
МЕХАНИКА

УДК 616.155

**НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
К ЗАДАЧАМ ВЯЗКОУПРУГОСТИ¹**© 2002 С.А. Лычёв² Ю.Э. Сеницкий³

Построен новый класс несимметричных матричных конечных интегральных преобразований, порождаемых пучками несамосопряженных дифференциальных операторов. Введенные преобразования позволяют получать в классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом, представления решений для несимметричных начально-краевых задач. Особенности этих представлений показаны на задаче об изгибе вращающегося вязкоупругого стержня.

Введение

Конечные интегральные преобразования (КИП) представляют метод построения решений начально-краевых задач в классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом, в форме полных ортогональных или биортогональных разложений [1–3].

Структурный алгоритм метода, разработанный одним из авторов [4], позволяет одновременно определить трансформанту и ядра преобразования как собственные функции дифференциальных операторов, порожденных исследуемой начально-краевой задачей. Сходимость подобных представлений к искомому решению обеспечивается полнотой системы собственных функций, которая для самосопряженных задач обеспечивается вариациями теоремы Гильберта–Шмидта. Для матричных самосопряженных дифференциальных операторов с простым спектром соответствующее обоснование приведено в [5]. Все это делает метод КИП эффективной процедурой решения, в частности, нестационарных задач симметричной теории упругости и теории оболочек [4].

Вместе с тем моделирование диссипативных систем приводит к построению несамосопряженных начально-краевых задач. Таковыми являются задачи о вращении вязкоупругого изгибаемого стержня [6], о флаттере [7], шимми, задачи

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

² Лычёв Сергей Александрович, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

³ Сеницкий Юрий Эдуардович, кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарской архитектурно-строительной академии, 443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

несимметричной теории упругости [8] и т. д. Несмотря на то, что вопросам неортогональных разложений посвящены довольно обширные исследования [9–13], их реализация сопряжена с трудностями как теоретического, так и процедурного характера.

К первым относятся обоснование полноты системы базисных функций и сходимости на них рядов Фурье. К настоящему времени известны признаки полноты лишь для частных классов несамосопряженных операторов [9, 13].

Процедура построения решений в форме неортогональных разложений также неочевидна, поскольку полный базис должен включать в себя как собственные, так и присоединенные функции, образующие биортонормированную систему с соответствующими функциями сопряженного оператора. Следует отметить, что представление решений в виде разложений по биортогональным системам, состоящим только из собственных функций, ранее предлагалось одним из авторов [3] и использовалось для решения динамических задач теории неоднородных оболочек. Кроме того, диссипативные модели, как правило, содержат производные по времени различных порядков. Представления решений в этих случаях основаны на базисных системах пучков несамосопряженных операторов [12, 13].

В настоящей статье введен новый класс несимметричных матричных КИП, которые позволяют осуществлять построения решений несимметричных начально-краевых задач в форме биортогональных разложений по полным системам собственных и присоединенных функций пучка несамосопряженных дифференциальных операторов. В дальнейшем изложении будем следовать плану:

1. Начально-краевая задача приводится к операторной форме задачи Коши.
2. По ее коэффициентам строится пучок дифференциальных операторов.
3. Определяется сопряженный пучок.
4. Производится построение резольвенты и спектрального уравнения.
5. В окрестностях точек спектра резольвента представляется в форме ряда Лорана, главная часть которого определяется специальным образом нормированными базисами корневых подпространств исходного и сопряженного пучков.
6. При условии, что указанные базисы в совокупности образуют полную систему, вводятся несимметричные операторы прямого и обратного преобразований.
7. Строится решение для трансформанты исходной задачи и осуществляется его обращение.

1. Задача Коши с операторными коэффициентами

Рассмотрим несимметричную начально-краевую задачу, заданную системой p дифференциальных уравнений порядка $m + n$ (m — порядок по t , n — по x)

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^p \alpha_{ij}^{rk}(x) \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^j \partial t^i} y_k(x, t) = f_r(x, t), \quad r = 1, \dots, p, \quad (1.1)$$

начальными

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} y_k(x, t) \Big|_{t=0} = y_{0k}^{(i)}(x), \quad i = 0, \dots, m-1, \quad k = 1, \dots, p \quad (1.2)$$

и краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^p \left(\beta_j^{rk} \frac{\partial^j}{\partial x^j} y_k(x, t) \Big|_{x=a} + \gamma_j^{rk} \frac{\partial^j}{\partial x^j} y_k(x, t) \Big|_{x=b} \right) = 0, \quad r = 1, \dots, np. \quad (1.3)$$

В рамках статьи будем полагать интервал $\mathbb{I} = (a, b) \subset \mathbb{R}$ конечным, а особенности коэффициентов $\alpha_{ij}^{rk}(x)$ устранимыми за счет подбора весовых функций.⁴

Решение задачи (1.1)–(1.3) будем искать в форме квадратично сходящегося разложения. Для этой цели на множестве комплекснозначных n -мерных вектор-функций, интегрируемых с квадратом на интервале \mathbb{I} , определим гильбертово пространство \tilde{L}_μ^2 со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \int_a^b \mathbf{v}^T \mu \bar{\mathbf{w}} dx, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \tilde{L}_\mu^2$, μ — симметричная невырожденная матрица весовых функций, T — знак транспонирования, $\bar{\mathbf{w}}$ — вектор, комплексно сопряженный к \mathbf{w} . Симметричность и невырожденность μ обеспечивают положительную определенность метрики \tilde{L}_μ^2 и позволяют упростить построения, однако не являются необходимыми [16].

Сформулируем теперь задачу (1.1)–(1.3) в операторной форме. В области $G = (a, b) \times [0, t_1]$, $t_1 < \infty$ рассмотрим задачу Коши с операторными коэффициентами, полагая $\mathbf{f}(x, t) \in \tilde{L}_\mu^2 \times C_t$ заданной, а $\mathbf{y}(x, t) \in \tilde{L}_\mu^2 \times C_t^m$ — искомой вектор-функцией (C_t, C_t^m — соответственно классы гладких и m раз дифференцируемых по t функций)

$$\sum_{i=0}^m \mathcal{A}_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{y}(x, t) = \mathbf{f}(x, t), \quad \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{y}(x, t) \Big|_{t=0} = \mathbf{y}_0^{(i)}(x), \quad \mathbf{y}(x, t) \in \mathcal{D}, \quad (1.5)$$

где коэффициенты \mathcal{A}_i представляют собой дифференциальные операторы

$$\mathcal{A}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{A}_{ij}(x) \frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad \mathbf{A}_{ij}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{ij}^{11}(x) & \dots & \alpha_{ij}^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{ij}^{p1}(x) & \dots & \alpha_{ij}^{pp}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

заданные в области $\mathcal{D} = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \tilde{L}_\mu^2 \cap C_x^n \wedge \mathcal{B}(\mathbf{y}) = 0\}$. Здесь $\mathcal{B}\mathbf{y}(x) = \mathcal{B}_a\mathbf{y}(x) + \mathcal{B}_b\mathbf{y}(x)$,

$$\mathcal{B}_a = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{B}_j^a \frac{\partial^j}{\partial x^j} \mathbf{y}(x, t) \Big|_{x=a}, \quad \mathcal{B}_b = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{B}_j^b \frac{\partial^j}{\partial x^j} \mathbf{y}(x, t) \Big|_{x=b}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{B}_j^a = \begin{pmatrix} \beta_j^{11} & \dots & \beta_j^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_j^{d1} & \dots & \beta_j^{dp} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j^b = \begin{pmatrix} \gamma_j^{11} & \dots & \gamma_j^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_j^{d1} & \dots & \gamma_j^{dp} \end{pmatrix}, \quad d = np.$$

Для дальнейших преобразований краевые условия удобно представить в виде

$$\mathcal{B}\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{W}[\mathbf{y}] = 0, \quad (1.8)$$

где \mathbf{W} — вектор значений функции $\mathbf{y}(x)$ и ее производных на концах интервала \mathbb{I}

$$\mathbf{W}[\mathbf{y}]^T = (\mathbf{y}(a)^T \quad \mathbf{y}(a)^{(1)T} \quad \dots \quad \mathbf{y}(a)^{(n-1)T} \quad \mathbf{y}(b)^T \quad \mathbf{y}(b)^{(1)T} \quad \dots \quad \mathbf{y}(b)^{(n-1)T}). \quad (1.9)$$

В формуле (1.9) введены обозначения

$$\mathbf{y}^{(k)}(a) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \mathbf{u}(x) \Big|_{x=a}, \quad \mathbf{y}^{(k)}(b) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \mathbf{u}(x) \Big|_{x=b}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

⁴ Необходимость в использовании весовых функций возникает, в частности, при исследовании динамики сферических оболочек, сингулярные уравнения движения которых имеют устранимые особенности в полярных точках [14, 15].

Числовая матрица \mathbf{B} размерностью $d \times 2d$ образуется блоками $\mathbf{B}_j^a, \mathbf{B}_j^b$:

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{B}_0^a \quad \mathbf{B}_1^a \quad \dots \quad \mathbf{B}_{n-1}^a \quad \mathbf{B}_0^b \quad \mathbf{B}_1^b \quad \dots \quad \mathbf{B}_{n-1}^b \right). \quad (1.10)$$

Пусть $q = 2d - \text{rank } \mathbf{B}$. Тогда условия (1.8) могут быть записаны в форме

$$\mathbf{W}[y] = \mathbf{H}\mathbf{w}, \quad \mathbf{H} = \text{Ker } \mathbf{B} = \left(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_q \right). \quad (1.11)$$

Здесь $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_q$ — базис нулевого подпространства матрицы \mathbf{B} . Матрицу \mathbf{H} будем называть приведенной матрицей краевых условий.

2. Полиномиальный операторный пучок

Задаче Коши (1.5) соответствует полиномиальный пучок

$$\mathcal{L}_\lambda = \sum_{i=0}^m \lambda^i \mathcal{A}_i, \quad (2.1)$$

который можно формально трактовать как характеристическое уравнение для (1.5). Разложение (2.1) следует рассматривать как обобщение оператора Штурма—Лиувилля, к которому оно приводится при $m = 1$ и $\mathcal{A}_1 = \mathbf{I}$.

Наряду с пучком (2.1) рассмотрим в области D_λ^* сопряженный пучок

$$\mathcal{L}_\lambda^* = \sum_{i=0}^m \bar{\lambda}^i \mathcal{A}_i^*, \quad (2.2)$$

который будем определять как оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\forall \mathbf{u} \forall \mathbf{v} \left(\mathbf{u} \in \mathcal{D} \wedge \mathbf{v} \in \mathcal{D}_\lambda^* \right) \Leftrightarrow \left(\langle \mathcal{L}_\lambda^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathcal{L}_\lambda \mathbf{v} \rangle = 0 \right). \quad (2.3)$$

Следует отметить, что область определения сопряженного пучка должна быть максимальной в \tilde{L}_μ^2 и может зависеть от параметра λ [17].

3. Сопряженный пучок

Все компоненты сопряженного пучка (2.2) определяются с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Операторные коэффициенты \mathcal{A}_i^* , $i = 0, \dots, m$ сопряженного пучка представляются следующими выражениями:

$$\mathcal{A}_i^* = \sum_{j=0}^n \mathbf{A}_{ij}^* \frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad \mathbf{A}_{ij}^* = \left[\sum_{k=j}^n (-1)^k \binom{k}{j} \frac{\partial^{k-j}}{\partial x^{k-j}} \left(\mu \overline{\mathbf{A}_{ik}} \right) \mu^{-1} \right]^T, \quad \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}. \quad (3.1)$$

Область определения D_λ^* операторов \mathcal{A}_i^* задается обобщенной матрицей краевых условий

$$\mathbf{V}_\lambda^* = \overline{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{Q}}_\lambda^T, \quad (3.2)$$

где \mathbf{H} — приведенная матрица краевых условий пучка \mathcal{L}_λ (1.11),

$$\tilde{\mathbf{Q}}_\lambda = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_a & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_b \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{a,b} = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{Q}_{11}(x) & \mathbf{Q}_{12}(x) & \dots & \mathbf{Q}_{1n}(x) \\ 0 & \mathbf{Q}_{22}(x) & \dots & \mathbf{Q}_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_{mn}(x) \end{array} \right) \Bigg|_{x=a,b}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{Q}_{ij}(x) = \sum_{k=n+i-j}^n \frac{\partial^{k+n+i-j}}{\partial x^{k+n+i-j}} \left[\mu \sum_{p=0}^m \bar{\lambda}^p \mathbf{A}_{ij} \right]. \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{L}_\mu^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_\lambda^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^m \bar{\lambda}^i \mathbf{A}_i^* \mathbf{u} \right]^T \mu \bar{\mathbf{v}} dx = \int_a^b \left[\sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m \bar{\lambda}^i \mathbf{A}_{ij} \right) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \mathbf{u} \right]^T \mu \bar{\mathbf{v}} dx = \\ &= \sum_{j=0}^n \int_a^b \left[\mathcal{P}_j^*(\lambda) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \mathbf{u} \right]^T \mu \bar{\mathbf{v}} dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

С другой стороны, выполняя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathcal{L}_\lambda \mathbf{v} \rangle &= \int_a^b \mathbf{u}^T \mu \left[\sum_{i=0}^m \lambda^i \mathbf{A}_i \mathbf{v} \right] dx = \sum_{j=0}^n \int_a^b \left[\mathbf{u}^T \mu \overline{\mathcal{P}_j(\lambda)} \right] \frac{\partial^j}{\partial x^j} \bar{\mathbf{v}} dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\mathbf{u}^T \mu \overline{\mathcal{P}_j(\lambda)} \right) \frac{\partial^{j-k-1}}{\partial x^{j-k-1}} \bar{\mathbf{v}} \Big|_a^b + \sum_{j=0}^n (-1)^j \int_a^b \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(\mathbf{u}^T \mu \overline{\mathcal{P}_j(\lambda)} \right) \bar{\mathbf{v}} dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В формулах (3.5), (3.6) введены обозначения

$$\mathcal{P}_j^*(\lambda) = \sum_{i=0}^m \mathbf{A}_{ij}^* \bar{\lambda}^i, \quad \mathcal{P}_j(\lambda) = \sum_{i=0}^m \mathbf{A}_{ij} \lambda^i. \quad (3.7)$$

Вычитая из (3.5) выражение (3.6), получим

$$\langle \mathcal{L}_\lambda^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathcal{L}_\lambda \mathbf{v} \rangle = \mathbf{Q} + \int_a^b \mathbf{J} dx, \quad (3.8)$$

где

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\mathbf{u}^T \mu \overline{\mathcal{P}_j(\lambda)} \right) \frac{\partial^{j-k-1}}{\partial x^{j-k-1}} \bar{\mathbf{v}} \Big|_a^b, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{j=0}^n \left[(-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(\mathbf{u}^T \mu \overline{\mathcal{P}_j(\lambda)} \right) - \left(\mathcal{P}_j^*(\lambda) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \mathbf{u} \right)^T \mu \right] \bar{\mathbf{v}}. \quad (3.10)$$

Из формулы (3.8) вытекает, что для выполнения условия $\langle \mathcal{L}_\lambda^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathcal{L}_\lambda \mathbf{v} \rangle$ достаточным является одновременное обращение в нуль внеинтегральных членов \mathbf{Q} (3.9) и подынтегрального выражения \mathbf{J} (3.10).

Легко показать, что это условие также является необходимым. Действительно, если это не так, то при обращении в нуль левой части (3.8) $\mathbf{Q} = -\int_a^b \mathbf{J} dx$ для любых $\mathbf{u} \in D$. Но тогда \mathbf{J} равен нулю на всех финитных на интервале \mathbf{I} функциях, что невозможно в силу положительной определенности метрики \tilde{L}_μ^2 .

Из тех же соображений следует, что условие $\mathbf{J} = \sum_{i=0}^n \int_a^b \mathbf{u}^T \mathbf{S}_i \mathbf{v} = 0$ эквивалентно n равенствам

$$\mathbf{S}_k = \sum_{j=k}^n (-1)^j \binom{j}{k} \frac{\partial^{j-k}}{\partial x^{j-k}} \left(\mu \overline{\mathcal{P}_j(\lambda)} \right) - \mathcal{P}_k^*(\lambda) \mu = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

С учетом (3.7) эти равенства принимают вид

$$\sum_{j=1}^m \left[A_{ij}^{*\Gamma} - \sum_{k=i}^n (-1)^k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial x^{k-i}} \left(\overline{u \mathbf{A}_{jk}} \right) \right] \lambda^j = 0,$$

откуда в силу произвольности λ и вытекают соотношения (3.1).

Выражение для \mathbf{Q} (3.9) после изменения порядка суммирования

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{i=0}^k (-1)^k \binom{k}{i} \left[\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathbf{u}^\Gamma \right] \frac{\partial^{k-i}}{\partial x^{k-i}} \left[\overline{u \mathcal{P}_j(\lambda)} \right] \frac{\partial^{j-k-1}}{\partial x^{j-k-1}} \mathbf{v} \Big|_a^b$$

приводится к виду

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}[\mathbf{u}]^\Gamma \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{W}[\bar{\mathbf{v}}],$$

где $\tilde{\mathbf{Q}}$ — числовая матрица (3.3), (3.4); $\mathbf{W}[\mathbf{u}]$, $\mathbf{W}[\bar{\mathbf{v}}]$ — значения вектор-функций \mathbf{u} , \mathbf{v} и их производных на концах интервала \mathbb{I} .

Воспользовавшись соотношением (1.11), получим выражение

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}[\mathbf{u}]^\Gamma \tilde{\mathbf{Q}} \overline{[\mathbf{H}\mathbf{w}]}, \quad (3.11)$$

причем компоненты вектора \mathbf{w} — произвольные числа. Из представления (3.11) вытекают условия для $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ в виде (3.2); в силу произвольности \mathbf{w} они являются необходимыми и достаточными.

4. Резольвента пучка

Построим в явном виде резольвенту пучка \mathcal{L}_λ , т. е. оператор $\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda^{-1}$. Из определения резольвенты следует, что $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{L}_\lambda \mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \mathcal{R}_\lambda \mathbf{f} = \mathbf{y},$$

и представление для $\mathcal{R}_\lambda \mathbf{f}$ может быть получено как решение уравнения

$$\sum_{j=0}^n \mathcal{P}_j(\lambda) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad (4.1)$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$\mathcal{B} \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (4.2)$$

Пусть $\mathbf{v}_k = \left(v_k^1(x, \lambda) \quad \dots \quad v_k^p(x, \lambda) \right)^\Gamma$ — решения однородного уравнения

$$\sum_{j=0}^n \mathcal{P}_j(\lambda) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

удовлетворяющие начальным условиям $\frac{\partial^j}{\partial x^j} v_k^j = \delta_{ij}$. Как известно, всего имеется $s = n \times p$ таких линейно-независимых решений. В совокупности \mathbf{v}_k образуют фундаментальную матрицу

$$\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} v_1^1(x, \lambda) & \dots & v_1^s(x, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_p^1(x, \lambda) & \dots & v_p^s(x, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, представим решение уравнения (4.1) в виде

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = \mathbf{Y}_\lambda \mathbf{C}_\lambda,$$

где функции $\mathbf{C}_\lambda = \mathbf{C}(x, \lambda) = (C^1(x, \lambda) \ \dots \ C^s(x, \lambda))^T$ определяются из условий

$$\mathbf{Y} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{C} = 0, \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{Y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{C} = 0, \dots, \left(\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} \mathbf{Y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{C} = 0, \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \mathbf{Y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{C} = \mathcal{P}_n^{-1} \mathbf{f}. \quad (4.4)$$

Действительно, из очевидных тождеств

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q} (\mathbf{Y}_\lambda \mathbf{C}_\lambda) = \left(\frac{\partial^q}{\partial x^q} \mathbf{Y}_\lambda \right) \mathbf{C}_\lambda + \sum_{i=1}^q \frac{\partial^{q-i}}{\partial x^{q-i}} \left(\left(\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}} \mathbf{Y}_\lambda \right) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{C}_\lambda \right)$$

и соотношений (4.4) вытекает

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q} (\mathbf{Y}_\lambda \mathbf{C}_\lambda) = \left(\frac{\partial^q}{\partial x^q} \mathbf{Y}_\lambda \right) \mathbf{C}_\lambda, \quad 0 < q < n, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} (\mathbf{Y}_\lambda \mathbf{C}_\lambda) = \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} \mathbf{Y}_\lambda \right) \mathbf{C}_\lambda + \mathcal{P}_n^{-1} \mathbf{f}, \quad q = n. \quad (4.6)$$

Таким образом,

$$\sum_{j=0}^n \mathcal{P}_j(\lambda) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \mathbf{Y}_\lambda \mathbf{C}_\lambda = \left(\sum_{j=0}^n \mathcal{P}_j(\lambda) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \mathbf{Y}_\lambda \right) \mathbf{C}_\lambda + \mathcal{P}_n(\lambda) \mathcal{P}_n(\lambda)^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{f}.$$

Условия (4.4) формируют систему $n \times p$ линейных уравнений относительно $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{C}_\lambda$:

$$\mathcal{Y}_\lambda \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{C}_\lambda = \mathcal{U} \mathbf{f}, \quad \mathcal{Y}_\lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_\lambda \\ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{Y}_\lambda \\ \vdots \\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \mathbf{Y}_\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathcal{P}_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ее решение может быть записано в следующем удобном для дальнейших преобразований виде:

$$\mathbf{C}_\lambda = \tilde{\mathbf{C}}_\lambda + \mathbf{C}_\lambda^0, \quad \tilde{\mathbf{C}}_\lambda = \frac{1}{2} \int_a^x \mathcal{S}_\lambda(z) \mathbf{f}(z) dz - \frac{1}{2} \int_x^b \mathcal{S}_\lambda(z) \mathbf{f}(z) dz. \quad (4.7)$$

Здесь \mathbf{C}_λ^0 — постоянные интегрирования, которые следует выбрать так, чтобы удовлетворить краевым условиям $\mathcal{B} \mathbf{y} = 0$. Имеем

$$\mathcal{B} \mathbf{y} = \mathcal{B}[\mathbf{Y}_\lambda \tilde{\mathbf{C}}_\lambda] + \mathcal{B}[\mathbf{Y}_\lambda] \mathbf{C}_\lambda^0,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{C}_\lambda^0 = -(\mathcal{B}[\mathbf{Y}_\lambda])^{-1} \mathcal{B}[\mathbf{Y}_\lambda \tilde{\mathbf{C}}_\lambda].$$

Поскольку с учетом соотношений (4.5), (4.6)

$$\mathcal{B}[\mathbf{Y}_\lambda \tilde{\mathbf{C}}_\lambda] = \frac{1}{2} \left(\mathcal{B}_a[\mathbf{Y}_\lambda] - \mathcal{B}_b[\mathbf{Y}_\lambda] \right) \int_a^b \mathcal{S}_\lambda(z) \mathbf{f}(z) dz,$$

для вектора постоянных \mathbf{C}_λ^0 справедливо равенство

$$\mathbf{C}_\lambda^0 = -\frac{1}{2} \left((\mathcal{B}_a[\mathbf{Y}_\lambda] + \mathcal{B}_b[\mathbf{Y}_\lambda]) \right)^{-1} \left(\mathcal{B}_a[\mathbf{Y}_\lambda] - \mathcal{B}_b[\mathbf{Y}_\lambda] \right) \int_a^b \mathcal{S}_\lambda(z) \mathbf{f}(z) dz.$$

Окончательно решение краевой задачи (4.1), (4.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x, \lambda) = & \frac{1}{2} \mathbf{Y}_\lambda \left(\int_a^x \mathcal{S}_\lambda(z) \mathbf{f}(z) dz - \int_x^b \mathcal{S}_\lambda(z) \mathbf{f}(z) dz - \right. \\ & \left. - \left((\mathcal{B}_a[\mathbf{Y}_\lambda] + \mathcal{B}_b[\mathbf{Y}_\lambda]) \right)^{-1} \left(\mathcal{B}_a[\mathbf{Y}_\lambda] - \mathcal{B}_b[\mathbf{Y}_\lambda] \right) \int_a^b \mathcal{S}_\lambda(z) \mathbf{f}(z) dz \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если ввести разрывную матричную функцию

$$\mathcal{K}(x, z, \lambda) = \begin{cases} \mathcal{S}(z, \lambda), & z \leq x, \\ -\mathcal{S}(z, \lambda), & z > x, \end{cases}$$

то формулу (4.8) можно привести к компактному виду

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = \int_a^b \mathcal{G}(x, z, \lambda) \mathbf{f}(z) dz. \quad (4.9)$$

Следует отметить, что ядро интегрального оператора (4.9)

$$\mathcal{G}(x, z, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{Y}_\lambda \left[\mathcal{K}(z, x, \lambda) - \left((\mathcal{B}_a[\mathbf{Y}_\lambda] + \mathcal{B}_b[\mathbf{Y}_\lambda]) \right)^{-1} \left(\mathcal{B}_a[\mathbf{Y}_\lambda] - \mathcal{B}_b[\mathbf{Y}_\lambda] \right) \right] \quad (4.10)$$

является функцией Грина задачи (4.1), (4.2).

Функциональную матрицу (4.10) можно представить в форме

$$\mathcal{G}(x, z, \lambda) = \mathbf{X}_\lambda \frac{1}{\Delta(\lambda)} + \mathbf{X}_\lambda^0,$$

где $\mathbf{X}_\lambda^0 = \frac{1}{2} \mathbf{Y}_\lambda \mathcal{K}(x, z, \lambda)$, $\mathbf{X}_\lambda = -\frac{1}{2} \mathbf{Y}_\lambda \mathbf{A}^T (\mathcal{B}_a \mathbf{Y}_\lambda - \mathcal{B}_b \mathbf{Y}_\lambda)$, \mathbf{A} — алгебраическое дополнение матрицы $\mathcal{B}_a \mathbf{Y}_\lambda - \mathcal{B}_b \mathbf{Y}_\lambda$,

$$\Delta(\lambda) = \text{Det} [\mathcal{B}_a \mathbf{Y}_\lambda + \mathcal{B}_b \mathbf{Y}_\lambda].$$

Так как параметр λ входит в дифференциальные выражения (2.1) полиномиально, то \mathbf{Y}_λ — голоморфная функция λ . Следовательно, голоморфными также являются $\Delta(\lambda)$, \mathbf{X}_λ , \mathbf{X}_λ^0 , а ядро $\mathcal{G}(x, z, \lambda)$ при условии $\Delta(\lambda) \neq 0$ — мероморфная матрица-функция. Результат этого раздела сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. Резольвента \mathcal{R}_λ полиномиального пучка \mathcal{L}_λ (2.1) при условии $\Delta(\lambda) \neq 0$ представляет собой интегральный оператор

$$\mathcal{R}_\lambda \mathbf{f} = \int_a^b \mathcal{G}(x, z, \lambda) \mathbf{f}(z) dz$$

с ядром (4.10), аналитически зависящим от λ , и определенный на всей комплексной плоскости за исключением счетного множества значений λ_i таких, что

$$\Delta(\lambda_i) = 0. \quad (4.11)$$

Особые точки ядра резольвенты λ_i в совокупности образуют спектр σ пучка \mathcal{L}_λ

$$\sigma = \{\lambda | \lambda \in \mathbb{C} \wedge \Delta(\lambda) = 0\}, \quad (4.12)$$

причем в силу голоморфности $\Delta(\lambda)$ это полюса конечного порядка.

5. Главная часть резольвенты

Пусть λ_0 — нуль кратности s спектрального уравнения (4.11). Тогда резольвента \mathcal{R}_λ как мероморфная оператор-функция λ может быть представлена в форме разложения в ряд Лорана в окрестности λ_0 [13, 18]

$$\mathcal{R}_\lambda = \sum_{i=1}^s \frac{\mathbf{R}_i}{(\lambda - \lambda_0)^i} + \mathbf{R}_0(\lambda), \quad (5.1)$$

где \mathbf{R}_i , $i = 0, \dots, s$, — ограниченные операторы. Поскольку $\mathcal{L}_\lambda \mathcal{R}_\lambda = \mathbf{I}$, то и

$$(\lambda - \lambda_0)^s \mathcal{L}_\lambda \mathcal{R}_\lambda = (\lambda - \lambda_0)^s \mathbf{I}, \quad (5.2)$$

причем левая часть равенства (5.2) может быть представлена в виде

$$(\lambda - \lambda_0)^s \mathcal{L}_\lambda \mathcal{R}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \left(\sum_{i=1}^s (\lambda - \lambda_0)^{s-i} \mathbf{R}_i + (\lambda - \lambda_0)^s \mathbf{R}_0(\lambda) \right). \quad (5.3)$$

Из (5.2) и (5.3) при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ вытекает определяющее соотношение для оператора \mathbf{R}_s : $\mathcal{L}_{\lambda_0} \mathbf{R}_s = 0$. Аналогичные соотношения для $\mathbf{R}_{s-1}, \dots, \mathbf{R}_1$ можно получить, k раз дифференцируя по λ левую и правую части равенства (5.2). Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\mathcal{L}_\lambda (\lambda - \lambda_0)^s \mathcal{R}_\lambda) &= \\ &= \sum_{j=0}^k \left[\binom{k}{j} \mathcal{L}_\lambda^{(j)} \left(\sum_{i=1}^{s-k+j} \frac{(s-i)!}{(s-k+j-i)!} (\lambda - \lambda_0)^{s-k+j-i} \mathbf{R}_i \right) + \frac{\partial^{n-i}}{\partial \lambda^{n-i}} \left((\lambda - \lambda_0)^s \mathbf{R}_0(\lambda) \right) \right], \end{aligned}$$

и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, получим

$$\sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!} \mathcal{L}_{\lambda_0}^{(j)} \mathbf{R}_{s-k+j} = 0, \quad \mathcal{L}_\lambda^{(j)} = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \mathcal{L}_\lambda = \sum_{i=j}^m \frac{i!}{(i-j)!} \lambda^{i-j} \mathcal{A}_i, \quad k = 1, \dots, s-1. \quad (5.4)$$

Левую часть выражения (5.4), разумеется, можно разделить на $k!$.⁵

Рассуждая подобным образом, получим представление для резольвенты сопряженного пучка \mathcal{R}_λ^*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda^* &= \sum_{i=1}^s \frac{\mathbf{R}_i^*}{(\bar{\lambda} - \lambda_0)^i} + \mathbf{R}_0^*(\bar{\lambda}), \\ \mathcal{L}_{\lambda_0}^* \mathbf{R}_s^* &= 0, \quad \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \mathcal{L}_{\lambda_0}^{*(j)} \mathbf{R}_{s-k+j}^* = 0, \quad \mathcal{L}_\lambda^{*(j)} = \frac{\partial^j}{\partial \bar{\lambda}^j} \mathcal{L}_\lambda^* = \sum_{i=j}^m \frac{i!}{(i-j)!} \bar{\lambda}^{i-j} \mathcal{A}_i^*. \end{aligned}$$

Конкретизируем форму операторов \mathbf{R}_i , $i = 1, \dots, s$. Поскольку $\forall \mathbf{z} \in \tilde{L}_\mu^2$ имеет место $\mathcal{L}_{\lambda_0} \mathbf{R}_s \mathbf{z} = 0$, то \mathbf{R}_s — проектор \tilde{L}_μ^2 на ядро $\text{Ker } \mathcal{L}_{\lambda_0}$, т. е.

$$\mathbf{R}_s \mathbf{z} = \mathbf{G}_s \overline{\langle \mathbf{M}_s^0, \mathbf{z} \rangle}, \quad \mathbf{G}_s = \mathbf{Y}_{\lambda_0} \mathbf{N}_{\lambda_0}, \quad (5.5)$$

⁵ Соотношения (5.4) в скалярном случае ($n = 1$) совпадают с результатами М.В. Келдыша [13].

где \mathbf{Y}_{λ_0} — фундаментальная матрица (4.3) для $\lambda = \lambda_0$, \mathbf{N}_{λ_0} — нулевое подпространство матрицы, получаемой при подстановке \mathbf{Y}_{λ_0} в краевые условия (1.7):

$$\mathbf{N}_{\lambda_0} = \text{Ker } \mathcal{B}\mathbf{Y}_{\lambda_0},$$

а $\mathbf{M}_s^0 = (\mathbf{m}_1 \ \dots \ \mathbf{m}_k^0)$ — функциональная матрица, представляющая собой некоторый (уточняемый далее) k -мерный базис, $k = \dim \text{Ker } \mathcal{B}\mathbf{Y}_{\lambda_0}$.

Структура оператора \mathbf{R}_{s-1} иная. Поскольку в соответствии с (5.4) для него должно выполняться рекуррентное соотношение $\mathcal{L}_{\lambda_0}\mathbf{R}_{s-1} + \mathcal{L}_{\lambda_0}^{(1)}\mathbf{R}_s = 0$, то, с учетом (5.5), получим равенство

$$\forall \mathbf{z} \in \tilde{L}_{\mu}^2 \quad \mathcal{L}_{\lambda_0}\mathbf{R}_{s-1}\mathbf{z} + \mathcal{L}_{\lambda_0}^{(1)}\overline{\mathbf{G}_s\langle \mathbf{M}_s^0, \mathbf{z} \rangle} = 0,$$

которое выполняется, если положить

$$\mathbf{R}_{s-1}\mathbf{z} = \mathbf{G}_{s-1}\langle \overline{\mathbf{M}_s^0}, \mathbf{z} \rangle + \mathbf{G}_s\langle \overline{\mathbf{M}_{s-1}^0}, \mathbf{z} \rangle + \mathbf{G}_s\langle \overline{\mathbf{M}_s^1}, \mathbf{z} \rangle.$$

Здесь \mathbf{G}_{s-1} — решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}_{\lambda_0}\mathbf{G}_{s-1} = -\mathcal{L}_{\lambda_0}^{(1)}\mathbf{G}_s,$$

удовлетворяющее краевым условиям $\mathcal{B}\mathbf{G}_{s-1} = 0$, \mathbf{M}_{s-1}^0 , \mathbf{M}_s^1 — функциональные матрицы, представляющие k -мерные базисы. Заметим, что у операторов \mathbf{R}_s и \mathbf{R}_{s-1} различная геометрическая интерпретация: \mathbf{R}_s отображает \tilde{L}_{μ}^2 на подпространство, в то время как \mathbf{R}_{s-1} отображает \tilde{L}_{μ}^2 на многообразие, не содержащее нуля.

Повторяя приведенные выше построения, получаем следующие формулы:

$$\mathbf{R}_{s-i}\mathbf{z} = \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \mathbf{G}_{s-j}\langle \overline{\mathbf{M}_{s-i+j+k}^k}, \mathbf{z} \rangle, \quad i = 0, \dots, s-1. \quad (5.6)$$

Здесь \mathbf{G}_{s-i} находятся в результате последовательного решения краевых задач

$$\mathcal{L}_{\lambda_0}\mathbf{G}_{s-i} = -\sum_{j=1}^i \frac{1}{j!} \mathcal{L}_{\lambda_0}^{(j)}\mathbf{G}_{s-i+j}, \quad \mathcal{B}\mathbf{G}_{s-i} = 0.$$

Производя аналогичные построения для сопряженного оператора, получаем:

$$\mathbf{R}_{s-i}^*\mathbf{v} = \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \mathbf{G}_{s-j}^*\langle \overline{\mathbf{M}_{s-i+j+k}^{k*}}, \mathbf{v} \rangle, \quad i = 0, \dots, s-1, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_0}^*\mathbf{G}_{s-i}^* = -\sum_{j=1}^i \frac{1}{j!} \mathcal{L}_{\lambda_0}^{*(j)}\mathbf{G}_{s-i+j}^*, \quad \sum_{j=0}^i \frac{1}{j!} \left(\frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \mathcal{B}_{\lambda}^* \right) \mathbf{G}_{s-i+j}^* = 0.$$

Из равенства для сопряженных резольвент $\langle \mathcal{R}_{\lambda_0}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathcal{R}_{\lambda_0}^*\mathbf{v} \rangle$ вытекает соотношение $\langle \mathbf{R}_{s-i}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{R}_{s-i}^*\mathbf{v} \rangle$, подставляя в которое представления (5.6), (5.7), находим

$$\left\langle \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \mathbf{G}_{s-j}\langle \overline{\mathbf{M}_{s-j+i+k}^k}, \mathbf{u} \rangle, \mathbf{v} \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}, \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \mathbf{G}_{s-j}^*\langle \overline{\mathbf{M}_{s-j+i+k}^{k*}}, \mathbf{v} \rangle \right\rangle,$$

и, далее, получаем последовательность равенств

$$\sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \langle \overline{\mathbf{M}_{s-j+i+k}^k}, \mathbf{u} \rangle^T \langle \mathbf{G}_{s-j}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \langle \overline{\mathbf{G}_{s-j}^*}, \mathbf{v} \rangle^T \langle \overline{\mathbf{M}_{s-j+i+k}^{k*}}, \mathbf{u} \rangle, \quad i = 1, \dots, s. \quad (5.8)$$

Равенства (5.8) удовлетворяются, если главные операторы разложения резольвенты в ряд Лорана имеют вид

$$\mathbf{R}_{s-i} \mathbf{z} = \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \mathbf{G}_{s-j} \mathbf{Q}_j \overline{\langle \mathbf{G}_{s-j+i+k}^*, \mathbf{z} \rangle}. \quad (5.9)$$

Здесь \mathbf{Q}_j — матрицы постоянных, имеющие смысл нормы [19].

Представление (5.9) удобно записать в форме

$$\mathbf{R}_{s-i} \mathbf{z} = \mathcal{K}_{s-i} \mathcal{Q}_{s-i} \overline{\langle \mathcal{K}_{s-i}^*, \mathbf{z} \rangle}, \quad (5.10)$$

$$\mathcal{K}_{s-i} = (\mathbf{G}_s \quad \mathbf{G}_{s-1} \quad \dots \quad \mathbf{G}_i), \quad \mathcal{K}_{s-i}^* = (\mathbf{G}_s^* \quad \mathbf{G}_{s-1}^* \quad \dots \quad \mathbf{G}_i^*), \quad (5.11)$$

$$\mathcal{Q}_{s-i} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{s-i} & \mathbf{Q}_{s-i+1} & \dots & \mathbf{Q}_{s-1} & \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{Q}_{s-i+1} & \mathbf{Q}_{s-i+2} & \dots & \mathbf{Q}_s & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Q}_s & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Для представления (5.9) удастся рекурсивно найти \mathbf{Q}_j из условия $\mathcal{L}_\lambda \mathcal{R}_\lambda = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{Q}_s = \left[\int_a^b \overline{\mathbf{G}_s}^* \mu \sum_{i=1}^m i \lambda_0^{i-1} \mathcal{A}_i \mathbf{G}_1 dx \right]^{-1}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{Q}_{s-i} = - \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{s-i} \mathbf{Q}_{s-j-1} \overline{\mathbf{G}_{i-j+1}} \right] \left[\sum_{k=1}^m k \lambda_0^{k-1} \mathcal{A}_k \mathbf{G}_1 \right] \mathbf{Q}_s dx, \quad i = 1, \dots, s-1. \quad (5.14)$$

6. Построение интегральных преобразований

Пусть $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интеграл по комплексной переменной λ

$$\mathcal{J}_\varepsilon \mathbf{u} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} \mathcal{R}_\lambda \mathcal{A}_0 \mathbf{u} d\lambda. \quad (6.1)$$

Пусть Γ — замкнутый контур, который ограничивает область, содержащую конечное число N полюсов резольвенты \mathcal{R}_λ . Полагаем также, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора \mathcal{L}_λ . Тогда, согласно теореме Коши

$$\mathcal{J}_\varepsilon \mathbf{u} = \mathcal{R}_0 \mathcal{A}_0 \mathbf{u} + \sum_i^N \text{Res}_i \left[\frac{1}{\lambda} \mathcal{R}_\lambda \mathcal{A}_0 \mathbf{u} \right].$$

Поскольку $\mathcal{R}_0 \mathcal{A}_0 = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} — сужение \mathbf{I} на \mathcal{D} , а вычеты находятся по первому оператору разложения резольвенты в ряд Лорана (5.1)

$$\text{Res}_i \left[\frac{1}{\lambda} \mathcal{R}_\lambda \mathcal{A}_0 \mathbf{u} \right] = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_1 \mathcal{A}_0 \mathbf{u},$$

то, с учетом (5.10), справедливо равенство

$$\mathbf{u} = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{R}_{1i} \mathcal{A}_0 \mathbf{u} + \mathcal{J}_\varepsilon \mathbf{u} = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \mathcal{K}_{1i} \mathcal{Q}_{1i} \langle \mathcal{K}_{1i}^*, \mathcal{A}_0 \mathbf{u} \rangle + \mathcal{J}_\varepsilon \mathbf{u}.$$

Если $\forall \varepsilon > 0$ существует контур Γ такой, что $|\mathcal{J}_\varepsilon \mathbf{u}| < \varepsilon$, то имеет место разложение

$$\mathbf{u} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \mathcal{K}_{1i} \mathcal{Q}_{1i} \langle \mathcal{K}_{1i}^*, \mathcal{A}_0 \mathbf{u} \rangle,$$

которое и определяет прямое несимметричное конечное интегральное преобразование \mathcal{F}^* и формулу его обращения \mathcal{F} , т.е.

$$\varphi = \mathcal{F}^* \mathbf{u} = -\frac{1}{\lambda} \langle \mathcal{K}^*, \mathcal{A}_0 \mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} = \mathcal{F} \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_{1i} \mathcal{Q}_{1i} \varphi, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{F} \mathcal{F}^* = \mathbf{I}'. \quad (6.3)$$

Заметим, что при отсутствии присоединенных векторов формуле прямого преобразования можно придать такой вид

$$\varphi = \mathcal{F}^* \mathbf{u} = \left\langle \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}^{j-1} \mathcal{A}_j^* \mathcal{K}^*, \mathbf{u} \right\rangle. \quad (6.4)$$

В частных случаях из (6.4) следуют векторные интегральные преобразования [4] (спектр прост, $m = 1$, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^*$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{I}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$); многокомпонентные и матричные преобразования [2, 14] (спектр содержит кратные значения, $m = 1$, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^*$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^* = \mathbf{H}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$); биортогональные преобразования [3] (спектр прост, $m = 1$).

Существование контуров Γ , на которых интеграл \mathcal{J}_ε принимает сколь угодно малые значения, является существенным для приводимого здесь построения. Для уравнений вида (1.1) это сводится к требованию регулярности краевых условий [13].

Из конструкции прямого преобразования непосредственно вытекает операционное свойство

$$\sum_{i=0}^m \left[\bar{\Lambda}^{-\Gamma} \right]^i \mathcal{F}_\lambda^* \mathcal{A}_i = 0. \quad (6.5)$$

Здесь Λ — жордановы матрицы, которые после соответствующей перестановки строк приводятся к каноническому виду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Соотношения (6.3) (6.5) являются обобщением операционного свойства и обратимости преобразования, используемых в алгоритмической процедуре КИП [4].

7. Решение начально-краевой задачи

Перейдем теперь к построению решения задачи Коши с операторными коэффициентами (1.5). Сначала рассмотрим задачу первого порядка по t :

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{y} + \mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y} \right|_{t=0} = \mathbf{y}_0. \quad (7.1)$$

Действуем на левую и правую части равенства (7.1) прямым преобразованием \mathcal{F}^* , порождаемым линейным пучком

$$\mathcal{F}^* \mathcal{A}_0 \mathbf{y} + \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y} = \mathcal{F}^* \mathbf{f}.$$

Поскольку \mathcal{F}^* и \mathcal{A}_1 не зависят от t , то

$$\mathcal{F}^* \mathcal{A}_0 \mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1 \mathbf{y} = \mathcal{F}^* \mathbf{f}. \quad (7.2)$$

Воспользовавшись операционным свойством (6.5)

$$\mathcal{F}^* \mathcal{A}_0 \mathbf{y} + \bar{\Lambda}^{-\top} \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1 \mathbf{y} = 0, \quad (7.3)$$

приведем (7.2) к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^{-\top} \right) \varphi = \Phi,$$

где $\varphi = \mathcal{F} \mathcal{A} \mathbf{y}$, $\Phi = \mathcal{F} \mathbf{f}$, Λ — блочно-диагональная жорданова матрица (6.6). Обращая оператор $\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^{-\top} \right)$, приходим к

$$\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^{-\top} \right)^{-1} \Phi.$$

Если теперь принять во внимание обратимость интегрального преобразования (6.3), то решение задачи (7.1) можно представить в виде

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^{-\top} \right)^{-1} \mathcal{F}^* \mathbf{f}.$$

Формулируя оператор $\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^{-\top} \right)^{-1}$ в терминах матричной экспоненты и учитывая начальные условия для трансформанты $\varphi_0 = \mathcal{F}^* \mathcal{A} \mathbf{y}_0$, окончательно получим следующее представление решения:

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \left[\exp(\bar{\Lambda}^{-\top} t) \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1 \mathbf{y}_0 + \int_0^t \exp[\bar{\Lambda}^{-\top} (t - \tau)] \mathcal{F}^* \mathbf{f}(\tau) d\tau \right]. \quad (7.4)$$

В общем случае задача (1.5) может быть сведена к (7.1), если положить $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}$ и сформулировать расширенную систему операторных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 \mathbf{y}_1 + \sum_{i=1}^m \mathcal{A}_i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}_i &= \mathbf{f}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}_{i-1} - \mathbf{y}_i &= 0, \quad i = 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (7.5)$$

а начальные условия определить следующим образом:

$$\mathbf{y}_i \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{y} \Big|_{t=0} = \mathbf{y}_0^{(i-1)}. \quad (7.6)$$

Начально-краевой задаче (7.5), (7.6) соответствует линейный пучок, действующий в расширенном пространстве вектор-функций $\tilde{H}_\mu^2 = (\tilde{L}_\mu^2)^m$

$$\mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_1 = 0, \quad (7.7)$$

где операторы $\mathcal{H}_{0,1}$ образуются из блоков \mathcal{A}_i полиномиального пучка \mathcal{L}_λ

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \dots & \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопряженный к (7.7) пучок определяется операторными коэффициентами сопряженного пучка \mathcal{L}_λ^*

$$\mathcal{H}_0^* + \lambda \mathcal{H}_1^* = 0,$$

$$\mathcal{H}_0^* = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_1^* = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^* & I & \dots & 0 \\ \mathcal{A}_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{m-1}^* & 0 & \dots & I \\ \mathcal{A}_m^* & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Повторяя построения, приведенные выше для линейного пучка, получим представление решения в виде

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \left[\exp(\bar{\Lambda}^T t) \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m \bar{\Lambda}^{T(j-i)} \mathcal{F}^* \mathcal{A}_j \mathbf{y}_0^{(i-1)} + \int_0^t \exp[\bar{\Lambda}^T (t - \tau)] \mathcal{F}^* \mathbf{f}(\tau) d\tau \right]. \quad (7.8)$$

8. Задача об изгибе вращающегося вязкоупругого стержня

Исследование вынужденных колебаний упругих тел с учетом сил вязкого сопротивления приводит к построению диссипативных математических моделей, качественно соответствующих физике нестационарных процессов. Один из способов учета вязкости материала основан на использовании в расчетной модели вязкоупругих законов состояния. Наиболее простым является закон Фойгта, согласно которому связь между напряжениями σ_{ij} и деформациями ϵ_{ij} записывается в форме

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \left(1 + k \frac{\partial}{\partial t} \right) \epsilon_{kl}, \quad (8.1)$$

где E_{ijkl} — тензор упругих характеристик, k — коэффициент внутреннего трения.

Вопросам построения подобных моделей посвящена обширная литература [6]. При этом математическая формулировка сводится к несамосопряженным начально-краевым задачам, исследование которых связано со спектральным анализом операторных пучков, и доказательству полноты систем их собственных и присоединенных функций. Как уже отмечалось, в теории несамосопряженных операторов отсутствуют универсальные теоремы разложения, и полнота спектральных представлений (или возможность построения замкнутых контуров Γ для сколь угодно малых значений \mathcal{J}_ϵ (6.1)) обосновывается для отдельных классов задач различным образом. Так, в статье [20] из анализа асимптотических свойств ядра резольвенты установлена полнота собственных и присоединенных функций операторного пучка, определяющего поперечные колебания вращающегося стержня при наличии сил вязкого сопротивления. В настоящей работе посредством несимметричных интегральных преобразований (6.2) построены спектральные представления (7.8) для решений соответствующей нестационарной начально-краевой задачи.

Исследуются поперечные колебания стержня постоянного сечения, вращающегося без ускорения с угловой скоростью ω . Площадь сечения стержня составляет величину A , моменты инерции сечения относительно осей Y, Z равны $J_y = J_z = J$. Стержень изготовлен из изотропного вязкоупругого материала с модулем упругости E , плотностью ρ и коэффициентом внутреннего трения k .

Поперечные колебания стержня моделируется в соответствии с гипотезами Бернулли, что приводит к следующим уравнениям движения в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} B \frac{\partial^4}{\partial x^4} u + Bk\omega \frac{\partial^4}{\partial x^4} w + Bk \frac{\partial^5}{\partial t \partial x^4} u + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u &= f_x, \\ B \frac{\partial^4}{\partial x^4} w - Bk\omega \frac{\partial^4}{\partial x^4} u + Bk \frac{\partial^5}{\partial t \partial x^4} w + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} w &= f_y. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь x — пространственная координата; t — время; $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ — перемещения в направлении осей Y, Z ; $f_y = f_y(x, t)$, $f_z = f_z(x, t)$ — распределенные динамические нагрузки; $B = EJ$; $m = \rho A$. Наиболее общим упругим способом закрепления концов стержня соответствуют краевые условия

$$\begin{aligned} \nu_y^{1,2} u + \mu_y^{1,2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \Big|_{x=0,l} &= \nu_z^{1,2} v + \mu_z^{1,2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v \Big|_{x=0,l} = 0, \\ \nu_y^{3,4} \frac{\partial}{\partial x} u + \mu_y^{3,4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \Big|_{x=0,l} &= \nu_z^{3,4} \frac{\partial}{\partial x} v + \mu_z^{3,4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v \Big|_{x=0,l} = 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где $\nu_{y,z}^{1,2,3,4}$, $\mu_{y,z}^{1,2,3,4}$ — положительные упругие характеристики опор. Соотношения (8.2), (8.3) совместно с начальными условиями

$$u \Big|_{t=0} = u_0(x), \quad w \Big|_{t=0} = w_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u \Big|_{t=0} = u_1(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} w \Big|_{t=0} = w_1(x) \quad (8.4)$$

представляют математическую формулировку рассматриваемой задачи.

Решение задачи (8.2)–(8.4) будем искать в классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом. Для этого на множестве комплекснозначных вектор-функций, отображающих сегмент $\mathbf{I} = [0, x] \subset \mathbf{R}$ на $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, введем гильбертово пространство (1.4) со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^l \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{v}} dx. \quad (8.5)$$

Функции, удовлетворяющие краевым условиям (8.3), принадлежат области $D \subset \tilde{L}_\mu^2$. Определим операторы

$$A_0 = \begin{pmatrix} B & B\omega k \\ -B\omega k & B \end{pmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} Bk & 0 \\ 0 & Bk \end{pmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Начально-краевая задача (8.2)–(8.4) может быть сформулирована для заданной динамической нагрузки $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, t)$, $\forall t \in [0, \infty[$ $\mathbf{f} \in \tilde{L}_\mu^2$, начальных условий $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \in \mathcal{D}$, относительно искомой вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ в виде задачи Коши с операторными коэффициентами

$$A_0 \mathbf{y} + A_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D} \cap C^4, \quad \mathbf{y} \Big|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y} \Big|_{t=0} = \mathbf{u}_1. \quad (8.7)$$

Операторная задача Коши (8.7) порождает квадратичный пучок

$$\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{A}_0 + \lambda \mathcal{A}_1 + \lambda^2 \mathcal{A}_2. \quad (8.8)$$

Сопряженный пучок, согласно теореме 1, имеет вид

$$\mathcal{L}_\lambda^* = \mathcal{A}_0^* + \bar{\lambda} \mathcal{A}_1 + \bar{\lambda}^2 \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{A}_0^* = \begin{pmatrix} B & -B\omega k \\ B\omega k & B \end{pmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4}. \quad (8.9)$$

При этом $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$. Имеет место следующая теорема о полноте.

Теорема 3. Если квадратичный пучок (8.8) образован операторами (8.6), то спектр пучка σ состоит из четырех последовательностей собственных значений конечной кратности с точками накопления ∞ , $k^{-1} \pm i\omega$, собственные и присоединенные функции пучка формируют полный базис в \tilde{L}_{II}^2 .

Доказательство теоремы приведено в [20].

Теорема фактически устанавливает существование контуров Γ для любых сколь угодно малых величин J_ε (6.1) и тем самым гарантирует справедливость представлений (6.2) для решения начально-краевой задачи (8.2)–(8.4) в виде

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \left[\exp(\bar{\Lambda}^\top t) \left(\mathcal{F}^* \mathcal{A}_1^* \mathbf{u}_0 + \bar{\Lambda}^\top \mathcal{F}^* \mathcal{A}_2^* \mathbf{u}_0 + \mathcal{F}^* \mathcal{A}_2^* \mathbf{v}_0 \right) + \int_0^t \exp[\bar{\Lambda}^\top (t - \tau)] \mathcal{F}^* \mathbf{F}(\tau) d\tau \right]. \quad (8.10)$$

Используемые здесь операторы интегрального преобразования \mathcal{F}^* , \mathcal{F} в общем случае определяются соотношениями (6.2).

В частном случае шарнирного закрепления спектр состоит из простых собственных значений, которые образуют четыре последовательности

$$\begin{aligned} \lambda_{1n}, \lambda_{2n} &= -\frac{\pi^2 n^2}{2lm^4} \left(Bk\pi^2 n^2 \pm \sqrt{4imB(i+k\omega)l^4 + B^2 k^2 n^2 \pi^4} \right), \quad n = 1, \dots, \infty, \quad i = \sqrt{-1}, \\ \lambda_{3n}, \lambda_{4n} &= -\frac{\pi^2 n^2}{2lm^4} \left(Bk\pi^2 n^2 \pm \sqrt{4imB(i-k\omega)l^4 + B^2 k^2 n^2 \pi^4} \right), \quad n = 1, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Перемещения стержня определяют следующие разложения, вытекающие из (8.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \sum_{j=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\langle \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_{jn}^* + \bar{\lambda}_{jn} \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_{jn}^*, \mathbf{u}_0 \rangle + \langle \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_{jn}^*, \mathbf{v}_0 \rangle \right) \exp(\bar{\lambda}_{jn} t) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left(\langle \mathbf{F}(x, \tau), \mathbf{e}_{jn}^* \rangle \exp[\bar{\lambda}_{jn}(t - \tau)] \right) d\tau \right] \frac{\mathbf{e}_{jn}}{N_{jn}}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

где \mathbf{e}_{jn} , \mathbf{e}_{jn}^* — собственные функции порожденной задачей (8.8) и сопряженной (8.9) пучков

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1n} = \mathbf{e}_{2n} &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \sin \left[\frac{n\pi}{l} x \right], \quad \mathbf{e}_{3n} = \mathbf{e}_{4n} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \sin \left[\frac{n\pi}{l} x \right], \\ \mathbf{e}_{1n}^* = \mathbf{e}_{2n}^* &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \sin \left[\frac{n\pi}{l} x \right], \quad \mathbf{e}_{3n}^* = \mathbf{e}_{4n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \sin \left[\frac{n\pi}{l} x \right], \\ N_{jn} &= -\frac{n\pi}{l^4} (Bn^3 \pi^3 [2i(k\omega + i) \mp \lambda_{jn}]), \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

9. Соотношения биортогональности

Остановимся подробнее на общих свойствах взаимных базисов \mathbf{e}_j , \mathbf{e}_j^* квадратичных пучков и порождаемых ими представлений вида (8.10). Соотношения биортогональности, аналогичные [3], устанавливает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть \mathcal{L}_λ — квадратичный пучок вида (8.8), \mathcal{Y}_i — его собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ_i , пучок \mathcal{L}_λ^* — сопряженный к \mathcal{L}_λ , \mathcal{Y}_i^* — собственное подпространство \mathcal{A}_λ^* , соответствующее собственному значению λ_j . Если $\mathbf{k}_i \in \mathcal{Y}_i$, $\mathbf{k}_j^* \in \mathcal{Y}_j^*$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$, то

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle + (\lambda_i + \lambda_j) \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle &= 0, \\ \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle - \lambda_i \lambda_j \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Доказательство. Из равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\lambda_i} \mathbf{k}_i &= \mathcal{A}_0 \mathbf{k}_i + \lambda_i \mathcal{A}_1 \mathbf{k}_i + \lambda_i^2 \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i = 0, \\ \mathcal{L}_{\lambda_j}^* \mathbf{k}_j^* &= \mathcal{A}_0^* \mathbf{k}_j^* + \bar{\lambda}_j \mathcal{A}_1^* \mathbf{k}_j^* + \bar{\lambda}_j^2 \mathcal{A}_2^* \mathbf{k}_j^* = 0 \end{aligned}$$

следуют соотношения

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{k}_i + \lambda_i \mathcal{A}_1 \mathbf{k}_i + \lambda_i^2 \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle &= \langle 0, \mathbf{k}_j^* \rangle = 0, \\ \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{k}_i + \lambda_j \mathcal{A}_1 \mathbf{k}_i + \lambda_j^2 \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle &= \langle \mathbf{k}_i, \mathcal{A}_0^* \mathbf{k}_j^* + \bar{\lambda}_j \mathcal{A}_1^* \mathbf{k}_j^* + \bar{\lambda}_j^2 \mathcal{A}_2^* \mathbf{k}_j^* \rangle = \langle \mathbf{k}_i, 0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Воспользуемся линейностью скалярного произведения и преобразуем (9.2) к виду уравнений второй степени относительно λ

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle + \lambda_i \langle \mathcal{A}_1 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle + \lambda_i^2 \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle &= 0, \\ \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle + \lambda_j \langle \mathcal{A}_1 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle + \lambda_j^2 \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Согласно теореме Виета,

$$\lambda_i + \lambda_j = -\langle \mathcal{A}_1 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle^{-1}, \quad \lambda_i \lambda_j = \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^* \rangle^{-1},$$

откуда и вытекают доказываемые равенства (9.1).

Таким образом, последовательности вектор-функций $\{\mathbf{k}_i\}_{i=1}^\infty, \{\mathbf{k}_i^*\}_{i=1}^\infty$ образуют биортогональную систему, нормировка которой определяется величинами

$$\begin{aligned} n_i &= \langle \mathcal{A}_1 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i^* \rangle + 2\lambda_i \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i^* \rangle, \\ N_i &= \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i^* \rangle - \lambda_i^2 \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i^* \rangle. \end{aligned}$$

Доказанное в теореме 3 свойство последовательности $\{\mathbf{k}_i\}_{i=1}^\infty$ образовывать в \tilde{L}_μ^2 базис обеспечивает отличие от нуля всех n_i, N_i , что позволяет ввести биортогональный нормированный базис двумя способами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \sqrt{n_i} \mathbf{k}_i, \quad \mathbf{e}_i^* = \sqrt{n_i} \mathbf{k}_i^*; \quad \langle \mathcal{A}_1 \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^* \rangle + (\lambda_i + \lambda_j) \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^* \rangle = \delta_{ij}, \\ \mathbf{E}_i &= \sqrt{N_i} \mathbf{k}_i, \quad \mathbf{E}_i^* = \sqrt{N_i} \mathbf{k}_i^*; \quad \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j^* \rangle - \lambda_i \lambda_j \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j^* \rangle = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Дальнейшие построения можно осуществлять с помощью любого из них с одинаковым успехом. Для определенности выберем первый способ. Тогда разложения по прямым $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ и сопряженным $\{e_i^*\}_{i=1}^\infty$ базисным элементам могут быть представлены в виде (φ_i, φ_i^* — комплексные числа)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^* \mathbf{e}_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i (\mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \lambda_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*). \quad (9.3)$$

10. Разложения по базисным функциям

Для комплексных последовательностей φ_i, φ_i^* имеет место аналог теоремы Рисса—Фишера, справедливой для одновременного представления пары функций.

Теорема 5. Если $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi_i \bar{\varphi}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle (1 + \lambda_i \bar{\lambda}_j) < \infty, \quad (10.1)$$

то существуют $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \tilde{L}_{\mu}^2$, удовлетворяющие условиям:

$$\|\mathbf{f} - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \mathbf{e}_i\| = \|\mathbf{f} - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^* (A_1 \mathbf{e}_i^* + \lambda_i A_2 \mathbf{e}_i^*)\| = 0, \quad (10.2)$$

$$\|\mathbf{g} - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i \mathbf{e}_i\| = \|\mathbf{g} - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^* A_2 \mathbf{e}_i^*\| = 0, \quad (10.3)$$

где

$$\varphi_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle (1 + \lambda_i \bar{\lambda}_j) \varphi_j. \quad (10.4)$$

Доказательство. Рассмотрим конечные суммы $\mathbf{f}_n, \mathbf{g}_n$:

$$\mathbf{f}_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{g}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{f}_n, \mathbf{g}_n \in \tilde{L}_{\mu}^2.$$

Покажем, что последовательности $\{\mathbf{f}_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\mathbf{g}_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются фундаментальными в \tilde{L}_{μ}^2 . В самом деле, для произвольных n, m

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_{n+m} - \mathbf{f}_n\|^2 + \|\mathbf{g}_{n+m} - \mathbf{g}_n\|^2 &= \left\| \sum_{i=n}^{n+m} \varphi_i \mathbf{e}_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=n}^{n+m} \lambda_i \varphi_i \mathbf{e}_i \right\|^2 = \\ &= \sum_{i,j=n}^{n+m} \varphi_i \bar{\varphi}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle + \sum_{i,j=n}^{n+m} \varphi_i \bar{\varphi}_j \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i,j=n}^{n+m} \varphi_i \bar{\varphi}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle (1 + \lambda_i \bar{\lambda}_j). \end{aligned}$$

Поскольку величины $\sum_{i,j=1}^N \varphi_i \bar{\varphi}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle (1 + \lambda_i \bar{\lambda}_j)$ действительны, положительны и в силу условия теоремы ограничены, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n , что для всех $m > n$

$$\sum_{i,j=n}^{n+m} \varphi_i \bar{\varphi}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle (1 + \lambda_i \bar{\lambda}_j) < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon \exists n \forall m \|\mathbf{f}_{n+m} - \mathbf{f}_n\| + \|\mathbf{g}_{n+m} - \mathbf{g}_n\| < \varepsilon. \quad (10.5)$$

Так как норма $\|\cdot\|$ — неотрицательный функционал на \tilde{L}_{μ}^2 , то из (10.5) вытекают неравенства

$$\|\mathbf{f}_{n+m} - \mathbf{f}_n\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{g}_{n+m} - \mathbf{g}_n\| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательности $\{\mathbf{f}_n\}$, $\{\mathbf{g}_n\}$ фундаментальны в \tilde{L}_μ^2 . Пространство \tilde{L}_μ^2 полно и потому в нем имеются предельные элементы \mathbf{f} , \mathbf{g} этих последовательностей

$$\|\mathbf{f} - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \mathbf{e}_i\| = \|\mathbf{g} - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mathbf{e}_i\| = 0.$$

Рассмотрим теперь конечные суммы \mathbf{f}_n^* , \mathbf{g}_n^*

$$\mathbf{f}_n^* = \sum_{i=1}^n \psi_i (\mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \lambda_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*), \quad \mathbf{g}_n^* = \sum_{i=1}^n \psi_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \quad \mathbf{f}_n^*, \mathbf{g}_n^* \in \tilde{L}_\mu^2,$$

где ψ_i определяется выражением

$$\psi_i^* = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle (1 + \lambda_i \bar{\lambda}_j) \varphi_j.$$

Вычислим нормы разностей

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n^*\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n [\varphi_i \mathbf{e}_i - \psi_i (\mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*)] \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left[\varphi_i \bar{\varphi}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle - \varphi_i \bar{\psi}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_j^* + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda}_j \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle - \psi_i \bar{\varphi}_j \langle \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j \rangle + \psi_i \bar{\psi}_j \langle \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_j^* + \bar{\lambda}_j \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_n^*\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n [\varphi_i \lambda_i \mathbf{e}_i - \psi_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*] \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left[\varphi_i \bar{\varphi}_j \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_i \bar{\psi}_j \lambda_i \langle \mathbf{e}_i, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle - \psi_i \bar{\varphi}_j \bar{\lambda}_j \langle \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j \rangle + \psi_i \bar{\psi}_j \langle \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle \right] \end{aligned}$$

и сложим полученные выражения

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n^*\|^2 + \|\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_n^*\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left[\varphi_i \bar{\varphi}_j (1 + \lambda_i \bar{\lambda}_j) \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle - \varphi_i \bar{\psi}_j \left(\langle \mathbf{e}_i, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* + \bar{\lambda}_j \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_i \langle \mathbf{e}_i, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle \right) - \psi_i \bar{\varphi}_j \left(\langle \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j \rangle + \bar{\lambda}_j \langle \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j \rangle \right) + \right. \\ &\quad \left. + \psi_i \bar{\psi}_j \left(\langle \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_j^* + \bar{\lambda}_j \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle + \langle \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle \right) \right]. \quad (10.6) \end{aligned}$$

Сумма первых слагаемых (10.6) в соответствии с (10.4) может быть представлена в форме

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi_i \bar{\varphi}_j (1 + \lambda_i \bar{\lambda}_j) \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \varphi_i \bar{\psi}_i.$$

Вторые и третьи слагаемые (10.6) в силу соотношения биортогональности (9.1) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \varphi_i \bar{\psi}_j \left(\langle \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j \rangle + (\lambda_i + \lambda_j) \langle \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j^* \rangle \right) &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \bar{\psi}_i, \\ \sum_{i,j=1}^n \psi_i \bar{\varphi}_j \left(\langle \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_j^* + \bar{\lambda}_j \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle + \langle \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle \right) &= \sum_{i=1}^n \psi_i \bar{\varphi}_i. \end{aligned}$$

Из взаимности базисов $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*$ вытекает равенство

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n \psi_j [\langle \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_j^* + \bar{\lambda}_j \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle + \langle \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle].$$

Воспользуемся этим выражением для преобразования последних слагаемых (10.6):

$$\sum_{i,j=1}^n \psi_i \bar{\psi}_j (\langle \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_j^* + \bar{\lambda}_j \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle + \langle \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_j^* \rangle) = \sum_{i=1}^n \psi_i \bar{\varphi}_i.$$

Суммируем результаты:

$$\|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n^*\|^2 + \|\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_n^*\|^2 = \sum_{i=1}^n [\varphi_i \bar{\psi}_i - \varphi_i \bar{\psi}_i - \psi_i \bar{\varphi}_i + \psi_i \bar{\varphi}_i] = 0,$$

причем из положительности нормы следует, что

$$\|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n^*\| = \|\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_n^*\| = 0.$$

Воспользовавшись неравенством треугольника, получим

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n^*\| = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n^*\| \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| + \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n^*\| = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| < \varepsilon.$$

Аналогичные построения приводят к неравенству

$$\|\mathbf{g} - \mathbf{g}_n^*\| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательности $\{\mathbf{f}_n^*\}, \{\mathbf{g}_n^*\}$ фундаментальны в \tilde{L}_μ^2 и сходятся соответственно к \mathbf{f}, \mathbf{g} :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} - \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i^* \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \lambda_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*)\| &= \|\mathbf{g} - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^* \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*\| = 0, \\ \varphi_i^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_i = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle (1 + \lambda_i \bar{\lambda}_j). \end{aligned}$$

Для полной биортогональной системы $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}_i^*\}$ оказывается справедливой следующая теорема разложения.

Теорема 6. Если система функций $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна в \tilde{L}_μ^2 , то каждой паре вектор-функций $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \tilde{L}_\mu^2$ соответствует последовательность комплексных чисел $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\varphi_i = \langle \mathbf{f}, \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^* \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^* \rangle, \quad (10.7)$$

которые являются коэффициентами разложения пары $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ по функциям $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\|\mathbf{f} - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \mathbf{e}_i\| = \|\mathbf{g} - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i \mathbf{e}_i\| = 0. \quad (10.8)$$

Последовательность $\{\varphi_i^*\}_{i=1}^{\infty}$, двойственная к $\{\varphi_i\}$:

$$\varphi_i^* = \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle + \bar{\lambda}_i \langle \mathbf{g}, \mathbf{e}_i \rangle, \quad (10.9)$$

определяет разложение $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ по базисным функциям $\{\mathbf{e}_i^*\}$

$$\|\mathbf{f} - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^* (\mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \lambda_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*)\| = \|\mathbf{g} - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^* \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*\| = 0. \quad (10.10)$$

Доказательство теоремы осуществляется по стандартной схеме [17,22] с учетом соотношений биортогональности (9.1) и представлений (10.2)–(10.3).

Теорема 6 позволяет построить формулы разложения $\forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \bar{L}_\mu^2$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^0 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle \mathbf{f}, \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^* \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^* \rangle \right] \mathbf{e}_i, & \mathbf{f}^1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle + \bar{\lambda}_i \langle \mathbf{g}, \mathbf{e}_i \rangle \right] (\mathcal{A}_1^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^*) \mathbf{e}_i^*, \\ \mathbf{g}^0 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle \mathbf{f}, \mathcal{A}_1^* \mathbf{e}_i^* + \bar{\lambda}_i \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^* \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^* \rangle \right] \lambda_i \mathbf{e}_i, & \mathbf{g}^1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle + \bar{\lambda}_i \langle \mathbf{g}, \mathbf{e}_i \rangle \right] \mathcal{A}_2^* \mathbf{e}_i^*, \end{aligned}$$

а также двойственные к ним формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^0 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle \mathbf{f}, \mathcal{A}_1 \mathbf{e}_i + \lambda_i \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_i \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_i \rangle \right] \mathbf{e}_i^*, & \mathbf{f}^1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i^* \rangle + \lambda_i \langle \mathbf{g}, \mathbf{e}_i^* \rangle \right] (\mathcal{A}_1 + \lambda_i \mathcal{A}_2) \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{g}^0 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle \mathbf{f}, \mathcal{A}_1 \mathbf{e}_i + \lambda_i \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_i \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_i \rangle \right] \bar{\lambda}_i \mathbf{e}_i^*, & \mathbf{g}^1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i^* \rangle + \lambda_i \langle \mathbf{g}, \mathbf{e}_i^* \rangle \right] \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

которые удовлетворяют равенствам

$$\|\mathbf{f}^0 - \mathbf{f}\| = \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}\| = \|\mathbf{f}^1 - \mathbf{f}\| = \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}\| = 0.$$

Из полученных представлений для простого спектра вытекает разложение (8.10).

11. Численные результаты

В заключение приведем некоторые результаты численного эксперимента, осуществленного по формулам (8.11), (8.12). Суммирование спектральных представлений осуществлялось методом Фейера [21].

Рассматривался шарнирно закрепленный вязкоупругий изгибаемый стержень со следующими характеристиками:

$$B = 1600 \text{ Н/м}^2, \quad m = 2 \text{ кг/м}^3, \quad l = 1 \text{ м}, \quad \omega = 100 \text{ с}^{-1}, \quad k = 0.001 \text{ с}.$$

Точечный спектр показан на рис. 1. На рисунке отчетливо видно сгущение спектра в окрестностях точек $k^{-1} \pm i\omega$.

На рис. 2 изображены спектральные траектории, которые показывают зависимость собственных значений от коэффициента внутреннего трения k . При $k = 0$ собственные значения становятся чисто мнимыми, что соответствует переходу к упругой задаче об изгибе в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Осциллограммы и эпюры прогибов стержня при действии в вертикальной плоскости внезапно приложенного равномерно распределенного по длине стержня короткого прямоугольного импульса приведены на рис. 3, 4. Возникновение колебаний в горизонтальной плоскости объясняется связанностью вязкоупругой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ по фундаментальным исследованиям в области технических наук ТОО 121–2109.

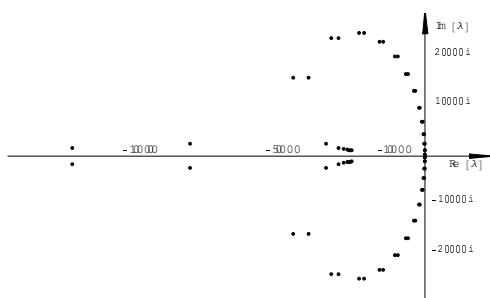


Рис. 1. Распределение собственных значений

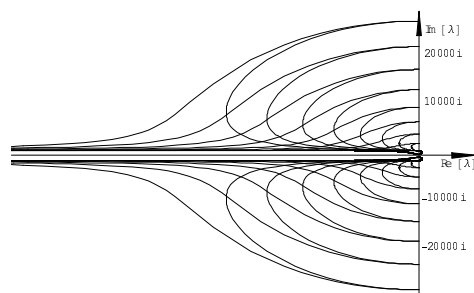


Рис. 2. Частотные траектории

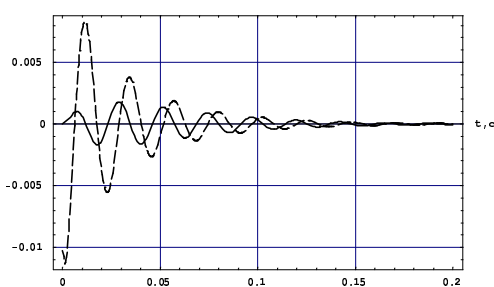


Рис. 3. Осциллограммы перемещений (— $u(t)$, м; - - - $v(t)$, м; $x = 0.5$ м)

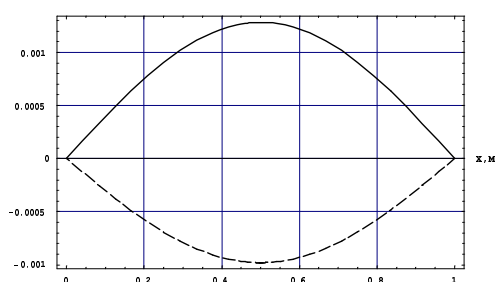


Рис. 4. Эпюры перемещений (— $u(x)$, м; - - - $v(x)$, м; $t = 0.05$ с)

Литература

- [1] Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. М.:Наука, 1986. 303 с.
- [2] Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1991. №4. С. 57–63.
- [3] Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1996. №8. С. 71–81.
- [4] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. 176 с.
- [5] Сеницкий Ю.Э. Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного интегрального преобразования // Изв. вузов. Математика. 1991. №9. С. 53–56.
- [6] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
- [7] Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.
- [8] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [9] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 437 с.
- [10] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.

- [11] Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.: Наука, 1969. 287 с.
- [12] Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986. 260 с.
- [13] Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26. Вып. 4(160). С. 15–41.
- [14] Лычев С.А., Сидоров Ю.В. Нестационарные колебания трехслойных сферических оболочек с кратным спектром // Изв. вузов. Строительство. 2001. № 4. С. 31–39.
- [15] Сеницкий Ю.Э. Динамика неоднородной непологой сферической оболочки // Известия РАН. МТТ. 2002. № 6. С. 144–157.
- [16] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000. 336 с.
- [17] Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир. 1983. 431 с.
- [18] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972. 740 с.
- [19] Сеницкий Ю.Э., Лычев С.А. Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложения // Изв. вузов. Математика. 1999. № 8. С. 60–69.
- [20] Adamjan V., Pivovarchik V., Tretter C. On a class of non-selfadjoint quadratic matrix operator pencils in elasticity theory // Journal of Operator Theory. V. 47, № 2, 2002. P. 325–341.
- [21] Харди Г.Х., Рогозинский В.В. Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1959. 156 с.
- [22] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

NONSYMMETRIC FINITE INTEGRAL TRANSFORMATIONS AND THEIR APPLICATION TO VISCO-ELASTICITY PROBLEMS⁶

© 2002 S.A. Lychev⁷ Y.E. Senitskii⁸

In this paper a new class of nonsymmetric finite integral transformations generated by nonselfconjugate differential pencils is proposed. By the introduced transformations the solutions of nonconjugate initial boundary-value problems in the space of square integrable vector-functions are obtained. Integral transformations technique are demonstrated by dynamic problem of rotating visco-elastic beam.

Поступила в редакцию 29/XI/2002;
в окончательном варианте — 15/XII/2002.

⁶ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

⁷ Lychev Sergey Alexandrovitch, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

⁸ Senitskii Yuriy Edwardowitch, Dept. of Structural Mechanics, Samara State Architectural Academy, Samara, 443001, Russia.