

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/322626736>

Определение критической плоскости и оценка долговечности при многоосном циклическом нагружении

Conference Paper · December 2017

DOI: 10.13140/RG.2.2.20151.21923

CITATIONS

0

4 authors:



I. S. Nikitin

Institute for Computer Aided Design of Russia...

85 PUBLICATIONS 48 CITATIONS

SEE PROFILE



N. G. Burago

Russian Academy of Sciences

117 PUBLICATIONS 128 CITATIONS

SEE PROFILE



Alexander D. Nikitin

21 PUBLICATIONS 13 CITATIONS

SEE PROFILE



Vladimir Yakushev

Russian Academy of Sciences

32 PUBLICATIONS 12 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



I just participate in several projects of Russian Academy of Sciences devoted to development of numerical methods for Continuum Mechanics [View project](#)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Актуальные проблемы
прикладной математики,
информатики и механики**

*Сборник трудов
Международной научно-технической
конференции*

Воронеж,
18–20 декабря 2017 г.

Воронеж
Издательство
«Научно-исследовательские публикации»
2017

УДК 531(063)+51-7(063)

ББК 22.2я5+22.1я5

А43

Оргкомитет:

Председатель организационного комитета

Шашкин А. И. – д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Заместители председателя организационного комитета:

Тимошенко Ю. К. – д-р физ.-мат. наук, профессор (г. Воронеж)

Медведев С. Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент (г. Воронеж)

Медведева О. А. – канд. физ.-мат. наук, доцент (г. Воронеж)

Члены организационного комитета:

Jorg Becker, Semyon Levitsky, Andrew Schumann, Алгазинов Э. К., Аристова Е. М., Баев А. Д., Буренин А. А., Воеводин В. В., Вервейко Н. Д., Жабко А. П., Задорожний В. Г., Иевлев В. М., Илолов Мамадшо, Каплиева Н. А., Ковалев А. В., Ковалев В. А., Корольков О. Г., Кузнецов А. В., Леденева Т. М., Ломакин Е. В., Маркин А. А., Матвеев М. Г., Матченко Н. М., Махортов С. Д., Мирсалимов В. М., Моисеев Е. И., Морозов Н. Ф., Петросян Л. А., Радаев Ю. Н., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Сирота А. А., Спорыхин А. Н., Чигарев А. В.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта 17-31-10301 мол_г

Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики :

А43 сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 18–20 декабря 2017 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2017. – 1782 с.
ISBN 978-5-9500319-1-5

В сборнике предлагаются научные работы, доклады и лекции, представленные на Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проводимой Воронежским государственным университетом.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

УДК 531(063)+51-7(063)

ББК 22.2я5+22.1я5

ISBN 978-5-9500319-1-5

© ФГБОУ ВО ВГУ, 2017

© ООО «Вэлборн», 2017

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ И ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ МНОГООСНОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

И. С. Никитин^{1,3}, Н. Г. Бураго², А. Д. Никитин^{1,3}, В. Л. Якушев¹

¹Институт автоматизации проектирования РАН

²Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского

³«МАИ» – Национальный Исследовательский Университет

1. Определение критической плоскости для многоосного напряженного состояния

Современные подходы к построению многоосных критериев усталостного разрушения часто используют понятие критической плоскости [1–6]. Один из первых критериев с определением критической плоскости для классических режимов малоциклового (МЦУ, условно $10^3 < N < 10^5$) и многоциклового (МНЦУ, условно $10^5 < N < 10^7$) усталости был предложен Финдли [7]. Согласно этому критерию развитие усталостной поврежденности в циклическом процессе нагружения происходит по плоскости с нормалью \mathbf{n} с компонентами n_k , $k = 1, 2, 3$, на которой максимум комбинации $(\Delta\tau_n/2 + \alpha_F\sigma_n)$ достигает определенного критического значения. Такая плоскость называется критической. Для определения долговечности одноосного циклического нагружения образца вплоть до его усталостного разрушения существует соотношение Баскина [8], которое выражает собой аналитическое представление усталостной кривой при различных коэффициентах асимметрии цикла. Обобщение соотношения Баскина на многоосный случай для критерия Финдли имеет вид:

$$(\Delta\tau_n/2 + \alpha_F\sigma_n)_{MAX_n} = S_F + A_F N^{\beta_F}, \quad \sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau_n = |\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|,$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, который определяет напряженное состояние в материальной частице деформируемого тела, $\beta_F < 0$, α_F , S_F , A_F – параметры, определяемые по данным эксперимента, N – число циклов до разрушения, $\Delta\tau_n$ – размах касательного напряжения в цикле, σ_n – нормальное напряжение на этой плоскости.

Расчет усталостной долговечности по критерию Финдли требует определения ориентации плоскости, проходящей через заданную материальную точку, на которой внутри цикла $t \in [0, T]$, достигается максимальное выражение функции Финдли $F = \Delta\tau_n + 2\alpha_F \max_{t \in [0, T]} \sigma_n$.

Для многоосного напряженного состояния это не простая задача, которая, при необходимости, решается численно. Построим ее аналитическое решение для синфазного и противофазного циклического нагружения.

1.1. Синфазное многоосное циклическое нагружение

Рассмотрим трехосное циклическое нагружение в системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений. Предполагаем, что эти оси не изменяются в течение цикла, а главные значения тензора напряжений меняются по гармоническому закону без сдвига фаз относительно друг друга:

$$\sigma_1(t) = \sigma_{1m} + \sigma_{1a} \sin \omega t, \quad \sigma_2(t) = \sigma_{2m} + \sigma_{2a} \sin \omega t, \quad \sigma_3(t) = \sigma_{3m} + \sigma_{3a} \sin \omega t, \quad \sigma_{1,2,3a} \geq 0,$$

где дополнительным индексом m помечены средние за цикл значения напряжений, а индексом a их амплитуды.

Размах главных напряжений в цикле равен

$$\Delta\sigma_1 = 2\sigma_{1a} \geq 0, \quad \Delta\sigma_2 = 2\sigma_{2a} \geq 0, \quad \Delta\sigma_3 = 2\sigma_{3a} \geq 0.$$

Выберем главные оси так, чтобы максимумы главных напряжений удовлетворяли неравенствам $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$ где $\Sigma_1 = \sigma_{1m} + \sigma_{1a}$, $\Sigma_2 = \sigma_{2m} + \sigma_{2a}$, $\Sigma_3 = \sigma_{3m} + \sigma_{3a}$.

Введем следующие обозначения: $\Sigma_{12} = \Sigma_1 - \Sigma_2$, $\Sigma_{13} = \Sigma_1 - \Sigma_3$, $\Sigma_{23} = \Sigma_2 - \Sigma_3$, $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_{13} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$, $\Delta\sigma_{23} = \Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3$.

В главных осях тензора напряжений можно получить формулы (см. Приложение):

$$\Delta\tau_n = \sqrt{(\Delta\sigma_{12})^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_{13})^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_{23})^2 n_2^2 n_3^2}, \quad \max_{t \in [0, T]} \sigma_n = \Sigma_1 n_1^2 + \Sigma_2 n_2^2 + \Sigma_3 n_3^2.$$

С учетом этих формул определим ориентацию критической плоскости с компонентами нормали: $x_1 = n_1^2 \geq 0$, $x_2 = n_2^2 \geq 0$, $x_3 = n_3^2 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Можно показать, что задача определения критической плоскости для трехосного напряженного состояния сводится к определению максимума функции (см. Приложение):

$$F(x_2, x_3) = \sqrt{\Delta\sigma_{12}^2 x_2 + \Delta\sigma_{13}^2 x_3 - (\Delta\sigma_{12} x_2 + \Delta\sigma_{13} x_3)^2} + 2\alpha_F \Sigma_1 - 2\alpha_F (\Sigma_{12} x_2 + \Sigma_{13} x_3)$$

при ограничениях $0 \leq x_2 + x_3 \leq 1$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Приведем результаты решения этой задачи для всевозможных значений максимумов и размахов главных напряжений.

Вначале ищем экстремум функции $F(x_2, x_3)$ внутри зоны ограничений $0 < x_2 + x_3 < 1$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$: $\partial F(x_2, x_3)/\partial x_2 = 0$, $\partial F(x_2, x_3)/\partial x_3 = 0$.

При этом возникают следующие случаи соотношений между главными значениями напряжений.

I. Случай $\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12} \neq \Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}$, $\Delta\sigma_{12} \neq 0$, $\Delta\sigma_{13} \neq 0$.

Примем обозначения:

$$\beta_{12} = 4\alpha_F \Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12}, \quad \beta_{13} = 4\alpha_F \Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}, \quad \Delta = 2(\beta_{13} - \beta_{12}) \neq 0, \quad \Delta_S = \Delta\sigma_{12}\beta_{13} - \Delta\sigma_{13}\beta_{12},$$

$$\Delta_T = 2(\Delta\sigma_{13} - \Delta\sigma_{12}), \quad \Delta_2 = \Delta\sigma_{13}\Delta_S/\Delta - (\Delta_S^2 + \Delta_T^2)/\Delta^2, \quad \Delta_3 = (\Delta_S^2 + \Delta_T^2)/\Delta^2 - \Delta\sigma_{12}\Delta_S/\Delta.$$

I-а. Если $\Delta\sigma_{12} \neq \Delta\sigma_{13}$, условия экстремума $F(x_2, x_3)$ имеют вид:

$$x_2 = \Delta_2/(\Delta\sigma_{12}\Delta\sigma_{23}), \quad x_3 = \Delta_3/(\Delta\sigma_{13}\Delta\sigma_{23}).$$

I-б. Если $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0$, условия экстремума $F(x_2, x_3)$ имеют вид:

$$x_2 + x_3 = \Delta_S/(\Delta\sigma_{12}\Delta).$$

II. Если $\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12} = \Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}$, необходимо $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0$, $\Sigma_{12} = \Sigma_{13}$. Условия экстремума $F(x_2, x_3)$: $x_2 + x_3 = (1 - \beta_{12}/\sqrt{4 + \beta_{12}^2})/2$.

Найденные значения x_2 , x_3 должны удовлетворять условиям $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $x_2 + x_3 < 1$ и условиям максимума $F(x_2, x_3)$ которые имеют вид:

$$\Delta\sigma_{12}^2 + 4\Delta\sigma_{13}\Delta\sigma_{23}x_3 > 0, \quad \Delta\sigma_{13}^2 - 4\Delta\sigma_{12}\Delta\sigma_{23}x_2 > 0.$$

Эти неравенства следуют из условия отрицательности квадратичной формы

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} (dx_2)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} (dx_3)^2 < 0.$$

Если таких значений не существует, то необходимо искать максимум $F(x_2, x_3)$ на границах зоны ограничений: либо $x_2 = 0$, либо $x_3 = 0$, либо $x_2 + x_3 = 1$.

III. В этом случае максимум $F(x_2, x_3)$ достигается при значениях:

$$x_2 = 0, \quad x_3 = \left(1 - \beta_{13} / \sqrt{4 + \beta_{13}^2}\right) / 2$$

$$x_3 = 0, \quad x_2 = \left(1 - \beta_{12} / \sqrt{4 + \beta_{12}^2}\right) / 2$$

$$x_2 + x_3 = 1, \quad x_2 = \left(1 + \beta_{23} / \sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right) / 2, \quad x_3 = \left(1 - \beta_{23} / \sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right) / 2.$$

Из этих трех пар x_2, x_3 следует выбрать ту, где функция $F(x_2, x_3)$ принимает наибольшее значение. Таким образом, для режима синфазного многоосного циклического нагружения получено аналитическое решение задачи определения ориентации критической плоскости. Определив компоненты нормали к этой плоскости, можно вычислить значение функции Финдли и соответствующее ему число N , т. е. усталостную долговечность элемента конструкции, находящегося в многоосном напряженном состоянии [9].

1.2. Противофазное многоосное циклическое нагружение

Важным практическим примером противофазного циклического многоосного нагружения являются усталостные испытания на чистое кручение или изгиб с кручением.

Нетрудно видеть, что в системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений, противофазное циклическое нагружение с гармоническим законом изменения по времени всегда можно представить в виде:

$$\sigma_1(t) = \sigma_{1m} + \sigma_{1a} \sin \omega t, \quad \sigma_2(t) = \sigma_{2m} + \sigma_{2a} \sin \omega t,$$

$$\sigma_3(t) = \sigma_{3m} + \sigma_{3a} \sin(\omega t + \pi) = \sigma_{3m} - \sigma_{3a} \sin \omega t, \quad \sigma_{1,2,3a} \geq 0$$

В этом случае $\Delta\sigma_1 = 2\sigma_{1a} \geq 0$, $\Delta\sigma_2 = 2\sigma_{2a} \geq 0$, $\Delta\sigma_3 = -2\sigma_{3a} \leq 0$.

Выражение для $\Delta\tau_n$ по сравнению с синфазным циклическим режимом не меняется:

$$\Delta\tau_n = \sqrt{(\Delta\sigma_{12})^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_{13})^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_{23})^2 n_2^2 n_3^2}.$$

Нормальное напряжение на площадке с нормалью \mathbf{n} в противофазном режиме зависит от времени по закону:

$$\sigma_n(t) = (\sigma_{1m} n_1^2 + \sigma_{2m} n_2^2 + \sigma_{3m} n_3^2) + (\sigma_{1a} n_1^2 + \sigma_{2a} n_2^2 - \sigma_{3a} n_3^2) \sin \omega t.$$

Поэтому для определения $\max_{t \in [0, T]} \sigma_n$, входящего в функцию Финдли, рассмотрим два случая.

I. Если $\sigma_{1a} n_1^2 + \sigma_{2a} n_2^2 - \sigma_{3a} n_3^2 \geq 0$, то $\max_{t \in [0, T]} \sigma_n = \Sigma_1 n_1^2 + \Sigma_2 n_2^2 + \Sigma_3 n_3^2$ при $\sin \omega t = 1$, где $\Sigma_1 = \sigma_{1m} + \sigma_{1a}$, $\Sigma_2 = \sigma_{2m} + \sigma_{2a}$, $\Sigma_3 = \sigma_{3m} - \sigma_{3a}$.

Перенумеруем значения Σ_k , $k = 1, 2, 3$ так, чтобы они удовлетворяли неравенствам $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$. После этого проводится такой же анализ и расчет ориентации критической плоскости для перенумерованных значений Σ_k , $\Delta\sigma_k$, $k = 1, 2, 3$, как и для синфазного режима.

Полученные значения компонент нормали проверяются на выполнение условия $\sigma_{1a}n_1^2 + \sigma_{2a}n_2^2 - \sigma_{3a}n_3^2 \geq 0$. Если это условие не выполняется, то рассматриваем следующий альтернативный случай.

II. Если $\sigma_{1a}n_1^2 + \sigma_{2a}n_2^2 - \sigma_{3a}n_3^2 \leq 0$ то $\max_{t \in [0, T]} \sigma_n = \Sigma_1 n_1^2 + \Sigma_2 n_2^2 + \Sigma_3 n_3^2$ при $\sin \omega t = -1$, где $\Sigma_1 = \sigma_{1m} - \sigma_{1a}$, $\Sigma_2 = \sigma_{2m} - \sigma_{2a}$, $\Sigma_3 = \sigma_{3m} + \sigma_{3a}$.

И в этом случае перенумеруем значения Σ_k , $k = 1, 2, 3$ так, чтобы они удовлетворяли неравенствам $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$. После этого проводится такой же анализ и расчет ориентации критической плоскости для перенумерованных значений Σ_k , $k = 1, 2, 3$, как и для синфазного режима. Полученные значения компонент нормали проверяются на выполнение условия $\sigma_{1a}n_1^2 + \sigma_{2a}n_2^2 - \sigma_{3a}n_3^2 \leq 0$.

Если выполняются оба условия, то следует выбрать такую ориентацию нормали, при которой значение функции Финдли имеет большее значение.

2. Пример расчета диска компрессора газотурбинного двигателя с оценкой долговечности в полетном цикле нагружения

В качестве примера рассмотрим задачу усталостного разрушения диска компрессора газотурбинного двигателя в полетных циклах нагружения в условиях малоциклового усталости. Предполагается, что циклом многоосного нагружения системы диск-лопатка является полетный цикл нагружения (ПЦН), состоящий в достижении максимальных нагрузок на крейсерской скорости полета воздушного судна и соответствующих угловых скоростях вращения диска компрессора. Задача состоит в определении долговечности диска (число ПЦН до разрушения) из многоосного критерия Финдли для режима МЦУ. Параметры критерия были определены по результатам двух одноосных усталостных испытаний при коэффициентах асимметрии цикла $R = -1$, $R = 0$ по процедуре, предложенной в [9]. Для этого был проведен конечноэлементный расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) системы диск-лопатка при центробежных воздействиях (см. рис. 1-а). Параметры расчета принимались такими: угловая скорость вращения $\omega = 314$ рад/с (3000 об/мин), скоростной напор на бесконечности $\rho v_\infty^2 / 2 = 26000$ Н/м², что соответствует скорости потока 200 м/с при плотности 1.3 кг/м³. Свойства материалов принимались следующими: диск (титановый сплав): $E = 116$ ГПа, $\nu = 0.32$, $\rho = 4370$ кг/м³; лопатки (алюминиевый сплав): $E = 69$ ГПа, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700$ кг/м³; фиксирующие штифты (сталь): $E = 207$ ГПа, $\nu = 0.27$, $\rho = 7860$ кг/м³. Расчеты показали, что наиболее опасными с точки зрения зарождения усталостных трещин, являются окрестности зон контакта диска и лопаток, имеющих вид соединения типа «ласточкин хвост» (см. рис. 1-б). На рис. 2-а представлена зона концентрации максимальных растягивающих напряжений в левом (скругленном) углу паза в диске, в который вставляется лопатка.

На рис. 2-б показаны рассчитанные величины числа полетных циклов до разрушения N для выбранного критерия многоосного усталостного разрушения. По горизонтальной оси отложена безразмерная координата закругления левого угла паза соединения, по вертикальной оси отложена безразмерная координата по глубине паза. Наименьшее значение N составило величину ~ 30000 циклов. Если принять среднюю протяженность цикла за 2 часа, то в реальном времени долговечность элемента конструкции составит 60000 часов.

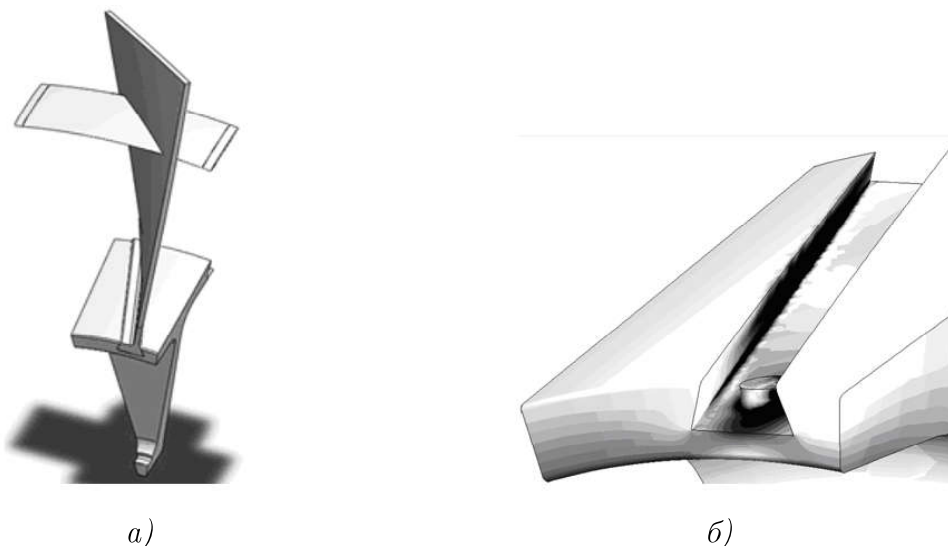


Рис. 1. Сектор диска с лопаткой, нагружаемый центробежными силами – а), максимальное главное напряжение в соединении диска и лопатки – б)

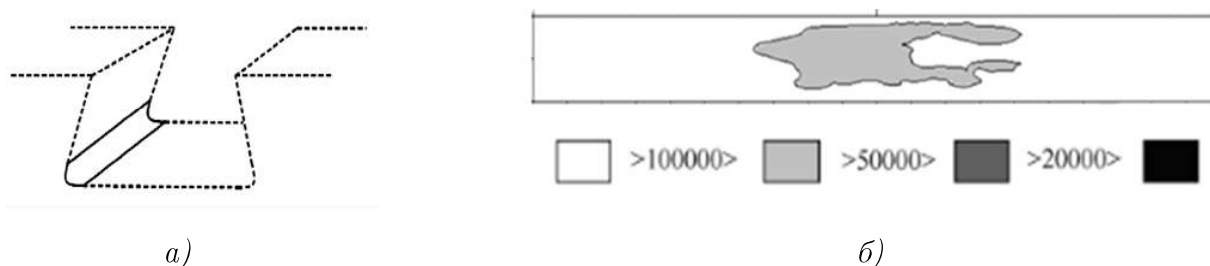


Рис. 2. Выделенная зона максимальной концентрации напряжений – а), уровни долговечности N в выделенной зоне – б)

Выводы

Получено аналитическое решение задачи определения ориентации критической плоскости для многоосного напряженного состояния при синфазном и противофазном циклическом нагружении. Проведены расчеты напряженного состояния и на основе рассмотренного критерия многоосного усталостного разрушения даны оценки усталостной долговечности ответственного элемента конструкции – диска компрессора газотурбинного двигателя для полетных циклов нагружения.

Работа частично выполнена по проекту РФФИ № 15-08-02392-а.

Приложение

Выведем полезные формулы для касательного напряжения и его размаха на произвольно ориентированной площадке с нормалью $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$. В системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений, имеем для нормального напряжения σ_n на выбранной площадке и компонент касательного напряжения τ_i следующие формулы (по повторяющимся индексам k и l производится суммирование):

$$\sigma_n = \sigma_{kl}n_k n_l = \sigma_k n_k^2, \quad \tau_i = \sigma_{ik}n_k - \sigma_n n_i = (\sigma_i - \sigma_n)n_i.$$

Для размаха компонент касательного напряжения и его модуля имеем:

$$\Delta\tau_i = (\Delta\sigma_i - \Delta\sigma_n)n_i, \quad \Delta\tau = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\Delta\sigma_k - \Delta\sigma_n)^2 n_k^2}, \quad \Delta\sigma_n = \Delta\sigma_k n_k^2.$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta\sigma_k^2 n_k^2 - 2\Delta\sigma_n \Delta\sigma_k n_k^2 + \Delta\sigma_n^2 \sum_{k=1}^3 n_k^2} = \sqrt{\Delta\sigma_k^2 n_k^2 - \Delta\sigma_n^2},$$

$$\text{т. к. } \Delta\sigma_k n_k^2 = \Delta\sigma_n, \quad \sum_{k=1}^3 n_k^2 = 1.$$

Окончательно

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta\sigma_k^2 n_k^2 - (\Delta\sigma_k n_k^2)^2}.$$

Раскрывая скобки, эту формулу можно преобразовать к виду:

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta\sigma_k^2 n_k^2 - (\Delta\sigma_k n_k^2)^2} = \sqrt{(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2}.$$

Введя обозначения $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_{13} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$, $\Delta\sigma_{23} = \Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3$, получим компактную формулу:

$$\Delta\tau_n = \sqrt{(\Delta\sigma_{12})^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_{13})^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_{23})^2 n_2^2 n_3^2}.$$

Исключая n_1^2 , получим формулу, используемую для вычисления максимума функции F :

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta\sigma_{12}^2 n_2^2 + \Delta\sigma_{13}^2 n_3^2 - (\Delta\sigma_{12} n_2^2 + \Delta\sigma_{13} n_3^2)^2}.$$

Литература

1. *Matake, T.* An explanation on fatigue limit under combined stress / T. Matake // Bull JSME. – 1977. – V. 20. – P. 257–263.
2. *McDiarmid, D. L.* A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction / D.L. McDiarmid // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1999. – V. 17. – P. 1475–1484.
3. *Morel, F.* A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading / F. Morel // Int. J. of Fatigue. – 2000. – V. 22, No 2. – P. 101–119.
4. *Papadopoulos, I. V.* A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals / I. V. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini, A. Bernasconi // Int. J. of Fatigue. – 1997. – V. 19, No. 3. – P. 219–235.
5. *Papadopoulos, I. V.* Long life fatigue under multiaxial loading / I. V. Papadopoulos // Int. J. of Fatigue. – 2001. – V. 23. – P. 839–849.
6. *Carpinteri, A.* Expected position of the fatigue fracture plane by using the weighted mean principal Euler angles / A. Carpinteri, A. Karolczuk, E. Macha, S. Vantadori // Int. J. of Fatigue. – 2002. – V. 115. – P. 87–99.

7. *Findley, W.* A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending / W. Findley // J. of Eng. for Indust. – 1959. – P. 301–306.
8. *Коллинз, Дж.* Повреждение материалов в конструкциях. Анализ. Предсказание. Предотвращение / Дж. Коллинз. – М. : Мир, 1984. – 624 с.
9. *Bourago, N. G.* Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements / N. G. Bourago, A. B. Zhuravlev, I. S. Nikitin // Mechanics of Solids. – 2011. – V. 46, No 6. – 2011. – P. 828–838.