соавт., Крёнера и Зигера, в которых были установлены связи между тензорным полем несовместности деформаций, плотностью распределения дефектов и нетривиальной геометрией материального многообразия с отличными от нуля кручением и кривизной [27] (имеется подробный исторический

обзор [28]). В этой связи такие геометрические понятия, как связность, кривизна, кручение, параллелизм, оказались в числе основных понятий общей теории неоднородных тел, которая в логически завершенном виде была представлена результатами фундаментальных исследований [29–31], образующими теоретический базис для построения математической теории непрерывно наращиваемых тел.

Задачи механики растущих тел весьма разнообразны, в связи с чем приведем некоторую классификацию таких задач, которая позволит выделить область исследований, затрагиваемую в настоящей работе.

Во-первых, следует различать дискретное и непрерывное наращивание. В первом случае в процессе деформирования происходит объединение тел конечных размеров. Задачи о дискретном наращивании рассматривались в рамках так называемой теории составных тел [32]. При этом уравнения равновесия, сформулированные для отдельных частей составного тела, объединялись в систему, а краевые условия определялись из условия идеального контакта этих частей. В такой постановке математическая модель дискретно наращиваемого тела принципиально не отличалась от классических моделей тел постоянного состава. При непрерывном наращивании имеет место непрерывный приток материала к исследуемому телу. В этом случае процесс наращивания может быть представлен как последовательность элементарных актов присоединения бесконечно малых напряженных частей к растущему телу, причем каждый элементарный акт происходит за бесконечно малый интервал времени.

Во-вторых, следует различать поверхностный рост и объемный рост. При поверхностном наращивании присоединение материала происходит на границе тела — «границе роста» [33]. Поверхностному росту соответствуют такие технологические и природные процессы, как намотка, пиролитическое и электролитическое осаждение, возведение массивных сооружений, аккреция планет, рост кристаллов. При объемном росте состав тела в процессе деформирования не меняется, однако масса элементарного отсчетного объема не сохраняется: она изменяется в процессе деформирования по некоторому заданному закону [34]; рост биологических тканей дает пример такого процесса.

Ниже рассматривается непрерывное наращивание тела путем присоединения нового материала на его границе. Рост тела рассматривается как объединение деформированных тел, образы конфигураций которых не пересекаются, но имеют в физическом пространстве общую границу. С механической точки зрения объединение по границе сводится к образованию связей в окрестности граничных точек. В общем случае НДС этих тел не согласованы, в связи с чем у их объединения отсутствует свободная от напряжений отсчетная конфигурация. Следует отметить, что этот факт упоминался в работах по механике растущих тел, однако чаще указывалось лишь на несовместность поля малых деформаций.

Обратим внимание на еще одно обстоятельство. Непрерывное наращивание рассматривается как процесс непрерывного присоединения к телу инфинитезимальных областей, т. е. областей инфинитезимальной меры (используется мера массы). Таким образом, к инфинитезимальным областям могут

быть причислены, например, бесконечно тонкие слои, нити, точки. Так как такие области представляют собой непрерывные тела разных размерностей, то они испытывают НДС, соответствующее их размерности, например, слои могут переносить мембранные напряжения, нити — линейное и т. д. В этой связи характер распределения напряжений в непрерывно растущем теле подразумевает построение разных вариантов теории наращивания. Далее рассматриваются тела, растущие за счет непрерывного присоединения бесконечно тонких двумерных слоев, называемых также материальными поверхностями [35].

В качестве геометрического фундамента теории растущих тел используется теория расслоений дифференцируемых многообразий [36, 37], аналитические свойства которых определяются без привлечения априорно заданных метрики и связности. Многообразия в таком виде позволяют сформулировать краевую задачу, в ходе решения которой определяется частный вид связности, соответствующий кинематическим и статическим характеристикам процесса наращивания. Кроме того, геометрическое понятие расслоения многообразия соответствует физически реализуемому распределению свойств растущего тела, рост которого моделируется как непрерывный процесс присоединения деформированных материальных поверхностей.

Кроме того, тело как многообразие может быть оснащено дополнительной структурой, определяющей *расслоение* многообразия. Представление тела как расслоения дает естественную интерпретацию результата наращивания, которое реализуется, например, как непрерывный поток материальных поверхностей, осаждаемых на поверхности роста. Здесь может быть уместным образное сравнение с годовыми кольцами на сечениях стволов деревьев. Каждому слою соответствует материальная поверхность,

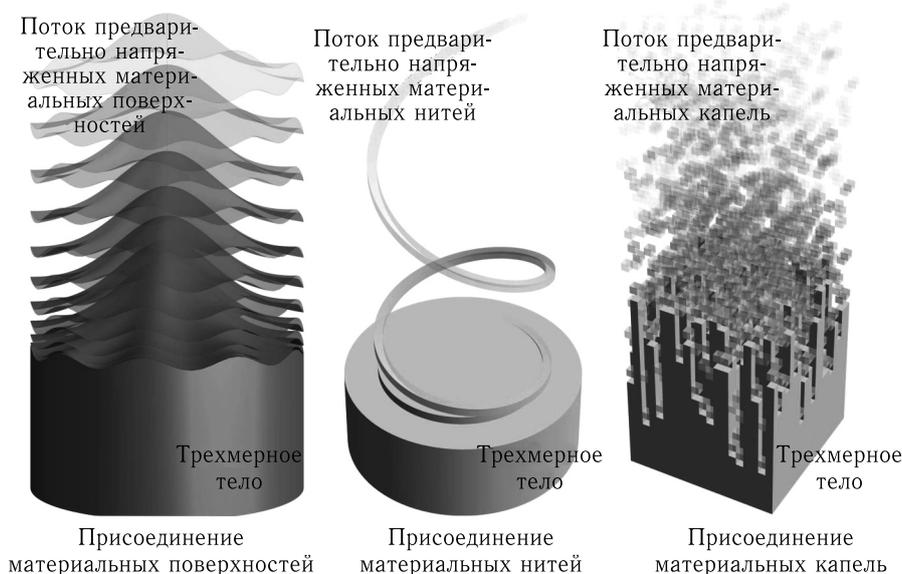


Рис. 2. Классификация процессов роста

присоединенная в некоторый фиксированный момент времени. Разумеется, возможны и другие типы расслоения, например, расслоение с двумерной базой и одномерными слоями-фибрами, которые образно можно представить как волокна древесины, расслоение с трехмерной базой и слоями-каплями (рис. 2); более сложный пример расслоения иллюстрируется намоткой нити на клубок и т. д.

2. Растущие тела

Понятие «тело» в механике сплошной среды не имеет завершенного определения ввиду чрезвычайной его общности. Существует ряд частных определений (см., например, [38], где приводятся различные варианты «вселенных», т. е. множеств, элементами которых являются тела.) Как правило, под телом понимают некоторое локально связанное подмножество абстрактного топологического пространства, такое, что его «воплощение» в физическом пространстве представляет собой область с регулярной границей, для которой имеют смысл интегральные законы сохранения¹. В классической механике тел постоянного состава это подмножество неизменно, в то время как в механике растущих тел оно изменяется ввиду притока материала извне. Кроме того, сам процесс роста представляется как упорядоченная последовательность актов, определяющая некоторую специальную структуру на множестве материальных точек. В этой связи ниже будут даны определения понятий тела постоянного состава и растущего тела, согласованные с излагаемой в настоящей работе теорией растущих тел.

Множества материальных точек будем обозначать символом \mathfrak{B} . Каждая точка $p \in \mathfrak{B}$ имеет индивидуальную метку x . В аналитической механике мощность множества \mathfrak{B} , как правило, конечна. Объектом исследования механики деформируемого твердого тела является *тело*, представляемое как множество \mathfrak{B} материальных точек, *непрерывно* заполняющих некоторую область в аффинном пространстве \mathcal{E} . Поскольку мощность множества точек пространства \mathcal{E} , принадлежащих этой области, равна мощности континуума, то полагается, что множество \mathfrak{B} также имеет мощность континуума, чем обеспечивается биективное отображение множества точек на множество занимаемых ими мест, и является открытым подмножеством топологического пространства, удовлетворяющего аксиоме отделимости Хаусдорфа.

Поскольку множество \mathfrak{B} полагается открытым, то всякая точка, принадлежащая \mathfrak{B} , принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью. Граница тела² определяется как множество его предельных точек, не явля-

¹ Как аллегорически отмечено в монографии [42], само тело пребывает в платоновом мире чистых идей, который мы никогда не сможем увидеть, однако проявления этого мира мы ощущаем в облике конфигураций, т. е. «воплощений» тела в физическом пространстве. Это приводит в некотором смысле к абстрактному стилю построения теории.

² Общее определение границы множества X имеет вид $\overline{X} \cap \overline{(1-X)}$, где $1-X$ — дополнение множества X [43]. Однако, поскольку тела всегда представляются открытыми множествами, может быть использовано более простое соотношение, приведенное в основном тексте.

ющихся внутренними, т. е.

$$\partial\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}} \setminus \mathfrak{B}.$$

Вообще говоря, множество \mathfrak{B} может иметь топологическую структуру, отличную от топологической структуры соответствующей ему области в пространстве \mathcal{E} . Так, согласно теореме Хана–Мазуркевича [44], локально связанный континуум может быть представлен как непрерывный образ интервала числовой оси, т. е. может быть устроен, например, как кривая Пеано (рис. 3). При этом топологическая размерность (размерность Лебега) тела \mathfrak{B} может быть равна единице, в то время как топологическая размерность его образа — двум или трем. Следует отметить, что отображения подобного типа не являются биективными, т. е. одной и той же точке образа может соответствовать несколько различных прообразов на интервале. Разумеется, допуская самопересечение образа, мы приходим к ситуации, противоречивой с точки зрения обычно принимаемого в механике сплошных сред постулата о непроникновении частей тела друг в друга. Однако такие кратные точки за счет специального выбора отображающей функции могут быть преобразованы в точки соприкосновения, что уже вполне приемлемо в механике. Образно говоря, тело \mathfrak{B} , образующее в \mathcal{E} некоторую пространственную область, в действительности может представлять собой «нить», топологическая размерность которой равна единице. Этот способ построения тела нельзя игнорировать при построении общей теории растущих тел, однако в рамках настоящей работы мы не будем его рассматривать. Ниже будем полагать, что топологическая размерность тела, т. е. множества \mathfrak{B} , совпадает с топологической размерностью соответствующих областей в \mathcal{E} . Такое предположение накладывает ограничение на класс отображений множества \mathfrak{B} в пространство \mathcal{E} : эти отображения должны быть *гомеоморфиз-*

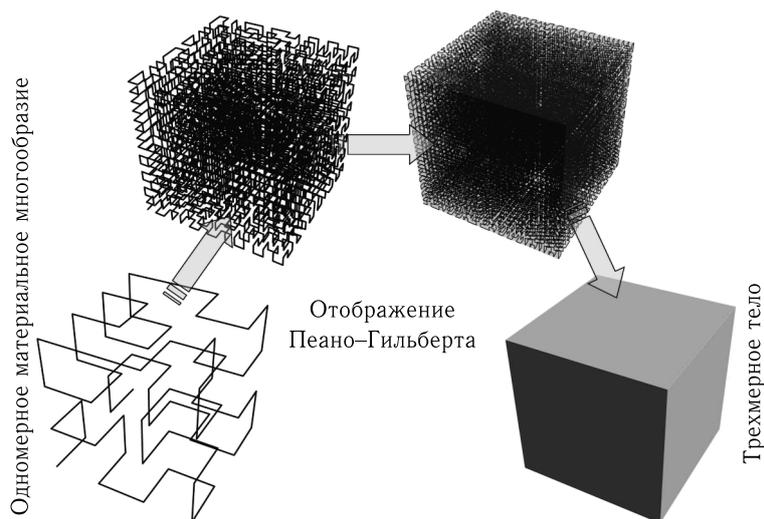


Рис. 3. Негомеоморфное вложение тела

мами, т. е. взаимно однозначными непрерывными отображениями, обратные к которым также непрерывны.

Прежде всего, формализуем понятие *растущего тела*. Для этого воспользуемся аксиоматикой, предложенной Ноллом, которая позволяет сформулировать понятие *гладкого тела* на языке гладких многообразий [29], и дополним ее аксиомой, характеризующей *растущее гладкое тело*.

Под *телом* \mathfrak{B} будем понимать связное подмножество абстрактного топологического пространства, такое, что его образ в физическом пространстве представляет собой область с регулярной границей. Кроме того, полагаем, что тело представляет собой дифференцируемое многообразие. Его элементы $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$ — материальные точки; полагаем, что они являются *простыми*.

Поясним подробнее, как вводится структура дифференцируемого многообразия на множестве \mathfrak{B} . Множество \mathfrak{B} оснащается структурой, которая определяется классом отображений \mathfrak{C}

$$\forall \kappa \in \mathfrak{C} \quad \kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E},$$

где \mathcal{E} — физическое (аффинное) пространство. Элементы $\kappa \in \mathfrak{C}$ называются конфигурациями. Образ $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$ относительно отображения κ , а именно $\kappa(\mathfrak{p}) \in \mathcal{E}$, называется местом материальной точки \mathfrak{p} в конфигурации κ . Образ множества \mathfrak{B} , т. е. совокупность мест всех материальных точек, будем называть формой. Как правило, одна из таких форм фиксируется и называется отсчетной. Если отображения $\gamma, \kappa \in \mathfrak{C}$ представляют собой две конфигурации, то их композиция

$$\lambda = \gamma \circ \kappa^{-1} : \kappa(\mathfrak{B}) \rightarrow \gamma(\mathfrak{B})$$

называется деформацией тела \mathfrak{B} из конфигурации κ в конфигурацию γ .

Поскольку каждая форма вложена в аффинное пространство \mathcal{E} (с евклидовой структурой, определяемой трансляционным пространством \mathcal{V}), то существует натуральная параметризация формы, в частности, с помощью декартовых координат. Таким образом класс отображений \mathfrak{C} оснащает множество \mathfrak{B} структурой многообразия. Гладкость этого многообразия определяется гладкостью функций из класса \mathfrak{C} , элементы которого могут служить глобальными картами многообразия \mathfrak{B} . В этой связи топологическая структура \mathfrak{B} тривиальна: атлас карт, накрывающих \mathfrak{B} , состоит из единственной карты.

Напомним определение простого тела [38, 39]. Пусть R — множество, элементы которого называются дескрипторами отклика (поле напряжений представляет пример такого дескриптора). Непрерывное тело \mathfrak{B} будем называть простым телом по отношению к R , если оно наделено структурой посредством функции \mathfrak{G} , которая присваивает каждой точке \mathfrak{X} отображение

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}} : C_{\mathfrak{X}} \rightarrow R.$$

Значение функции $\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{G}_{\mathfrak{X}})$ — дескриптор отклика материальной точки \mathfrak{X} в любой конфигурации κ тела \mathfrak{B} , такой, что $\nabla \kappa(\mathfrak{X}) = \mathbf{G}_{\mathfrak{X}}$.

Следуя Ноллу [29], определим понятие *непрерывного* деформируемого тела. Тело \mathfrak{B} является непрерывным телом класса C^p ($p \geq 1$), если класс конфигураций \mathfrak{C} удовлетворяет следующим аксиомам.

В1. Каждая конфигурация $\varkappa \in \mathfrak{C}$ — гомеоморфизм, ее область значений — открытое подмножество \mathcal{E} , которое называется областью, занимаемой телом \mathfrak{B} в конфигурации \varkappa .

В2. Если $\gamma, \varkappa \in \mathfrak{C}$ — конфигурации, то их композиция $\lambda = \gamma \circ \varkappa^{-1}$ принадлежит классу C^p .

В3. Если $\varkappa \in \mathfrak{C}$ — конфигурация и $\lambda : \varkappa(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{E}$ — деформация класса C^p , то $\lambda \circ \varkappa \in \mathfrak{C}$.

В силу аксиом В1–В3 класс отображений \mathfrak{C} определяет на множестве \mathfrak{B} структуру C^p -многообразия. Поскольку все конфигурации — гомеоморфизмы, все их образы топологически эквивалентны. Таким образом, класс допустимых конфигураций определяет топологическую структуру тела постоянного состава (рис. 4 на вклейке).

В классической механике сплошных сред тела рассматриваются как фиксированные множества материальных точек. В задачах механики растущих тел рассматривается эволюция множества \mathfrak{B} , которое представляет собой множество *переменного* состава. Эволюция растущего тела может быть представлена семейством тел

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}},$$

где \mathcal{I} — множество индексов, которое может быть конечным, счетным или континуальным.

Введем понятия *тотального тела* \mathfrak{B}^* и *начального тела* \mathfrak{B}_* следующим образом:

$$\mathfrak{B}^* = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathfrak{B}_\alpha, \quad \mathfrak{B}_* = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathfrak{B}_\alpha,$$

и сформулируем дополнительную аксиому (В4) для растущего тела. Формулировка этой аксиомы зависит от мощности множества \mathcal{I} и соответствует следующим типам процесса роста.

В4.1. *Дискретный рост.* Множество \mathfrak{C} — конечная последовательность вложенных множеств:

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{B}_N.$$

Очевидно, что мощность множества \mathfrak{C} определяется числом N , т. е. $|\mathfrak{C}| = N$.

В4.2. *Обобщенный дискретный рост.* Множество \mathfrak{C} — трансфинитная последовательность вложенных множеств:

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{B}_\omega \subset \mathfrak{B}_{\omega+1} \subset \dots, \quad |\mathfrak{C}| = \aleph_0.$$

В4.3. *Непрерывный рост.* Множество \mathfrak{C} — семейство тел над интервалом $\mathcal{I} = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующему условию: существуют двумерные многообразия Ω_k и не более чем счетное множество гомеоморфизмов

$$\Psi_k : (\Omega_k, \alpha) \rightarrow \mathfrak{B}^*, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

таких, что

$$\forall \alpha < \beta \quad \mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{B}_\beta, \quad \forall \alpha \exists k \partial \mathfrak{B}_\alpha = \Psi_k(\Omega_k, \alpha),$$

$$\bigcup_k \Psi_k(\Omega_k \times \mathcal{I}_k) = \mathfrak{B}^*, \quad \bigcup_k \mathcal{I}_k = \mathcal{I}.$$

Очевидно, $|\mathfrak{C}| = \aleph_1$. Многообразия Ω_k будем называть прообразом границы роста. Последняя аксиома устанавливает структуру гладкого расслоения многообразия \mathfrak{B}^* . При этом интервал \mathcal{I} представляет собой базу расслоения, а многообразия Ω_k — прообраз слоя. Если существует единственный (универсальный) гомеоморфизм $\Psi = \Psi_1$ единственного многообразия Ω_1 на все границы элементов множества \mathfrak{C} , то расслоение оказывается тривиальным. В противном случае топологическая структура прообраза растущей границы может меняться. С точки зрения механики, изменение топологии прообраза границы роста соответствует самосоприсоединению частей образа Ω , например, преобразованию конечного цилиндра в полноторие при отождествлении его оснований.

Итак, растущее тело может быть представлено как расслоение тотального тела \mathfrak{B}^* . Слои, соответствующие координате базы α , будем обозначать символом \mathfrak{M}_α . Из структурных свойств расслоения вытекает, что слои не пересекаются:

$$\forall \alpha, \beta (\alpha \neq \beta) \Rightarrow (\mathfrak{M}_\alpha \cap \mathfrak{M}_\beta = \emptyset),$$

а их объединение совпадает с тотальным телом \mathfrak{B}^* , т. е.

$$\mathfrak{B}^* = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{I}} \mathfrak{M}_\gamma.$$

В процессе роста тело \mathfrak{B} представляется открытыми подмножествами тотального тела \mathfrak{B}^* , граница которых $\partial\mathfrak{B}$ образуется двумя несовпадающими слоями $\mathfrak{M}_{\alpha'}$ и $\mathfrak{M}_{\beta'}$, т. е.

$$\partial\mathfrak{B} = \mathfrak{M}_{\alpha'} \cup \mathfrak{M}_{\beta'}.$$

В этом случае тело \mathfrak{B} может быть представлено как объединение множества слоев, индексы которых принадлежат открытому интервалу $(\alpha', \beta') \subset \mathcal{I}$:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\alpha', \beta') = \bigcup_{\gamma \in (\alpha', \beta')} \mathfrak{M}_\gamma.$$

Растущее тело определяется как параметрическое семейство таких множеств, а именно

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}(\alpha, \gamma) | \gamma \in \mathcal{I}\},$$

где γ — параметр семейства, характеризующий эволюцию растущего тела, причем при $\gamma \rightarrow \alpha$ тело вырождается в бесконечно тонкий слой или точку. Разумеется, можно вести речь и о наращивании заранее созданного основного или исходного тела.

Очевидно обобщение этого определения:

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) | (\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \subset \mathcal{I}\},$$

где $(\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$ — семейство вложенных интервалов.

Согласно данным выше определениям граница растущего тела должна быть топологически эквивалентна типовому слою, который сам представляет собой гладкое многообразие, и, следовательно, растущая граница топологически эквивалентна геометрически замкнутой поверхности. Если

растущая граница топологически эквивалентна многообразию с краем, то растущее тело может быть определено следующим образом:

$$\mathcal{E} = \{ \mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \mid (\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \subset \mathcal{I} \}.$$

Здесь \mathfrak{B}_0 — фиксированное подмножество материального многообразия с гладкой границей.

Слои \mathfrak{M}_α представляют собой двумерные многообразия, отображаемые на замкнутые ориентируемые поверхности в \mathcal{E} . В силу классификационной теоремы каждая связная замкнутая поверхность гомеоморфна элементам следующих трех семейств:

1. Сферы.
2. Связанная сумма n торов ($n \geq 1$).
3. Связанная сумма n действительных проективных плоскостей ($n \geq 1$).

Поверхности первых двух семейств ориентированы. Можно для удобства считать первое и второе семейство одним, полагая сферу связанной суммой 0 торов. Количество торов n определяет род поверхности. Эйлера характеристика связанной суммы n торов равна $2 - 2n$. Поверхности третьего семейства неориентируемы. Из всего сказанного вытекает, что образ \mathfrak{M}_α , а следовательно, и само многообразие \mathfrak{M}_α топологически эквивалентны связанной сумме n торов. Это позволяет осуществить дополнительную классификацию растущих тел, представляемых расслоением с одномерной базой, по топологическому классу типового слоя, который, в свою очередь, определяется числом n . На рис. 5 приведены расслоения, слои которых — алгебраические поверхности.

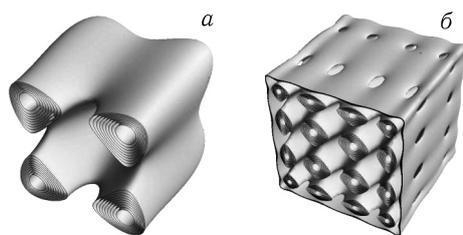


Рис. 5. К классификации расслоений

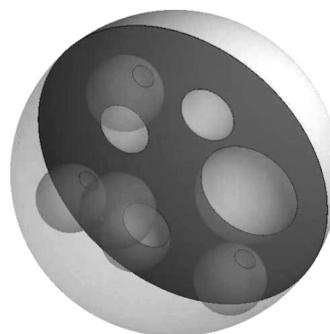


Рис. 6. К классификации расслоений

Можно построить обобщение данных определений, если отказаться от связности \mathfrak{M}_α (рис. 6). Однако следует отметить, что расслоение при этом, как правило, становится нетривиальным.

В работах [21, 32] предлагается иной способ идентификации материальных точек, а именно, предлагается использовать тройки чисел, содержащие момент времени присоединения материальной точки (аналог координаты базы \mathfrak{r}^3) и поверхностные координаты точки границы в текущем состоянии, к которой присоединялась материальная точка (аналог координат

слоя $\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2$). Но в таком определении последние две координаты являются пространственными и заранее не известны — их можно получить лишь в результате решения краевой задачи, определяющей конфигурацию растущего тела.

Укажем соответствие введенных выше определений характеристикам процесса роста, которые использовались ранее. Если ввести время t как переменную и рассматривать параметр γ как функцию $\gamma = \Gamma(t)$, то можно вести речь о возрасте t частей \mathfrak{M}_γ растущего тела, а также, при условии существования обратной функции Γ^{-1} , моменте времени τ^* , в который происходит присоединение слоя \mathfrak{M}_γ , т. е.

$$\tau^* = \Gamma^{-1}(\gamma).$$

При этом растущее тело может быть определено как семейство множеств

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{\mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{B}(\alpha, \gamma) | \gamma = \Gamma(\tau), \tau \in (t_0, t)\}.$$

Подобная терминология и обозначения использовались ранее [22, 23, 32].

Отметим, что если полагать функцию $\Gamma(t)$ непрерывной и возрастающей, то обратная функция Γ^{-1} существует, и выполняется соотношение

$$\forall \tau_1 < \tau_2 \quad \mathfrak{B}_{\tau_1} \subseteq \mathfrak{B}_{\tau_2}.$$

Это неравенство определяет условие монотонности роста, т. е. условие, при котором в течение всего процесса происходит присоединение новых элементов к растущему телу, тогда как удаление присоединенных материальных точек не допускается. Наконец, если определить на борелевом теле подмножеств \mathfrak{B} меру μ , которую можно интерпретировать как плотность массы:

$$\mu(\mathfrak{B}) = \int_{\mathfrak{B}} \rho(\mathfrak{x}) dV,$$

то условие непрерывности можно выразить соотношением

$$\mu(\mathfrak{B}_{t_2} \setminus \mathfrak{B}_{t_1}) = O(t_2 - t_1).$$

Отметим, что в рамках предлагаемого материального описания свойства монотонности и непрерывности обеспечиваются гладкостью базы расслоения \mathcal{I} и слоев \mathfrak{M}_α , $\alpha \in \mathcal{I}$.

3. Материальные связности

Для определения физических полей, возникающих в теле в актуальном состоянии, т. е. для определения отклика материала, следует учитывать семейство его предшествующих состояний, которые, вообще говоря, не могут быть определены в рамках евклидовой геометрии. Действительно, если в процессе деформирования в теле произошло перераспределение связей, которое может соответствовать, например, возникновению дефектов или соединению частей, деформация которых до этого была независима, то геометрия до и после окажется принципиально различной. Может оказаться, что в евклидовом пространстве не найдется связанного множества,

которое могло бы представить геометрию до перераспределения связей. Это обстоятельство имеет ясную физическую интерпретацию: все подобные тела не могут быть освобождены от напряжений никакой деформацией, а в отсутствие внешних силовых полей в них будут отличные от нуля внутренние поля (например, напряжения).

Далее многообразия используются для представления пространств аффинной связности, которые обобщают евклидовы пространства: оставаясь локально евклидовыми, они, по существу, представляют многомерное семейство евклидовых пространств, ассоциированных с каждой точкой многообразия, связь между которыми определяется обобщением правила параллельного переноса. В линейном приближении это правило задается аффинной связностью, которая, в свою очередь, определяется гладкими полями кривизны и кручения связности.

Поясним причину использования именно аффинной связности. В математическом описании отклик задается функционалом отклика, конкретная аппроксимация которого определяется экспериментом. В этой связи аргументы этого функционала должны определять переход тела из некоторого стандартного состояния, реализуемого в эксперименте. Как правило, это естественное состояние, т. е. состояние, которому соответствуют нулевые значения физических полей. Если функционал отклика сформулирован в рамках локального приближения, то это стандартное состояние должно реализовываться локально. Если, кроме того, материал полагается простым, т. е. считается, что физические поля зависят только от локальных деформаций, то аргументом функционала отклика оказывается поле линейных преобразований. Это обстоятельство является связующим звеном между геометрией и механикой. Действительно, аффинная связность тоже может быть определена гладким полем линейных преобразований. Эта процедура реализуется методом подвижного репера (Картан). При этом поле натуральных реперов, которое на многообразии задается некоторой координатной системой, соответствует полю координатных базисов актуального состояния, а отвечающие этому полю координаты — евклидовы координаты позиций материальных точек в текущий момент времени. Локальные деформации как линейные преобразования отвечают локальным преобразованиям подвижного репера. Несовместность локальных деформаций соответствует неинтегрируемости поля линейных преобразований, и, как следствие, неголономности поля реперов (рис. 7 на вклейке). В этом смысле мера неголономности, количественно выражаемая, в общем случае, полями кривизны и кручения, оказывается мерой несовместности локальных деформаций.

В растущих телах определенная таким образом связность зависит от параметров роста, а именно от скорости присоединения материала и предварительного напряженного состояния присоединяемых элементов. В качестве иллюстрации можно привести пример сборки плоского упругого кольца из предварительно растянутых бесконечно тонких колец. В результате сборки получаем тело, у которого отсутствует плоская естественная конфигурация — любые его деформации в плоскости приводят к конфигурациям, не свободным от напряжений. Однако деформация самой плоскости, содержащей тело (которую, конечно, можно наглядно представить, только если

погрузить плоскость в объемлющее трехмерное евклидово пространство), а именно сообщение ей ненулевой кривизны или отличного от нуля кручения, позволит получить естественную, т. е. свободную от напряжений конфигурацию, которую с позиций двумерного тела следует рассматривать как переход к отсчетному двумерному многообразию с нетривиальной связностью.

Для определения материальной связности вначале введем понятия локальной конфигурации и локальной деформации [29, 30]. Две глобальные конфигурации \varkappa и γ эквивалентны в точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, если градиент их композиции

$$\varkappa \circ \gamma^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E},$$

вычисленный в точке \mathfrak{X} , представляет собой тождественный оператор I , действующий в \mathcal{E} , т. е.

$$\nabla (\varkappa \circ \gamma^{-1}) \Big|_{\gamma(\mathfrak{X})} = I.$$

Из правил дифференцирования сложной функции вытекает, что это отношение представляет собой отношение эквивалентности на множестве всех конфигураций \mathcal{C} . Разбиение \mathcal{C} на классы эквивалентности обозначим через $\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}$. Элементы $\mathbf{K}_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{X}}$ будем называть локальными конфигурациями в точке \mathfrak{X} . Таким образом, локальная конфигурация $\mathbf{K}_{\mathfrak{X}}$ может быть представлена градиентом одной из глобальных конфигураций \varkappa , принадлежащих классу $\mathbf{K}_{\mathfrak{X}}$, т. е. линеаризацией отображения

$$\varkappa : U_{\alpha} \rightarrow \mathcal{E},$$

где U_{α} — локальная карта, содержащая точку \mathfrak{X} . В этой связи вместо записи $\varkappa \in \mathbf{K}_{\mathfrak{X}}$, где \varkappa — элемент класса $\mathbf{K}_{\mathfrak{X}}$, можно использовать обозначение

$$\nabla \varkappa(\mathfrak{X}) = \mathbf{K}_{\mathfrak{X}}.$$

Введем понятие локальной деформации. Пусть $\mathbf{K}_{\mathfrak{X}}, \mathbf{G}_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{X}}$ — две локальные конфигурации и пусть \varkappa, γ — соответствующие им глобальные конфигурации, т. е. $\varkappa \in \mathbf{K}_{\mathfrak{X}}, \gamma \in \mathbf{G}_{\mathfrak{X}}$. Локальная деформация определяется следующим образом:

$$\nabla (\gamma \circ \varkappa^{-1})_{\varkappa(\mathfrak{X})} = \nabla \gamma(\mathfrak{X}) \circ (\nabla \varkappa(\mathfrak{X}))^{-1}.$$

Как образно отмечалось [42], механика континуума оперирует двумя неразрывно связанными математическими абстракциями: материальным телом \mathfrak{B} и физическим пространством \mathcal{S} . Обе абстракции представляются трехмерными многообразиями, причем пространство \mathcal{S} *a priori* оснащено некоторой дополнительной структурой, а тело \mathfrak{B} не имеет таковой. Модели континуальной механики определяют взаимодействие этих абстракций, выражая его аналитически в форме уравнений, связывающих \mathfrak{B} и \mathcal{S} . Структура пространства \mathcal{S} предопределена: согласно классическим принципам ньютоновской механики она аффинная. Тело \mathfrak{B} заранее не наделено никакой геометрической структурой, что дает некоторую свободу при построении модели. Целесообразно выбирать эту структуру так, чтобы она наиболее полно отражала физические свойства тела. Замечательно, что

геометрическую структуру простого тела можно определить в терминах локальных конфигураций.

Совокупность локальных конфигураций, определенных во всех точках тела, задает структуру касательного расслоения \mathfrak{B} следующим образом. Рассмотрим упорядоченную пару $(\mathbf{K}_{\mathfrak{X}}, \mathbf{u})$, где $\mathbf{K}_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{X}}$ — локальная конфигурация в точке \mathfrak{X} , $\mathbf{u} \in \mathcal{E}$ — пространственный вектор. Будем говорить, что две таких пары эквивалентны, если

$$(\mathbf{K}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbf{G}_{\mathfrak{X}}^{-1})[\mathbf{v}] = \mathbf{u}. \quad (1)$$

Отношение эквивалентности (1) задает разбиение множества всех пар $(\mathbf{K}_{\mathfrak{X}}, \mathbf{u})$ на классы. Легко проверить, что соответствующие классы отвечают касательным векторам в точке \mathfrak{X} . Совокупность всех касательных векторов образует касательное пространство $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ в точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$. Если, как это принято в дифференциальной геометрии, векторы базиса касательного пространства обозначать символом ∂_{α} , а ковекторы базиса сопряженного к нему пространства (кокасательного пространства) символом $d\mathfrak{X}^{\alpha}$, т. е. $d\mathfrak{X}^{\alpha} \partial_{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, то в координатной форме тензоры $\mathbf{K}_{\mathfrak{X}}$ и $\mathbf{G}_{\mathfrak{X}}^{-1}$ могут быть представлены в виде

$$\mathbf{K}_{\mathfrak{X}} = (\mathbf{K}_{\mathfrak{X}})_{\cdot\beta}^{\alpha} e_{\alpha} \otimes d\mathfrak{X}^{\beta}, \quad \mathbf{G}_{\mathfrak{X}}^{-1} = (\mathbf{G}_{\mathfrak{X}}^{-1})_{\cdot\beta}^{\alpha} \partial_{\alpha} \otimes e^{\beta},$$

где e_{α} — элементы базиса в \mathcal{V} , e^{β} — элементы базиса в \mathcal{V}^* .

Введем понятие материального изоморфизма, которое позволяет придать точный смысл высказыванию о том, что материальная точка $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ — такая же, как и другая материальная точка $\mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}$. Непосредственное сопоставление функций $\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}}$ и $\mathfrak{G}_{\mathfrak{Y}}$ невозможно потому что они имеют различные области определения. Вместе с тем мы можем связать области определения $\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}$ и $\mathcal{C}_{\mathfrak{Y}}$, если задан изоморфизм касательных пространств

$$\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} : \mathcal{T}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{Y}}.$$

При этом локальная деформация $\mathbf{G}_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{X}}$ соответствует композиции $\mathbf{G}_{\mathfrak{X}} \circ \Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{Y}}$. Все сказанное выше можно сформулировать в виде следующего определения (Кондо, Нолл): обратимое линейное преобразование

$$\Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} : \mathcal{T}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{Y}}$$

называется *материальным изоморфизмом* из $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ в $\mathcal{T}_{\mathfrak{Y}}$, если

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{G}_{\mathfrak{X}}) = \mathfrak{G}_{\mathfrak{Y}}(\mathbf{G}_{\mathfrak{X}} \circ \Phi_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}) \quad \forall \mathbf{G}_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{X}}. \quad (2)$$

Таким образом, высказывание о том, что материал в точке \mathfrak{X} такой же, что и в точке \mathfrak{Y} , означает существования материального изоморфизма из $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ в $\mathcal{T}_{\mathfrak{Y}}$.

Для формулировки краевых задач, в которых функционал отклика имеет единую калибровку, необходимо отыскать такую отсчетную конфигурацию тела, в которой окрестность каждой точки возвращается в стандартное состояние. Это реализуется так называемой единообразной отсчетной функцией, определенной на теле \mathfrak{B} , которая является далеко идущим

геометрическим обобщением понятия натуральной отсчетной конфигурации, часто используемой в механике деформируемого твердого тела.

Понятие материального изоморфизма позволяет сформулировать определение для материально единообразного тела. Простое тело называется *материально единообразным*, если материал в любых его двух точках одинаков, т. е. любой паре точек может быть поставлен в соответствие материальный изоморфизм. При этом функция Φ , которая ставит в соответствие каждой паре $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ материальных точек тела \mathfrak{B} материальный изоморфизм $\Phi_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}}$, называется функцией единообразности.

Материальный изоморфизм может быть интерпретирован следующим образом. Существует некоторый универсальный бесконечно малый «порождающий элемент» (архетип), своего рода «кирпичик», из копий которого может быть собрано все материально единообразное тело. Копии этого кирпичика геометрически не согласованы, и для того чтобы собрать все тело, требуется осуществить индивидуальную деформацию каждого элемента. Однако после сборки всего тела окрестности любых двух точек взаимозаменяемы: при замене достаточно лишь придать им надлежащую деформацию. Эта деформация как раз и определяется материальным изоморфизмом (рис. 8 на вклейке).

Функция \mathcal{K} на \mathfrak{B} , значения которой $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) = \mathbf{K}_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{X}}$ — локальные конфигурации, называется отсчетной функцией для \mathfrak{B} . Если, кроме того,

$$\Phi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \mathcal{K}(\mathfrak{X})^{-1} \circ \mathcal{K}(\mathfrak{Y}) \quad (3)$$

есть материальный изоморфизм пространства $\mathcal{T}_{\mathfrak{Y}}$ в пространство $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ для любых $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}$, то \mathcal{K} называется единообразной отсчетной функцией на \mathfrak{B} . Если \varkappa — глобальная конфигурация, то тогда $\nabla \varkappa$ сопоставляет с каждой точкой \mathfrak{X} локальную конфигурацию $\nabla \varkappa \in \mathcal{C}_{\mathfrak{X}}$, т. е. класс эквивалентности, к которому \varkappa принадлежит. Тело однородно, если оно допускает существование единообразной отсчетной функции как градиента некоторой глобальной конфигурации. В этом и только в этом случае существует вложение тела \mathfrak{B} в евклидово пространство, такое, что окрестности всех точек переходят в стандартное состояние. Конечно же, это соответствует натуральной конфигурации, обычно принимаемой в качестве отсчетной в классической механике деформируемого твердого тела, и все проводимые здесь построения становятся тривиальными.

Для формулировки краевых задач часто удобно использовать локальные деформации вместо локальных конфигураций. Переход к локальным деформациям осуществляется следующим образом. Пусть \mathcal{K} — единообразная отсчетная функция. Каждая локальная конфигурация $\mathbf{G}_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{X}}$ может быть определена локальной деформацией \mathbf{F} из $\mathbf{K}_{\mathfrak{X}}$ в $\mathbf{G}_{\mathfrak{X}}$, т. е.

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_{\mathfrak{X}} \circ \mathcal{K}(\mathfrak{X})^{-1} \in \mathcal{L}, \quad \mathbf{G}_{\mathfrak{X}} = \mathbf{F} \circ \mathcal{K}(\mathfrak{X}). \quad (4)$$

Здесь \mathcal{L} — множество линейных автоморфизмов \mathcal{E} . Подстановка выражений (4) и (3) в равенство (2) при учете того, что $\Phi_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}} = \Phi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, дает

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{F} \circ \mathcal{K}(\mathfrak{X})) = \mathfrak{G}_{\mathfrak{Y}}(\mathbf{F} \circ \mathcal{K}(\mathfrak{Y})). \quad (5)$$

Это соотношение должно выполняться для всех $F \in \mathcal{L}$ и $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}$; в таком случае \mathcal{K} — единообразная отсчетная функция. Следовательно, отсчетная функция \mathcal{K} тела \mathfrak{B} единообразна тогда и только тогда, когда существует функция $\mathfrak{H}_{\mathcal{K}} : \mathcal{L} \rightarrow R$, удовлетворяющая соотношению

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{K}}(F) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{X}}(F \circ \mathcal{K}(\mathfrak{X})) \quad \forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{B} \quad \forall F \in \mathcal{L}. \quad (6)$$

Функция $\mathfrak{H}_{\mathcal{K}}$, которая присваивает каждой локальной деформации дескриптор отклика, называется функцией отклика тела относительно единообразной отсчетной функции \mathcal{K} .

Как уже отмечалось, в общем случае не существует материально единообразного вложения тела \mathfrak{B} в евклидово пространство: поле локальных конфигураций, определяемых единообразной отсчетной функцией, вообще говоря, не является градиентом никакой глобальной конфигурации. Вместе с тем построение подобного вложения в более общее пространство, а именно в пространство аффинной связности, возможно. Этот факт представляется чрезвычайно важным, поскольку позволяет перенести общепринятую методологию работы с двумя конфигурациями (отсчетной и актуальной) на общий случай произвольного материального единообразия. Для построения таких вложений определим связность пространства, в которое осуществляется вложение, следующим образом.

Пусть Φ — функция единообразности для простого тела \mathfrak{B} класса C^p . Будем говорить, что касательное векторное поле \mathfrak{c} материально постоянно, если

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{X}) = \Phi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})\mathfrak{c}(\mathfrak{Y}) \quad \forall \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}. \quad (7)$$

Имеет место следующая важная теорема [29].

Для заданного материального единообразия Φ класса C^{p-1} существует единственная аффинная связность Γ , такая, что $\Gamma\mathfrak{c} = \mathbf{0}$ для всех материально постоянных полей касательных векторов $\mathfrak{c} \in \mathcal{T}_{\Phi}$. В терминах какой-либо отсчетной \mathbf{K} , связность Γ определяется формулой

$$\Gamma\mathfrak{h} = \mathbf{K}^{-1}\nabla_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}\mathfrak{h})\mathbf{K}, \quad \mathfrak{h} \in \mathcal{T}_{\mathfrak{B}}^1, \quad \Gamma \in C^{p-2}. \quad (8)$$

Аффинная связность класса C^{p-2} со свойством

$$\Gamma\mathfrak{c} = \mathbf{0} \quad \forall \mathfrak{c} \in \mathcal{T}_{\Phi}$$

называется *материальной связностью*, соответствующей функции материального единообразия Φ класса C^{p-1} . Определенная таким образом материальная связность имеет нулевую кривизну. Однако кручение связности, определяемое соотношением

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}) = \Gamma_{\mathfrak{h}}\mathfrak{t} - \Gamma_{\mathfrak{t}}\mathfrak{h} - [\mathfrak{h}, \mathfrak{t}], \quad (9)$$

отлично от нуля, если только тело неоднородно (в смысле, определенном выше).

Итак, для произвольной гладкой функции $\Phi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, или для произвольного гладкого поля локальных конфигураций, определяемого отсчетной функцией \mathcal{K} , удается определить вложение тела в пространство аффинной связности, кривизна которого равна нулю, а кручение, вообще говоря,

отлично от нуля. Пространства такого типа широко используются в физике и называются *пространствами с абсолютным параллелизмом*. Важно отметить, что построенная таким образом материальная связность наследует топологическую структуру расслоения тотального тела, если предположить, что граница $\partial\mathfrak{B}_\alpha$ допускает вложение в \mathcal{E} в стандартном состоянии. С точки зрения механики это означает, что граница растущего тела в любом его промежуточном состоянии, деформируясь независимо как материальная поверхность, может быть приведена в стандартное (например, натуральное) состояние. Сделанное предположение накладывает ограничение на поле \mathcal{K} : сужение \mathcal{K} на слой \mathfrak{M}_α совместно и может быть определено как градиент глобальной конфигурации, заданной на \mathfrak{M}_α . Далее поле \mathcal{K} будем называть полем дисторсии, что отвечает его механическому смыслу.

Напомним, что растущее тело было определено выше как семейство \mathfrak{C} множеств, представляющих гладкие тела. При этом на каждом $\mathfrak{B}_\alpha \in \mathfrak{C}$ задается послойно совместная материальная связность, которую будем обозначать символом $\overset{\alpha}{\Gamma}$. Таким образом, семейство \mathfrak{C} порождает семейство связностей $\{\overset{\alpha}{\Gamma} | \alpha \in \mathcal{I}\}$. Поскольку рост тела представляется как процесс непрерывного присоединения элементов, материальные свойства которых после присоединения не изменяются, элементы этого семейства должны быть согласованы, т. е. удовлетворять условиям

$$\overset{\alpha}{\Gamma}|_{\mathfrak{B}_\beta} \equiv \overset{\beta}{\Gamma} \quad \forall \alpha > \beta,$$

где $\overset{\alpha}{\Gamma}|_{\mathfrak{B}_\beta}$ — сужение связности $\overset{\alpha}{\Gamma}$ на множество \mathfrak{B}_β . Это условие, фактически, постулирует отсутствие *эволюции* материальной связности в составе тела. Разумеется, можно расширить рассматриваемую модель растущего тела, постулируя, что эволюция материальной связности происходит по предписанному закону, однако обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

Для того чтобы обеспечить согласованность материальных связностей, ассоциированных с элементами множества \mathfrak{C} , можно воспользоваться вспомогательными отсчетными конфигурациями $\overset{\alpha}{\mathcal{K}}_R$, погружаемыми в \mathcal{E} , удовлетворяющими следующему условию:

$$\overset{\alpha}{\mathcal{K}}_R|_{\mathfrak{B}_\beta} \equiv \overset{\beta}{\mathcal{K}}_R \quad \forall \alpha > \beta.$$

Таким образом, элементы семейства $\{\overset{\alpha}{\mathcal{K}}_R | \alpha \in \mathcal{I}\}$ не изменяются во времени, а эволюция, описываемая этим семейством, зависит только от процесса роста. Конечно же, эти конфигурации не являются материально единообразными и предполагают, что слои \mathfrak{M}_α удерживаются некоторыми внешними силовыми полями, т. е. они представляет собой аналог промежуточной отсчетной конфигурации, используемой в классической нелинейной теории упругости. Можно указать еще одну ассоциацию, связанную с конфигурациями $\overset{\alpha}{\mathcal{K}}_R$: семейство этих конфигураций представляет «сборочный чертеж» растущего тела, отражающий последовательность его образования

в процессе роста, но не отражающий сопутствующих росту деформаций. Изменение формы растущего тела, вызванное как ростом, так и деформацией, определяется семейством актуальных конфигураций $\{\mathcal{X}|\alpha \in \mathcal{I}\}$. Поскольку тело деформируется в процессе роста, актуальные конфигурации не согласованы, т. е.

$$\mathcal{X}|_{\mathfrak{B}_\beta} \neq \mathcal{X} \quad \forall \alpha > \beta.$$

Ясно, что \mathcal{X}_R^α , так же как и актуальные конфигурации \mathcal{X} , определяют градиентные отсчетные. Схематично конфигурации и деформации растущего тела показаны на рис. 9 (см. вклейку).

4. Уравнения равновесия

Краевая задача для растущего тела определяется континуальным семейством уравнений равновесия, которые выражают закон сохранения количества движения в области физического (евклидова) пространства $\mathcal{X}(\mathfrak{B}_\mathcal{X})$ с границей $\overset{\alpha}{\Omega} = \partial(\overset{\alpha}{\mathcal{X}}(\mathfrak{B}_\mathcal{X}))$, т. е.

$$\operatorname{div} \overset{\alpha}{\mathbf{T}} + \overset{\alpha}{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \quad \overset{\alpha}{\mathbf{T}} = \mathfrak{H}_\mathcal{K}(\overset{\alpha}{\mathbf{F}}), \quad \overset{\alpha}{\mathbf{F}} = \nabla_{\mathcal{X}_R} \overset{\alpha}{\mathcal{X}},$$

где div — оператор дивергенции в переменных актуальной конфигурации $\overset{\alpha}{\mathcal{X}}$, $\overset{\alpha}{\mathbf{T}}$ — тензорное поле напряжений Коши, $\overset{\alpha}{\mathbf{b}}$ — плотность объемных сил (относительно актуальной конфигурации).

Краевые условия задаются на поверхности $\overset{\alpha}{\Omega}$ и определяют векторное поле поверхностных сил $\overset{\alpha}{\mathbf{p}}$, действующее на границе растущего тела:

$$\overset{\alpha}{\mathbf{T}} \overset{\alpha}{\mathbf{n}}|_{\overset{\alpha}{\Omega}} = \overset{\alpha}{\mathbf{p}}.$$

Здесь $\overset{\alpha}{\mathbf{n}}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности $\overset{\alpha}{\Omega}$.

На первый взгляд формально постановка краевой задачи отличается от классической постановки для тела постоянного состава лишь тем, что граница пространственной области параметрически зависит от α . Однако имеется и более глубокое отличие, которое состоит в зависимости функционала отклика от тензорного поля \mathcal{K} , для определения которого требуются дополнительные условия. Формулировка этих условий зависит от геометрической структуры присоединяемых элементов, т. е., по существу, от структуры расслоения материального многообразия. Если тело растет за счет непрерывного притока к нему предварительно напряженных материальных поверхностей, то это условие может быть сформулировано в виде

$$\overset{\alpha}{\mathbf{P}} \cdot \overset{\alpha}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\alpha}{\mathbf{P}}|_{\overset{\alpha}{\Omega}} = \overset{\alpha}{\mathcal{T}}, \quad \overset{\alpha}{\mathcal{T}} = \operatorname{In} [\overset{\alpha}{\mathcal{T}}_s]. \quad (10)$$

Здесь $\overset{\alpha}{\mathbf{P}} = (\mathbf{E} - \overset{\alpha}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\alpha}{\mathbf{n}})$ — проектор на касательную плоскость к границе $\overset{\alpha}{\Omega}$, $\operatorname{In} [\dots]$ — оператор вложения, трансформирующий натяжения как двумерное

тензорное поле, заданное на поверхности, в трехмерное тензорное поле напряжений, определенных в малой окрестности поверхности. Записанное соотношение выражает тот факт, что слои присоединяются с заданным натягом, определяемым поверхностным тензором натяга \mathcal{T}_s^α , т. е. тензором второго ранга, заданным в касательном пространстве присоединяемой материальной поверхности.

Заметим, что структура оператора вложения $\text{In}[\dots]$ может быть как тривиальной, т. е. осуществляющей преобразование величин натяжения в напряжения согласно простым кинематическим гипотезам мембранных теорий, так и нетривиальной, учитывающей особенности физики поверхности. Однако обсуждение этого вопроса выходит за рамки статьи.

Уравнение для определения $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_s^\alpha$ (далее верхний индекс α для краткости опускаем) при условии, что наращивание происходит в результате непрерывного присоединения предварительно напряженных поверхностей, может быть получено из соотношений теории материальных поверхностей (теорий тел с материальной границей [35]). Уравнение равновесия материальной границы $\Omega(t)$, т. е. с геометрической точки зрения поверхности, ограничивающей тело в текущем состоянии, а с физической точки зрения — тонкой пленки, испытывающей мембранное напряженное состояние, может быть сформулировано следующим образом:

$$\text{div}_s \mathcal{T}_s + \mathbf{b}_s = \mathbf{T}\mathbf{n}|_\Omega, \quad (11)$$

где \mathcal{T}_s — тензор натяжения, двумерный аналог тензора напряжений Коши, определенный в касательном пространстве $T_x\Omega$ к поверхности Ω в точке \mathbf{x} , div_s — поверхностная дивергенция, \mathbf{b}_s — поверхностная плотность внешних сил, действующих на поверхность Ω [35].

Пусть уравнение состояния материальной поверхности имеет вид

$$\mathcal{T}_s = \widehat{\mathcal{T}}(\mathbf{F}_s),$$

где \mathbf{F}_s — градиент деформации поверхности $\mathbf{F}_s = \nabla_{\mathcal{X}_f} \mathbf{z}$, $\mathbf{z} : \Omega_0 \rightarrow \Omega$, причем $\Omega_0 \subset \mathcal{E}$ — образ отсчетной конфигурации поверхности \mathcal{X}_f , которая полагается свободной от напряжений, $\Omega \subset \mathcal{E}$ — образ текущей конфигурации \mathcal{X} . Таким образом, если отображение \mathbf{z} ставит в соответствие точке \mathbf{X} точку \mathbf{x} , то градиент деформации \mathbf{F}_s определяет линейное отображение $\mathbf{F}_s : T_{\mathbf{X}}\Omega_0 \rightarrow T_{\mathbf{x}}\Omega$, где $T_{\mathbf{X}}\Omega_0$ — пространство, касательное к поверхности Ω_0 в точке \mathbf{X} , $T_{\mathbf{x}}\Omega$ — пространство, касательное к поверхности Ω в точке \mathbf{x} . Соответствующая мера деформаций имеет вид

$$\mathbf{G}_s = \mathbf{F}_s^* \cdot \mathbf{F}_s = \mathbf{1} + 2\mathcal{E} + (\nabla_{\mathcal{X}_f} \otimes \mathbf{u})^* \cdot (\nabla_{\mathcal{X}_f} \otimes \mathbf{u});$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathcal{X}_f} \otimes \mathbf{u} + (\nabla_{\mathcal{X}_f} \otimes \mathbf{u})^*).$$

Здесь $\mathbf{1}$ — тензорная единица, т. е. тензор четвертого ранга на $T_{\mathbf{X}}\Omega_0$, отображающий произвольный поверхностный тензор второго ранга, действующий в $T_{\mathbf{X}}\Omega_0$, в себя, \mathcal{E} — тензор инфинитезимальных деформаций;

$\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ — пространственный вектор перемещений точек поверхности при отображении $\Omega_0 \rightarrow \Omega$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{z}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}.$$

Поскольку поверхностная дивергенция поля \mathcal{T}_s удовлетворяет соотношению

$$(\operatorname{div}_s \mathcal{T}_s) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{T}_s : \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = -\nabla_s \otimes \mathbf{n},$$

то проекция уравнения (11) для материальной границы Ω на нормаль \mathbf{n} может быть представлена следующим образом:

$$\mathcal{T}_s : \mathbf{L} + \mathbf{b}_s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n}|_{\Omega}. \quad (12)$$

Это условие, конечно, не эквивалентно соотношению (11), но, если предположить, что касательная нагрузка на поверхности роста отсутствует, т. е.

$$(\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{T} \mathbf{n}|_{\Omega} = \mathbf{0},$$

то условие (12) определяет давление, которое оказывает материальная поверхность на пространственное тело. Такое взаимодействие можно охарактеризовать как гладкий контакт растущего тела и материальной поверхности, т. е. последняя может скользить без трения по телу.

Для замкнутой постановки краевой задачи следует указать краевое условие на границе $\partial\Omega$ поверхности Ω , т. е. соотношения вида

$$\mathcal{T}_s \tilde{\mathbf{n}}|_{\partial_1 \Omega} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{u}|_{\partial_2 \Omega} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega = \partial \Omega.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{n}}$ — внешняя единичная нормаль к кривой $\partial\Omega$, лежащая в касательной плоскости к Ω , $\tilde{\mathbf{f}}$ — линейная плотность сил, распределенных на кривой $\partial_1 \Omega$, $\tilde{\mathbf{u}}$ — заданные смещения точек на кривой $\partial_2 \Omega$.

Итак, полная система уравнений математической теории наращиваемых тел в случае, когда трехмерное тело растет за счет присоединения предварительно напряженных материальных поверхностей, имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}_s \mathcal{T}_s + \mathbf{b}_s = \mathbf{T} \mathbf{n}|_{\Omega}, \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}|_{\Omega} &= \mathcal{T}, \quad \mathcal{T} = \operatorname{In}[\mathcal{T}_s], \\ \mathbf{T} &= \mathfrak{H}_{\mathcal{K}}(\mathbf{F}), \quad \mathcal{T}_s = \hat{\mathcal{T}}(\mathbf{F}_s), \\ \mathbf{F} &= \nabla_{\varkappa_R} \varkappa, \quad \mathbf{F}_s = \nabla_{\varkappa_f} \mathbf{z}, \\ \mathcal{T}_s \tilde{\mathbf{n}}|_{\partial_1 \Omega} &= \tilde{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{u}|_{\partial_2 \Omega} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega = \partial \Omega. \end{aligned}$$

В этой системе поля \mathbf{T} , \mathcal{T}_s , \mathbf{F} , \mathbf{F}_s , \varkappa , \mathbf{z} , а также тензорное поле дисторсии \mathcal{K} неизвестны. Заданными являются поля \mathbf{b} , \mathbf{b}_s , $\tilde{\mathbf{f}}$ и $\tilde{\mathbf{u}}$. Если полагать поле \mathcal{K} заданным, т. е. задавать явно материальную связность, то из системы следует исключить третье уравнение. В этом случае для фиксированного α получаем семейство уравнений равновесия трехмерного тела, контактирующего с материальной поверхностью (рис. 10 на вклейке). В общем случае материальная связность, определяемая полем дисторсии \mathcal{K} , заранее неизвестна и может быть определена из следующего условия: для всех значений параметра $\alpha \in \mathcal{I}$ третье уравнение выполняется.

Определенное таким образом поле \mathcal{K} позволяет задать геометрию на материальном многообразии, определяя материальную связность на нем. Получаемые коэффициенты аффинной связности, вообще говоря, не обладают симметрией и определяют отличный от нуля тензор кручения

$$\mathfrak{S}_{\gamma\beta}^{\alpha} = \partial_{\gamma}(\mathbf{K}^{-1})^{\rho}_{\cdot\beta} K^{\alpha}_{\cdot\rho} - \partial_{\beta}(\mathbf{K}^{-1})^{\rho}_{\cdot\gamma} K^{\alpha}_{\cdot\rho}.$$

В результате материальное многообразие становится пространством аффинной связности, причем каждый слой многообразия метризуется в естественном состоянии, и НДС тела может быть определено как результат его деформирования в объемлющем пространстве высшей размерности из свободной от напряжений конфигурации, погруженной в подпространство с ненулевым кручением, в конфигурацию, погруженную в подпространство с евклидовой структурой. Отличие геометрии такой отсчетной конфигурации от евклидовой, количественно определяемой тензором кручения, характеризует несогласованность напряженных состояний слоев, объединенных в результате процесса наращивания в единое тело. Следует отметить, что подобное отличие свободной от напряжений конфигурации от евклидовой геометрии в приближении малых деформаций проявляется как несовместность тензорного поля малых деформаций, что неоднократно отмечалось в литературе как характерное свойство растущих тел.

5. Пример. Деформирование растущего упругого шара

В качестве примера рассмотрим задачу о центральносимметричном деформировании растущего упругого шара. Деформации считаем конечными. Условие центральной симметрии существенно упрощает задачу и делает ее, по существу, одномерной. Действительно, поскольку в любой конфигурации

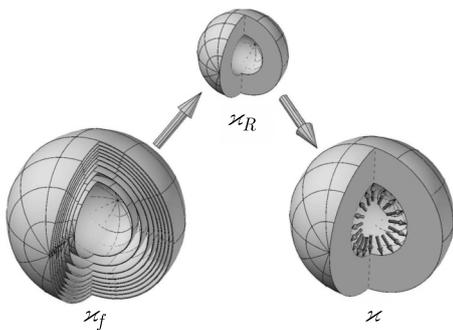


Рис. 11. Взаимодействие материальной поверхности и трехмерного тела

тело сохраняет центральную симметрию, то материальное многообразие \mathcal{M} может быть представлено в \mathbb{R}^3 открытым шаром (с выколотым центром) радиуса \mathfrak{R} , который допускает естественное расслоение на концентрические сферы $\mathcal{M}_{\mathfrak{x}^3}$. Каждая сфера — это слой расслоения, а база расслоения представляет собой открытый интервал $\mathfrak{B} = (0, \mathfrak{R})$. При этом $\mathfrak{x}^3 \in \mathfrak{B}$ — координата базы, а $\mathfrak{x}^1, \mathfrak{x}^2$ — координаты слоя, в качестве которых могут быть выбраны сферические углы географической системы координат (рис. 11).

Полагаем, что материал несжимаем, следовательно, допускаются только изохорические (сохраняющие объем) деформации пространственной конфигурации тела. Это предположение позволяет воспользоваться хорошо известными универсальными решениями Ривлина–Эриксона для описания деформирования каждого слоя [41].

Пусть e_r, e_φ, e_θ — физический (ортонормированный) базис сферической системы координат. Полагаем, что каждый слой имеет натуральную конфигурацию, и она представляет собой сферу (разумеется, в физическом пространстве). Объединение таких сфер не является конфигурацией какого-либо тела, поскольку не представляет связанного множества.

После надлежащего деформирования эти сферы в объединении образуют шар. Таким образом, может быть получена конфигурация, не свободная от напряжений. Ясно, что такое деформирование может быть выбрано разными способами, и выбор отсчетной конфигурации содержит произвол. Однако все такие ненатуральные конфигурации трансформируются друг в друга диффеоморфно. Соответствующее поле дисторсии имеет вид

$$\mathbf{K} = \xi_{-\alpha}^2 e_r \otimes e_r + \xi_{-\alpha}^{-1} (e_\varphi \otimes e_\varphi + e_\theta \otimes e_\theta); \quad \xi_{-\alpha} = (r^3 - \alpha)^{1/3}/r.$$

Здесь $r = r(\mathcal{X}^3)$ — пространственная (радиальная) координата, $\alpha = \alpha(\mathcal{X}^3)$ — параметр дисторсии, \mathcal{X}^3 — материальная метка слоя. Поле \mathbf{K} можно интерпретировать как градиент деформации, определяемой отображением $r = (r_0^3 + \alpha)^{1/3}$ и вычисляемой для инфинитезимального сферического слоя $\mathfrak{M}_{\mathcal{X}^3}$, который обладает естественной конфигурацией при $r = r_0$. Тогда α можно рассматривать как параметр изохорического раздувания этого слоя.

Выберем одну из таких конфигураций в качестве отсчетной и обозначим ее символом \varkappa_R . Деформация отсчетной конфигурации в текущую \varkappa определяется изохорическим диффеоморфизмом $\varkappa_R \rightarrow \varkappa$. Это отображение для условий несжимаемости и центральной симметрии принадлежит семейству $R = (r^3 + A)^{1/3}$, где A — параметр семейства, т. е. постоянная, определяющая конкретное отображение. Градиент такой трансформации имеет вид

$$\mathbf{F} = \xi_A^{-2} e_r \otimes e_r + \xi_A (e_\varphi \otimes e_\varphi + e_\theta \otimes e_\theta); \quad \xi_A = (r^3 + A)^{1/3}/r.$$

Ведем обозначение

$$\eta = (r^3 - \alpha)^{1/3}/(r^3 + A)^{1/3}.$$

Полная локальная деформация каждого слоя из его естественного состояния может быть найдена как композиция

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K} = \eta^2 e_r \otimes e_r + \eta^{-1} (e_\varphi \otimes e_\varphi + e_\theta \otimes e_\theta).$$

Соответствующая мера деформаций Коши–Грина имеет вид

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} = \eta^4 e_r \otimes e_r + \eta^{-2} (e_\varphi \otimes e_\varphi + e_\theta \otimes e_\theta).$$

Инварианты мер деформации могут быть найдены следующим образом:

$$I_1(\mathbf{G}) = \eta^4 + 2\eta^{-2}, \quad I_2(\mathbf{G}) = \eta^{-4} + 2\eta^2.$$

Произведем некоторые вспомогательные вычисления. Мера, обратная мере деформаций Коши, вычисляется по формуле

$$\mathbf{G}^{-1} = \eta^{-4} e_r \otimes e_r + \eta^2 (e_\varphi \otimes e_\varphi + e_\theta \otimes e_\theta).$$

Дивергенции мер деформаций \mathbf{G} , \mathbf{G}^{-1} определяются соотношениями

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \mathbf{e}_r \left[\frac{\partial}{\partial R} \eta^4 + \frac{2}{R} (\eta^4 - \eta^{-2}) \right], \quad \nabla \cdot \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{e}_r \left[\frac{\partial}{\partial R} \eta^{-4} + \frac{2}{R} (\eta^{-4} - \eta^2) \right].$$

Здесь ∇ — пространственный оператор Гамильтона, определенный в текущей конфигурации \varkappa . Конечно, нужно учитывать, что $r = (R - A)^{1/3}$ и $\alpha = \alpha(r) = \alpha(r(R)) = \alpha(R)$.

Уравнения равновесия при отсутствии объемных сил имеют вид $\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$, где \mathbf{T} — тензор напряжений Коши, который в рассматриваемом случае может быть представлен диадным разложением

$$\mathbf{T} = T_{RR} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + T_{\theta\theta} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi).$$

Краевые условия формулируются в виде

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Gamma_1} = b\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Gamma_2} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Здесь b — интенсивность нормальной нагрузки на внутренней поверхности шара Γ_1 , Γ_2 — поверхность роста.

Еще одно условие отражает тот факт, что слои присоединяются с заданным натягом f , т. е.

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\theta|_{\Gamma_2} = T_{\theta\theta}|_{\Gamma_2} = f.$$

Важно отметить, что условие для натяга это не условие краевой задачи, а условие, из которого определяется функция $\alpha(R) = \alpha(R(r(\mathbf{x})))$, т. е. определяется поле дисторсии \mathbf{K} .

В сферических координатах при условии центральной симметрии уравнения равновесия и краевые условия принимают вид

$$\frac{\partial T_{RR}}{\partial R} + \frac{2}{R} (T_{RR} - T_{\theta\theta}) = 0, \quad T_{RR}|_{r=r_0} = b, \quad T_{RR}|_{r=r_1} = 0, \\ r_0 = (R_0^3 - A)^{1/3}, \quad r_1 = (R_1^3 - A)^{1/3}.$$

Здесь R_0 — внутренний, а R_1 — внешний радиусы шара в текущей конфигурации \varkappa .

Для несжимаемого изотропного в естественном состоянии гиперупругого материала тензор напряжений Коши может быть представлен зависимостью [41]

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{G} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{G}^{-1},$$

где $p = p(R)$ — давление, определяемое из условий равновесия, W — упругий потенциал — удельная плотность запасенной энергии. Если в качестве отсчетной конфигурации использовать \varkappa_R , то упругий потенциал следует записать в виде

$$W = J_{\mathbf{K}}^{-1} W_{\varkappa_C}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{x}),$$

где W_{\varkappa_C} — потенциал, калибровка которого осуществляется локально для каждого слоя относительно естественного состояния этого слоя. Вследствие несжимаемости $J_{\mathbf{K}} = 1$ и множитель $J_{\mathbf{K}}^{-1}$ не оказывает влияния на дальнейшие построения.

Подстановка тензора \mathbf{T} в уравнение равновесия приводит к уравнению относительно давления p

$$-\nabla p + 2 \left(\mathbf{G} \cdot \nabla \frac{\partial W}{\partial I_1} - \mathbf{G}^{-1} \cdot \nabla \frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \nabla \cdot \mathbf{G} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \nabla \cdot \mathbf{G}^{-1} \right) = \mathbf{0}.$$

Используя вычисленные выше величины и учитывая, что в силу центральной симметрии $\nabla p = e_R dp/dR$, приходим к уравнению относительно $p(R)$, интеграл которого имеет вид

$$p(R') = 2 \left[\eta^4 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \eta^{-4} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] + 4 \int_{R_0}^{R'} \left\{ \frac{\partial W}{\partial I_1} (\eta^4 - \eta^{-2}) - \frac{\partial W}{\partial I_2} (\eta^{-4} - \eta^2) \right\} \frac{dR}{R} + p_0.$$

Верхний предел интегрирования $R' \in (R_0, R_1)$ — радиальная координата, определяющая положение сферического слоя внутри текущей конфигурации \varkappa , p_0 — постоянная интегрирования, которая соответствует постоянному гидростатическому давлению. Полученное выражение можно заменой переменных $R \mapsto r$ преобразовать к виду (учитывая, что $dR/R = r^2(r^3 + A)^{-1} dr$)

$$p(r') = 2 \left[\eta^4 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \eta^{-4} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] - 4q(r_0, r') + p_0,$$

$$q(r_0, r') = \int_{r_0}^{r'} r^2 (r^3 + A)^{-1} (\eta^{-4} - \eta^2) \left(\eta^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) dr.$$

Верхний предел в выписанном интеграле, $r' \in (r_0, r_1)$, определяет положение сферического слоя внутри отсчетной конфигурации \varkappa_R .

Радиальные напряжения теперь могут быть вычислены по формуле $T_{RR}(r') = q(r_0, r') - p_0$. Из второго краевого условия (13), которое может быть записано в виде $T_{RR}|_{r=r_1} = 0$, вытекает, что $p_0 = q(r_0, r_1)$. Следовательно,

$$T_{RR}(r') = q(r_1, r').$$

Окружные напряжения $T_{\theta\theta}$ могут быть найдены из уравнений равновесия и выражены через T_{RR} следующим образом:

$$T_{\theta\theta} = T_{RR} + \frac{R}{2} \frac{\partial T_{RR}}{\partial R}.$$

В граничном слое они должны быть равны заданной величине натяга f , т. е.

$$T_{\theta\theta}|_{\Gamma_2} = T_{\theta\theta}|_{r=r_1} = T_{RR}|_{r=r_1} + \frac{(r^3 + A)^{1/3}}{2} \frac{\partial T_{RR}}{\partial R} \Big|_{r=r_1} =$$

$$= 2 \left[(r^3 + A)^{-1} (\eta^{-4} - \eta^2) \left(\eta^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \right]_{r=r_1} = f. \quad (14)$$

Из этого уравнения может быть определена зависимость $\alpha = \alpha(r_1, A, f)$. Из первого краевого условия (13), которое может быть представлено в ви-

де $T_{RR}|_{r=r_0} = b$, определяется параметр A . Подчеркнем, что $A = A(r_1)$, а $\alpha = \alpha(r)$.

Таким образом, напряжения в непрерывно наращиваемом шаре при заданном натяге определяются из системы уравнений

$$4 \int_{r_0}^{r_1(\gamma)} \frac{r^2(A + \alpha)(2r^3 + A - \alpha)}{(r^3 - \alpha)^{4/3}(r^3 + A)^{5/3}} \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r^3 - \alpha)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} \right) dr = -q(\gamma),$$

$$2 \left[\frac{(A + \alpha)(2r_1^3 + A - \alpha)}{(r_1^3 - \alpha)^{4/3}(r_1^3 + A)^{2/3}} \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r_1^3 - \alpha)^{2/3}}{(r_1^3 + A)^{2/3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} \right) \right] \Big|_{r=r_1(\gamma)} = f(\gamma).$$

Аналогичное дискретно наращиваемое тело моделируется следующим образом. Если полагать, что упругий потенциал определяется двухконстантным выражением Муни–Ривлина, т. е.

$$2W = Q(I_1 - 3) + P(I_2 - 3), \quad Q = \frac{1}{2}(\beta - 1)\mu, \quad P = \frac{1}{2}(\beta + 1)\mu,$$

то радиальные $T_{RR}(r)$ и окружные $T_{\theta\theta}(r)$ напряжения в полном шаре $r \in (r_0, r_1)$ определяются с точностью до постоянных A и p соотношениями

$$T_{RR}(r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{r_0 P(5r_0^3 + 4A)}{(r_0^3 + A)^{4/3}} - \frac{4Q \sqrt[3]{r_0^3 + A}}{r_0} + \frac{2r_0^2 Q}{(r_0^3 + A)^{2/3}} - \frac{-2r^3 Q(A + r^3)^{2/3} - 4A(Q(A + r^3)^{2/3} + r^2 P) - 5r^5 P}{r(A + r^3)^{4/3}} - 2p \right),$$

$$T_{\theta\theta}(r) = -\frac{r_0 P(5r_0^3 + 4A)}{2(r_0^3 + A)^{4/3}} - \frac{2Q \sqrt[3]{r_0^3 + A}}{r_0} + \frac{r_0^2 Q}{(r_0^3 + A)^{2/3}} + \frac{2A^2(r^2 P - Q(A + r^3)^{2/3}) + 8Ar^5 P + 2r^6 Q(A + r^3)^{2/3} + 5r^8 P}{2r^4(A + r^3)^{4/3}} - p.$$

Эти соотношения позволяют определить напряженно-деформированное состояние дискретной «сборки», если определять параметры A^n , p^n из условий сопряжения

$$T_{RR}^1(r_0^1) = q, \quad T_{RR}^1(r_1^1) = T_{RR}^2(r_0^2), \dots, T_{RR}^{n-1}(r_1^{n-1}) = T_{RR}^n(r_0^n), \quad T_{RR}^n(r_1^n) = 0, \\ r_1^1 = r_0^2, \dots, r_1^{n-1} = r_0^n,$$

где верхние индексы обозначают номер элемента «сборки». Полагаем, что толщины всех сферических элементов в естественном состоянии одинаковы, т. е. $r_1^n - r_0^n = \Delta$, а внутренние радиусы отсчетного состояния r_0^n , $n = 2, 3, \dots$, определяются из условия предписанного натяга присоединяемых элементов:

$$T_{\theta\theta}^n(r_1^n) = f.$$

В вычислениях использовались следующие безразмерные данные: $\mu = 1$, $\beta = 0,7$, начальный радиус растущего шара $r_0 = 0,5$, объем шара в конце процесса роста $0,37$, $q = 0$, $f = 0,1$. В дискретной модели использовалось 30 слоев. Безразмерные (отнесенные к модулю μ) радиальные и окружные истинные напряжения представлены на рис. 12.

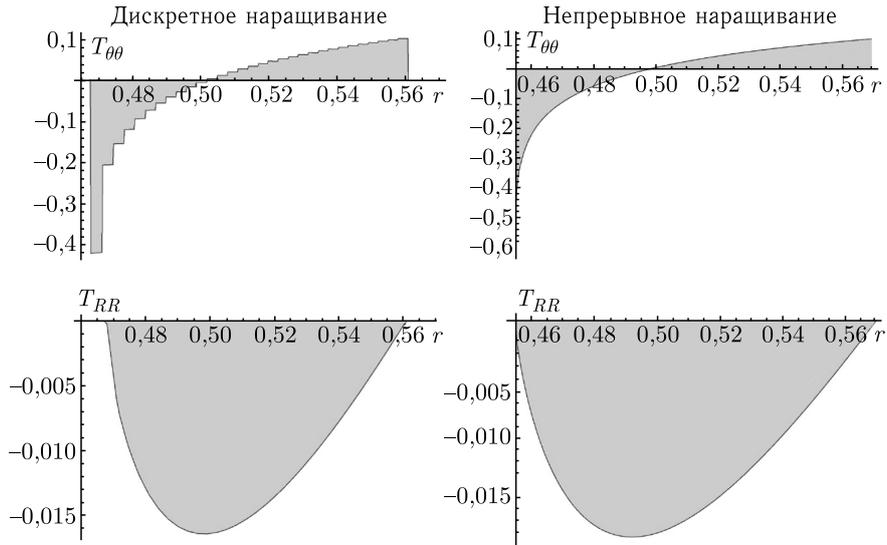


Рис. 12. Взаимодействие материальной поверхности и трехмерного тела

Тензорное поле дисторсии индуцирует связность на материальном многообразии, которое в результате становится плоским пространством аффинной связности (т. е. с пространством нулевой кривизны) с нетривиальным кручением. Отличные от нуля компоненты тензора кручения определяются соотношениями

$$\mathfrak{T}^{\varphi}_{.r\varphi} = \mathfrak{T}^{\theta}_{.r\theta} = -\mathfrak{T}^{\varphi}_{.\varphi r} = -\mathfrak{T}^{\theta}_{.\theta r} = \frac{1}{3r^3 - 3\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial r}.$$

Обратим внимание, что тензор кручения обращается в нуль, если $\alpha = \text{const}$. Это соответствует согласованному наращиванию, в результате которого получаем тело, неотличимое от тела постоянного состава. Конечно, в таком (и только в таком) теле отсутствуют остаточные напряжения. Если же $\alpha = \alpha(\mathfrak{X}^3)$, то тело, полученное в результате наращивания, не обладает естественной конфигурацией, погружаемой в \mathcal{E} . С точки зрения механики это означает, что никакие гладкие деформации тела не освободят его от напряжений.

Литература

1. Gibson I., Rosen D. W., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies. Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing. Springer, 2009. 459 p.
2. Choy K.L. Chemical vapor deposition of coatings // Progress in Materials Science. 2003. Vol. 48. P. 57–170.

3. *Nastasi M., Mayer J.W.* Ion Implantation and Synthesis of Materials. Springer, 2006. 263 p.
4. *Campbell T., Williams C., Ivanova O, Garrett B.* Could 3D Printing Change the World? Technologies, Potential, and Implications of Additive Manufacturing // Atlantic Council. Ideas. Influence. Impact. October 2011.
5. *Ponche R., Mognol O.K. P, Hascoe J-Y.* A novel methodology of design for Additive Manufacturing applied to Additive Laser Manufacturing process // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2014. Vol. 30(4). P. 389–398.
6. *Lychev S.A., Lycheva T.N., Manzhirou A.V.* Unsteady Vibration of a Growing Circular Plate // Mech. Solids. 2011. No. 46(2). P. 325–333.
7. *Лычев С.А.* Универсальные деформации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 63–79.
8. *Манжиров А.В., Лычев С.А.* Математическая теория растущих тел при конечных деформациях // ДАН. 2012. Т. 443, № 4. С. 438–441.
9. *Лычев С.А., Манжиров А.В.* Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. 2013. Т. 77, вып. 4. С. 585–604.
10. *Лычев С.А., Манжиров А.В.* Отсчетные конфигурации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 86–95.
11. *Lychev S.* Equilibrium equations for accreted shells // ZAMM. 2014. No. 1–2. P. 118–129.
12. *Weingarten J.* Sulle superficie di discontinuita nella teoria della elasticita dei corpi solidi // Rend. Reale Accad. dei Lincei, classe di sci., fis., mat. e nat. 1901. Ser. 5. Vol. 10.1. P. 57–60.
13. *Volterra V., Volterra E.* Sur les distorsions des corps elastiques (theorie et applications) // Memorial des sciences mathematiques. 1960. No. 147. P. 3–117.
14. *Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965. 104 с.
15. *Де Вумт Р.* Континуальная теория дислокаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
16. *Саусвелл Р.В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 675 с.
17. *Рашба Э.И.* Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения // Сб.тр. Ин-та строит. механики АН УССР. 1953. № 18. С. 23–27.
18. *Brown C.B., Goodman L.E.* Gravitational stresses in accreted bodies // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1963. Vol. 276, No. 1367. P. 571–576.
19. *Харлаб В.Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела // Механика стержневых систем и сплошных сред: Тр. ЛИСИ. Л.: ЛИСИ, 1966. Вып. 49. С. 93–119.
20. *Арутюнян Н.Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела // ПММ. 1977. Т. 41, вып. 5. С. 783–789.
21. *Метлов В.В.* О наращивании тел при конечных деформациях // Докл. АН АрмССР. 1985. Т. 80, № 2. С. 87–91.
22. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В.* Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Институт механики НАН РА, 1999. 318 с.
23. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э.* Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
24. *Манжиров А.В., Паршин Д.А.* Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66–83.
25. *Тринчер В.К.* Расчет наращиваемых тел. М.: Изд-во МГУ, 1989. 154 с.

26. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во Казанс. ун-та, 1962. 210 с.
27. Катанаев М.О. Геометрическая теория дефектов // Успехи физ. наук. 2005. Т. 175, № 7. С. 705–733.
28. Maugin G.A. Geometry and thermomechanics of structural rearrangements // ZAMM. 2003. Bd. 83, No. 2. P. 75–84.
29. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. Vol. 27, No. 1. P. 1–32.
30. Wang C.C. On the geometric structures of simple bodies, or mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. Vol. 27, No. 1. P. 33–94.
31. Maugin G.A. Material Inhomogeneities in Elasticity. London: Chapman and Hall, 1993. 276 p.
32. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
33. Kadish J., Barber J.R., Washabaugh P.D. Stresses in rotating spheres grown by accretion // Int. J. of Solids and Struct. 2005. No. 15. P. 5322–5334.
34. Epstein M., Maugin G.A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // Int. J. Plasticity. 2000. Vol. 16, No. 7. P. 951–978.
35. Gurtin, M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Rat. Mech. Anal. 1975. Vol. 57, No. 4. P. 291–323.
36. Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M. Analysis, Manifolds and Physics. Pt. 1. Basics. Amsterdam: North-Holland, 1982. 660 p.
37. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981. 344 с.
38. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир, 1975. 592 с.
39. Wang C.C., Truesdell C. Introduction to Rational Elasticity. Leyden: Noordhoff, 1973. P. 556.
40. Постников М.М. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987. 478 с.
41. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
42. Epstein M., Elsanowski M. Material Inhomogeneities and their Evolution. Berlin: Springer, 2007. 274 p.
43. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 p.
44. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 577 с.

К статье А.В. Манжирова, С.А. Лычева «Математическая теория растущих тел»

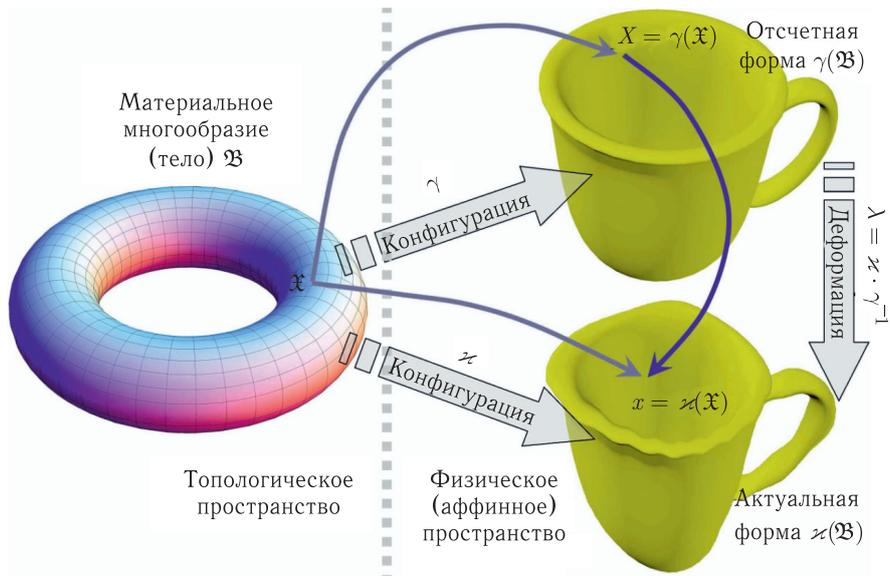


Рис. 4. Конфигурации и деформации

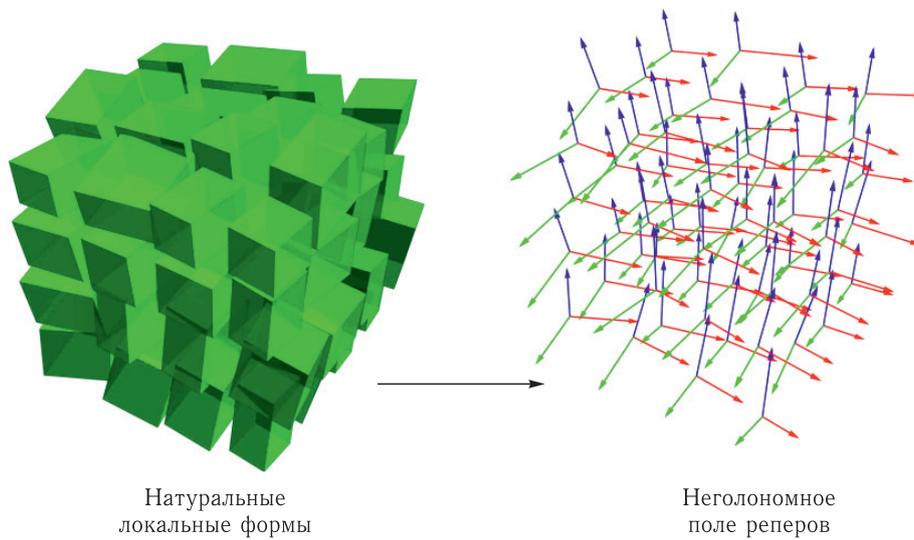


Рис. 7. Несовместные деформации и неголономные поля реперов

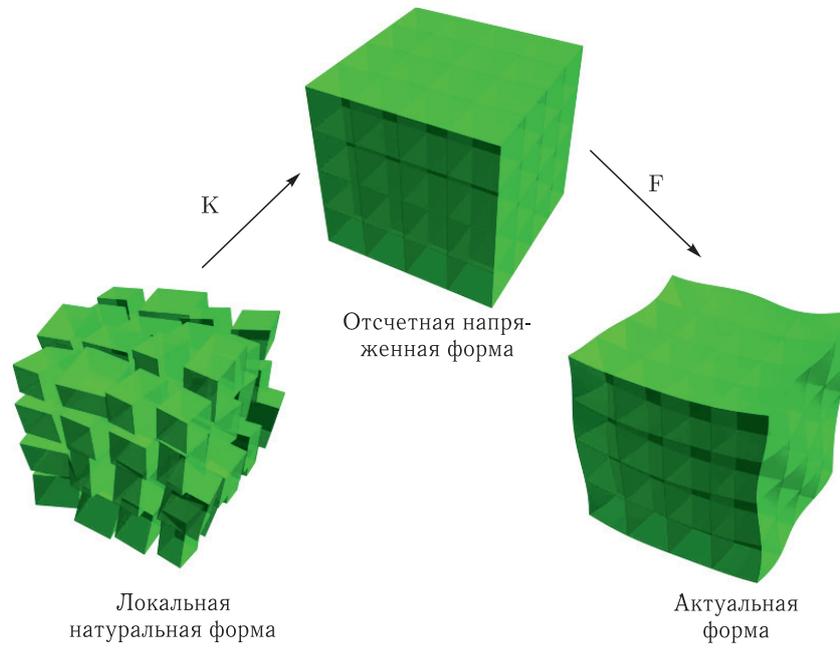


Рис. 8. Несовместные деформации архетипов

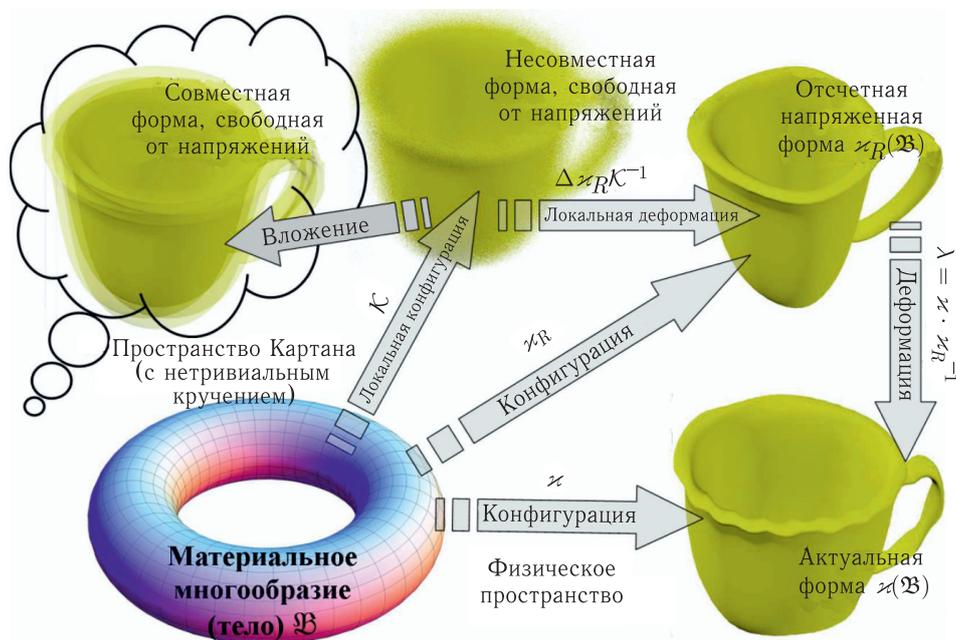


Рис. 9. Вложение единообразной отсчетной в пространство Картана

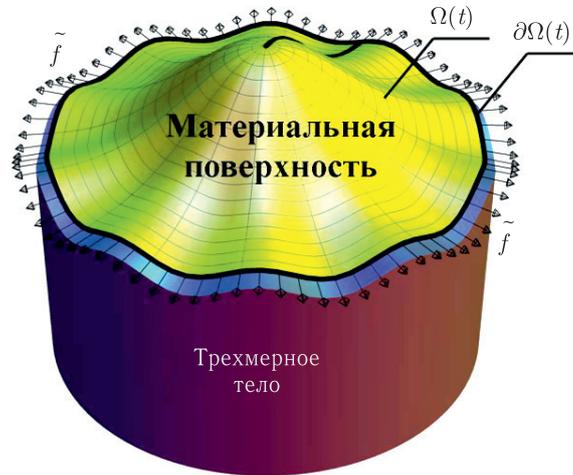


Рис. 10. Взаимодействие материальной поверхности и трехмерного тела

К статье Д.М. Климова и др. «Взаимовлияние напряженно-деформированного состояния и фильтрации в горных породах»

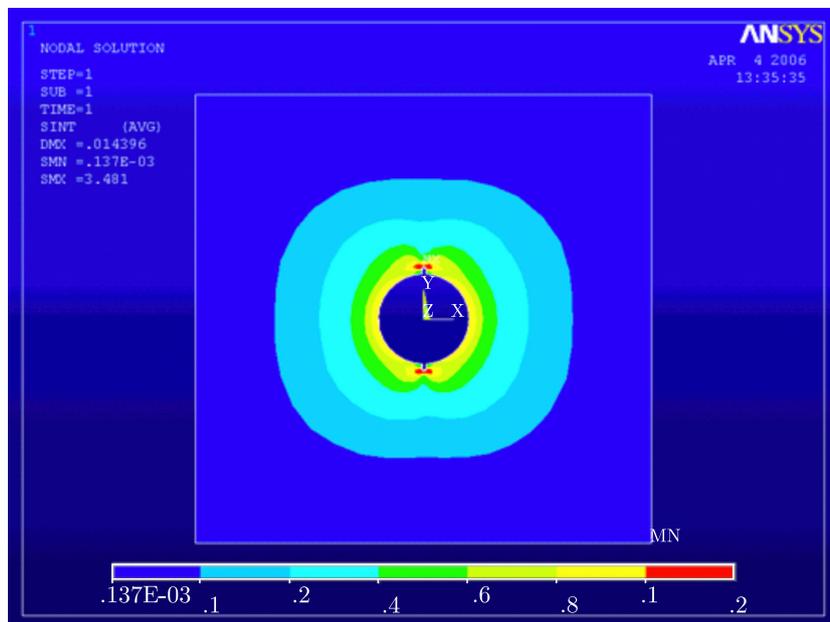


Рис. 11. Распределение касательных напряжений в окрестности открытого участка ствола скважины