

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Бураго Н. Г.¹, Никитин И. С.^{1,2}

¹ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлунского РАН, Москва

²ФГБУН Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

Во многих технических устройствах используются элементы конструкций в виде цилиндров переменной толщины. Определение упругого напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндров необходимо для получения оценки квазистатической или циклической (усталостной) прочности. В настоящее время, как правило, для расчета НДС применяются конечно-элементные пакеты программ [1–4]. Часто границы цилиндров содержат малые периодические по окружной координате отклонения от окружности. Тогда напряжения можно быстро и экономно рассчитать методами теории возмущений (разложением по малому параметру) [5], уменьшая размерность задачи и сводя двумерную или даже трехмерную задачу теории упругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [6–8]. В настоящей работе малый параметр характеризует изменение радиуса цилиндра в зависимости от окружной координаты. По окружной координате решение представлено рядами Фурье с коэффициентами, зависящими от радиальной координаты. Для коэффициентов Фурье нулевого и первого приближений выведены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые затем были решены аналитическим или численно-аналитическим методом.

1. Постановка и геометрия задачи. Рассматривается задача о квазистатическом напряженно-деформированном состоянии бесконечно длинного толстого цилиндра переменной толщины под действием внутреннего давления. Двумерная система уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат имеет вид (плоское деформированное состояние)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} &= 0 \end{aligned}$$

Напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\vartheta}$ связаны с деформациями законом Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} \\ \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta} \end{aligned}$$

Связь деформаций и смещений u_r, u_ϑ имеет вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right)$$

Здесь λ и μ - коэффициенты Ламе. В дальнейшем используются безразмерные переменные: напряжения отнесены к $\lambda + 2\mu$, координаты r, z отнесены к характерному внутреннему радиусу a . Пусть внешний контур цилиндра является окружностью радиуса b (Рис. 1) и свободен от напряжений: $\sigma_{nn} = 0$, $\sigma_{n\tau} = 0$. Пусть

форма внутреннего контура близка к окружности радиуса a и описывается уравнением $r = a + \varepsilon g(\vartheta)$ или, в безразмерном виде, $r = 1 + \varepsilon g(\vartheta)$. Внутренняя граница цилиндра нагружена давлением P_a : $\sigma_{nn} = -P_a$, $\sigma_{n\tau} = 0$.

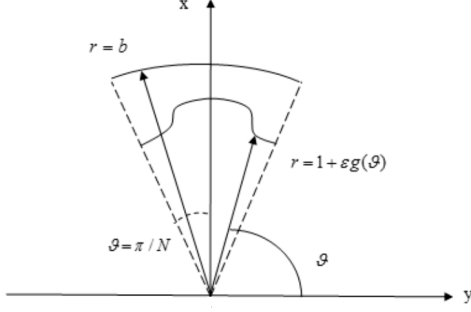


Рис. 1.

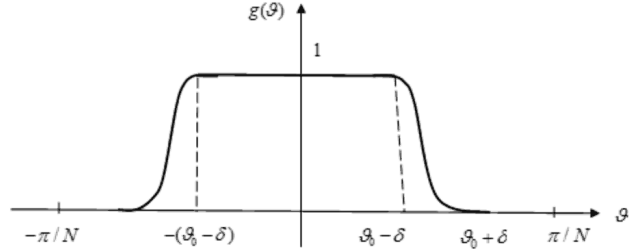


Рис. 2.

Пусть $\varepsilon \ll 1$ малый параметр, функция $g(\vartheta)$ определена при $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ и является периодической с периодом $-\pi/N \leq \vartheta \leq \pi/N$ (Рис. 2):

$$0 \leq |\vartheta| \leq \vartheta_0 - \delta : \quad g(\vartheta) = 1$$

$$\vartheta_0 - \delta < |\vartheta| \leq \vartheta_0 + \delta : \quad g(\vartheta) = \left(1 - \sin \left(\frac{\pi(\vartheta - \vartheta_0)}{2\delta} \right) \right) / 2$$

$$\vartheta_0 + \delta < |\vartheta| \leq \pi/N : \quad g(\vartheta) = 0$$

Разложения в ряд Фурье этой функции и ее производной имеют вид:

$$g(\vartheta) = g_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos(kN\vartheta), \quad g'(\vartheta) = - \sum_{k=1}^{\infty} g_k kN \sin(kN\vartheta)$$

$$g_k = \frac{\sin(kN\vartheta_0)}{k} \frac{\pi/2}{(\pi/2 + kN\delta)} \frac{\sin(\pi/2 - kN\delta)}{(\pi/2 - kN\delta)}$$

Легко видны переходы при $k \rightarrow 0$ и $kN\delta \rightarrow \pi/2$. При $k = 0$ имеем $g_0 = 2N\vartheta_0/\pi$. Нормальные и касательные напряжения на внутреннем контуре имеют вид $\sigma_{nn} = \sigma_{ij}n_i n_j$ и $\sigma_{n\tau}^2 = |\sigma_{ij}n_j|^2 - |\sigma_{ij}n_i n_j|^2$.

2. Асимптотический анализ. Решение ищем в виде асимптотического разложения по малому параметру $\varepsilon \ll 1$:

$$\sigma(r, \vartheta) = \sigma_0(r) + \varepsilon \sigma_1(r, \vartheta), \quad s(r, \vartheta) = s_0(r) + \varepsilon s_1(r, \vartheta), \quad \tau(r, \vartheta) = \varepsilon \tau_1(r, \vartheta)$$

$$u(r, \vartheta) = u_0(r) + \varepsilon u_1(r, \vartheta), \quad v(r, \vartheta) = \varepsilon v_1(r, \vartheta)$$

где обозначено $\sigma = \sigma_{rr}$, $s = \sigma_{\vartheta\vartheta}$, $\tau = \sigma_{r\vartheta}\Sigma = \sigma_{zz}$, $u_r = u$, $u_\vartheta = v$. Отсюда следует

$$\sigma|_{r=1+\varepsilon g} = \sigma|_{r=1} + \varepsilon g \sigma'|_{r=1}, \quad s|_{r=1+\varepsilon g} = s|_{r=1} + \varepsilon g s'|_{r=1}, \quad \tau|_{r=1+\varepsilon g} = \tau|_{r=1} + \varepsilon g \tau'|_{r=1}$$

$$\sigma_{nn}|_{r=1+\varepsilon g} = \sigma_0 + \varepsilon(\sigma_1 + g\sigma'_0) + O(\varepsilon^2), \quad \sigma_{n\tau}^2|_{r=1+\varepsilon g} = \varepsilon^2(\tau_1 + g'(\sigma_0 - \sigma_0))^2 + o(\varepsilon^2)$$

Для нулевого приближения (при $\varepsilon = 0$) решение определяется формулами [9]:

$$\sigma_0(r) = -\frac{P_a}{(b^2 - 1)} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \quad s_0(r) = \frac{P_a}{(b^2 - 1)} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right)$$

Для первого приближения задача имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_1}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_1 - s_1}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_1}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_1}{r} = 0, \quad \sigma_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} + \lambda \frac{u_1}{r}$$

$$s_1 = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_1}{r}, \quad \tau_1 = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \right)$$

$$\sigma_1|_{r=1} = -\sigma'_0|_{r=1} g(\vartheta), \quad \tau_1|_{r=1} = -(s_0 - \sigma_0)|_{r=1} g'(\vartheta). \quad \sigma_1|_{r=b} = 0, \quad \tau_1|_{r=b} = 0$$

Разложения искомых функций в ряды Фурье имеют вид:

$$\sigma_1(r, \vartheta) = \frac{\sigma_{10}(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{1k}(r) \cos(kN\vartheta), \quad s_1(r, \vartheta) = \frac{s_{10}(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{1k}(r) \cos(kN\vartheta)$$

$$u_1(r, \vartheta) = \frac{u_{10}(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k}(r) \cos(kN\vartheta)$$

$$\tau_1(r, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{1k}(r) \sin(kN\vartheta), \quad v_1(r, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}(r) \sin(kN\vartheta)$$

Для коэффициентов Фурье выведены обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d\sigma_{1k}}{dr} + (1 - \bar{\lambda}) \frac{\sigma_{1k}}{r} + \frac{n\tau_{1k}}{r} - (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{(u_{1k} + nv_{1k})}{r^2} = 0$$

$$\frac{d\tau_{1k}}{dr} + \frac{2\tau_{1k}}{r} - \bar{\lambda} \frac{n\sigma_{1k}}{r} - (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{n(u_{1k} + nv_{1k})}{r^2} = 0$$

$$\frac{du_{1k}}{dr} + \bar{\lambda} \frac{u_{1k}}{r} + \bar{\lambda} \frac{nv_{1k}}{r} - \sigma_{1k} = 0, \quad \frac{dv_{1k}}{dr} - \frac{v_{1k}}{r} - \frac{nu_{1k}}{r} - \frac{\tau_{1k}}{\bar{\mu}} = 0$$

с граничными условиями

$$\sigma_{1k}|_{r=1} = \Sigma_{1k}, \quad \tau_{1k}|_{r=1} = T_{1k}, \quad \sigma_{1k}|_{r=b} = 0, \quad \tau_{1k}|_{r=b} = 0$$

Для краткости приняты обозначения $n = kN$, $\bar{\lambda} = \lambda/(\lambda + 2\mu)$, $\bar{\mu} = \mu/(\lambda + 2\mu)$. Общее решение этой системы было найдено в виде суммы четырех фундаментальных степенных решений с показателями γ_l , $\gamma_{1,2} = \pm(n + 1)$, $\gamma_{3,4} = \pm(n - 1)$:

$$\sigma_{1k} = \sum_{l=1,4} \sigma_{kl} r^{\gamma_l - 1}, \quad \tau_{1k} = \sum_{l=1,4} \tau_{kl} r^{\gamma_l - 1}, \quad u_{1k} = \sum_{l=1,4} u_{kl} r^{\gamma_l}, \quad v_{1k} = \sum_{l=1,4} v_{kl} r^{\gamma_l}$$

Для коэффициентов σ_{kl} , τ_{kl} , u_{kl} , v_{kl} получены аналитические выражения. Приведем окончательную формулу, например, для касательного напряжения:

$$\tau(r, \vartheta) = \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{n(n+1)}{r^n} \right) \sin(kN\vartheta)$$

3. Примеры расчетов. Приняты такие исходные данные: $N = 12$, $b = 1.33$, $\vartheta_0 = 0.653\pi/N = 0.171$, $\pi/N = 0.262$, $\delta = 0.163\vartheta_0 = 0.028$, $\vartheta_1 = \vartheta_0 - \delta =$

0.143, $\vartheta_2 = \vartheta_0 + \delta = 0.199$, $P_a = 0.001$. На рис. 3-6 для сектора $0 \leq |\vartheta| \leq \pi/N$ и $1. \leq r \leq 1.33$ показаны линии уровня для σ , τ , s и $\sqrt{I_2}$, где $I_2 = ((\sigma - s)^2 + (\sigma - \Sigma)^2 + (s - \Sigma)^2 + 6\tau^2) / 6$. В окрестности линии излома внутреннего контура хорошо видна зона концентрации напряжений. Результаты для случая, когда внутренняя поверхность цилиндра представлена чистой косинусоидой при $N = 12$ показаны на рис. 7-8. Эта форма соответствует значениям параметров $\vartheta_0 = \pi/(2N)$, $\delta = \vartheta_0$. Результаты при $N = 24$ показаны на рис. 9-10.

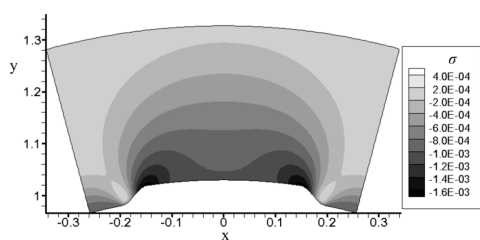


Рис. 3.

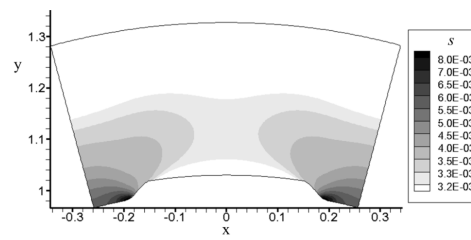


Рис. 4.

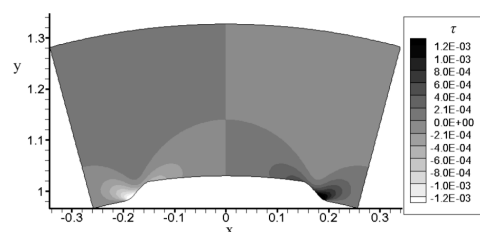


Рис. 5.

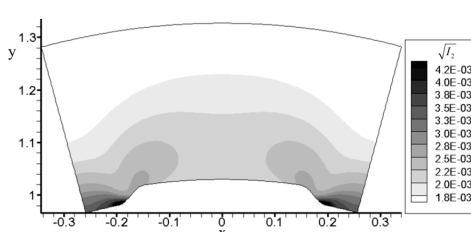


Рис. 6.

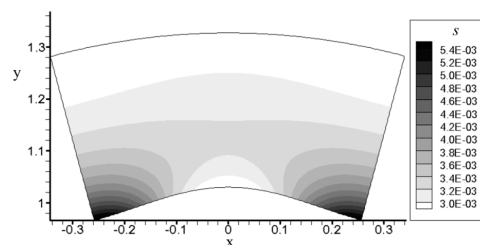


Рис. 7.

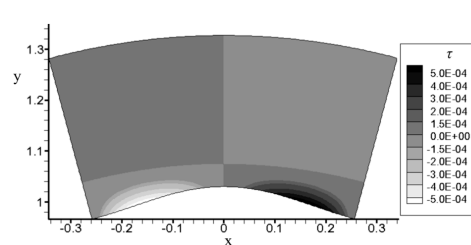


Рис. 8.

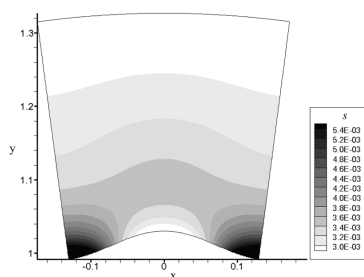


Рис. 9.

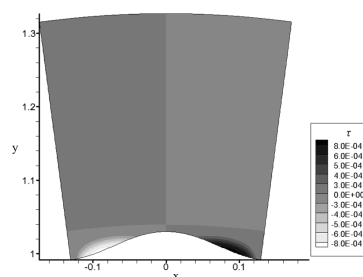


Рис. 10.

Во всех случаях особый интерес представляют компоненты касательных напряжений τ и их максимальный уровень в зонах резкого изменения кривизны внутреннего контура. Зная эти значения и запас прочности материала, можно оценить допустимый уровень внутреннего давления на внутреннюю поверхность цилиндра. Предложенный метод позволяет сделать это быстро и экономно.

Работа поддержана грантами РФФИ №15-08-02392, №14-01-00741 и программой РАН ОЭММПУ-12.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бураго Н. Г., Кужуджанов В. Н. Численное решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет программ АСТРА. В кн. Вычислительная механика твердого деформируемого тела. М.: Наука. 1991. С. 78-122.
- [2] Алямовский А. А., Собачкин А. А., Одинцов Е. В., Харитонович А. И., Пономарев Н. Б. SolidWorks. Компьютерное моделирование в инженерной практике. СПб.: БХВ-Петербург. 2006.
- [3] Бураго Н. Г., Журавлев А. Б., Никитин И. С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22-33.
- [4] Иноземцев А. А., Нихамкин М. А., Сандрацкий В. Л. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. М.: Машиностроение. 2008. 204 с.
- [5] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 535 с.
- [6] Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М: Машиностроение. 1978. 247 с.
- [7] Бураго Н. Г., Никитин И. С., Юшковский П. А. Долговечность дисков переменной толщины с учетом анизотропии усталостных свойств // Известия РАН. МТТ. 2015. № 5. С. 84-98.
- [8] Бураго Н. Г., Никитин И. С., Юшковский П. А. Численно-аналитический метод расчета колебаний упругого диска переменной толщины. Актуальные проблемы механики. 50 лет ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского. Сборник статей. М.: Академиздатцентр <Наука>. 2015. С. 489-497.
- [9] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.

Burago N. G., Nikitin I. S. *Asymmetrical deformation of elastic cylinder of variable thickness.* Elastic deformations of the cylinder of variable thickness under internal pressure have been calculated analytically by using perturbation method and Fourier series. Special attention was paid to the cases of practical interest, when circular cylinder has the inner boundary that slightly differs from a circle.