

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем механики

Н.Г.Бураго, В.Н.Кукуджанов

Численное решение задач континуального разрушения

ПРЕПРИНТ No. 746

МОСКВА 2004

АННОТАЦИЯ

Излагаются теоретические основы и методика решения задач континуального разрушения для моделей повреждающейся упругопластической среды. Дан термодинамический вывод определяющих соотношений, сформулирована общая начально-краевая задача и описана неявная конечно-элементная схема решения задач континуального разрушения. Расчеты выполняются с учетом сил инерции независимо от скорости разрушения, что позволяет учитывать возрастание скорости изменения напряженно-деформированного состояния с развитием зон разрушения с ослабленным сопротивлением деформации. Переменный шаг по времени выбирается из условия точности, которое обеспечивает достаточную малость приращений деформации.

Представлено решение ряда двумерных задач о разрушении и локализации деформаций, в которых реализован режим хрупкого разрушения, при котором узкие зоны разрушения моделируют распространение магистральных трещин. Рассмотрены примеры разрушения стандартного образца при растяжении, задача об обрушении склона под действием веса сооружения, задача о резке металлического листа, задача о растрескивании толстого кругового кольца при сдавливании жесткими штампами, задача о динамическом разрушении преграды при высокоскоростном ударе тяжелым ударником. Даны рекомендации по численному моделированию хрупкого разрушения с использованием теорий поврежденности и схем сквозного счета.

1. Введение

Описание процессов разрушения основывается на представлениях о разрушении как о потере способности материала к сопротивлению деформации вследствие нарушения внутренних связей с ростом концентрации микротрещин. Потеря способности материала к сопротивлению деформации может вызываться как внешними воздействиями нетермомеханической природы (химические реакции, облучение), так и термомеханически при достижении напряженно-деформированным состоянием некоторых пределов, определяемых критериями разрушения.

Критерии разрушения могут формулироваться как локальные ограничения на параметры напряженно-деформированного состояния в бесконечно малом объеме (см. например [36]), как интегральные энергетические теоремы для конечных объемов [38], как критерии, ориентированные на градиенты параметров напряженно-деформированного состояния и характеризующие концентрацию напряжений и деформаций.

Для хрупких материалов считается, что разрушение происходит мгновенно при выполнении критерия разрушения. Такие модели рассматриваются в рамках механики хрупкого разрушения путем явного выделения поверхностей разрушения как контактных разрывов типа магистральных трещин. Подход механики хрупкого разрушения сталкивается с непреодолимыми или, во всяком случае, со значительными трудностями при описании зарождения и развития трещин, особенно при нарастании их числа. Поэтому, подобно тому, как в газовой динамике для расчета множественных разрывов прибегают к схемам сквозного счета, в механике деформируемых сред для расчета более общих случаев разрушения вводят континуальное описание разрушения.

Континуальный подход к описанию процессов разрушения предполагает построение теоретических моделей сплошной среды, описывающих разрушение как процесс на основе единых для разрушенного и неразрушенного состояний материала уравнений. Континуальный подход описывает появление и развитие поверхностей и зон разрушения без явного их выделения, что при численной реализации отвечает методам сквозного счета. Не случайно поэтому континуальный подход стал развиваться одновременно с появлением численных методов и ЭВМ.

Пионерской работой по сквозному счету процессов разрушения по праву считается исследование Майнчена и Сака [29]), не утратившее актуальности и по сей день. В этой работе кинетика разрушения не учитывается, то есть при выполнении критерия разрушения напряженно-деформированное состояние в малом объеме ячейки подвижной лагранжевой расчетной сетки корректируется скачком. Такой подход в принципе позволяет проследить развитие зон разрушения, но оставляет открытыми множество вопросов, связанных с выполнением законов термодинамики. соответствием эксперименту, выбором критерия разрушения, влиянием кинетики процесса разрушения и так далее.

Эксперименты по деформированию и разрушению стандартных образцов при растяжении и сдвиге (кручении полых цилиндров) демонстрируют на диаграммах деформирования участки разупрочнения, на которых напряжения падают с ростом деформаций. При трактовках таких зависимостей надо учитывать, что напряжение и деформация являются не единственными параметрами состояния и, поэтому, такие диаграммы показывают лишь срез многопараметрического процесса.

Применение инкрементальных теорий пластичности типа Прандтля-Рейсса при описании разупрочнения (падение предела текучести с ростом деформации) приводит к некорректным краевым задачам из-за нарушения постулата Драккера или его математического аналога - критерия Адамара. В квазистатике это

связано с утратой уравнениями свойств эллиптичности, а в динамике с нарушениями гиперболичности. Поэтому бесхитрое описание процесса разрушения в рамках стандартных моделей упругопластических материалов оказывается неудачным.

Поэтому, чтобы получить математически корректное описание процессов разрушения, во многих исследованиях в определяющие уравнения инкрементальной пластичности вводятся разного рода регуляризаторы: искусственная или физическая вязкости (теории упруговязкопластичности), пространственное осреднение и нелокальные меры деформации (градиентные теории) и так далее. Градиентные теории разрушения обсуждаются в обзорах [28,1]).

С другой стороны, как уже упоминалось падение напряжений из-за потери материалом способности к сопротивлению деформации может происходить по нетермомеханическим причинам при неизменной деформации. Это говорит о том, что при континуальном описании процессы деформации и разрушения можно и нужно трактовать как независимые (что не исключает взаимовлияния), а развитие разрушения целесообразно характеризовать своим параметром состояния - поврежденностью. Этот важный шаг по пути разработки континуальных теорий разрушения был сделан в работах [20,31,19,11,21,32,27,108]. Поврежденность характеризует плотность микродефектов среды типа микротрещин.

Параметр разрушения или поврежденность подчиняется кинетическому уравнению, является скаляром или тензором второго ранга ([46,28,24,25,42]) и отвечает за способность среды к сопротивлению деформации: с ростом поврежденности, который происходит при выполнении критерия разрушения, сопротивление среды падает: модули упругости с ростом поврежденности стремятся к нулю, о чем свидетельствуют экспериментально фиксируемое падение скоростей распространения малых возмущений. Разупрочнение и разрушение хрупких и квазихрупких материалов сопровождается явлением локализации деформаций в зонах ослабленного сопротивления материала. Для хрупких материалов такие зоны очень узки и представляют контактные разрывы, на которых скорости и перемещения меняются скачкообразно. При континуальном (непрерывном) описании таких разрывов деформации на них имеют всплеск типа дельта-функций, нормальные и касательные к поверхности скачка напряжения стремятся к нулю при нормальных деформациях растяжения или моделируют контактное взаимодействие берегов трещины, включая силы трения и контактное давление, в противном случае.

В подавляющем большинстве используемых численных моделей континуального разрушения (см. например [29],[37]) расчетные зоны разрушения неправдоподобно обширны, а локализация деформаций выражена настолько слабо, что интерпретация результатов расчета процессов разрушения часто зависит от воображения расчетчика. При уменьшении влияния регуляризирующих членов в попытках смоделировать более сильную локализацию деформаций, может появляться аномальная зависимость решения от размера и формы ячеек сетки, означающая потерю сходимости. Поэтому построение численных алгоритмов для аккуратной реализации континуальных моделей разрушения представляет самостоятельную проблему.

Отметим, что картины обширных зон рассеянного разрушения наблюдаются в экспериментах и свойственны материалам с вязким типом разрушения, имеющим сравнительно медленный рост (накопление) плотности микротрещин (поврежденности). Для стандартных образцов разрушение при растяжении сопровождается для таких материалов образованием шейки. Еще более медленное накопление повреждений определяется как усталостное разрушение.

Во многих современных работах теоретические модели континуального разрушения сращиваются с численными алгоритмами их реализации в единое целое, то есть непрерывность решения в зонах разрушения и моделирование разрывов обеспечивается регуляризаторами нефизической природы. Отметим ниже некоторые типичные работы такого типа.

Развитием идей Майнчена-Сака является подход, основанный на моделирование зон разрушения дискретными частицами, предлагавшийся в работах ([147],[43], [89], [90], [17], [18] и в ряде других. Если в лагранжевой ячейке выполняется условие разрушения (по предельному значению деформации, пластической деформации, максимальному главному напряжению, и т.д.), то связи между узлами в таких ячейках освобождаются, напряжения релаксируют к нулю и сопротивление сохраняется только по отношению к сжатию. Лагранжевы узловы массы при разрушении превращаются в самостоятельные частицы, способные к контактному взаимодействию с деформируемыми телами и уносящими массу, импульс и энергию. Подробный обзор и описание такого типа алгоритмов сквозного счета имеется в книге [37].

Имеется направление работ по моделированию разрушения, в которых контактные разрывы, отвечающие магистральным трещинам, выделяются явно в автоматическом режиме, что позволяет трактовать такие алгоритмы как разновидности схем сквозного счета с усложненной логикой.

Такое явное выделение производится сдвоенными узлами, причем положение поверхности разрушения может быть заранее predetermined ([45], [50], [30], [82], [35]) или, в общем случае, такие сдвоенные узлы вводятся в процессе решения с локальной перестройкой сетки [16,34]. Обзор и описание алгоритмов перестройки сеток в окрестности контактных разрывов дано в работах [102,12].

Способ явного выделения вновь образующихся контактных разрывов, не требующий введения новых узлов и основанный на локальной перестройке сетки путем "схлопывания" разрушенной ячейки (путем сдвига ее узлов на поверхность разрушения), предложен в работе [17]. Описание и развитие этого способа можно найти также в работах [22,37].

Отметим ряд алгоритмов в которых нарушения сплошности типа трещин также моделируются на уровне элементов без перестройки сетки [152,141,104], с использованием техники подвижных сеток [134], дополнительных степеней свободы в элементах, содержащих контактный разрыв, которые отвечают разрывным функциям формы [61,63,119,55,56,57,59,62].

По мере обогащения стандартных методов аппроксимации специальными функциями для описания концентрации деформаций в окрестности трещин отдельно для кончиков трещин, отдельно для берегов трещин, логика численных алгоритмов усложняется и возникают значительные трудности в реализации, сравнимые с затруднениями механики хрупкого разрушения при явным выделением множественных растущих трещин.

Два основных дефекта свойственны большинству имеющихся моделей разрушения: 1) неопределенная количественная связь с результатами физических экспериментов и 2) неуверенное поведение численных моделей разрушения из-за сильной чувствительности к параметрам дискретизации. И в физических, и в вычислительных экспериментах результаты сильно меняются при малых изменениях входных данных, что отвечает физике явления разрушения.

Помимо этого, сложности физического, и численного экспериментов обусловлены еще и тем, что явление разрушения имеет очень медленные и очень быстрые этапы при общем нелинейном поведении сплошной среды, Поэтому моделирование разрушения требует значительных усилий на расчет или измерения характеристик общего термомеханического процесса, на фоне которого происходит разрушение, что делает проведение параметрических исследований очень трудоемким. Отметим также естественный для переходного явления разброс результатов: можно разбить 100 стаканов и каждый при этом разобьется по индивидуальному сценарию, несмотря на все меры по выравниванию условий проведения испытаний (фиксация начального положения стакана и его скорости, обеспечение сходности свойств материала и так далее). Поэтому реально согласование теории и эксперимента может ожидать только для основных интегральных

характеристик процесса.

Способы описания явления разрушения (разупрочнения), сохраняющие корректность задачи, до конца не ясны и вопрос о том, какими свойствами должны обладать математические модели континуальной механики для эффективного описания локализации деформаций и эволюции зон разрушения, остается до сих пор открытым и актуальным.

В настоящей работе в рамках стандартной теории повреждаемой упругопластической среды формулируется теоретическая модель, предлагается соответствующая методика численного решения и, таким образом, делается попытка преодоления отмеченных недостатков с тем, чтобы проследить развитие магистральных трещин в виде узких полос квазихрупкого разрушения, представляющих скачки скорости и перемещения, а также всплески деформаций. Теоретическая модель справедлива для случая конечных пластических деформаций и учитывает то обстоятельство, что разрушение сопровождается сменой режима деформирования от квазистатического при отсутствии разрушения к ярко выраженному динамическому при развитии узких зон локализации деформаций. Авторы не имеют намерений объявить данную методику принципиально новой, поскольку все ее элементы так или иначе уже обсуждались и применялись ранее в других работах. Трудно, однако, указать работу, в которой именно такое сочетание компонентов алгоритма было бы реализовано, поэтому авторы видят смысл в описании методики и демонстрации ее возможностей и надеются, что это может быть полезным для дальнейшего развития континуального подхода к проблеме расчета разрушения. Численная методика, учитывающая данные особенности, реализована в рамках пакета программ "АСТРА" [4,5,48].

Проведены параметрические расчеты процессов разрушения типовых растягиваемых образцов, испытаны ряд критериев разрушения и ряд режимов кинетики повреждаемости, исследовано влияние пластических деформаций и локального интенсивного нагрева (охлаждения) на разрушение, прослежено развитие зон локализации деформаций. Выработаны рекомендации по реализации моделей континуального разрушения, которые могут повысить эффективность существующих моделей.

2. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая поведение термоупругопластической повреждающейся среды разрабатывалась многими авторами (см. обзоры в [25,27,37,42,92,109]) и используется здесь в варианте, описанном в работах [6,7,9]. Система уравнений содержит законы сохранения массы, импульса и энергии, а также кинематические соотношения

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{e} : \mathbf{I} = 0, \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \rho \frac{dU}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} + \nabla \mathbf{q} + \rho r = 0,$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \nabla_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}), \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad (1)$$

$$\mathbf{e} = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{L} = \nabla \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}$$

и определяющие соотношения, которые заслуживают более подробного рассмотрения, приводимого ниже. Здесь использованы традиционные обозначения: ρ - плотность, \mathbf{u} - скорость материальной сплошной среды, t - время, \mathbf{x} - эйлеров радиус-вектор (актуальная конфигурация), \mathbf{X} - лагранжев радиус-вектор (начальная конфигурация), \mathbf{F} - градиент деформации, \mathbf{L} - градиент скорости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - тензор деформации Альманси, \mathbf{e} - эйлеров тензор скорости деформации, $\boldsymbol{\sigma}$ - тензор напряжений Коши, U - внутренняя энергия единицы массы, \mathbf{q} - вектор теплового потока, T - температура, r - массовый источник тепла, d/dt - материальная временная производная, ∇ - оператор пространственного дифференцирования в актуальной конфигурации, \mathbf{I} - единичный тензор.

Определяющие соотношения представляют связи между характеристиками состояния бесконечно малого объема сплошной среды, накладываемые законами термодинамики. Образует минимальный набор взаимно независимых параметров

состояния бесконечно малого объема сплошной среды: $T, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\chi}, \frac{dT}{dt}, \mathbf{e}, \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}, \nabla T$, где

$\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\varepsilon}_p, \theta)$ - структурные параметры: тензор пластической деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ и повреждаемость θ , определяемые далее и ответственные за изменение внутренней структуры сплошной среды, то есть за развитие дислокаций и микротрещин, соответственно. Нулики отмечают материальные тензоры, связанные с пространственными тензорами соотношениями

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

Из первого закона термодинамики, утверждающего закон сохранения энергии, и второго закона термодинамики, закона возрастания энтропии

$$\rho \frac{d\eta}{dt} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0,$$

следует неравенство скорости диссипации

$$D = -\rho \left(\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \right) \frac{dT}{dt} + \left(\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} - \rho \frac{\partial \overset{\circ}{\varphi}}{\partial \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) : \overset{\circ}{\mathbf{e}} - \rho \frac{\partial \overset{\circ}{\varphi}}{\partial \overset{\circ}{\chi}} : \overset{\circ}{\chi}_t + \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0$$

Здесь $\varphi = U - T\eta$ - свободная энергия единицы массы.

Свободная энергия и скорость диссипации принимаются такими:

$$\varphi = \frac{K}{2\rho_0} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \beta(T - T_0) \right)^2 + \frac{\mu(T)}{\rho} (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}_p) : (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$$

$$D = H(\Phi_p) k_p \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}'_p : \boldsymbol{\varepsilon}'_p} + H(\Phi_\theta) k_\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{k_q}{\rho T} \nabla T \cdot \nabla T$$

То есть полагается, что упругие составляющие девиатора деформации малы по сравнению с единицей. Эффект температурного расширения учитывается членом с коэффициентом β . Составляющая скорости диссипации, отвечающая за пластическое течение, полагается однородной функцией первого порядка от скорости пластической деформации, что соответствует случаю упругопластической среды. Пластическая деформация растет при

выполнении условия активного нагружения $\Phi_p(T, \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \theta, \mathbf{e}) \geq 0$. Полагается также, что

материал пластически несжимаем (скорость диссипации зависит только от девиатора скорости пластической деформации, что обычно хорошо выполняется для металлов).

Сопrotивляемость среды, представленная модулями упругости и пределом текучести, помимо температуры, деформации и пластической деформации, зависит также от дополнительного структурного параметра состояния θ , называемого поврежденностью: $\mu = \mu_0 g_\mu(\theta)$, $K = K_0 g_K(\theta)$, $k_p = k_{p0} g_p(\theta)$, где μ_0 , K_0 - модули упругости, k_{p0} - предел текучести, для неповрежденной сплошной среды. Убывающие от 1 до 0 функции g_μ, g_K, g_p обеспечивают спад сопротивления среды с ростом поврежденности, который

происходит при выполнении условия разрушения $\Phi_\theta(T, \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \theta, \mathbf{e}) \geq 0$. Кинетика

процесса разрушения определяется зависимостью скорости диссипации от скорости роста поврежденности. Неотрицательные функции $\mu_0, K_0, k_{p0}, k_\theta$ и k_q зависят от $T, \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$.

В результате определяющие соотношения принимают следующий вид:

$$\eta = -\frac{\partial \varphi}{\partial T}, U = \varphi - T \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \mathbf{q} = k_q \nabla T, \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}',$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}'_p), p = K \frac{\rho}{\rho_0} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \beta(T - T_0) \right), \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'_p = H(\Phi_p) \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}'_p : \boldsymbol{\varepsilon}'_p} \boldsymbol{\sigma}' / k_p, \frac{d\theta}{dt} = -H(\Phi_\theta) k_\theta^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\mathbf{x} \in S_{in}, t \geq 0 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n^*$$

$$\mathbf{x} \in S \setminus S_{in}, t \geq 0 : (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = p_n^*$$

$$\mathbf{x} \in S_{u\alpha}, t \geq 0 : \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = u_{\tau\alpha}^*$$

$$\mathbf{x} \in S \setminus S_{u\alpha}, t \geq 0: (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = p_{\alpha}^*$$

$$\mathbf{x} \in S_T, t \geq 0: T = T^*$$

$$\mathbf{x} \in S \setminus S_T, t \geq 0: (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) = q_n^* \quad (3)$$

где $\alpha = 1, 2$. Начальные условия имеют вид:

$$x \in V, t = 0: \mathbf{x} = \overset{o}{\mathbf{X}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, T = T_0, \varepsilon_p, \theta = 0 \quad (4)$$

Таким образом, требуется решить начально-краевую задачу для системы уравнений (1)-(2) с граничными (3) и начальными (4) условиями.

Комментарий к разделу 2.

Настоящее дополнение имеет своей целью пояснить в чем смысл введения параметра поврежденности. Рассмотрим упрощенно систему уравнений нелинейной упруго-пластической модели *Прандтля-Рейсса*:

$$\rho \partial_t \mathbf{u} = \partial_x \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\partial_x \mathbf{U}), \partial_t \mathbf{U} = \mathbf{u}$$

$$\partial_t \varepsilon_p = H(\Phi_p) \lambda_p \boldsymbol{\sigma}, \Phi_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p) = 0$$

Для приращений напряжений и деформаций на шаге по времени получаются следующие соотношения

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} = E_t \partial_t \boldsymbol{\varepsilon}, E_t = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}$$

где тензор четвертого ранга E_t зависит от полных и пластических деформаций и от режима нагружения (активное или разгрузка). Соотношения для приращений можно переписать в виде:

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} = E_t (\partial_x \mathbf{u})_s$$

где $(A)_s = (A + A^T)/2$ - оператор выделения симметричной части. Для скоростей на шаге по времени получается следующее уравнение

$$\rho \partial_t \mathbf{u} = \partial_x (\boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{E}_t \Delta t) \partial_x \mathbf{u})$$

Корректность этого гиперболического уравнения в динамике или эллиптического в статике (если инерцией пренебречь) определяется условием Адамара

$$E_t = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} > 0$$

или его физическим эквивалентом, известным как условие Драккера

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} : \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} > 0$$

(0,0) (0,0)em:graph image1.bmp (0,0) (140,0)em:graph image3.bmp (0,0) (280,0)em:graph image4.bmp

а) б) в)

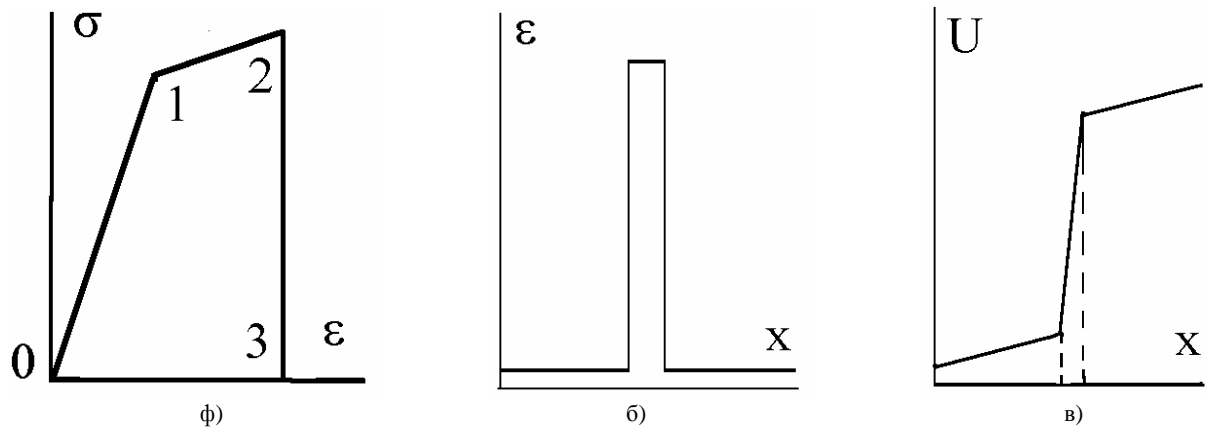


Рис. 1. Типичная диаграмма деформирования материала: 0-1 - упругое деформирование, 1-2 - пластическое деформирование, 2-3 - разупрочнение (разрушение) (а). Поведение точного решения для растягиваемого стержня с ослабленной центральной частью: качественные графики изменения деформации (б) и смещения или скорости (в).

Разрушение (участок 2-3 на диаграмме $\sigma - \varepsilon$, показанной на Рис. 1а) сопровождается разупрочнением

$$E_t < 0$$

и приводит в рамках классической теории к потере корректности задачи.

С другой стороны можно смоделировать явление разрушения с помощью следующей упругой модельной задачи для неоднородного растягиваемого стержня, имеющего в средней части участок ослабленного сопротивления ("зону разрушения") $E_1 \ll E$. Точное решение показывает, что в "зоне разрушения" имеется всплеск деформаций (Рис. 1б), а скорость и перемещения меняются скачкообразно (Рис. 1в).

Возникает вопрос: можно ли построить физически и математически корректную модель упругопластического материала, описывающую появление зон пониженного сопротивления материала, подобных "зоне разрушения" из рассмотренной модельной упругой задачи? Теории повреждаемости (поврежденности) дают утвердительный ответ. Действительно, для повреждающейся упруго-пластической среды система уравнений принимает следующий вид:

$$\rho \partial_t \mathbf{u} = \partial_x \sigma, \sigma = \sigma(\varepsilon - \varepsilon_p, \theta)$$

$$\varepsilon = (\partial_x \mathbf{U}), \partial_t \mathbf{U} = \mathbf{u}$$

$$\partial_t \varepsilon_p = H(\Phi_p) \lambda_p \sigma, \Phi_p(\varepsilon, \varepsilon_p) = 0$$

$$\partial_t \theta = H(\Phi_\theta) \lambda_\theta(\varepsilon, \varepsilon_p, \theta) \geq 0, \Phi_\theta(\varepsilon, \varepsilon_p, \theta) = 0$$

Для приращений напряжений на шаге по времени получаем:

$$\partial_t \sigma = E_t \partial_t (\varepsilon - \varepsilon_p) + E_\theta \partial_t \theta (\varepsilon - \varepsilon_p), E_t = \partial_\varepsilon \sigma, E_\theta = \partial_\theta \sigma$$

В теории поврежденности ответственность за разупрочнение не возлагается более на условие пластичности или на условие активного нагружения, а относится к уравнению поврежденности. Разупрочнение или, в более общем смысле, разрушение рассматривается как потеря материалом способности к сопротивлению деформации, выражающаяся в уменьшении значений модулей упругости из-за разрыва связей или, что то же самое, появления микротрещин. Разрушение описывается как независимый от деформации процесс (именно независимый, это очень важно), поэтому характеристика разрушения, называемая параметром поврежденности, связан с деформацией, температурой и другими параметрами состояния лишь постольку, поскольку они все вместе участвуют в общей системе уравнений и начально-краевых условий термомеханики. Спад напряжений

независимо от изменения деформации обеспечивается вторым слагаемым в приведенном выше выражении для скоростей напряжений. Коэффициент $E_\theta < 0$ отрицателен, что отражает тот факт, что модули упругости $E_i(\theta) > 0$ и напряжения убывают с ростом поврежденности. Положительность модулей упругости обеспечивает выполнение необходимых условий корректности начально-краевых задач по Адамару и Драккеру.

В данном комментарии формулировка теорий и рассуждения намеренно были огрублены, например, температура не участвовала в рассуждениях, параметры упрочнения не рассматривались, скоростное упрочнение не фигурировало. Это было сделано для более отчетливого описания основной идеи теорий поврежденности. полагаем, что это не будет понято так, что эти упрощения используются далее.

Распространенным методом регуляризации уравнений упругопластической среды при описании явления разупрочнения (падения интенсивности напряжений с ростом интенсивности деформаций) является переход к уравнениям упруговязкопластичности. Рассмотрим связь уравнений повреждающейся среды и уравнений упруговязкопластичности на частном примере пластически несжимаемой среды с изотропными упругими свойствами. Соотношения упруговязкопластичности для такой среды имеют хорошо известный вид;

$$\partial_t \sigma' = 2\mu \left(\partial_t \varepsilon' - \frac{1}{\tau} \Psi \left(\max \left(\frac{\sqrt{\sigma' : \sigma'}}{k_p(\sqrt{\varepsilon' : \varepsilon'})} - 1, 0 \right) \right) \frac{\sigma'}{\sqrt{\sigma' : \sigma'}} \right)$$

где k_p - функция статической диаграммы нагружения, имеющая участок разупрочнения, Ψ - неотрицательная функция вязкости, описывающая скоростное упрочнение, τ - время релаксации, штрихи выделяют девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций. Сравнивая соотношения упруговязкопластичности с уравнениями повреждающейся среды, которые для среды с изотропией упругих свойств имеют вид:

$$\partial_t \sigma' = 2\mu \partial_t (\varepsilon' - \varepsilon_p) + 2\partial_\theta \mu \partial_t \theta (\varepsilon' - \varepsilon_p)$$

можно заключить, что эти модели материала могут дать сходное описание процесса разрушения только в случае простого нагружения, при котором девиаторы деформаций, пластических деформаций и напряжений, а также их приращения и скорости, коллинеарны. В этом случае кинетику роста поврежденности можно было бы согласовать с законом вязко-пластического течения, требуя равенства выражений для скорости девиатора напряжений. Для согласования используемых далее моделей повреждающейся среды с уравнениями упруговязкопластичности для простых нагружений пришлось бы также учесть пластическую сжимаемость. Ясно, что в общем случае способы описания разрушения, заложенные в модели повреждающейся среды и в модели упруговязкопластичности, не совпадают, поэтому нет большого смысла пытаться согласовать эти подходы в частном случае.

Представляет интерес численное сравнение результатов, полученных в соответствии с различными имеющимися подходами при использовании одних и тех входных физических данных. Прежде, однако, желательно убедиться в том, что соответствующие численные алгоритмы приводят к устойчивым решениям без патологической зависимости от параметров дискретизации.

3. Численный метод

Алгоритм решения основан на модификации неявной конечно-элементной схемы, построенной в работах [4,5,48] и реализован в рамках пакета прикладных программ "АСТРА". Основные черты этого алгоритма заключаются в следующем. Исходные уравнения задачи, включая определяющие и кинематические дифференциальные соотношения, применяются в интегральной вариационной форме Бубнова - Галеркина. По

пространственным переменным вводится простейшая кусочно-линейная конечно-элементная аппроксимация решения на лагранжевой подвижной сетке, содержащей треугольные и четырехугольные ячейки. Кусочно-линейная аппроксимация применяется для всех искомым функций, включая перемещения, скорости, температуру, тепловые потоки, деформации, пластические деформации, напряжения, параметры упрочнения и поврежденность, дискретные значения которых представлены узловыми значениями.

Основными искомыми функциями являются те, которые дифференцируются по времени в исходной системе уравнений, а именно, перемещения, скорости, температура, пластические деформации, пластическая работа (параметр упрочнения) и поврежденность. Остальные искомые функции всегда можно определить для данного момента времени по основным с помощью дифференцирования по пространству и недифференциальных по времени соотношений.

Точки численного интегрирования расположены в узлах сетки, таким образом, матрица масс диагональна. На шаге по времени нелинейные члены уравнений линеаризованы по методу Ньютона относительно малых приращений искомым функций на временном шаге. Для решения вспомогательных линеаризованных алгебраических задач применен итерационный метод сопряженных градиентов, реализуемый без матричных операций и работающий на каждой итерации как явная схема. При уменьшении величины шага по времени число итераций метода сопряженных градиентов для решения вспомогательных задач уменьшается и для временных шагов в пределах курантовского ограничения неявная схема работает асимптотически также быстро как обычные явные схемы. Шаг по времени выбирается из условия точности с тем, чтобы ограничить максимальное приращение деформации величиной порядка одной десятой деформации, отвечающей пределу текучести, или, для упругих материалов, величиной много меньшей единицы.

Для преобусловливания алгебраических задач (умножения системы уравнений на приближенную обратную матрицу), необходимого для подавления случайных ошибок при численном счете, использовалась диагональная матрица преобусловливания, составленная из диагональных элементов матрицы жесткости, что соответствует масштабированию неизвестных. Этого вполне достаточно для обеспечения устойчивости итерационного процесса метода сопряженных градиентов даже при учете ухудшающих обусловленность задачи штрафных членов, включающих контактные условия или условия несжимаемости. Вследствие погрешностей дискретизации численные решения нелинейных задач могут содержать нефизические осцилляции, характерным признаком которых является их длина волны, совпадающая с шагами сетки (размерами ячеек), и частота с полупериодом, равным шагу по времени. Для подавления таких возмущений известно большое количество разнообразных рецептов, отражающих различные способы введения явных или аппроксимационных вязкостей, монотонизирующих решение. Для задач о разрушении такие способы сглаживания должны вводиться очень осторожно, поскольку по физике явления разрушения оно очень чувствительно к малым возмущениям и, следовательно, слишком грубая монотонизация или, наоборот, ее отсутствие могут сильно исказить решение: локализация деформаций не состоится, если нефизическая вязкость схемы велика, или, наоборот, расположение зон разрушения окажется сильно зависимым от шагов сетки по времени и пространству, если нефизическая вязкость мала и не обеспечивает устойчивости и сходимости приближенного решения.

В настоящей работе рекомендуется и используется следующий способ монотонизации численных решений. По окончании расчета каждого шага по времени монотонизируемая функция f дважды дифференцируется по каждой из пространственных независимых переменных. Сглаживание осуществляется по координатам, хотя сетка может содержать произвольно расположенные в пространстве ячейки с разным числом узлов. Значения вторых производных f_{xx} вычисляются в смысле обобщенных решений из вариационного уравнения:

$$\int_V (f_{xx} \delta f_{xx} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \delta f_{xx}}{\partial x}) dV = 0$$

затем для каждого узла сетки вычисляется осредненное по соседям значение монотонизируемой функции \tilde{f} . Это значение также зависит от координатного направления (попросту говоря, это среднее от значений функции в точках пересечения границы окрестности узла с данной координатной линией). Окончательно старые значения f заменяются на новые $(f + \tilde{f})/2$ только в тех немногочисленных узлах сетки (точках немонотонности), в которых вторая производная f_{xx} меняет знак по сравнению с ее значениями в соседних узлах.

Отметим, что описанная процедура монотонизации, в отличие от большинства других способов, действует не во всех узлах сетки, а изменяет решение только в точках немонотонности. Действуя более избирательно, она при этом может превратить неустойчивую схему в устойчивую и сходящуюся к верному решению. Она, например, хорошо регуляризует стандартные двухслойные центрально-разностные явные схемы не только для задач динамики твердых деформируемых тел, но и для задач эйлеровой механики жидкости и газа. Конечно при записи таких схем элементарные требования к описанию диссипативных процессов на скачках должны быть учтены, то есть дестабилизирующие члены с отрицательными коэффициентами вязкости, обнаруживаемые в первых дифференциальных приближениях таких разностных схем должны быть уравновешены адекватной искусственной вязкостью. И тогда данный способ монотонизации как дополнение сработает отлично. В данном случае она применяется в паре с неявной схемой как контроль монотонности решения, Если решение монотонно, то она ничего не делает. Если появляется признак нефизической осцилляции, она ее немедленно устраняет.

Заметим еще, что покоординатное расщепление процедуры монотонизации позволяет сделать монотонизацию более точной. Применение упрощенных процедур, основанных на некоторых более грубых индикаторах немонотонности (например, по выходу узлового значения функции за границы диапазона ее изменения в соседних узлах) и на осреднении по всей окрестности, приводит к пропуску немонотонностей и к сглаживанию физических минимумов и максимумов.

Комментируя выбор единого способа аппроксимации для всех искомым функций отметим следующее. Традиционно в лагранжевых схемах деформации и напряжения относятся к гауссовым точкам численного интегрирования, расположенным внутри ячеек, например, в центрах треугольных симплекс-элементов. Такой способ аппроксимации затрудняет обобщение схем на случай нелагранжевых сеток, в которых надо учитывать конвекцию, то есть движение сплошной среды относительно системы координат и соответствующей сетки. Поэтому, хотя в данной работе, сетки являются лагранжевыми, предпочтение отдано единообразной аппроксимации всех искомым функций. Необходимые изменения в эволюционных уравнениях, которые при этом надо сделать для получения устойчивых алгоритмов, подсказываются анализом первых дифференциальных приближений: просто надо добавить малую искусственную вязкость с коэффициентом $0.5c^2\Delta t$ в случае явных схем или применить неявную схему, что и сделано в нашем случае.

4. Примеры расчетов

4.1. Разрушение плоского стандартного образца при растяжении. Расчетная область видна на Рис. 2 и представляет собой 1/4 часть стандартного образца, на нижней и левой границах ставятся условия симметрии. Начальная длина расчетной области равна 3.0, высота - 2.0. Правая граница движется вправо с постоянной скоростью V_0 , верхние горизонтальные и вертикальные границы свободны. Для обезразмеривания использованы

следующие характерные значения переменных, помеченные индексом "s":

$$x_s = h, u_s = h, v_s = 0.001c_0, t_s = \frac{x_s}{v_s},$$

$$\sigma_s = p_s = K_s = \mu_s = k_{p0}, \rho_s = k_{p0}v_s^{-2}, T_s = v_s^2c_V^{-1}, \beta_s = T_s^{-1},$$

$$U_s = \varphi_s = v_s^2, \eta_s = v_s^2T_s^{-1}, r_s = v_s^2t_s^{-1}, q_s = \rho_s v_s^2 t_s^{-1} x_s,$$

$$\varepsilon_s = (\varepsilon_p)_s = 1, e_s = (e_p)_s = t_s^{-1}, \theta_s = 1, (k_\theta)_s = x_s v_s$$

Уравнения задачи, начальные и граничные условия в безразмерных переменных сохраняют свой вид. Безразмерные входные данные приведены ниже:

$$K_0 = 975, \mu_0 = 369, k_{p0} = 1, c_0 = \frac{3K_0 + 4\mu_0}{3\rho_0}, k_\theta = 10^3,$$

$$\Phi_p = \sigma' : \sigma' - k_p^2, \Phi_\theta = \varepsilon_{max} - 10^{-2}, U \approx c_V T, c_V = 1,$$

$$k_q = 1, g_K = g_\mu = g_p = e^{-10^3\theta}, \beta = 0.0001, V_0 = 10^{-4}, c_0 = 10^3$$

где ε_{max} - максимальная главная деформация, c_0 - безразмерная скорость звука.

В начальный момент времени образец находится в недеформированном состоянии с нулевыми значениями скоростей, перемещений, пластических деформаций и поврежденности при безразмерной температуре $T_0 = 100$. Безразмерный массовый источник/сток тепла $r = 1$ действовал в прямоугольной зоне (1.9, 0, 2.1, 1). Тепловые потоки на границах занулялись. Использовались лагранжевы подвижные конечноэлементные сетки, состоящие из первоначально одинаковых (квадратных или (лево/право)- ориентированных треугольных) ячеек с шагом 1/15, 1/30 и 1/60 в разных вариантах.

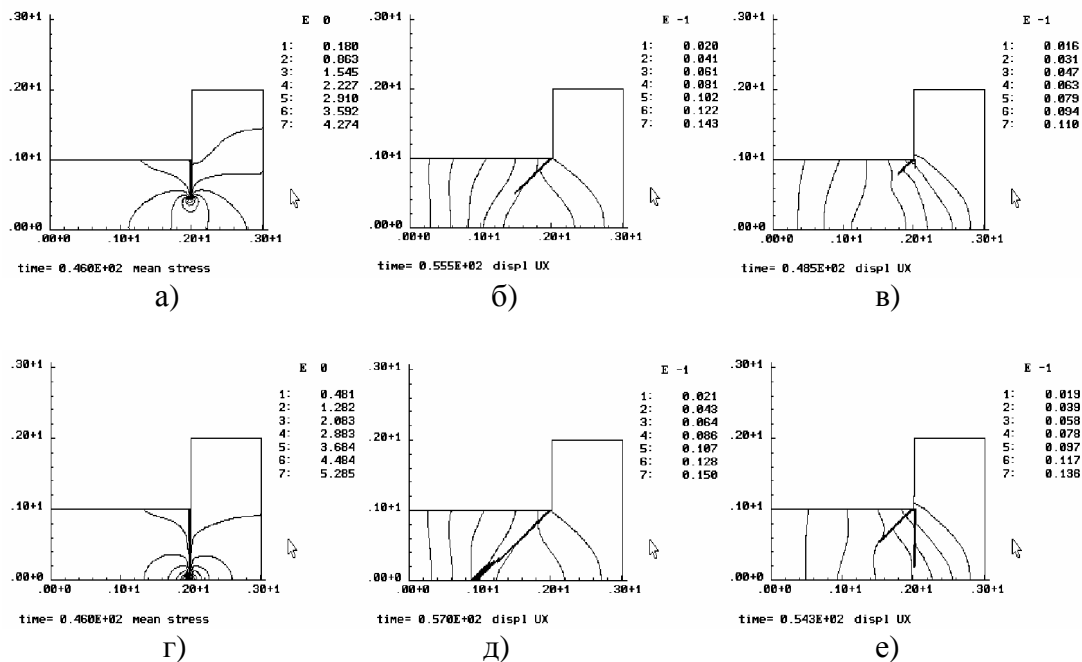


Рис. 2. Моды процесса разрушения для случаев упругого материала (а,г), упругопластического материала (б,д), упругопластического материала при совместном действии растяжения и нагрева узкой вертикальной зоны под концентратором (в,е).

Развитие узких зон локализации деформаций можно видеть на рис. 2. для трех случаев процесса: разрушение упругого материала (а), упругопластического материала (б), упругопластического материала при совместном действии растяжения и нагрева узкой вертикальной зоны под концентратором (в). Видно, что пластичность навязывает свое предпочтительное направление распространения зоны локализации деформаций.

При достаточно интенсивном локальном нагреве разрушение упругопластического материала происходит как в упругом материале, а в режиме умеренного нагрева развиваются две "трещины": сначала косая, которая затем останавливается, а завершает разрушение вертикальная "трещина", развивающаяся в зоне интенсивного нагрева. Интенсивный нагрев ускоряет процесс разрушения, в то время как локальное охлаждение зоны предполагаемого разрушения замедляет ее развитие.

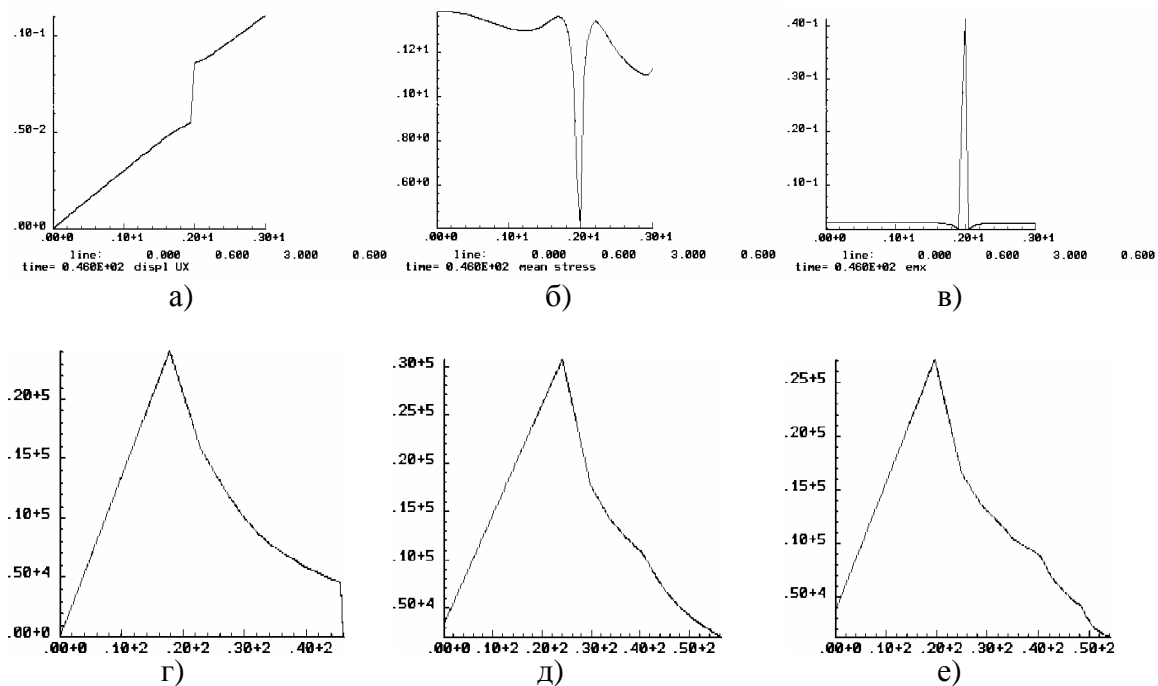


Рис. 3. Графики горизонтального смещения (а), среднего напряжения (б) и максимальной деформации (в) вдоль горизонтальной линии (0,0.6,3,0.6) для случая разрушения упругого материала. В остальных случаях качественное поведение этих функций такое же. Далее (г,д,е) для всех трех вариантов показано изменение безразмерного шага по времени, тесенного к величине шага Куранта для явных схем и выбираемого из условий точности, от величин 10^4 для квазистатистики в начале процесса до величин порядка 1 при наличии развитых зон разрушения.

На рис. 3 показаны графики горизонтального смещения (а), среднего напряжения (б) и максимальной главной деформации (в) вдоль горизонтальной линии, пересекающей узкие зоны разрушения. Поведение этих характеристик типично для внутренних контактных границ и имитирует магистральную трещину в рамках континуального подхода.

Поврежденность и деформация в зоне разрушения имеют очень большой всплеск типа дельта-функции, напряжения падают до нуля, а смещения претерпевают резкий скачок.

С ростом зон разрушения приложенные нагрузки вызывают все большие деформации и, поэтому, шаг по времени уменьшается из-за ограничения приращения деформации в связи с требованиями к точности расчета. Процесс развития зон разрушения постепенно становится динамическим.

Моды разрушения сохраняются при измельчении шага сетки и смене формы ячеек. Но надо отметить, что при отключении или уменьшении регуляризации, например, за счет отключения инерционных членов или за счет проведения расчета с увеличенными шагами по времени, появляется аномальная зависимость решения от малых возмущений, в том числе и от сетки.

4.2. Задача об оползне склона под действием веса сооружения. Пусть на крутом склоне строится некоторое сооружение. По мере возрастания нагрузки деформации максимального растяжения концентрируются у дальней от края склона границы строящегося сооружения, где и возникают зоны разрушения и локализации деформаций. По мере их роста такие зоны занимают некоторую окрестность наклонной поверхности, эволюция которой показана на Рис. 4. С выходом зон разрушения на свободную поверхность склона процесс деформации ускоряется и становится динамическим. Часть грунта между дневной поверхностью и зоной разрушения приходит в движение как жесткое целое и оползает вниз под действием сил тяжести.

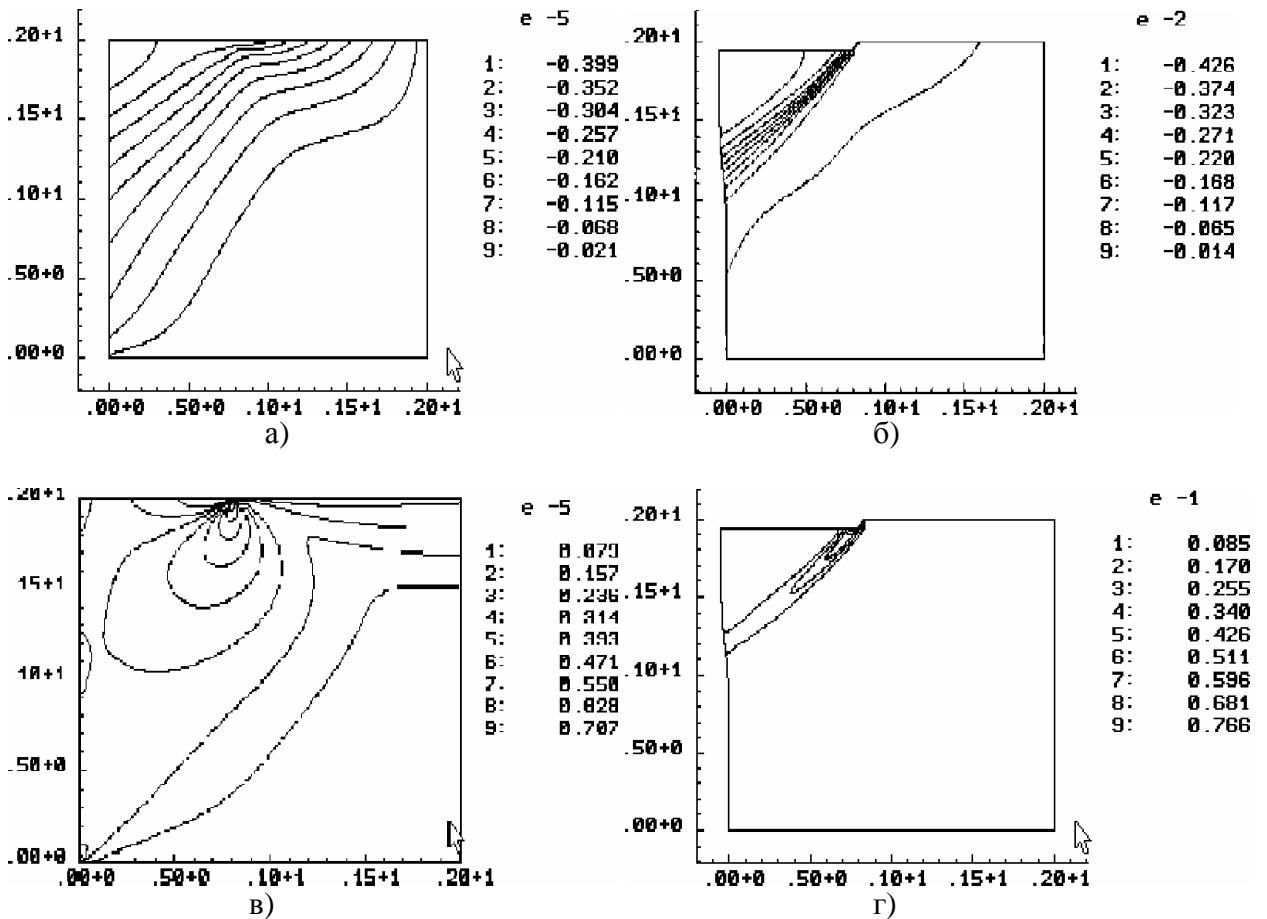


Рис. 4. Оползень склона от действия веса сооружения. Показано распределение горизонтального смещения и максимальной деформации для начальной (а,в) и конечной (б,г) стадий процесса.

Данная задача рассматривалась теоретически в различных постановках и экспериментально во множестве исследований, с которыми можно познакомиться по работам [58,113,68,97,146]. Основой теоретического изучения являются варианты теории пластичности. Модели жестко-пластической среды для данной задачи рассмотрены в работах [58,146]. Уругопластические модели для малых деформаций реализованы в [70,167,128]. Попытки учета разупрочнения в рамках теории пластичности были сделаны в работах [167,97,13] и были отмечены ныне хорошо известные факты ухудшения обусловленности и потери корректности краевых задач. Варианты специальных способов регуляризации для преодоления этих трудностей предложены в работах [68,126,127,104].

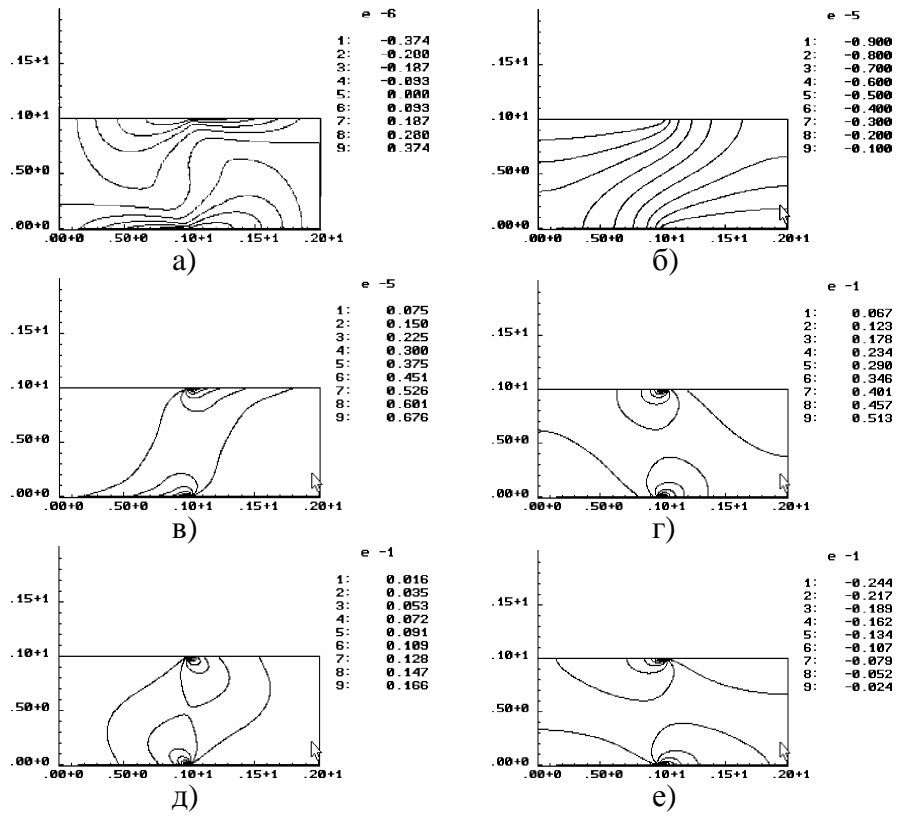


Рис. 5. Распределение горизонтального (а) и вертикального (б) смещений, а также максимальной деформации (в), интенсивности напряжений (г), касательного (д) и среднего (е) напряжений для начала процесса.

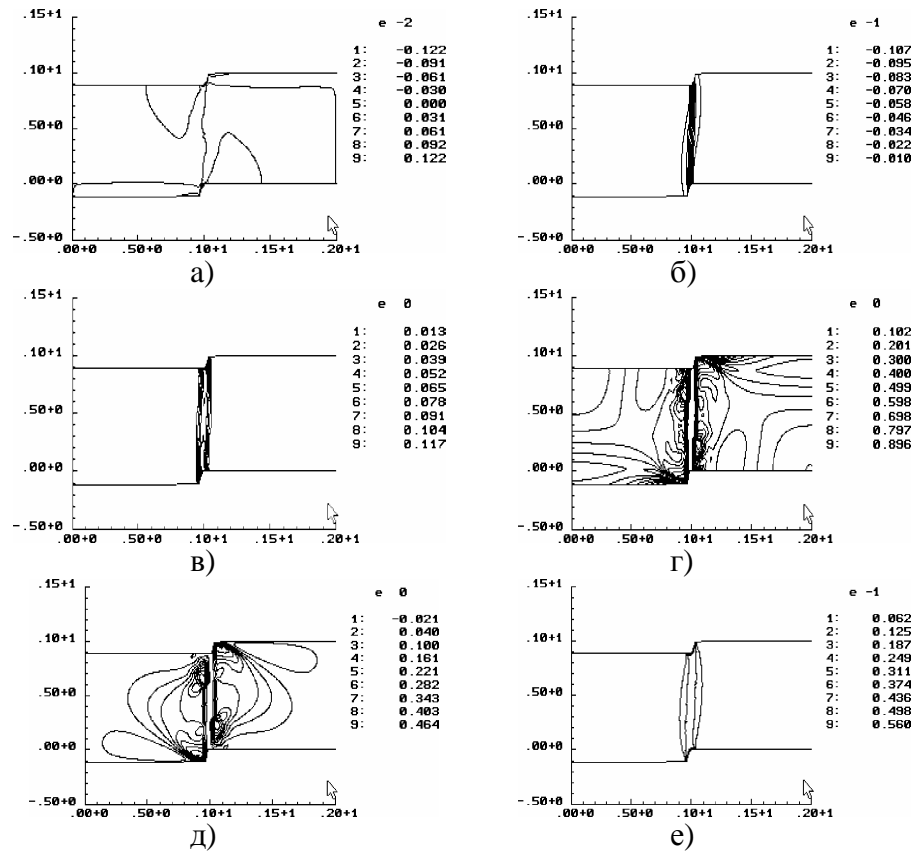


Рис. 6. Распределение горизонтального (а) и вертикального (б) смещений, а также максимальной деформации (в), интенсивности напряжений (г), касательного напряжения (д) и пластической работы (е) для конца процесса.

4.3. Задача о разрезании листа двумя жесткими штампами при неподвижном нижнем штампе и равномерном движении вниз верхнего штампа. На контакте реализованы условия свободного скольжения. Левый и правый края листа закреплены. На рис. 5 показано распределение смещений, интенсивности напряжений, касательного и среднего напряжений для начала процесса. На финальной стадии процесса наблюдается сильная локализация деформаций вдоль узкой зоны намечающегося среза, которую можно видеть на Рис. 6, где показаны распределения смещений, интенсивности напряжений, касательного напряжения и пластической работы.

4.4. Разрушение диска с дыркой при сжатии жесткими штампами. Плоская круглая пластина с круглой концентрической дыркой сжимается двумя жесткими штампами. Проскальзывание в зоне контакта не допускается. Максимальные растягивающие деформации наблюдаются в окрестности внутренней границы, в ближайшей к штампам ее части. Результаты решения представлены на Рис. 7, где показаны сетка (а), распределение среднего напряжения (б), главная деформация (в,г), а также распределение горизонтального смещения (д,е). Как и предыдущих случаях никаких начальных повреждений не вводилось, они возникали и развивались в соответствии с теоретической континуальной моделью повреждающегося материала.

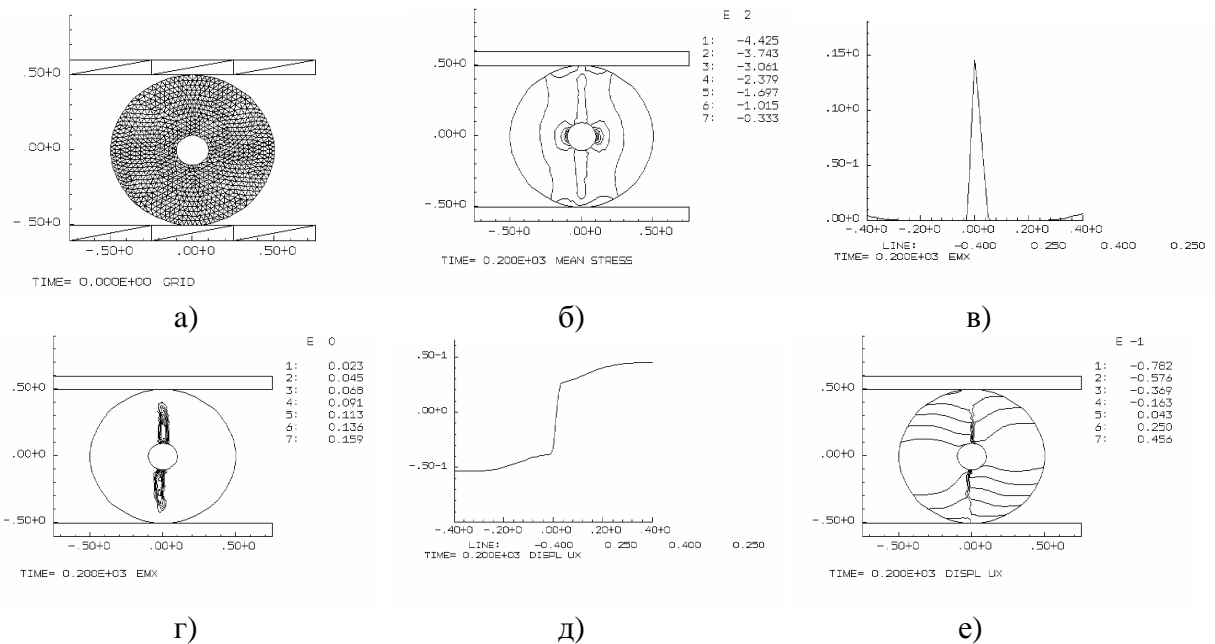


Рис. 7. Разрушение диска с дыркой при сжатии жесткими штампами

4.5. Удар двух тел под углом с учетом разрушения.

Пластина-ударник ударяет пластину-преграду со скоростью $u_0/c^{(1)} = 0.2$, где $c^{(1)}$ - скорость звука в материале ударника, который имел следующие свойства:

$$K^{(1)} = 975, \mu^{(1)} = 369, \sigma_s^{(1)} = 1.0, d\sigma_s^{(1)}/da_p = 0.0, c^{(1)} = 1$$

$$k_\omega^{(1)} = 0.0, k_\theta^{(1)} = 10^3, F = \varepsilon_{max} - \varepsilon(1)_{lim}, \varepsilon_{lim}^{(1)} = 0.01$$

Материал преграды обладал следующими свойствами:

$$K^{(2)} = 243, \mu^{(2)} = 92, \sigma_s^{(2)} = 0.25, d\sigma_s^{(2)}/da_p = 0, c^{(2)} = 1$$

$$k_\omega^{(2)} = 0.0, k_\theta^{(2)} = 10^6, F = \varepsilon_{max} - \varepsilon(2)_{lim}, \varepsilon_{lim}^{(2)} = 0.01$$

где ε_{max} - максимальная главная деформация.

Начальная сетка видна на Рис. 8.а. Последующие картинки Рис. 8. b-f демонстрируют вычисленную эволюцию зон разрушения (узкие черные зоны). Окончательно преграда раскалывается на три части,двигающиеся независимо. Ударник рикошетирует и полностью разрушается.

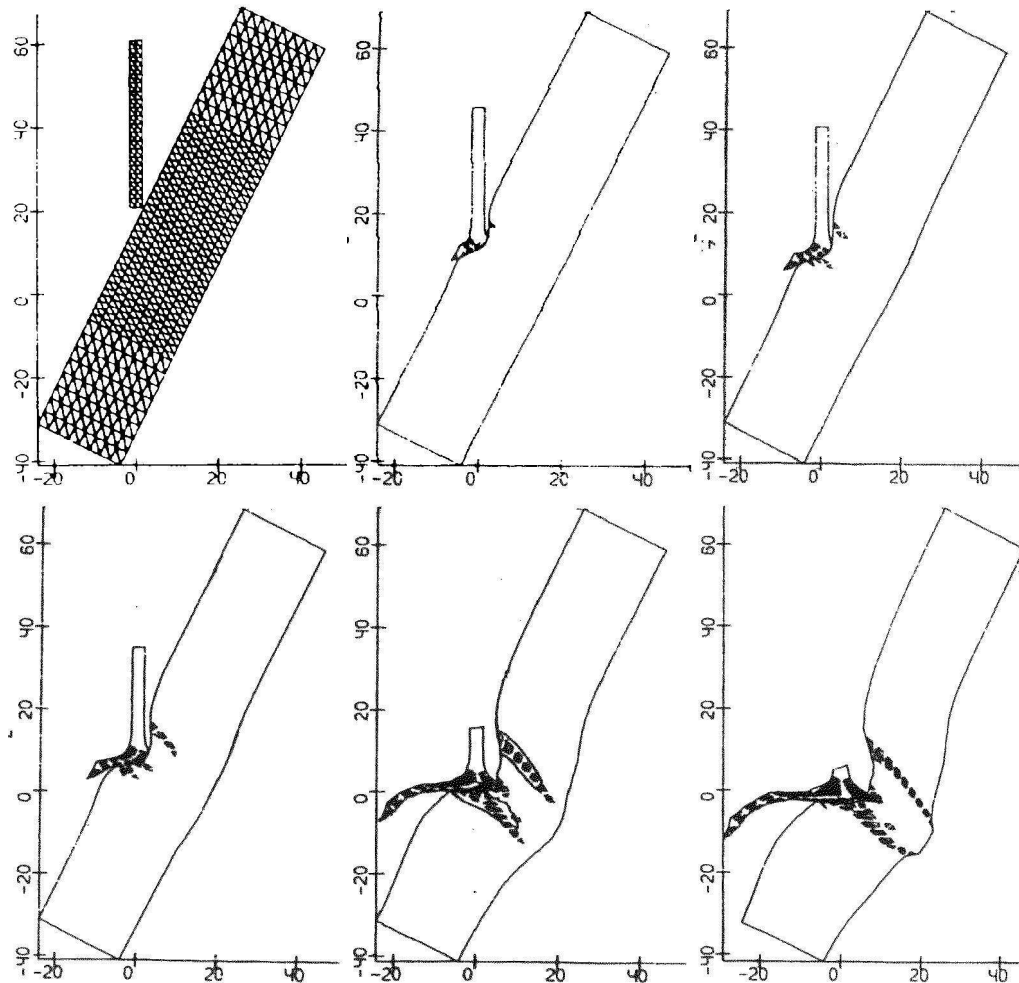


Рис. 8. Разрушение пластин при ударе под углом. Окончательно преграда раскололась на три части. Ударник разрушен полностью.

Необходимо подчеркнуть, что попытки использовать пластическую работу и интенсивность касательных напряжений в качестве аргументов функции критерия разрушения F не позволили получить локализацию зон разрушения, подобную показанной на рисунке 8.

Рассматривались и многие другие задачи о разрушении частей конструкций при квазистатических и динамических нагружениях. Общий вывод таков: критерии максимальной деформации сдвига работают удовлетворительно в подавляющем числе различных случаев напряжено-деформированного состояния. Узкие зоны разрушения образуются в условиях квазихрупкого разрушения, когда предельная деформация достигается ранее, чем зоны пластичности охватывают значительную часть конструкции. Во многих случаях первоначально квазистатический режим деформации сменяется быстрым динамическим процессом деформации и ростом узких зон разрушения. Алгоритмы расчета, реализующие модели континуального разрушения, должны иметь контроль точности по максимальному приращению деформации на шаге по времени и учитывать инерционные члены даже для первоначально квазистатических процессов деформации, иначе сходимость решений теряется при появлении зон разрушения и появляется аномальная зависимость решения от особенностей дискретизации.

Размывание зон разрушения и искажение решений может происходить также в схемах с

повышенной вязкостью. Схемная вязкость должна быть минимизирована в окрестности зон разрушения. Резкая потеря способности сопротивления деформации также является необходимым условием возникновения узких зон локализации деформаций.

Для обеспечения сходимости результатов при дроблении временных и пространственных шагов критерий разрушения должен содержать масштабный множитель, вид которого подсказывается теорией трещин и механикой хрупкого разрушения. Известно, что в кончике трещины теория упругости предсказывает коренную особенность решения и неограниченный рост напряжений и деформаций. Поэтому критерий разрушения должен формулироваться в терминах коэффициентов концентрации напряжений и деформаций. В численной реализации настоящей работы удовлетворительные результаты для сходимости предельных значений средней деформации разрушения растягиваемых образцов были получены с модификациями критерия разрушения следующего вида:

$$\varepsilon_1 \sqrt{\min(h_x, h_y) / \max(x_{\max} - x_{\min}, y_{\max} - y_{\min})} \leq \varepsilon_{\max}$$

где множитель с корнем как раз и учитывает асимптотику, подсказываемую теорией упругости.

Представленное исследование локализации деформаций позволило реализовать континуальный подход к численному описанию распространения узких зон разрушения, имитирующих магистральные трещины. Это исследование показывает результаты, обещающие детальное моделирование явлений, сопровождающих фрагментацию разрушающихся тел.

5. Выводы. Численные эксперименты показали, что критерии разрушения по предельным деформациям для упругопластических материалов работают лучше, чем критерии по предельным напряжениям. Для получения зон локализации в виде узких трещиноподобных лент важную роль играют также следующие свойства теоретической модели:

- * Резкий спад сопротивления среды с ростом поврежденности;
- * Контролируемая по приращениям деформаций точность расчета;
- * Учет сил инерции (естественная регуляризация задачи).
- * Минимальное сглаживание (особенно в зонах разрушения);
- * Сопротивление разрушенного материала сжатию (для обеспечения невырожденности закона движения).

Показано, что благодаря указанным выше свойствам, обычная модель повреждающейся упругопластической среды хорошо описывает резкую локализацию деформаций вдоль тонких полос больших градиентов смещений и всплесков деформаций и поддерживает сходимость решения в процессе развития узких зон разрушения.

Вопросы приведения модели повреждающейся упругопластической среды в соответствие с данными физических экспериментов остаются открытыми и актуальными.

Программа АСТРА, с помощью которой решены представленные примеры, позволяет уверенно проводить подобные расчеты и количество рассчитанных примеров, а также степень подробности описания результатов легко могут быть увеличены. Используемая методика без принципиальных переделок обобщена на пространственно трехмерные задачи, описание соответствующих решений готовится.

Список литературы

- [1] Аптуков В.Н. Модель термоупругопластической поврежденной среды. Приложение к откольному разрушению // ФГВ. 1986. Т. 22. № 6. С. 120-130.
- [2] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Прикладная механика разрушения, Изд-во Самарского Ун-та, 1999.
- [3] Ахмадеев Н.Х. Исследование откольного разрушения при ударном деформировании. Модель поврежденной среды // ПМТФ, 1983, № 1, с. 158-167.
- [4] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ "АСТРА" // Препринт № 326. М.: ИПМ АН СССР, 1988. 68 с.
- [5] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Решение упругопластических задач методом конечных элементов // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991. Вып. 2. С. 78-122.
- [6] Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н., Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 6. С. 4-15.
- [7] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. О континуальном разрушении и локализации деформаций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2001. Вып. 63. С. 41-48.
- [8] Бураго Н.Г., Ковшов А.Н. Модель дилатирующей разрушающейся среды // Изв. РАН, МТТ, 2001, № 5, С. 112-117.
- [9] Бураго Н.Г., Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н. Численное моделирование континуального разрушения упругопластических тел // Науч. сессия МИФИ-2002. Науч.-техн. конф. "Науч.-инновац. сотрудничество". Сб. науч. трудов. М.: МИФИ, 2002. Ч. 1. С. 95-96.
- [10] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов. Известия РАН. МТТ. 2003. 75 с. Принято к публикации. Черновик доступен в Интернете: <http://www.ipmnet.ru/burago/papers/cont.ps>
- [11] Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Континуальная теория среды с трещинами. Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 159-166.
- [12] Гильманов А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Наука. Физматлит, 2000. 247 с.
- [13] Глушко А.И., Нещеретов И.И. О кинетическом подходе к разрушению горных пород // Известия АН СССР, МТТ. 1986. № 6. С. 140-146.
- [14] Глушко А.И. Об одном подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 130-135.
- [15] Глушко А.И., Нещеретов И.И. О континуальных моделях разрушения твердых тел при нестационарных нагрузках Ч. 1 // Изв. РАН, МТТ. 1999. № 1. С. 124-138. Ч. 2. Изв. РАН МТТ. 1999. № 2. С. 125-138.
- [16] Гриднева В.А., Немирович-Данченко М.М. Метод разделения точек сетки для численного расчета разрушения твердых тел // Томск: Томский ун-т, 1983. Рукопись деп. в ВИНТИ. № 3258-83деп.
- [17] Гулидов А.И., Фомин В.М., Шабалин И.И. Алгоритм перестройки разностной сетки при численном решении задач соударения с образованием трещин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, Материалы 7-й Всес. конф. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 182-192.
- [18] Гулидов А.И., Шабалин И.И. Метод свободных элементов // Препринт № 9-94. Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 1994. 32 с.
- [19] Ильющин А.А. Об одной теории длительной прочности .. Изв. АН СССР МТТ. 1967. № 3. С. 21-35.
- [20] Качанов Л. М., О времени до разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР, ОТН, 1958. № 8. С. 26-31.
- [21] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.:Наука, 1974. 311 с.
- [22] Киселев А.Б., Кабак Н.Е. Метод построения расчетных сеток с выделением внутренних контактных границ // Моделирование в механике. 1990. Т. 4. № 5. С. 96-110.
- [23] Кондауров В.И., Мухамедиев Ш.А., Никитин Л.В., Рыжак Е.И. Механика разрушения горных пород. М.:Наука, 1987. 218 с.
- [24] Кондауров В.И. Тензорная модель континуального разрушения твердых тел, Научные труды Института теплофизики экстремальных состояний ОИВТ РАН. Вып. 3. М.: ОИВТ РАН, 2000.
- [25] Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термодинамики конденсированной среды. М.: МФТИ, 2002. 336 с.
- [26] Коробейников С.Н., Худяков Ю.С., Шутов А.В. Математическое моделирование хрупкого разрушения тонких тел // Вычислительные методы и программирование. 2002. Т. 3. С. 187-210.
- [27] Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. 1985. Т. 8. № 4. С. 21-65.
- [28] Кукуджанов В.Н. Микроскопическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций // Изв. РА. МТТ. № 5. 1999.
- [29] Майнчен Дж. и Сак С. Метод расчета "Тензор", Вычислительные методы в гидродинамике, под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга, М., Мир, 1967, с. 185-211.
- [30] Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. 254 с.
- [31] Работнов Ю.Н. Механизм длительного разрушения // Сб. "Вопросы прочности материалов и конструкций". М.:Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
- [32] Работнов Ю.Н. Механика твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1979.
- [33] Ревуженко А.Ф. Вариационная формулировка краевых задач разрушения, ПМТФ. 1980. № 4. С. 148-156.
- [34] Реснянский А.Д., Мерзиевский Л.А. Применение метода подвижных сеток в задачах разрушения твердых тел // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1984. Вып. 66. С. 150-157.
- [35] Рузанов А.И., Романычева Л.К., Волков И.А. Построение расчетных моделей и численный анализ разрушения твердых тел при импульсных нагрузках, Механика быстротекущих процессов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1984. С. 98-105.
- [36] Феофанов В.И. Соппротивление материалов. М.: Наука, 1967. 552 с.
- [37] Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.

- [38] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [39] Akhmetzyanov M., Albaut G., Baryshnikov V. Solution of fracture problems by non-linear photoelastic methods under significant elastic and plastic strains / Proc. IUTAM, Series Editor: G.M.L. Gladvel. - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2000. Vol. 82. P. 505-512.
- [40] Akhmetzyanov M., Tyrin B., Albaut G. Determination of shape and size of the plastic zones near the sharp notches tips by the interference-optical methods / Proc. Coll. "Photomechanique 2001". GAMAC. Poitiers, France. 2001. P. 159-165.
- [41] Albaut G.N., Baryshnikov V.N. Investigation of mechanics of fracture problems by non-linear photoelastic method // Proc. SPIE, 1996. Vol. 2791, P. 56-67.
- [42] Bazant Z. P. (2002) Reminiscences on four decades of struggle and progress in softening damage and size effect // Concr. J. (Japan Concr. Inst.), 40, 16-28.
- [43] Belytschko T., Lin J.I. A three-dimensional impact-penetration algorithm with erosion // Computers and Structures, 1987. V. 25. No. 3. P. 95-104.
- [44] Belytschko T., Fish J., Engleman B.E. A finite element with embedded localization zones // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1988. V. 70. P. 59-89.
- [45] Bertolf L.D., Buxton L.D., Thorue B.J., Byers R.K., Stevens A.L., Thompson S.L. Damage in steel plates from hypervelocity impact II. Numerical results and spall measurement // J. Appl. Phys. 1975. V. 46. No. 9. P. 3776-3783.
- [46] Bolotin V. V. Mechanics of Fatigue, 1998
- [47] De Borst R., Sluys L.J., Mulhaus H.B., Pamin J. Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformations. // Engng Comput. 1993. vol. 10. P. 99-121.
- [48] Bourago N.G. Computer code ASTRA for nonlinear problems in continuum mechanics // In: Proc. 7th Nordic Seminar on Computational Mechanics, Trondheim, Norway, 1994, p. 48-49.
- [49] Bourago N.G. A survey on contact algorithms // Proc. of the Workshop "Grid generation: theory and applications" / Ed. S.A.Ivanenko et V.A.Garanzha. Moscow: Computing Centre of RAS, 2002. P. 42-59. Available at Web: <http://www.ipmnet.ru/burago/papers/contef.ps>
- [50] Chen Y.M., Wilkins M.L. Stress analysis of crack problems a three-dimensional time-dependent computer program // Intern. J. Fracture. 1976. V. 12. No. 4. P. 607-617.
- [51] Comi C., Perego U. Numerical aspects of nonlocal damage analyses // Rev. Europ. Elements Finis, 2001. No. 10. P. 227-242.
- [52] Cosserat E. and Cosserat F. Theorie des corps deformables, Herrman, Paris. 1909.
- [53] Cruse T. A. Boundary Element Analysis in Computational Fracture. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [54] Dai D.N., Hills D.A., Nowell D. Modelling of growth of three-dimensional cracks by a continuous distribution of dislocation loops // Computational Mechanics 1997. V. 19. P. 538-544.
- [55] Daux C., Moes N., Dolbow J., Sukumar N., Belytschko T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method // Intern. J. Numer. Methods in Engng. 2000. V. 48. No. 12. P. 1741-1760.
- [56] Dolbow J., Moes N., Belytschko T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method // Finite Elements Anal. Des. 2000. V. 36. No. 3-4. P. 235-260.
- [57] Dolbow J., Moes N., Belytschko T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact // Comput. Methods Appl. Mech. and Engng. 2001. V. 190. No. 51-52. P. 6825-6846.
- [58] Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis on design // Quart. Appl. Math. 1962. V. 10. P. 157-165.
- [59] Duarte C.A., Hamzeh O.N., Liszka T.J. and Twardzyldo W.W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation // Comput. Methods Appl. Mech. and Engng. 2001. V. 190. No. 15-17. P. 2227-2262.
- [60] Dvorkin E.N., Cuitino A.M., Gioia G. Finite elements with displacement embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1990. V. 30. P. 541-564.
- [61] Fish J. Finite element method for localization analysis. Ph. D. thesis. Northwestern Univ. 1989.
- [62] Fish J. and Yu Q. Multiscale damage modeling for composite materials: Theory and computational framework // Int. J. Numer. Methods Eng. 2001. V. 52. P. 161-191.
- [63] Fleming M.Y., Chu A., Moran B., Belytschko T. Enriched element-free Galerkin methods for singular fields // Intern. J. Numer. Methods in Engng. 1997. V. 40. No. 8. P. 1483-1504.
- [64] Geers M. G. D., Peijs T., Brekelmans W. A. M. and de Borst R. Experimental monitoring of strain localization and failure behavior of composite materials // Compos. Sci. Technol. 1996. V. 56. P. 1283-1290.
- [65] Gerstle W.H., Martha L., Ingrafea A.R. Finite and boundary element modeling of crack propagation in two and three dimensions. // Engineering with Computers. 1987. No. 2. P. 167-183.
- [66] Gerstle W.H., Ingrafea AR, Perucchio R. Three-Dimensional fatigue crack propagation analysis using the boundary element method // Intern. J. of Fatigue 1988. V. 10 No. 3. P. 187-192.
- [67] Giovanola J. H., and S. W. Kirkpatrick, (1998) Using the Local Approach to Investigate Scaling Effects in Ductile Fracture // Intern. J. of Fracture, Vol. 92, No. 2, pp. 101-117.
- [68] Goodman R.E. Introduction to Rock Mechanics. John Wiley and sons. 1980.
- [69] Gravouil A., Moes N., Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets Ч Part II: level set update. // Intern. J. Numer. Meth. Engng. 2002. V. 53. No. 11. P. 2569-2586.
- [70] Grigoryan S.S. On foundation dynamics of soils // Prikl. Math. Mech. 1960. V. 24.No. 6. P. 42-53.
- [71] Gulidov A.I., Fomin V.M., Shabalin I.I. Numerical modeling of shear damage // Mechanics of transient processes. Novosibirsk, 1984. P. 48-51.
- [72] Gullerud A. S., Xiaosheng G., Dodds R. H. Jr. and Haj-Ali R. M. Simulation of Ductile crack growth using Computational Cells: Numerical Aspects // Engineering Fracture Mechanics, 2001. V. 66. P. 65-92.
- [73] Гарсон А.Л. Континуальная теория вязкого разрушения, обусловленного образованием и ростом пор // Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Теорет. осн. инж. расчетов. 1977. No. 1. С. 182-201.
- [74] Habraken A.M., Zhang L.H., Wang X.C., Cescotto S. A new elastic-visco-plastic damage model for annealed aluminum: theory, calibration and validation // Symposium Continuous Damage and Fracture, 23-27 October 2000, Cachan, France.

- Continuous Damage and Fracture, edited by Benallal, A., at Elsevier France. 2000. P. 341-352.
- [75] Hayakawa K., Murakami S. Thermodynamical modeling of elastic-plastic damage and experimental validation of damage potential // *International Journal of damage mechanics*. 1997. V. 6. P. 333-363
- [76] He Q.-C., Curnier A. A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations // *Intern. J. Solids and Structures*, 1995. V. 32. P. 1433-1457.
- [77] Hellan K. *Introduction to Fracture Mechanics*, McGraw-Hill, 1984, 302 pages
- [78] Henshell R.D., Shaw K.G. Crack tip finite elements are unnecessary. *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*. 1975. V. 9. P. 495-507.
- [79] Hillerborg A., Modeer M. and Peterson P. E. Analysis of crack propagation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements // *Cem. Concr. Res.* 1976. V. 6. P. 773-782.
- [80] Huerta A. and Pijaudier-Cabot G. (1994) Discretization influence on regularization by two localisation limiters // *J. Eng. Mech.*, V. 120. No. 6. P. 1198-1218.
- [81] Huerta A., Diez D., Rodriguez A. and Pijaudier-Cabot G. Error Estimator and adaptive finite element analysis of softening materials / *Advances in Adaptive Computational methods in Mechanics*, Ladeveze P., Oden J. (eds), Elsevier, 1998. P. 333-346
- [82] Ingraffea A.R., Heuze F.E. Finite element models for rock fracture mechanics // *Intern. J. Numer. Anal. Methods in Geomech.* 1980. V. 4. No. 1. P. 25-43.
- [83] Ilyushin A.A. About one theory of long term strength. // *Eng. J. Mechanics of Solids*, 1967. No. 3. P. 21-35.
- [84] Ivanov A.G., Mineev V.N. About scale effects in fracture. // *FGV*, 1979. V. 15. No. 5. P. 70-95.
- [85] Ivanov A.G. About possibility of constructing of united theory for damage // *Appl. Math. Techn. Phys.* 1990. No. 1. P. 109-116.
- [86] Janson J. and Hult J. *Damage Mechanics and Fracture Mechanics - A Combined Approach*. // *Journal de Mechanique Applique*, 1977. V. 1. P.69-84.
- [87] Jirasek M., Nonlocal models for damage and fracture: Comparison of approaches // *Intern. J. Solids Structures*, V. 35. 1998. P. 4133-4145.
- [88] Jirasek M. Objective modeling of strain localization // *Revue française de genie civil*. 2002. V. 6. No. 6. P. 1119-1132.
- [89] Johnson G.R., Stryk R.A. Eroding interface and improved tetrahedral element algorithms for high-velocity impact computations in three dimensions // *Intern. J. Impact Engng.* 1987. V. 5. No. 1-4. P. 411-421.
- [90] Johnson G.R. , Stryk R.A. Recent EPIC code developments for high velocity impact // *Intern. J. Impact Engng.* 1990. V. 10. P. 281-294.
- [91] Ju J. W. On energy based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects // *Int. J. Solids Structures*. 1989. V. 25. No. 7. P. 803-833
- [92] Kachanov L.M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics* ,Kluwer Acad. Publ.,1986.
- [93] Kachanov L.M. Effective elastic properties of cracked solid : critical review of some basic concepts // *ASME App. Mech. Rev.*, 1992. V. 45. No. 8. P. 304-335
- [94] Kaliske M., Nasdala L., Rothert H. On Damage for Elastic and Viscoelastic Materials at Large Strain // *Computers and Structures*, V. 79. (2001) P. 2133-2141.
- [95] Kiselev A.B. The model of thermoelastoplastic deformation and fracture of materials under multiaxial loading // *Forth Int. Conf. of Biaxial/Multiaxial Fatigue* (St. Germain en Laye, France, May 31 - June 3, 1994. V. 2. P. 183-186.
- [96] Kondaurov V.I., Lomov I.N. Fracture of brittle material with initial porosity under high energy density flows // *Proc. Conf. Shock Compression Condensed Matter* / Ed. S.C.Smidt. Amer. Phys. Society, 1998. P. 247-250.
- [97] Korotkov P.F. Shear bands on slopes failure // *Doklady AN SSSR*, 1982. V. 267. No. 4. P. 818-822 (in Russian).
- [98] Krajcinovic D. and Fonseka G. U. The Continuous Damage Theory of Brittle Materials // *J. Appl. Mech.* 1981. V. 48. P. 809-824.
- [99] Krajcinovic D. *Damage Mechanics*, Elsevier Science, 1996.
- [100] Krysl P., Belytschko T. The element-free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-d cracks. *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* 1999. V. 44. No. 6. P. 767-800.
- [101] Kukudzhanov V.N., Bourago N.G., Kovshov A.N., Ivanov V.L., Shneiderman D.N. On the problem of Damage and Localization of Strains // *Preprint 1995:10*. Goteborg: Chalmers Univ.Technol., 1995. P. 1-35.
- [102] Ladeveze P. *Nonlinear computational structural mechanics*, New York: Springer, 1999. P. 1-220.
- [103] Ladeveze Pierre, Error estimators for material models with softening, 2003. Available at www-lacan.upc.es/projects/workshop/workshopabstracts/Ladeveze.doc
- [104] Larsson R., Runesson K. Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization // *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* 1993. V. 36. No. 12. P. 2087-2105.
- [105] Larsson R., Runesson K. and Sture S. Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity - theory and FE-analysis. // *Int. J. Solids Struct.* 1996. V. 33. No. 20-22. P. 3081-3101.
- [106] Lasry D, Belytschko T. Localization limiters in transient problems. *Intern. J. Solids and Structures*, 1988. V. 24. P. 581-597.
- [107] Leckie F. A. The Constitutive Equations of Continuum Creep-Fatigue Damage Cumulation and Interaction // *Philosophical Transactions Royal Society of London*, 1978. vol. A288, P. 27.
- [108] *Continuum Damage Mechanics. Theory and Application*. CISM. Lectures / Eds. O. Krajcinovic, J. Lemaitre. Viena: Springer, 1987.
- [109] Lemaitre J. *A Course on Damage Mechanics*, 2 nd edn.; Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [110] Li S., Mear M.E., Xiao L. Symmetric weak-form integral equation method for three-dimensional fracture analysis // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1998. V. 151. P. 435-459.
- [111] Luccioni V, Oller S, Danesi R. Coupled plastic-damage model // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1996. V. 129. P. 81-90.
- [112] Lubarda V. A. and Krajcinovic D. Damage tensor and the crack density distribution // *Int. J. Solids Structures*, 1991. V. 30, No. 20, P. 2859-2877
- [113] Lyakhov G.M. *Foundations of dynamics of explosive waves in soils and rocks*. Moscow: Nauka, 1974. (in Russian).
- [114] Maenchen J., Sack S. Method "Tensor" // *Comput. Methods in Hydrodynamics* / B. Older, S. Fernbach, M. Rothenberg,

Editors, 1964.

- [115] Maugin G.A. The Thermodynamics of Plasticity and Fracture, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1992, 350 pages.
- [116] Mazars J, Pijaudier-Cabot G. Continuum damage theory - application to concrete // *Journal of Engineering Mechanics* 1989. V. 115. P. 345-365.
- [117] Melenk J.M., Babuska I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1996. V. 139. P. 289-314.
- [118] Miao S., Wang M.L. An Elastoplastic Damage Model for Concrete Subjected to Sustained High Temperatures // *Journal of Damage Mechanics*, 1997. Vol. 6, No. 2, P. 195-216.
- [119] Moes N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // *Intern. J. Numer. Methods in Engng.* 1999.
- [120] Moes N., Gravouil A., Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part I: mechanical model. // *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* 2002. V. 53.No. 11. P. 2549-2568.
- [121] Nikiforovski V.S., Shemyakin E. I. Dynamic fracture of solids. Novosibirsk: Nauka, 1979. P. 1-271.
- [122] Oliver J. Continuum modeling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models // *Comput. Mech.* 1999. V. 17. P. 49-61.
- [123] Oliver J. Modeling strong discontinuities in solids mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals // *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1996. V. 39. No. 21. P. 3575-3600.
- [124] Oliver J. Modeling strong discontinuities in solids mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation. // *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1996. V. 39. No. 21. P. 3601-3623.
- [125] Oliver, J.; Huespe, A.E.; Pulido, M.D.G., Chaves, E.W.V. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. // *Engng Fracture Mechanics*, 2001. V. 69. P. 113-136.
- [126] Ortiz M., Leroy Y., Needleman A. A finite element method for localized failure analysis // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1987. V. 61. P. 189-194.
- [127] Ortiz M., Quigly J.J. Adaptive mesh refinement in strain localization problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1991. V. 90. P. 781-804.
- [128] Owen D., Hinton E. Finite elements in plasticity. Swansea. U.K. 1984.
- [129] Paris P, Erdogan F. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws // *ASME. J. Basic Engng.* 1963. V. 85. P. 528-534
- [130] Peerlings R.H.J., de Borst R., Brekelmans W.A.M., de Vree J.H.P.. Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. // *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* 1996. V. 39. P. 3391-3403.
- [131] Pijaudier-Cabot G, Bazant Z. Nonlocal damage theory // *Engng Mechanics*, 1987. V. 113. P. 1512-1533.
- [132] Radayev Y.N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part I. Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropic Damage State // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 1996. V. 21. No. 2. P. 129-152.
- [133] Radayev Y.N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part II. Canonical Damage Growth Rate Equations and Theory of Damage Invariants // *J. Non-Equilib Thermodyn.* 1996. V. 21. No. 3. P. 197-222.
- [134] Rashid M.M. The arbitrary local mesh refinement method: an alternative to remeshing for crack propagation analysis // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Engng.* 1998. V. 154. No. 1-2. P. 133-150.
- [135] Runesson K. Constitutive Theory and Computational Technique for Dissipative Materials with Emphasis on Plasticity, Viscoplasticity and Damage, Basic material behavior and elementary constitutive models, U63 (5th ed.), Department of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, 2003. 230 pages.
- [136] Saleeb A.F., Wilt T.E. Analysis of the Anisotropic Viscoplastic-damage Response of Composite Laminates - Continuum Basis and Computational Algorithms, *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* 1993. V. 36. No. 10. P. 1629-1660.
- [137] Seaman L., Curran D.R., Shackey D.H. Computational models for ductile and brittle fracture. // *J. Appl. Phys.*, 1976. V. 47. No. 11. P. 4814-4826.
- [138] Simo J.C. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1987. V. 60. P. 153-173.
- [139] Simo J.C., Ju J.W. Strain- and stress-based continuum damage models: 1. Formulation // *Intern. J. Solids Structures*, 1987. V. 23. No. 7, P. 821-840.
- [140] Simo J.C., Ju J.W. Strain- and stress-based continuum damage models: 2. Computational aspects // *Intern. J. Solids Structures*. 1987. V. 23. No. 7. P. 841-869.
- [141] Simo J., Oliver J., Armero F. An analysis of strong discontinuities induced by softening solutions in rate-independent solids // *Comput. Mech.* 1993. V. 12. No. 5. P. 277-296.
- [142] Simone A., Askes H., Peerlings R.H.J., Sluys L.J. Interpolation requirements for implicit gradient-enhanced continuum damage models // *Commun. Numer. Meth. Engng.* 2002. Available at www.mechanics.citg.tudelft.nl/simone/cnme_gd.pdf
- [143] Simone A., Sluys L.J. Continuous-discontinuous failure analysis in a rate-dependent elastoplastic damage model, 2003. Available at www.mechanics.citg.tudelft.nl/simone/isec-02.pdf
- [144] Skallerud B. and Zhang Z. L. Effects of finite element mesh on numerical prediction of ductile tearing. // *In Fatigue and Fracture Mechanics: 1999*, V. 29. ASTM STP 1332.
- [145] Skallerud B. and Zhang Z. L. On numerical analysis of damage evolution in cyclic elastic-plastic crack growth problems. // *Int. J. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 2000. V.23. P. 81-86.
- [146] Sokolovski V.V. Statics of granular media. IV edition. Moscow: Nauka, 1991. (in Russian).
- [147] Stecher F.P., Johnson G.C. Lagrangian computations for projectile penetration into thick plates // *Computers in Engng / Ed. W.A.Gruver.* New York: ASME, 1984. V. 2. P. G00240.
- [148] Stolarska M., Chopp D.L., Moes N., Belytschko T. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. // *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* 2001. V. 51. No. 8. P. 943-960.
- [149] Sukumar N., Moran B., Black T., Belytschko T. An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics // *Computational Mechanics.* 1997. V. 20. P. 170-175.
- [150] Sukumar N., Moes N., Moran B., Belytschko T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2000. V. 48. P. 1549-1570.

- [151] Suresh S. *Fatigue of Materials* (2 nd ed.), Cambridge University Press, 1998, 679 pages.
- [152] Sumi Y. Computational crack path prediction // *Theoret. Appl. Fract. Mech.* 1985. V. 4. No. 2. P. 149-156.
- [153] Talreja R. Damage development in composite: mechanism and modeling. // *J. Strain Analysis*, 1989. V. 24. P. 215-222.
- [154] Tuler F.R., Butcher B.M. A criterion for the time dependence of dynamic fracture // *Int. J. Fract. Mech.* 1968. V. 4. No. 4. P. 431-437.
- [155] Voyiadjis G.Z., Park T. A plasticity-damage theory for large deformation of solids-I: theoretical formulation. // *Int J. Eng. Sci.* 1992. V. 30. No. 9. P. 1089-1106.
- [156] Voyiadjis G. Z. and Park T. Local and Interfacial Damage Analysis of Metal Matrix Composites // *Intern. J. of Engineering Sciences*, 1995. V. 33, No. 11, P. 1595-1621.
- [157] Voyiadjis G. Z. and Eehle R. A Micromechanical Fatigue Damage Model for Unidirectional Metal-Matrix Composites. // *Applications of Continuum Damage Mechanics to Fatigue and Fracture*, ASTM STP 1315, D.L. McDowell, Ed., American Society for Testing and Materials, 1996. P. 97-115.
- [158] Voyiadjis G. Z. and Kattan P. I. *Advances in Damage Mechanics: Metals and Metal Matrix Composites*, 1999
- [159] De Vree G.H.P., Brekelmans W.A.J., Van Gils M.A.J. Comparison of non-local approaches in continuum damage mechanics // *Comput. Structures* 1995. V. 55. No. 4. P. 581-588.
- [160] Wang M. L., Chen Z. Simulation of the Failure Mechanisms of Quasi-Brittle Materials // *Construction and Building Materials*, 1999. V. 13. P. 49-55.
- [161] Wells G. N. and Sluys L.J. 2001. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *Intern. J. Numer. Meth. Engng* V. 50. No. 12. P. 2667-2682.
- [162] Wunderlich W., Cramer H., Steinl G. An adaptive finite element approach in associated and non-associated plasticity considering localization phenomena, *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, Ladeveze P., Oden J. (eds), Elsevier, 1998. P. 293-308
- [163] Xu Y., Moran B., Belytschko T. Self-similar crack expansion method for three-dimensional crack analysis // *ASME, J. Appl. Mech.* 1997. V. 64. P. 729-737.
- [164] Yazdani S. and Schreyer H.L. An anisotropic damage model with dilatation for concrete // *Mechanics of Materials* 1988. No. 7. P. 231-244.
- [165] M. Zhou, A.J. Rosakis, and G. Ravichandran. Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates -i, experimental investigations of temperature signatures and propagation speed // *J. Mech. Phys. Solids*, 1996. V. 44. P. 981-1006.
- [166] M. Zhou, A.J. Rosakis, and G. Ravichandran. Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates -ii, numerical simulations // *J. Mech. Phys. Solids*, 1996, V. 44. P. 1007-1032.
- [167] Zienkiewicz O., Nayak G.C. Elastoplastic stress analysis: a generalization for strain softening // *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* 1972. V. 5. P. 113-135.
- [168] Zysset P.K., Curnier A. An implicit projection algorithm for simultaneous flow of plasticity and damage in standard generalized materials // *Intern. J. Numer. Meth. Engng*, 1996. V. 39. No. 18. P. 3065-3082.

Николай Георгиевич Бураго
Владимир Николаевич Кукуджанов
О непрерывном разрушении и локализации деформаций

Подписано к печати 05.02.2004
Заказ 05-2004

№ Т-10264
Тираж 250 экз.