Российская академия наук
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
им. А.Ю. Ишлинского

НАУЧНЫЕ СЛУШАНИЯ,
посвященные
110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
академика
Сергея Алексеевича
ХРИСТИАНОВИЧА

ИПМех РАН
15-16 ноября 2018 г.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Москва, 2018

Российская академия наук
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
им. А.Ю. Ишлинского

НАУЧНЫЕ СЛУШАНИЯ,
посвященные
110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
академика
Сергея Алексеевича
ХРИСТИАНОВИЧА

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ

Москва, 2018

УДК 533+539.3

ББК 22.2

В67

В67 **Современные проблемы механики и математики:** Научные слушания, посвященные 110-летию со дня рождения С.А. Христиановича; 15 – 16 ноября 2018 г., Москва: Сборник материалов. – М.: ООО «Премиум-принт», 2018. – 118 с.

ISBN 978-5-91741-230-6

Сборник материалов научных слушаний "Современные проблемы механики и математики", посвященных обсуждению научного наследия академика С.А. Христиановича.

Ключевые слова: механика, аэрогидродинамика, газовая динамика, геомеханика, физика нефтяных пластов, теория пластичности, энергетика.

УДК 533+539.3

ББК 22.2

Proceedings of Scientific Hearings "Modern Problems of Mechanics and Mathematics" dedicated to the scientific heritage of Academician S.A. Khristianovich

Keywords: mechanics, aero-hydrodynamics, gas dynamics, geomechanics, oil reservoir physics, plasticity theory, energy.

ISBN 978-5-91741-230-6

ЛИТЕРАТУРА

1. *Батдорф С.Б., Будянский Б.* Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения.// Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1962. №1. С. 135–155.
2. *Никитин И.С.* Упругопластическая модель и теория скольжения для трехмерного напряженного состояния // Изв. РАН. МТТ. 2009. №3. С.171–192.
3. *Мохель А.Н., Салганик Р.Л., Христианович С.А.* О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов. Определяющие уравнения и расчеты по ним //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. N4. С. 119–141.

—— ♦♦♦ ——

КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ

И.С. Никитин[1], *А.Д. Никитин*[1], *Н.Г. Бураго*[2], *А.Б. Журавлев*[2]
[1] *Институт автоматизации проектирования РАН, e-mail: i_nikitin@list.ru*
[2] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*

В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев. Границы раздела имеют координаты $x_3 = x^{(s)} = s\varepsilon$, $s=0,\ \pm1,\pm2\ldots$, где постоянная толщина слоя $\varepsilon \ll 1$ является малым параметром. Предполагается, что физически между упругими слоями имеются тонкие вязкие или вязкопластические прослойки толщины $\delta \ll \varepsilon$, однако мы пренебрегаем толщиной этих прослоек и заменяем их условиями скольжения на поджатых границах слоев:

$$\sigma_{33} < 0 \quad [u_3] = [\sigma_{\gamma 3}] = [\sigma_{33}] = 0$$

$[u_{\gamma,t}]/\varepsilon = \kappa\sigma_{\gamma 3} < F\left(\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3}/\sigma_s{}^2 - 1\right) >$ – нелинейное условие вязкопластического скольжения, $\kappa = \delta/(\varepsilon\eta)$, η – коэффициент вязкости.

Здесь квадратные скобки $[f] = f|_{x^{(s)}+0} - f|_{x^{(s)}-0}$ обозначают скачок величины f на межслойной границе, $< F(y) >= F(y)H(y)$ – нелинейная функция, отличная от нуля за пределом текучести $\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3} = \sigma_s{}^2$, $H(y)$ – функция Хэвисайда, $H(y) = 0$ при $y < 0$, $H(y) = 1$ при $y \geq 0$. Греческие индексы β,γ принимают значения 1 и 2, латинские индексы – значения 1,2,3, u_k – компоненты вектора смещений, $u_{k,t}$ – компоненты вектора скорости, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Сами слои считаются изотропными линейно-упругими (при $x_3 \neq x^{(s)}$):

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} = 0\,, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$$

где ρ – плотность, тензор модулей упругости имеет вид:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Будем считать, что искомые функции $u_k = u_k(x_l,\xi,t)$ являются гладкими по “медленным” переменным x_l и гладкими по “быстрой” переменной $\xi = x_3/\varepsilon$, за исключением точек $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$, где они могут терпеть разрывы первого рода. Кроме того, эти функции являются 1-периодическими [1]: $[[u_i]] = u_i|_{\xi^{(s)}+1/2} - u_i|_{\xi^{(s)}-1/2} = 0$.

Смещения среды представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε: $u_i = w_i(x_k,t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k,\xi,t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k,\xi,t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k,\xi,t) + \ldots$

Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{ij}^{(2)} + \ldots$, где $\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}u_{k,l}^{(n)} + C_{ijk3}u_{k,\xi}^{(n+1)}$. Уточненная модель слоистой среды второго порядка получается, если в асимптотической системе уравнений удержать члены порядка ε^2 и применить операцию осреднения по ячейке периодичности $\langle\cdot\rangle$

$$\langle f\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f d\xi : C_{ijkl}w_{k,jl} + C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(1)}\right\rangle_{,j} + \varepsilon C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(2)}\right\rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(3)}\right\rangle_{,j} = \rho w_{i,tt}$$

Каждая из функций $u_i^{(n)}(x_k,\xi,t)$ $(n = 1,2,3)$, находится из соответствующей “задачи на ячейке периодичности” при $-1/2 \le \xi \le 1/2$. Эти задачи сформулированы и в общем виде решены в [1] с точностью до некоторых функций, которые определяются из условий проскальзывания. С использованием этих результатов уточненную систему уравнений можно получить в следующем виде:

$$\rho v_{\gamma,t} = s_{\gamma j,j} + \varepsilon^2\mu\Omega_{\gamma,3}\ ,\ \rho v_{3,t} = s_{3j,j} + \varepsilon^2\mu\Omega_{\beta,\beta}\ ,\ \tau_{ij,t} = \lambda\delta_{ij}v_{k,k} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$$

$$\varphi_{\gamma,t} = -\kappa s_{\gamma 3} < F(\Delta) >$$

$$\Omega_{\gamma,t} = -\kappa\mu\Big((g_\gamma + \Omega_\gamma) < F(\Delta) > + 2s_{\gamma 3}s_{\beta 3}(g_\beta + \Omega_\beta) < F'(\Delta) > /\sigma_s^2\Big)$$

$$s_{ij} = \tau_{ij} + \mu(\varphi_i\delta_{j3} + \varphi_j\delta_{i3}),\ \Delta = s_{\beta 3}s_{\beta 3}/\sigma_s^2 - 1$$

$$g_\gamma = \Big(\rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu - \varphi_{\gamma,\beta\beta} - (3\lambda + 2\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/(\lambda + 2\mu)\Big)/12$$

В этой нестационарной системе введены обозначения $s_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)}$, $v_k = w_{k,t}$. Для дополнительных функций φ_γ и Ω_γ, имеющих смысл распределенных скольжений первого и третьего порядков по ε, получены нелинейные дифференциальные уравнения.

Пример численного решения задачи прохождения поперечной волны (пунктир) через слоистый пакет $0.5 < x_3 < 0.7$ с вязкопластическими прослойками, расположенный в упругом массиве $0 < x_3 < 1.0$, показан на *Рис. 1*. Характеристики материала: плотность $\rho = 1.0$, модули Ламе $\lambda = \mu = 0.333$, предел текучести $\tau_s = 0.00001$, параметр релаксации γ=0.1, амплитуда приложенного импульса скорости $U_0 = 0.000035$, длительность импульса T_0=0.20. Падающая упругая поперечная волна, показанная на *Рис.1* пунктиром, в отсутствие слоистого пакета распространялась бы с неизменной формой и амплитудой. На *Рис. 1а,б* изображены профили относительных поперечных скоростей U/U_0. Для разных моментов времени показаны формы проходящей через слоистый пакет, прошедшей и отраженной волн для случая ε = 0 (*Рис. 1*, без учета поправочного члена $\varepsilon^2\mu\Omega_{,z}$) и для случая ε = 0.1 (*Рис. 2*, с учетом члена $\varepsilon^2\mu\Omega_{,z}$)

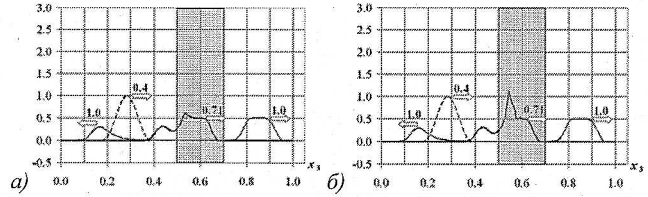

Рис. 1. Профили относительных поперечных скоростей U / U_0, а) $\varepsilon = 0$, б) $\varepsilon = 0.1$.

Из этих рисунков видно, что наличие слоистого пакета приводит к сильной трансформации исходного профиля падающей упругой волны. Учет влияния дополнительного члена в системе уточненных уравнений, связанного с функцией скольжения Ω, сильно влияет на профиль проходящей волны внутри нелинейного слоистого пакета, но незначительно влияет на форму прошедшей и отраженной волн.

Полученные модели могут быть использованы для исследования волновых процессов в геологических массивах с флюидосодержащей слоистой структурой (задачи сейсморазведки).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бураго Н.Г., Никитин И.С.* Уточненная модель слоистой среды с проскальзыванием на контактных границах// ПММ. 2016. Т. 80. № 2. С. 230–241.

—— ♦♦♦ ——

СГУЩЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА ОТ СТЕНКИ

Р.Ф. Никонорова
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
e-mail: shayakhmetova.renata@gmail.com

ИНВАРИАНТНАЯ ПОДМОДЕЛЬ РАНГА 2

Система уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа имеет вид [1]:

$$\rho D\bar{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho(\nabla \cdot \bar{u}) = 0$$
$$DS = 0, \quad S = p\rho^{-5/3} \tag{1}$$

Рассматривается построенная в работе [2] инвариантная подмодель ранга 2 на серии двумерных подалгебр, содержащих проективный оператор X_{12} и оператор растяжения по термодинамическим параметрам газа X_{14} (базисные операторы $X_3 - X_5 + cX_{14}$, $a(X_3 - X_5) + b(X_2 + X_6) + X_7 + X_{10} + X_{12}$):

$$Du + \rho^{-1} p_x = -x, \quad Dv + \rho^{-1} p_y = 2w$$
$$Dw = -2(v + b) - c\rho^{-1} p, \quad D\rho + \rho(u_x + v_y) = c\rho(a - w) \tag{2}$$
$$DS = \frac{2}{3} cS(w - a), \; S = p\rho^{-5/3}$$

где $D = u\partial_x + v\partial_y$, индексы у новых инвариантных функций и переменных опущены. Подмодель имеет канонический вид.