

УДК 539.3

ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ДИСКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ УСТАЛОСТНЫХ СВОЙСТВ

© 2015 г. Н. Г. БУРАГО^{1,3}, И. С. НИКИТИН^{2,3,*}, П. А. ЮШКОВСКИЙ⁴

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

²Институт автоматизации проектирования РАН; *e-mail: i_nikitin@list.ru

³Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

⁴Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского

Предложено обобщение известных критериев многоосного усталостного разрушения на случай титановых сплавов, обладающих анизотропными усталостными свойствами. Решена задача определения напряженно-деформированного состояния и оценки усталостной долговечности вращающегося диска переменной толщины под действием центробежных нагрузок в диске и лопатках. На основе предложенных критериев многоосного усталостного разрушения в изотропном и анизотропном случаях получены пространственные распределения долговечности по диску. Показано, что усталостная долговечность титанового диска при учете анизотропии усталостных свойств может снижаться до критических значений $N \sim 10^4$ циклов около внешнего обода диска, в зоне контакта с лопатками, что является недопустимым для безопасной эксплуатации.

Ключевые слова: усталостное разрушение, анизотропия, усталостная долговечность, диск компрессора, центробежная нагрузка, аэродинамическое давление.

1. Введение. Диск компрессора авиационного газотурбинного двигателя представляет собой сложный технический объект с сильно изменяющейся толщиной, с перепускными и балансировочными отверстиями, которые являются концентраторами напряжений. Расчет напряженно-деформированного состояния такого диска может быть выполнен только с помощью современных программно-вычислительных комплексов на основе метода конечных элементов. Ранее, например, такого рода расчеты были выполнены в [1–2].

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы оценить влияние анизотропии усталостных свойств титанового сплава на долговечность диска компрессора газотурбинного двигателя в режиме малоциклового нагружения (взлет-полет-посадка). В процессе циклического нагружения диск работает в пределах упругости и для применения критериев усталостной прочности требуется определить диапазон изменения напряженно-деформированного состояния при действии центробежных нагрузок, а также контактных нагрузок со стороны лопаток, подвергающихся, в свою очередь, действию центробежных и аэродинамических нагрузок.

Известные критерии многоосного усталостного разрушения Сайнса и Кроссланда [3–4] для изотропных материалов обобщены в настоящей работе на случай ти-

тановых сплавов, обладающих анизотропными усталостными свойствами. Разработана процедура определения параметров обобщенных критериев по результатам одноосных усталостных испытаний в направлении осей, по-разному ориентированных к выделенному направлению текстуры сплава. Выбор моделей Сайнса и Кроссланда как базы для построения обобщенных критериев основан на том, что они к настоящему времени приобрели классический характер и хорошо вписываются в методологию Хилла [10], принятую в теории пластичности для ее обобщения на анизотропный случай. Новый подход, основанный на концепции критической плоскости [5–7], например, известный критерий Финдли [8] был уже использован авторами [9] для оценки усталостной долговечности наряду с критериями Сайнса и Кроссланда.

Отметим, что в реальной эксплуатации структурная анизотропия, связанная с технологическими процессами изготовления полуфабрикатов, накладывается на конструкционную анизотропию, связанную с накоплением усталостных повреждений [11–13]. В данной работе рассматриваются эффекты влияния только структурной анизотропии, влияние конструкционной анизотропии и, тем более, комплексное влияние этих двух видов анизотропии, заслуживает отдельного анализа.

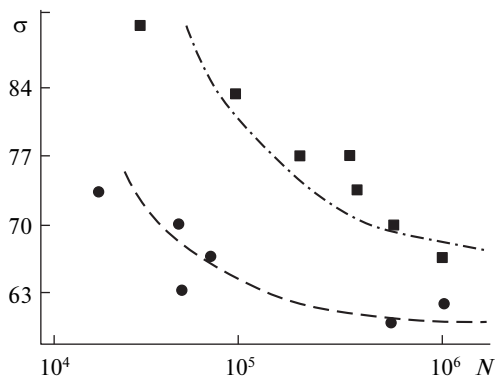
В рассматриваемом режиме малоциклового усталости циклические воздействия соответствуют полетным циклам нагружения (взлет-полет-посадка). Реальный полетный цикл нагружения носит многоступенчатый характер с нестационарными процессами на каждой из ступеней. В настоящей работе циклический процесс нагружения считается гармоническим.

С помощью упрощающих гипотез о зависимости решения от координат по толщине диска и в окружном направлении выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета радиального распределения напряжений, деформаций и смещений в диске малой, но переменной толщины. Предложена и реализована численная схема решения полученной жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом известный аналитический метод расчета осесимметрично нагруженных дисков [14] обобщен на случай неосесимметричных нагружений, что может представлять самостоятельный интерес.

Также учтены дополнительные напряжения в ободной части диска, связанные с изгибом лопаток под действием аэродинамических давлений. Аэродинамические давления определены на основе гипотезы «изолированного профиля» с использованием известных решений об обтекании пластины с отрывом потока. На основе рассчитанного напряженно-деформированного состояния и обобщенных критериев многоосного усталостного разрушения в изотропном и анизотропном случаях получены распределения долговечности по диску. Определены опасные зоны и сроки зарождения усталостного разрушения в диске.

Показано, что усталостная долговечность титанового диска при учете анизотропии усталостных свойств может снижаться до критических значений $N \sim 10^4$ полетных циклов в окрестности внутреннего и внешнего ободов диска, что является недопустимым для безопасной эксплуатации и требует изменений в технологии изготовления дисков для повышения предела усталости в приповерхностном слое.

2. Критерии многоосного усталостного разрушения с учетом анизотропии усталостных свойств титанового сплава. *Влияние анизотропии усталостных свойств титанового сплава на одноосные усталостные кривые.* Ранее в работах [1, 2, 15] уже исследовалось напряженно-деформированное состояние и усталостная долговечность титановых дисков компрессора газотурбинного двигателя в полетных циклах нагружения. Для этого был предложен метод определения параметров изотропных многоосных критериев усталостного разрушения [16] по результатам одноосных испытаний при различных коэффициентах асимметрии цикла. Там же, на основе расчетов МКЭ были определены зоны зарождения усталостных микротрещин в окрестности ободной части



Фиг. 1

диска. При эксплуатации данного элемента конструкции разрушения также возникают в приповерхностной зоне [17], но немного смещены к центральной части диска. Для уточнения расчетного расположения этих зон была выдвинута гипотеза о том, что причиной такого смещения является анизотропия свойств титанового сплава, возникающая из-за текстуры, наведенной в технологических процессах изготовления полуфабрикатов (в первую очередь – при прокатке). В данной работе на конкретном примере оценивается влияние структурной анизотропии усталостных свойств материала на расположение зоны зарождения повреждений и долговечность диска при малоцикло-вой усталости.

Эффект зависимости пределов усталости от направления оси нагружения при одноосных усталостных испытаниях образцов с текстурой отмечен в различных источниках [18, 19]. В работе [20] приведены результаты соответствующих усталостных испытаний, показанные на фиг. 1, и данные о зависимости прочностных и усталостных характеристик титанового сплава Ti–6Al–4V от ориентации текстуры по отношению к направлению нагружения (на фигуре черный кружок означает, что ось ориентации параллельна оси нагружения; черный квадрат означает, что ось ориентации перпендикулярна оси нагружения; размерность напряжений кгс/мм²).

В работах [21, 22] было предложено обобщение многоосного усталостного критерия на основе уравнения для повреждаемости типа Лемэтра–Шабоша на случай сплава с анизотропией усталостных свойств. В основе этого обобщения лежит замена второго инварианта девиатора напряжений на функцию Хилла, предложенную в [10] для описания анизотропной пластичности металлов

$$\Sigma_{Hill} = \sqrt{H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 2N\sigma_{12}^2 + 2L\sigma_{13}^2 + 2M\sigma_{23}^2}$$

В [22] также приведены параметры функции Хилла F, G, H, L, M, N для титанового сплава Ti–6Al–4V, которые определены по результатам одноосных усталостных испытаний вдоль и поперек направления прокатки.

В данной работе идея такой замены положена в основу обобщения классических критериев Сайнса и Кроссланда на анизотропный случай. Процедура определения параметров критериев усталостного разрушения предложена в [16] и там же применена к критериям для изотропных материалов. Ниже рассмотрим применение этой процедуры для критериев усталости анизотропных материалов. Для единообразия формы изотропных и анизотропных критериев вместо функции Хилла введем связанное с ней эквивалентное напряжение Хилла по формуле

$$\tau_{Hill} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \tilde{G}(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + \tilde{F}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 2\tilde{N}\Delta\sigma_{12}^2 + 2\tilde{L}\sigma_{13}^2 + 2\tilde{M}\sigma_{23}^2}$$

где $\tilde{G} = G/H$, $\tilde{F} = F/H$, $\tilde{N} = N/H$, $\tilde{M} = M/H$, $\tilde{L} = L/H$.

Модель Сайнса. Изотропный критерий. Обобщение одноосной усталостной кривой на случай многоосного напряженного состояния согласно [3] имеет вид

$$\Delta\tau / 2 + \alpha_s \sigma_{mean} = S_0 + AN^\beta, \quad \sigma_{mean} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{mean}$$

$$\Delta\tau = \frac{1}{3} \sqrt{(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{22})^2 + (\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{33})^2 + (\Delta\sigma_{22} - \Delta\sigma_{33})^2 + 6\Delta\sigma_{12}^2 + 6\Delta\sigma_{13}^2 + 6\Delta\sigma_{23}^2}$$

где σ_{mean} – сумма главных напряжений, осредненная за цикл нагружения, $\Delta\tau$ – изменение октаэдрического касательного напряжения за цикл; $\Delta\tau/2$ – его амплитуда; α_s , S_0 , A , β – параметры, определяемые по данным эксперимента.

В [16] подробно описана процедура определения параметров многоосного критерия по результатам одноосных экспериментов с разными коэффициентами асимметрии цикла. В изотропном случае параметры критерия Сайнса имеют вид

$$S_0 = \sqrt{2}\sigma_u/3, \quad A = 10^{-3\beta}\sqrt{2}(\sigma_B - \sigma_u)/3, \quad \alpha_s = \sqrt{2}(2k_{-1} - 1)/3, \quad k_{-1} = \sigma_u/(2\sigma_{u0})$$

где σ_u и σ_{u0} – пределы усталости по амплитудным усталостным кривым при коэффициентах асимметрии цикла $R = -1$ и $R = 0$ соответственно, σ_B – предел прочности.

Анизотропный критерий Сайнса. Обобщение критерия Сайнса на анизотропный случай с учетом вышеописанной замены примем в виде:

$$\Delta\tau_{Hill}/2 + \alpha_s \sigma_{mean} = S_0 + AN^\beta$$

$$\Delta\tau_{Hill} = \frac{1}{3} \sqrt{(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{22})^2 + \tilde{G}(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{33})^2 + \tilde{F}(\Delta\sigma_{22} - \Delta\sigma_{33})^2 + 2\tilde{N}\Delta\sigma_{12}^2 + 2\tilde{L}\Delta\sigma_{13}^2 + 2\tilde{M}\Delta\sigma_{23}^2}$$

где $\tilde{G} = G/H$, $\tilde{F} = F/H$, $\tilde{N} = N/H$, $\tilde{M} = M/H$, $\tilde{L} = L/H$.

Вычисление параметров обобщенного критерия по схеме, изложенной в [16], дает результат

$$S_0 = \sqrt{1 + \tilde{G}}\sigma_u/3, \quad A = 10^{-3\beta}\sqrt{1 + \tilde{G}}(\sigma_B - \sigma_u)/3, \quad \alpha_s = \sqrt{1 + \tilde{G}}(2k_{-1} - 1)/3$$

Модель Кроссланда. Изотропный критерий. Обобщение одноосной усталостной кривой на случай многоосного напряженного состояния согласно [4] в данном случае имеет вид:

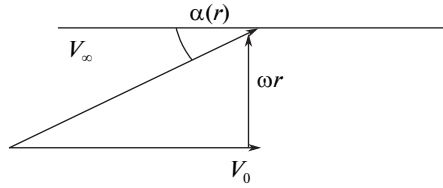
$$\Delta\tau/2 + \alpha_c(\bar{\sigma}_{max} - \Delta\tau/2) = S_0 + AN^\beta, \quad \bar{\sigma}_{max} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{max}$$

где $\bar{\sigma}_{max}$ – сумма главных напряжений, максимальная за цикл нагружения; параметры α_c , S_0 , A , β подлежат определению. В изотропном случае параметры критерия Кроссланда определены в [16]

$$S_0 = \sigma_u[\sqrt{2}/3 + (1 - \sqrt{2}/3)\alpha_c], \quad A = 10^{-3\beta}[\sqrt{2}/3 + (1 - \sqrt{2}/3)\alpha_c](\sigma_B - \sigma_u)$$

$$\alpha_c = (k_{-1}\sqrt{2}/3 - \sqrt{2}/6)/[(1 - \sqrt{2}/6) - k_{-1}(1 - \sqrt{2}/3)]$$

Анизотропный критерий Кроссланда. Замена октаэдрического напряжения на эквивалентное напряжение Хилла, приводит к обобщенному критерию Кроссланда:



Фиг. 2

$$\Delta\tau_{Hill}/2 + \alpha_c(\bar{\sigma}_{max} - \Delta\tau_{Hill}/2) = S_0 + AN^\beta$$

В результате вычисления параметров по схеме [16], получим

$$\alpha_c = (k_{-1}\sqrt{1+\bar{G}/3} - \sqrt{1+\bar{G}/6}) / [(1 - \sqrt{1+\bar{G}/6}) - k_{-1}(1 - \sqrt{1+\bar{G}/3})]$$

$$S_0 = \sigma_u[\sqrt{1+\bar{G}/3} + (1 - \sqrt{1+\bar{G}/3})\alpha_c]$$

$$A = 10^{-3b}[\sqrt{1+\bar{G}/3} + (1 - \sqrt{1+\bar{G}/3})\alpha_c](\sigma_B - \sigma_u)$$

Имея в виду конкретный расчетный пример, рассмотренный далее, приведем приближенные значения параметров для титанового сплава Ti-6Al-4V [16, 21, 22]: предел прочности $\sigma_B = 1100$ МПа; пределы усталости по амплитудным усталостным кривым при коэффициентах асимметрии $R = -1$ и $R = 0$ соответственно $\sigma_u = 450$ МПа и $\sigma_{u0} = 350$ МПа; показатель степенной зависимости от числа циклов $\beta = -0.45$; модуль Юнга $E = 116$ ГПа; модуль сдвига $G = 44$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0.32$. Значения параметров Хилла для титанового сплава с анизотропными усталостными свойствами равны [22]: $F = 0.54$, $G = 0.34$, $H = 0.65$, $N = M = L = 2.34$.

3. Определение дополнительных аэродинамических нагрузок на лопатки диска и их влияние на НДС диска. Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) вращающихся дисков компрессора газотурбинного авиационного двигателя является необходимым этапом при оценке их усталостной прочности и долговечности. Как известно из опыта эксплуатации, зона зарождения возможного разрушения располагается в окрестности области контакта обода диска и лопатки [16, 17]. Основным силовым фактором в полетных циклах нагружения контактной системы диска и лопаток являются центробежные силы. Расчету дисков на подобные воздействия посвящена обширная литература [23–26]. Решения этой задачи были получены аналитически и численно-аналитическими методами теории упругости и сопромата [23–25] и современными программными средствами на основе метода конечных элементов [1, 2, 15, 16]. Однако дополнительным фактором, который может повлиять на НДС диска в зоне контакта с лопатками, являются аэродинамические нагрузки, возникающие при обтекании лопаток потоком сжимаемого газа (воздуха). Эти аэродинамические нагрузки вызывают дополнительные деформации лопаток – деформации изгиба и кручения. Данный раздел посвящен оценке дополнительных напряжений, вызываемых этими деформациями, в корне лопатки или, что то же самое, на внешнем ободе диска под лопаткой, и их сравнению с амплитудой основного поля напряжений, вызванного центробежными нагрузками. Для лопатки принята модель заделанной пластинки без учета начальной крутки.

Описание картины обтекания пластины без отрыва и с отрывом потока. Картина обтекания сечения лопатки компрессора показана на фиг. 2. Принимается гипотеза “изолированного профиля” [27]. Используются следующие обозначения: r – ради-

альная координата сечения лопатки компрессора, r_1 – расстояние от центра диска до корня лопатки, r_2 – расстояние от центра диска до вершины лопатки, d – ширина сечения лопатки, V_0 – скорость набегающего потока, ω – угловая скорость вращения лопатки, c – скорость звука.

Наличие “решетки” лопаток не учитывается, так как в этом случае нет обозримого аналитического решения задачи обтекания с отрывом потока.

Как видно из фиг. 2, переменный угол атаки сечения лопатки и локальная скорость обтекания равны: $\alpha = \text{arctg}(\omega r / V_0)$, $V_\infty = \sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2}$.

Для безотрывного обтекания разность давлений на сечение и смещение точки приложения давления (фокус) относительно середины пластины [28] определяются формулами: $\Delta p_b = \pi \rho V_\infty^2 d \sin \alpha \cos \alpha$, $\bar{x}_b = d/4$.

Для отрывного обтекания разность давлений и фокус относительно середины пластины [29] определяются формулами:

$$\Delta p_s = \rho V_\infty^2 \pi d \frac{\sin \alpha}{(4 + \pi \sin \alpha)}, \quad \bar{x}_s = \frac{3d}{4} \frac{\cos \alpha}{(4 + \pi \sin \alpha)}$$

Вычисление силовых факторов, действующих на лопатку при обтекании с отрывом потока. Для вычисления распределенных силовых факторов – перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов необходимо произвести интегрирование по радиальной координате r в пределах интегрирования от r_1 до r_2 .

Введем новую безразмерную переменную: $\tilde{r} = \omega r / V_0$. Новые пределы интегрирования примут вид: $\tilde{r}_1 = \omega r_1 / V_0$, $\tilde{r}_2 = \omega r_2 / V_0$. Выражения для тригонометрических функций, входящие в формулы для распределенных давлений, в новой переменной запишутся в следующем виде:

$$\sin \alpha = \omega r / \sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2} = \tilde{r} / \sqrt{1 + \tilde{r}^2}, \quad \cos \alpha = V_0 / \sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2} = 1 / \sqrt{1 + \tilde{r}^2}$$

Сжимаемость газа в формулах для давления учитывается известными поправками Прандтля–Глауэрта [29]: $\Delta p_b^c = \Delta p_b / \sqrt{1 - M^2}$, $\Delta p_s^c = \Delta p_s / \sqrt{1 - M^2}$, где $M = V_0 / c$ – число Маха набегающего потока.

Обтекание вращающихся лопаток с учетом характерных значений скорости потока и угловой скорости вращения происходит под большими углами атаки порядка 30° – 45° , поэтому в качестве базовой примем схему отрывного обтекания лопаток. Функция распределения давления по радиальной координате, вытекающая из формулы для разности давлений на пластинке, имеет вид:

$$q_s(\tilde{r}) = (1 + \tilde{r}^2) \tilde{r} / (\pi \tilde{r} + 4\sqrt{1 + \tilde{r}^2}) / \sqrt{1 - M^2}$$

Эту функцию необходимо проинтегрировать по \tilde{r} . В случае безотрывного обтекания это несложно сделать, однако аналогичная формула для отрывного обтекания и формула для распределенного крутящего момента имеет более сложный и громоздкий вид, и их интегрирование приводит к труднообозримым выражениям, которые не приводим [30].

Функция распределения перерезывающей силы по радиальной координате и суммарная перерезывающая сила в корневом сечении лопатки имеют вид:

$$Q_s = \int_{\tilde{r}}^{\tilde{r}_2} q_s(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad Q_\Sigma = \pi \rho V_0^2 d \frac{V_0}{\omega} Q_s(\tilde{r}_1)$$

Функция распределения изгибающего момента по радиальной координате и суммарный изгибающий момент в корневом сечении лопатки имеют вид:

$$M_s(\tilde{r}) = \int_{\tilde{r}}^{\tilde{r}_2} Q_s(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad M_\Sigma = \pi \rho V_0^2 d \frac{V_0}{\omega} (M_s(\tilde{r}_2) - M_s(\tilde{r}_1))$$

Функция распределения крутящего момента по радиальной координате равна:

$$m_k(\tilde{r}) = (1 + \tilde{r}^2) \tilde{r} / (\pi \tilde{r} + 4 \sqrt{1 + \tilde{r}^2})^2 / \sqrt{1 - M^2}.$$

Интеграл от функции распределения по радиальной координате и суммарный крутящий момент определяются формулами:

$$M_k = \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} m_k(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad M_{\Sigma k} = \pi \rho V_0^2 d \frac{V_0}{\omega} M_k \frac{3d}{4}$$

Все эти суммарные силовые факторы будут использованы для вычисления дополнительных напряжений в корне лопатки [14, 31].

Вычисление напряжений в корневом сечении лопатки при обтекании с отрывом потока. Касательные напряжения от изгиба лопатки и их максимальные значения, а также касательные напряжения от кручения в ее корневом сечении определяются формулами: $\tau_s(y) = Q_\Sigma S_f(y) / (dJ_x)$, $\tau_{s \max} = 3Q_\Sigma / (2dh)$, $\tau_{sk} = M_{\Sigma k} / (k_s dh^2)$. Нормальные напряжения от изгиба лопатки и их максимальные значения в корневом сечении равны: $\sigma_s(y) = y M_\Sigma / J_x$, $\sigma_{s \max} = 6M_\Sigma / (dh^2)$.

Для расчета приняты следующие значения входных параметров: $h = 0.015$ м, $d = 0.07$ м, $r_1 = 0.40$ м, $r_2 = 0.70$ м, $V_0 = 220$ м/с, $\omega = 600$ 1/с, $\rho = 0.41$ кг/м³.

Дополнительные напряжения в корне лопатки для случая отрывного обтекания при выбранных параметрах расчета таковы: $\tau_{s \max} = 1.3$ МПа, $\sigma_{s \max} = 169$ МПа, $\tau_{sk} = 0.5$ МПа. Основной уровень напряжений, обусловленных центробежными воздействиями, конечноэлементными расчетами [1, 2] определен величинами ~600–700 МПа для нормальных (радиальных и тангенциальных) напряжений и величинами ~50–70 МПа для касательных.

В случае безотрывного обтекания нормальные напряжения в корне лопатки принимают нереалистичные значения порядка 530 МПа, что указывает на нереализуемость самой схемы такого обтекания. Более реалистичные значения аэродинамических нагрузок и связанных с ними дополнительных напряжений на ободке диска дают формулы для отрывного обтекания лопаток.

Дополнительными касательными напряжениями для схемы отрывного обтекания, которые составляют порядка 1/50, т.е. ~2% от величины касательных напряжений, связанных с центробежными нагрузками, можно пренебречь. Дополнительные нормальные напряжения, составляющие 170/650, т.е. ~25% от величины нормальных напряжений, связанных с центробежными нагрузками, следует учитывать. Воздействие набегающего потока учитывается дополнительно либо на основе приближенной схемы учета аэродинамических нагрузок, либо путем прямого решения связанной газодинамической и прочностной задачи.

4. Расчет напряженно-деформированного состояния вращающегося диска переменной толщины с учетом дополнительных аэродинамических нагрузок на лопатки. В данном разделе решается задача определения напряженно-деформированного состояния диска переменной толщины под действием периодической системы радиальных нагрузок на внешнем контуре, обусловленных лопатками.

Вывод упрощенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В цилиндрической системе координат r, ϑ, z кольцевой диск $a \leq r \leq b$ имеет переменную толщину $-h(r) \leq z \leq h(r)$. Полная трехмерная система уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат имеет вид [32]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} + \rho \omega^2 r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\vartheta z} = 2\mu\varepsilon_{\vartheta z}$$

Связь деформаций и смещений имеет вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} \right)$$

Здесь λ, μ – модули Ламе, ρ – плотность материала диска. В дальнейшем используются безразмерные напряжения, отнесенные к $\lambda + 2\mu$, и безразмерные пространственные переменные, отнесенные к внутреннему радиусу диска a .

Граничные условия на свободных поверхностях при $z = \pm h(r)$ имеют вид: $\sigma_{rz} - h'\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{\vartheta z} - h'\sigma_{r\vartheta} = 0$, $\sigma_{zz} - h'\sigma_{rz} = 0$. Внутренний контур ($r = a$) считается свободным от напряжений: $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{r\vartheta} = 0$, $\sigma_{rz} = 0$. На внешнем контуре ($r = b$) приложены периодические по окружной координате ϑ нагрузки σ_{rr_b} , обусловленные центробежными силами и, возможно, изгибом лопаток под действием аэродинамических давлений $\sigma_{rr} = \sigma_{rr_b}$, $\sigma_{r\vartheta} = 0$, $\sigma_{rz} = 0$.

В силу периодичности всех искомых функций НДС по окружной координате ϑ смещения кольцевого диска переменной толщины в полетных циклах нагружения ищем в виде рядов Фурье:

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + u_{2n}z^2 + u_{4n}z^4) \cos n\vartheta$$

$$u_\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n + v_{2n}z^2 + v_{4n}z^4) \cos n\vartheta$$

$$u_z = \sum_{n=0}^{\infty} (w_{1n}z + w_{3n}z^3) \cos n\vartheta$$

Соответствующее представление напряжений имеет вид:

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n + \sigma_{2n}z^2) \cos n\vartheta, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n + s_{2n}z^2) \cos n\vartheta$$

$$\sigma_{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} (\Sigma_n + \Sigma_{2n}z^2 + \Sigma_{4n}z^4) \cos n\vartheta, \quad \sigma_{r\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_n + \tau_{2n}z^2) \sin n\vartheta$$

$$\sigma_{rz} = \sum_{n=0}^{\infty} (p_{1n}z + p_{3n}z^3) \cos n\vartheta, \quad \sigma_{\vartheta z} = \sum_{n=0}^{\infty} (T_{1n}z + T_{3n}z^3) \sin n\vartheta$$

Коэффициенты рядов Фурье σ_n , τ_n , u_n , v_n являются новыми (вспомогательными) искомыми функциями радиальной переменной r .

Подставим выражения для смещений и напряжений в исходную систему уравнений равновесия, закона Гука и приравняем члены при одинаковых степенях z , вплоть до z^3 . В итоге получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных при различных $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{d\sigma_n}{dr} = -\frac{\sigma_n}{r} + \frac{s_n}{r} - n\frac{\tau_n}{r} - p_{1n}$$

$$\frac{d\tau_n}{dr} = -2\frac{\tau_n}{r} + n\frac{s_n}{r} - T_{1n} \tag{4.1}$$

$$\frac{du_n}{dr} = \sigma_n - \lambda\frac{U_n}{r} - \lambda w_{1n}$$

$$\frac{dv_n}{dr} = \frac{1}{\mu}\tau_n + \frac{V_n}{r}$$

где $U_n = nu_n + u_n$, $V_n = nu_n + v_n$, $U_{2n} = nu_{2n} + u_{2n}$, $V_{2n} = nu_{2n} + v_{2n}$.

Данная система уравнений решается отдельно для каждой гармоники n . Остальные искомые коэффициенты Фурье u_{2n} , u_{4n} , v_{2n} , v_{4n} , w_{1n} , w_{3n} , σ_{2n} , s_n , s_{2n} , Σ_n , Σ_{2n} , Σ_{4n} , τ_{2n} , p_{1n} , p_{3n} , T_{1n} , T_{3n} определяются по вспомогательным искомым функциям σ_n , τ_n , u_n , v_n после решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по формулам

$$s_n = \lambda u_n' + U_n/r + \lambda w_{1n}, \quad \Sigma_n = \lambda u_n' + \lambda U_n/r + w_{1n}$$

$$w_{1n}' = p_{1n}/\mu - 2u_{2n}, \quad T_{1n} = \mu(2v_{2n} - nw_{1n}/r)$$

$$\sigma_{2n}' = -\sigma_{2n}/r + s_{2n}/r - n\tau_{2n}/r - 3p_{3n}$$

$$p_{1n}' = -p_{1n}/r - nT_{1n}/r - 2\Sigma_{2n}, \quad \tau_{2n}' = -2\tau_{2n}/r + ns_{2n}/r - 3T_{3n}$$

$$\begin{aligned}
 u'_{2n} &= \sigma_{2n} - \lambda U_{2n}/r - 3\lambda w_{3n}, & v'_{2n} &= \tau_{2n}/\mu + V_{2n}/r \\
 s_{2n} &= \lambda u'_{2n} + U_{2n}/r + 3\lambda w_{3n}, & \Sigma_{2n} &= (h'^2 \sigma_n + h'^2 h^2 \sigma_{2n} - \Sigma_n - \Sigma_{4n} h^4)/h^2 \\
 p_{3n} &= (h' \sigma_n + h' h^2 \sigma_{2n} - p_{1n} h)/h^3, & T_{3n} &= (h' \tau_n + h' h^2 \tau_{2n} - T_{1n} h)/h^3 \\
 w_{3n} &= (\Sigma_{2n} - \lambda u'_{2n} - \lambda U_{2n}/r)/3, & \Sigma_{4n} &= -(p'_{3n} + p_{3n}/r + n T_{3n}/r)/4 \\
 u_{4n} &= (p_{3n}/\mu - w'_{3n})/4, & v_{4n} &= (T_{3n}/\mu + n w_{3n}/r)/4
 \end{aligned}$$

Эти уравнения и соотношения были использованы в [30] для исследования режима малоциклового усталости (МЦУ), где была решена задача определения напряженно-деформированного состояния и оценки усталостной долговечности вращающегося диска переменной толщины под действием центробежных нагрузок в диске и лопатках, а также под действием аэродинамических давлений на лопатки от набегающего потока.

При $n = 0$ эта система совпадает с известными уравнениями осесимметричного деформирования диска переменной толщины [14] с точностью до членов, содержащих множитель h'^2 .

Граничные условия на внешнем ободе диска. Для расчета НДС диска, обусловленного центробежными нагрузками, действующими на лопатки, крайние условия для вспомогательных переменных (коэффициентов Фурье) на радиальных границах $r = a$ и $r = b$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 r = a: & \sigma_n = 0, \quad \tau_n = 0 \\
 r = b: & \sigma_n = \sigma_{bn}, \quad \tau_n = 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

где σ_{bn} заданные значения коэффициентов Фурье, учитывающие радиальные напряжения на внешнем ободе диска (напряжения в корневых сечениях лопаток под действием центробежных нагрузок). Для определения значений σ_{bn} будем считать каждую лопатку пластиной прямоугольного сечения ширины d . Число лопаток на диске равно N_0 .

На внешнем контуре диска действуют периодические по углу радиальные напряжения σ_{rr_b} , которые моделируют центробежное воздействие от лопаток и согласованы с ним по амплитуде, сектор периодичности $-\pi/N_0 < \vartheta < \pi/N_0$

$$\sigma_{rr_b} = S_0, \quad |\vartheta| \leq \delta$$

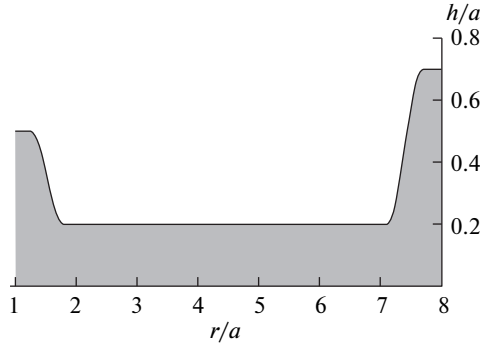
Здесь $S_0 = \rho \omega^2 (b_1^2 - b^2)/2$ – величина амплитуды радиальных напряжений, определяемых центробежным воздействием лопаток [14], $\delta = d/(2b) \ll 1$, b и b_1 – внутренний и внешний радиус лопаток кольцевого диска.

Разложим периодические функции распределения радиального напряжения σ_{rr_b} на внешнем контуре (при $r = b$) в ряды Фурье (один период $-\pi/N_0 < \vartheta < \pi/N_0$)

$$\sigma_{rr_b} = \sum_n \sigma_{bn} \cos(n\vartheta) \tag{4.3}$$

где $\sigma_{b0} = S_0 N_0 \delta / (2\pi)$, $\sigma_{bn} = 2S_0 \sin(k N_0 \delta / 2) / (k\pi)$, $n = 0, N_0, 2N_0, 3N_0, \dots$

Таким образом, для различных n необходимо решать двухточечные крайние задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.1) с граничными условиями (4.2) с учетом выражений (4.3) для коэффициентов разложения нагрузок в ряд



Фиг. 3

Фурье по угловой координате. Решение этих краевых задач определялось численно конечно-разностным методом по неявной схеме. После этого компоненты напряжений определялись суммированием рядов Фурье. Количество членов рядов Фурье при суммировании для практической сходимости не превышало 20.

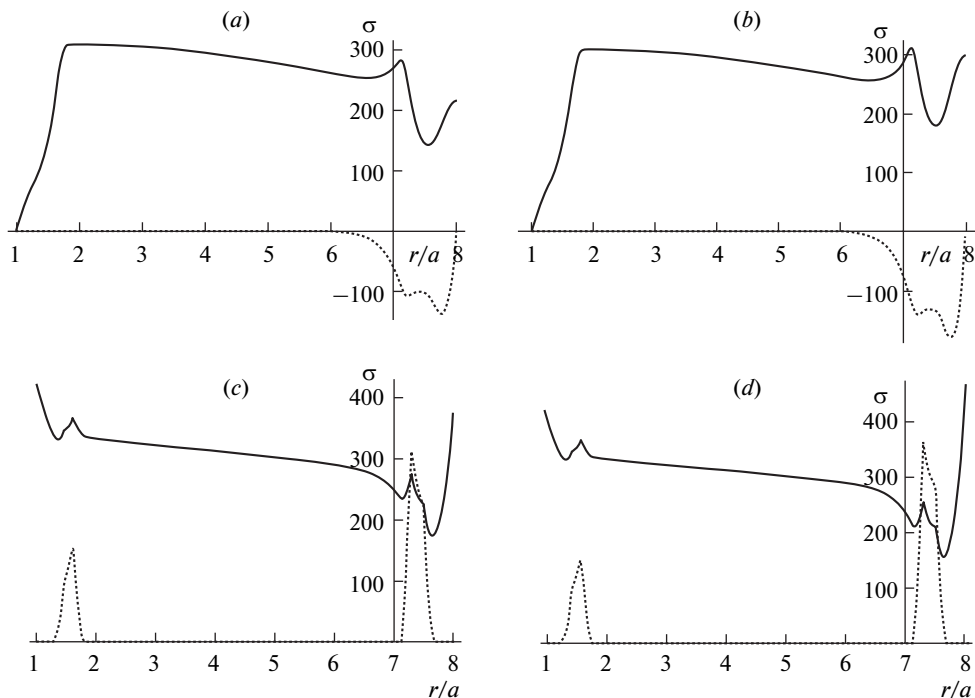
Учет дополнительных напряжений от изгиба лопаток под действием аэродинамических нагрузок. Аналогично предложенной выше схеме можно вычислить дополнительные напряжения в диске от радиальных нагрузок на внешнем контуре, вызванных изгибом лопаток под действием аэродинамических давлений. В этом случае периодическое распределение радиальных напряжений на внешнем контуре при $r = b$ примем в виде $\sigma_b(\vartheta) = \sigma_{s \max} Y_\delta(\vartheta)$ (один период $-\pi/N_0 < \vartheta < \pi/N_0$).

Здесь $\sigma_{s \max} = 6M_\Sigma / (dh^2)$ — величина амплитуды радиальных напряжений, определяемых изгибом лопаток под действием аэродинамических давлений, $Y_\delta(\vartheta) = 2\vartheta/\delta$ при $\vartheta \in [-\delta/2, \delta/2]$, $Y_\delta(\vartheta) = 0$ при $\vartheta \notin [-\delta/2, \delta/2]$. В этом случае разложение радиальной нагрузки в ряд Фурье имеет вид

$$\sigma_b(\vartheta) = \sum_{k=1} \sigma_n \sin(n\vartheta), \quad n = kN_0, \quad \sigma_n = \frac{2}{k\pi} \sigma_{s \max} \left(\frac{\sin(kN_0\delta/2)}{kN_0\delta/2} - \cos(kN_0\delta/2) \right)$$

Для такого вида нагружения (антисимметричного по угловой координате на периоде $-\pi/N_0 < \vartheta < \pi/N_0$) система уравнений (4.1) сохранит свой вид с заменой $n \rightarrow -n$. Представление решения для напряжений будет отличаться заменами $\cos(kN_0\vartheta) \leftrightarrow \sin(kN_0\vartheta)$. И в этом случае при расчетах скорость сходимости рядов Фурье была улучшена с $1/k$ до $1/k^2$ за счет малого “размазывания” разрывной функции $Y_\delta(\vartheta)$ в точках разрыва.

Результаты расчетов. Для расчетов были выбрана форма диска, сечение которого для $z > 0$ показано на фиг. 3, и значения параметров $N_0 = 32$, 600 л/с , $\lambda = 78 \text{ МПа}$, $\mu = 44 \text{ МПа}$, $\rho = 4370 \text{ кг/м}^3$ (титановый сплав). На фиг. 4 показаны распределения компонент напряжений по радиальной координате при $\vartheta = \vartheta_0 = 1.074^0$ (правый край корня лопатки) и при $z = 0$ без учета (a, c) и с учетом (b, d) аэродинамических нагрузок на лопатки. На фиг. 4 a, b сплошной линией показана компонента σ_{rr} , пунктирной линией показана компонента $\sigma_{r\vartheta}$. На фиг. 4 c, d сплошная линия соответствует компоненте $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, пунктирная $\sigma_{z\vartheta}$.



Фиг. 4

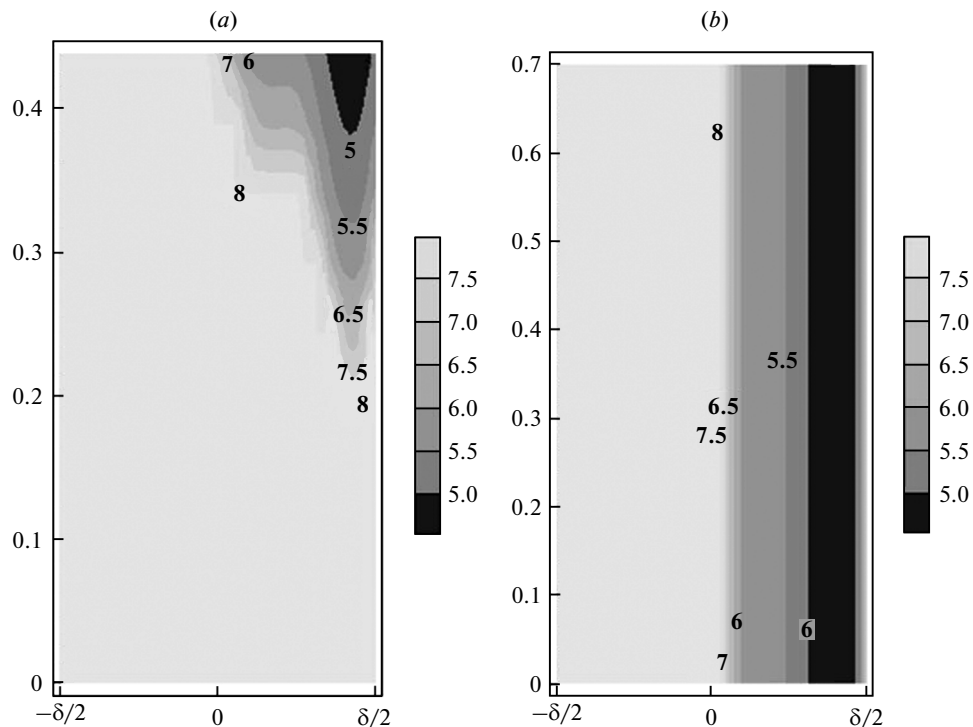
Из этих графиков видно, что учет изгиба лопаток под действием аэродинамических давлений приводит к существенному росту и нормальных и касательных напряжений на внешнем ободе диска.

Таким образом, с помощью полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.1) удалось приближенно решить трехмерную по своей сути задачу теории упругости и определить многоосное напряженное состояние деформируемого тела со всеми шестью ненулевыми компонентами тензора напряжений с учетом дополнительных напряжений в ободной части диска, связанных с деформированием лопаток (изгибом) под действием аэродинамических давлений.

Влияние анизотропии усталостных свойств на долговечность диска. На основе критериев многоосного усталостного разрушения [16] были получены распределения логарифма долговечности $\log N(r)$ (количества циклов нагружения до разрушения) по радиальной координате для титанового сплава с изотропными усталостными свойствами и с пределом усталости ~ 350 МПа [30]. Был использован критерий Сайнса, а при расчете долговечности диска из титанового сплава с анизотропными усталостными свойствами применялся модифицированный критерий Сайнса. Компоненты напряжений, входящих в комбинацию Хилла, в зависимости от угла ориентации лопатки φ к выделенному направлению x будут вычисляться по формулам

$$\sigma_{11} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta})/2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) \cos 2\varphi/2 + \sigma_{r\vartheta} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{22} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta})/2 + (\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr}) \cos 2\varphi/2 - \sigma_{r\vartheta} \sin 2\varphi$$



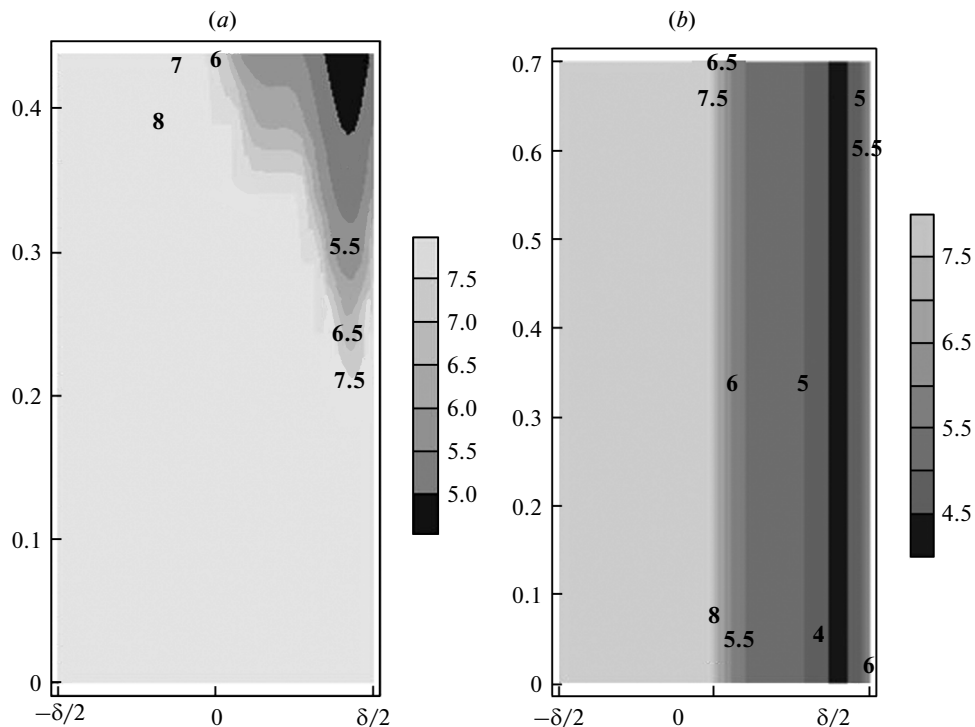
Фиг. 5

$$\sigma_{12} = (\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr}) \sin 2\varphi/2 + \sigma_{r\vartheta} \cos 2\varphi$$

Изолинии долговечности на опасных сечениях для изотропной и анизотропной усталости. Более подробно рассмотрим картину распределения долговечностей с помощью графика изолиний в координатах z, ϑ в определенных выше опасных сечениях под лопаткой на внешней части обода $r = 8$ и внутренней части $r = 7.4$. На фиг. 5 показаны результаты для сплава с изотропными, а на фиг. 6 с анизотропными усталостными свойствами при определенном угле ориентации φ . Наименее долговечными являются сечения диска под лопатками, ориентированными под углом $\varphi = 90^\circ$ (фиг. 6: (a) – внутренняя часть обода, (b) – внешняя часть обода) к направлению оси анизотропной усталости (направлению прокатки, если говорить о технологическом процессе изготовления диска). Наиболее чувствительным к анизотропии усталостных свойств выглядит сечение на внешнем ободе лопатки при $r = 8$ (фиг. 5 b и 6 b).

В этих случаях результаты близки и принимают критические значения усталостной долговечности титанового диска для выбранных частот вращения $N \sim 10^4$ циклов, что является недопустимым для безопасной эксплуатации. Во избежание данной ситуации следует не доводить угловые скорости вращения до критических значений и технологически избегать наведенной текстуры сплава, приводящей к анизотропии усталостных свойств.

6. Заключение. В данной работе предложена новая упрощенная методика расчета напряженно-деформированного состояния и долговечности дисков переменной толщины. Методика позволяет получать оценки сроков безопасной эксплуатации без



Фиг. 6

больших затрат вычислительной работы. Учтено и изучено влияние анизотропии усталостных свойств, обусловленной технологическими процессами изготовления дисков. Для этого известные критерии многоосного усталостного разрушения изотропных материалов обобщены на случай анизотропных материалов. Представлены характерные результаты расчетов долговечности дисков переменной по радиусу толщины в условиях полетных циклов нагружения упрощенной структуры. Определены зоны и сроки зарождения усталостного разрушения в диске. Показано, что усталостная долговечность титановых дисков при учете анизотропии усталостных свойств может снижаться до критических значений $N \sim 10^4$ циклов в приповерхностных слоях ободов дисков, что является недопустимым для безопасной эксплуатации.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 15-08-02392-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Анализ напряженного состояния контактной системы “диск-лопатка” газотурбинного двигателя // Вычисл. мех. сплош. сред. 2011. Т. 4. № 2. С. 5–16.
2. Беклемишев Н.Н., Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Аэроупругий анализ элементов конструкции компрессора // Вестник МАИ. Т. 18. № 5. 2011. С. 3–22.
3. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. Metal fatigue. McGraw-Hill, 1959. P. 145–169.

4. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. London. 1956. P. 138–149.
5. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane-based criterion // Int. J. of Fatigue. 2011. V. 33. P. 969–976.
6. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S., Bagni C. Structural integrity assessment of metallic components under multiaxial fatigue: the C-S criterion and its evolution // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2013. V. 36. P. 870–883.
7. Susmel L., Taylor D. A critical distance/plane method to estimate finite life of notched components under variable amplitude uniaxial/multiaxial fatigue loading // Int. J. of Fatigue. 2012. V. 38. P. 7–24.
8. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. J. of Eng. for Indust. 1959. P. 301–306.
9. Burago N.G., Nikitin I.S., Shanyavski A.A. and Zhuravlev A.B. Durability estimations for in-service titanium compressor disks subjected to multiaxial cyclic loads in low- and very-high-cycle fatigue regimes. Proceedings of 19th European Conference on Fracture. Kazan. Russia. 26–31 Aug. 2012. CD ver. Auth. Ind. 154.
10. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1956. 407 с.
11. Топоров Д.В., Ильченко Б.В., Яруллин Р.Р. Характеристики статической и малоцикловой прочности критических зон диска турбины // Труды Академэнерго. 2010. № 2. С. 79–88.
12. Shlyannikov V.N., Yarullin R.R., Gizzatullin R.Z. Structural integrity prediction of turbine disk on a critical zone concept basis // Proceedings of 11th International Conference on Engineering Structural Integrity Assessment. ESIA11. Manchester UK. EMAS Publishing. 2011. P. 1–10.
13. Ilchenko B.V., Yarullin R.R., Zakharov A.P., Gizzatullin R.Z. Residual life prediction of power steam turbine disk with fixed operating time. Proceedings of 19th European Conference on Fracture. ECF19. Kazan. Russia. 26–31 Aug. 2012. P. 1–8.
14. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М: Машиностроение, 1978. 247 с.
15. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Сверхмногоцикловое усталостное разрушение титановых дисков компрессора // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. № 1. С. 52–67.
16. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22–33.
17. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа. Изд-во научно-технической литературы “Монография”. 2007. 498 с.
18. Ильин А.А., Колачев Б.А., Полькин И.С. Титановые сплавы. Состав, структура, свойства. М.: ВИЛС-МАТИ. 2009. 520 с.
19. Горынин И.В., Чечулин Б.Б. Титан в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990. 400 с.
20. Соммер А., Кригер М., Фудзисиро С., Айлон Д. Развитие текстуры в $\alpha + \beta$ -титановых сплавах. Титан. Металловедение и технология. Труды 3-й Международной конференции по титану. М.: ВИЛС. 1978. Т. 3. С. 87–96.
21. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Int. J. of fatigue. 2009. V. 31. P. 2031–2040.
22. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling of Ti6Al4V alloy. Proc. 9 Int. Conf. on Multiaxial Fatigue and Fracture (ICMFF9). Parma, Italy. 2010. P. 559–567.
23. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 832 с.
24. Биргер И.А. Стержни, пластины, оболочки. М.: Физматлит, 1992. 392 с.
25. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. М.: Издательский дом МЭИ, 2007. 476 с.

26. *Иноземцев А.А., Нихамкин М.А., Сандрацкий В.Л.* Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. М.: Машиностроение, 2008. 204 с.
27. *Мхитарян А.М.* Аэродинамика. М.: Машиностроение, 1976. 447 с.
28. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
29. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
30. *Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С., Юшковский П.А.* Влияние анизотропии усталостных свойств титанового сплава на долговечность элементов конструкций. Препринт ИПМех РАН № 1064. 2014. 35 с.
31. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
32. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
33. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2006. 320 с.

Поступила в редакцию
27.02.14