

УДК 539.374

РЕШЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н.Г. Бураго, В.Н. Кукуджанов

Изложены теоретические основы методики решения задач квазистатики и динамики упругопластической среды при конечных деформациях. Рассмотрены вопросы термодинамически корректной формулировки определяющих соотношения, постановки задач в произвольных подвижных координатах. Для решения задач разработан ряд явных и неявных схем. Особое место отведено контактными задачам, решение которых проводится с использованием алгоритмов метода множителей Лагранжа и метода штрафных функций.

Приведено решение ряда квазистатических и динамических задач: расчет гребчатого соединения разнородных упругопластических тел, расчет плотины под действием сил тяжести, расчеты процессов соударения упругопластических тел типа шара, пластины и цилиндра между собой при околозвуковых скоростях удара. Рассмотрена задача об образовании воронки в упругопластическом материале при взрыве.

SOLUTION OF ELASTOPLASTIC ELEMENT METHOD PROBLEMS BY THE FINITE ELEMENT METHOD

N.G. Burago, V.N. Kukudzhanov

Theoretical grounds of methodology for solving problems of quasistatics and dynamics of elastoplastic medium under finite deformations are given. Question of a thermodynamically correct formulation of constitutive relation and the problem statement in arbitrary moving coordinates are also considered. A number of explicit and implicit schemes have been developed to solve the corresponding problems. A special place is given to the contact problems whose solution is achieved using algorithms of the Lagrange factor method and the technique of penalty functions.

Solutions of a number of quasistatic and dynamic problems are considered: calculations of a comb connections of elastoplastic solids of different nature; of a dam under gravity; of collisions between elastoplastic solids of ball, plate and cylindrical shape at transonic collision speed. The problem of formation of a blast cone in elastoplastic material is also considered.

Введение

В работе кратко изложена методика решения квазистатических и динамических задач упругопластичности методом конечных элементов, реализованная в виде пакета прикладных программ АСТРА на ЭВМ ЕС-1055 М.

В разд. 1 представлена вариационная постановка задачи о движении сплошной среды в подвижных координатах для широкого класса упругопластических сред при конечных деформациях. Использование подвижных координат вызвано необходимостью решать задачи при очень больших искажениях формы тела на подвижных изменяющихся в процессе решения сетках.

Разд. 2 и 3 посвящены вопросам выбора конечно-элементной аппроксимации по пространству и конечно-разностной по времени, разработке алгоритмов решения динамических и квазистатических задач механики упругопластических тел.

Рассмотрен класс явных методов и схем, исследованы вопросы их устойчивости и эффективности. Дан новый метод решения динамических и квазистатических контактных задач

при больших деформациях. Предложены неявные схемы решения квазистатических и динамических задач, реализация которых основана на применении итерационных методов без формирования и хранения матриц жесткости. Использован метод сопряженных градиентов в сочетании с различными методами пошаговой линеаризации. Важными составляющими методики являются итерации на вложенных сетках и векторизация алгоритмов. Это позволило повысить скорость расчетов примерно на порядок.

В разд. 4 приведено несколько примеров расчетов, иллюстрирующих возможности пакета АСТРА.

1. Основные уравнения и определяющие соотношения

Рассмотрим постановку общей задачи механики сплошной среды для безмоментных сплошных сред дифференциального типа.

1.1. *Кинематика.* Закон движения материальной сплошной среды в подвижных координатах имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}, t) \quad \overset{0}{\mathbf{x}} = \overset{0}{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}, t) \quad (1.1)$$

где $\overset{0}{\mathbf{x}}$ - радиус-вектор материальной точки в начальной конфигурации, \mathbf{x} - радиус-вектор материальной точки в актуальной конфигурации при $t > 0$, Независимые криволинейные координаты $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ могут быть сопряжены с начальной конфигурацией $\overset{0}{\mathbf{X}}$, с текущей конфигурацией \mathbf{X} или с произвольно подвижной промежуточной конфигурацией.

В случае $\overset{0}{\mathbf{x}} = \overset{0}{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}})$ имеем лагранжево описание движения сплошной среды, а в случае $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}})$ - эйлерово. Закон (1.1) удовлетворяет начальным условиям

$$\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) = \overset{0}{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) \quad (1.2)$$

Введем обозначения для производных по времени:

$$(\dot{}) = \frac{d}{dt} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\overset{0}{\mathbf{x}}=\text{const}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} () = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}=\text{const}} \quad (1.3)$$

то есть точка далее используется для обозначения материальных производных, а символ частной производной используется для дифференцирования вдоль траекторий подвижных координат.

Определим скорости материальной (\mathbf{u}) и подвижно-координатной (\mathbf{w}) сред:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Связь между производными (1.3) имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \quad (1.5)$$

где $\mathbf{\Omega} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ конвективная скорость, ∇ - оператор пространственного дифференцирования в актуальной конфигурации. Точка между символами означает скалярное умножение. Пространственные меры деформации введем так:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\overset{0}{\mathbf{x}}, \quad d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\overset{0}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{0}{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{x}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{dx}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{dx}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}) = \mathbf{dx}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{dx} \quad (1.6)$$

где F тензор градиента деформации, L - тензор градиента скорости, e - тензор конечных деформаций Альманси, e - эйлеров тензор скоростей деформаций. Из (1.6) следует:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{d\mathbf{F}}{dt} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}), \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{e} = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где \mathbf{I} - единичный тензор.

Следствием тождества $(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) = 0$ является уравнение лагранжевых траекторий

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{x}}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \overset{\circ}{\mathbf{x}} = 0 \quad (1.8)$$

1.2. *Определяющие соотношения.* Плотность ρ , тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ вектор тепловых потоков \mathbf{q} определяются так:

$$dm = \rho dV, \quad d\mathbf{P} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{ndS}, \quad dQ = \mathbf{q} \cdot \mathbf{ndS} \quad (1.9)$$

где dm - масса бесконечно малого объема dV в текущей конфигурации, $d\mathbf{P}$ - сила, действующая на бесконечно малой площадке dS с единичной нормалью \mathbf{n} , dQ - количество тепла диффундировавшего через площадку dS в единицу времени. Если в определении теплового потока в правой части равенства поставить знак минус, то вектор \mathbf{q} будет указывать направление, обратное градиенту температуры, совпадающее с направлением диффузии тепла. Плотность подчинена закону сохранения массы (уравнению неразрывности):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{e} : \mathbf{I} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \det(\mathbf{F}^{-1}) \quad (1.10)$$

где ρ_0 - начальная плотность.

Законы термодинамики имеют вид [1,2]

$$\begin{aligned} \rho \frac{dU}{dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} + \rho r + \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho T \frac{d\eta}{dt} - T \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \rho r &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

где U - внутренняя энергия единицы массы, η - энтропия единицы массы, T — температура, \mathbf{r} - внешний массовый источник тепла, двоеточие означает свертку тензоров, \mathbf{o} и \mathbf{e} - материальные тензоры напряжений и скоростей деформаций:

$$\overset{0}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad \overset{0}{\mathbf{e}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \quad (1.12)$$

По свойству свертки справедливо равенство $\overset{0}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overset{0}{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}$. Следствием законов термодинамики является термодинамическое неравенство для свободной энергии

$$-\rho \frac{d\phi}{dt} - \rho \eta \frac{dT}{dt} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (1.13)$$

где ϕ - свободная энергия, $\mathbf{g} = \nabla T$ - градиент температуры. Будем рассматривать безмоментные сплошные среды дифференциального типа, характеризующиеся следующим набором параметров состояния:

$$\pi = (T, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\chi}, \frac{dT}{dt}, \mathbf{e}, \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}, \nabla T) \quad (1.14)$$

где материальный тензор конечных деформаций имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F} \quad (1.15)$$

а символами $\boldsymbol{\chi}$ и $\boldsymbol{\chi}_t$, обозначены структурные параметры сплошной среды и скорости их изменения. Имеет место зависимость

$$\mathbf{e} = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \quad (1.16)$$

в справедливости которой легко убедиться, учитывая (1.7), (1.12) и (1.15). Теперь неравенство (1.13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & -\rho \left(\eta + \frac{\partial \phi}{\partial T} \right) \frac{dT}{dt} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \mathbf{e} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\chi}} : \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T - \\ & - \rho \frac{\partial \phi}{\partial T_t} : \frac{dT_t}{dt} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{e}} : \frac{d\mathbf{e}}{dt} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\chi}_t} : \frac{d\boldsymbol{\chi}_t}{dt} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \nabla T} : \frac{d\nabla T}{dt} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Так как величины $\frac{dT}{dt}$, $\frac{d\mathbf{e}}{dt}$, $\frac{d(d\boldsymbol{\chi}/dt)}{dt}$, $\frac{d\nabla T}{dt}$ не являются параметрами состояния, то

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial T_t} = 0, \quad \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{e}} = 0, \quad \rho \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\chi}_t} = 0, \quad \rho \frac{\partial \phi}{\partial \nabla T} = 0$$

и

$$\phi = \phi(\pi_1), \quad \pi_1 = (T, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\chi}) \quad (1.18)$$

Неравенство (1.17) принимает вид

$$D = \sum_{\alpha=1}^4 D_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{Z}_{\alpha} : \boldsymbol{\pi}_{2\alpha} \quad (1.19)$$

где

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z} = \left(-\rho \eta_D, \boldsymbol{\sigma}_D, -\rho \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\chi}}, \frac{\mathbf{q}}{T} \right), \quad \boldsymbol{\pi}_2 = \left(\frac{dT}{dt}, \mathbf{e}, \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}, \nabla T \right)$$

Составляющие $D_{\alpha} = \mathbf{Z}_{\alpha} : \boldsymbol{\pi}_{2\alpha}$ соответствуют основным диссипативным процессам в рассматриваемой сплошной среде: необратимому росту энтропии, вязкости, структурным

изменениям и теплопроводности. Индекс D отмечает диссипативные (или вязкостные) составляющие энтропии и напряжений:

$$\eta_D = \eta - \eta_C, \quad \sigma_D = \sigma - \sigma_C \quad (1.20)$$

а символами η_C и σ_C - соответствующие консервативные составляющие:

$$\eta_C = -\frac{\partial \phi}{\partial T}, \quad \sigma_C = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \quad (1.21)$$

Будем полагать, что основные диссипативные процессы взаимно независимы и что каждый из них подчиняется принципу максимальной скорости диссипации [2]. Другими словами, будем полагать, что фьюак кии D_α , однородны по аргументам $\pi_{2\alpha}$:

$$D_\alpha(\pi_1, \pi_{2\alpha} \xi) = \xi^{k_\alpha} D_\alpha(\pi_1, \pi_{2\alpha}) \quad (1.22)$$

где показатель степени однородности $k_\alpha > 0$ и $\xi > 0$ - произвольное положительное число. По теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \pi_{2\alpha}} : \pi_{2\alpha} = k_\alpha D_\alpha = k_\alpha Z_\alpha : \pi_{2\alpha} \quad (1.23)$$

Эти соотношения выполняются для любых значений $\pi_{2\alpha}$, если

$$Z_\alpha = k_\alpha^{-1} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \pi_{2\alpha}}, \quad k_\alpha^{-1} = D_\alpha \left(\frac{\partial D_\alpha}{\partial \pi_{2\alpha}} : \pi_{2\alpha} \right)^{-1} \quad (1.24)$$

учитывая выражения (1.20), (1.21), (1.23), (1.24), находим общий вид определяющих соотношений для рассматриваемых сред:

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\partial \phi}{\partial T} + k^{-\alpha} \frac{\partial D}{\partial (dT/dt)}, \quad \sigma = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} + k^{-\alpha} \frac{\partial D}{\partial e} \\ \mathbf{0} &= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial \chi} + k^{-\alpha} \frac{\partial D}{\partial (d\chi/dt)}, \quad \mathbf{q} = k^{-\alpha} \frac{\partial D_4}{\partial \nabla T} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Соотношения (1.25) показывают, что задание функций свободной энергии ϕ и скорости диссипации D как функций параметров состояния $\boldsymbol{\pi}$ полностью определяет свойства рассматриваемой сплошной среды.

1.3. *Частные случаи определяющих соотношений.* Рассмотрим конкретные выражения функций ϕ и D для типичных сплошных сред рассматриваемого класса. Такие выражения должны удовлетворять естественному требованию инвариантности по отношению к группе уни-модулярных Преобразований основных конфигураций сплошной среды. Исходные и окончательные выражения записываются с использованием пространственных тензоров, промежуточные выкладки проводятся с использованием материальных тензоров. Конкретные выражения функций ϕ и D для больших деформаций подобраны исходя из соответствующих выражений для малых деформаций и откорректированы так, чтобы получить по возможности наиболее простые окончательные формы определяющих соотношений.

Идеальный газ. Функции ϕ и D имеют вид

$$\varphi = \varphi_1(\rho, T), \quad D = 0$$

Определяющие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \eta = \eta_c = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial T}, \quad \sigma = \sigma_c = -p\mathbf{I}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \\ U = U_c = \varphi_1 - T \frac{\partial \varphi_1}{\partial T}, \quad \chi \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.26)$$

где p - давление. При выводе использовано дифференциальное представление закона сохранения массы

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \mathbf{G}^{-1} : \mathbf{e}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

В случае совершенного газа функция φ_1 имеет вид

$$\varphi_1 = c_v T \left((\gamma - 1) \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \ln \frac{T}{T_0} \right)$$

где c_v - теплоемкость при постоянном объеме, γ - отношение теплоемкостей, ρ_0 и T_0 - константы. В этом случае для η , p и U имеем

$$\eta = \eta_c = C_v \left(1 - (\gamma - 1) \ln \frac{\rho}{\rho_1} + \ln \frac{T}{T_1} \right), \quad p = (\gamma - 1) \rho U, \quad U = C_v T$$

Вязкий теплопроводный газ. Функции φ и D имеют вид

$$\varphi = \varphi_1(\rho, T), \quad D = \lambda_v (\mathbf{e} : \mathbf{I})^2 + 2\mu_v \mathbf{e} : \mathbf{e} + \frac{k_q}{T} \nabla T \cdot \nabla T$$

где λ_v , μ_v - коэффициенты вязкости, k_q - коэффициент теплопроводности. Определяющие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \eta = \eta_c = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial T}, \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_c + \hat{\sigma}_D, \quad \sigma_c = -p\mathbf{I}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}, \\ \sigma_D = \lambda_v (\mathbf{e} : \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu_v \mathbf{e}, \quad \mathbf{q} = k_q \nabla T, \quad U = U_c = \varphi - T \frac{\partial \varphi}{\partial T} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Термоупругая изотропная среда. Для термоупругой среды с большими объемными и малыми сдвиговыми деформациями функции φ и D имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1(T, \rho) + h_1 \frac{\mu(T, \rho)}{\rho} \mathbf{e}' : \mathbf{e}' \\ D = \frac{k_q}{T} \nabla T \cdot \nabla T \end{aligned}$$

где модуль упругости сдвига μ есть неотрицательная, ограниченная при $\varepsilon':\varepsilon' \rightarrow 0$ функция, $\varepsilon' = \varepsilon - (\varepsilon:\mathbf{I})\mathbf{I}/3$ - девиатор деформаций, удовлетворяющий по предположению условию

$\varepsilon':\varepsilon' \ll 1$, и $h_1 = \left(1 - \frac{2}{3}(\varepsilon:\mathbf{I})\right)^{-1}$. Определяющие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_c = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial T} - h_1(\varepsilon':\varepsilon') \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial T} \\ \sigma &= \sigma_c = -p\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon', \quad p = \rho^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \\ U &= U_c = \varphi - T \frac{\partial \varphi}{\partial T} = \varphi_1(T, \rho) - T \frac{\partial \varphi_1}{\partial T} + \frac{h_1}{\rho} (\mu(T, \rho) - T \frac{\partial \mu}{\partial T}) \varepsilon':\varepsilon' \\ \mathbf{q} &= k_q \nabla T \end{aligned} \quad (1.28)$$

К сказанному следует добавить, что при выводе использованы формулы

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G} = \overset{\circ}{2} \mathbf{e}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{G}^{-1} = -2\mathbf{G}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{G}^{-1}$$

Термоупругопластичеркая начальнo-изотропная среда. В рассматриваемом случае сплошная среда характеризуется структурными параметрами, нуждающимися в предварительном описании. Следуя [2—6], используем понятие разгруженной конфигурации сплошной среды. Обозначим элемент длины в разгруженной конфигурации dx . Используем представление тензора градиента деформация в виде произведения пластического \mathbf{P} и упругого \mathbf{E} градиентов:

$$d\mathbf{x} = \overset{*}{\mathbf{E}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}}, \quad d\overset{*}{\mathbf{x}} = \overset{*}{\mathbf{P}} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{F} = \overset{*}{\mathbf{E}} \cdot \overset{*}{\mathbf{P}}$$

Отметим, что $\overset{*}{\mathbf{E}}$ и $\overset{*}{\mathbf{P}}$ определены с точностью до произвольного ортогонального преобразования разгруженной конфигурации. Объективной величиной, не зависящей от

способа разгрузки, является модуль вектора $d\overset{*}{\mathbf{x}}$, с помощью которого и определяются тензоры упругих и пластических деформаций и соответствующие тензоры скоростей деформаций

$$\begin{aligned} d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} - d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} &= d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot 2\overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}}, & \frac{d}{dt} (d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} - d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}}) &= d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot 2\overset{*}{\mathbf{e}}_e \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} \\ d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} - d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} &= d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot 2\overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}}, & \frac{d}{dt} (d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} - d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}}) &= d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot 2\overset{*}{\mathbf{e}}_p \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

в пространственном представлении и

$$\begin{aligned} d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} - d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} &= d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot 2\overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}}, & \frac{d}{dt} (d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} - d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}}) &= d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot 2\overset{*}{\mathbf{e}}_e \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} \\ d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} - d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} &= d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot 2\overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}}, & \frac{d}{dt} (d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} - d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}}) &= d\overset{*}{\mathbf{x}} \cdot 2\overset{*}{\mathbf{e}}_p \cdot d\overset{*}{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

в материальном представлении. Из определений следует:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e &= \mathbf{F}^T \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \cdot \mathbf{F}, \quad \overset{*}{\mathbf{e}}_e = \mathbf{F}^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_e \cdot \mathbf{F}, \quad \overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \mathbf{F}^T \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \cdot \mathbf{F}, \quad \overset{*}{\mathbf{e}}_p = \mathbf{F}^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_p \cdot \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \quad \mathbf{e} = \overset{*}{\mathbf{e}}_e + \overset{*}{\mathbf{e}}_p, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_e + \mathbf{e}_p \end{aligned}$$

Можно также записать представления этих тензоров через упругий и пластический градиенты:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{E}^{-T} \cdot \mathbf{E}^{-1})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

и так далее. Это пример так называемой "кинематики Ли для упругих и пластических деформаций".

При необратимых структурных изменениях в сплошной среде могут возникать остаточные микронапряжения $\boldsymbol{\alpha}$, которые в общем случае нельзя выразить через макроскопические деформации среды, введенные выше. Будем использовать так называемые нижние конвективные формы [7] представления тензора $\boldsymbol{\alpha}$ и соответствующие тензоры скоростей:

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \overset{0}{\boldsymbol{\alpha}} = \overset{0}{\boldsymbol{\alpha}}_t, \quad \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \overset{0}{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \mathbf{F}^{-T} = \overset{0}{\boldsymbol{\alpha}}_t$$

Будем полагать, что девиаторные составляющие упругих деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}'_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e - (\boldsymbol{\varepsilon}_e : \mathbf{I}) / 3$ и девиаторные составляющие тензора остаточных микронапряжений $\boldsymbol{\alpha}'$ достаточно малы:

$$\sqrt{(\boldsymbol{\varepsilon}'_e - \boldsymbol{\alpha}' / (2\mu))^2 : \mathbf{I}} \ll 1$$

что выполняется с хорошей точностью для материалов типа металлов и их сплавов. Первые инварианты тензоров \mathbf{e}_p и $\boldsymbol{\alpha}$ будем считать пренебрежимо малыми по сравнению с единицей.

Функции φ и \mathbf{D} имеют вид:

$$\varphi = \varphi_1(\rho, T) + (1 - \frac{2}{3}(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}))^{-1} \frac{\mu}{\rho} (\boldsymbol{\varepsilon}'_e - \boldsymbol{\alpha}' / (2\mu))^2 : \mathbf{I}$$

$$\mathbf{D} = k_p \sqrt{\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p} + k_p / (2\mu) \sqrt{\boldsymbol{\alpha}'_t : \boldsymbol{\alpha}'_t} + \frac{k_q}{T} \nabla T \cdot \nabla T$$

где основные диссипативные процессы представлены тремя составляющими, отвечающими накоплению остаточных пластических деформаций, накоплению остаточных микронапряжений и теплопроводности. Величина a_p является пассивным или скрытым структурным параметром - пластической работой, определяемой из уравнения

$$\frac{da_p}{dt} = k_p \sqrt{\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p}$$

Функция $k_p(a_p)$ определяет изотропное упрочнение, $k_p = \sigma_s \sqrt{\frac{2}{3}}$, σ_s - предел текучести.

Определяющие соотношения имеют вид

$$\eta = \eta_c = -\frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}', \quad p = \rho^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}'_e - \boldsymbol{\alpha}'$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_c = \varphi + T \eta_c, \quad \mathbf{q} = k_q \nabla T \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = k_p \frac{\mathbf{e}'_p}{\sqrt{\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p}}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = k_p \frac{\boldsymbol{\alpha}'_t}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}'_t : \boldsymbol{\alpha}'_t}}$$

где последние два соотношения являются определяющими для структурных параметров $\chi = (\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\alpha})$. Эти два соотношения имеют общее следствие

$$(2\mu\epsilon'_e - \alpha')^2 : \mathbf{I} = k_p^2$$

называемое уравнением поверхности нагружения, учитывающим изотропное и кинематическое упрочнение. Из этих соотношений и неотрицательности основных составляющих диссипации следует условие активного нагружения

$$\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{e}_p \geq 0 \quad (1.30)$$

Более удобной формой записи определяющих соотношений является следующая, выражающая пропорциональность тензоров $\boldsymbol{\sigma}'$, \mathbf{e}' и $\boldsymbol{\alpha}'$:

$$\boldsymbol{\alpha}' = \beta \mathbf{e}'_p, \quad \mathbf{e}'_p = \lambda \boldsymbol{\sigma}', \quad (\beta = \beta(T, \epsilon, \epsilon_p, \alpha))$$

где неотрицательная скалярная функция $\beta = \beta(\pi_1)$ должна определяться экспериментально и характеризует кинематическое прочнение, а скаляр λ определяется из продифференцированного по времени уравнения поверхности нагружения с учетом малости тензора $\epsilon'_e - \alpha'/(2\mu)$ и соотношений для α_i и a_p :

$$\lambda = \frac{H(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - k_p^2) H(\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{e}) \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{e}}{k_p^2 (1 + (\beta + k_p k'_p) / (2\mu))},$$

где функция H равна 0 для отрицательных значений аргумента и 1 в противном случае.

1.4. *Законы сохранения.* В работе [8] рассмотрены основные формы законов сохранения в подвижных координатах. Воспользуемся вариационной галеркинской формой законов сохранения массы, импульса и энергии, записанных в подвижных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \delta \rho dV + \int_S \rho \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} \delta \rho dS &= \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \delta \rho dV \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_S (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{u} \boldsymbol{\Omega}) : \nabla \delta \mathbf{u} dV &= \int_S (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{u} \boldsymbol{\Omega}) : \mathbf{n} \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E \cdot \delta E dV + \int_V (\mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \rho E \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \delta E dV &= \int_S (\mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \rho E \boldsymbol{\Omega}) : \mathbf{n} \delta E dS + \rho (\mathbf{r} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) \cdot \delta E dV \end{aligned} \quad (1.31)$$

где ρ - плотность в актуальной конфигурации, \mathbf{n} внешняя единичная нормаль к поверхности S области V в актуальной конфигурации, $\delta \rho(\tilde{\mathbf{x}})$, $\delta \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}})$, $\delta E(\tilde{\mathbf{x}})$ - произвольные вариации функций, $E = U + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2$ - массовая плотность полной энергии, \mathbf{r} - внешние массовые источники тепла. Соотношения для лагранжевых координат (1.6) и структурных параметров (1.25) также могут быть записаны в форме (1.31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho^0 \tilde{\mathbf{x}} \cdot \delta \tilde{\mathbf{x}} dV + \int_S \rho^0 \tilde{\mathbf{x}} \boldsymbol{\Omega} : \mathbf{n} \delta \tilde{\mathbf{x}} dS &= \int_V \rho^0 \tilde{\mathbf{x}} \boldsymbol{\Omega} : \nabla \delta \tilde{\mathbf{x}} dV \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \chi \cdot \delta \chi dV + \int_S \rho \chi \boldsymbol{\Omega} : \mathbf{n} \delta \chi dS &= \int_V \rho \chi \boldsymbol{\Omega} : \nabla \delta \chi dV + \int_V \rho \mathbf{X} : \delta \chi dV \end{aligned} \quad (1.32)$$

где \mathbf{X} - правая часть уравнения структурных параметров, записанного в разрешенной относительно временных производных форме:

$$\frac{d\chi}{dt} = \mathbf{X}(\pi)$$

1.5. *Уравнения подвижных координат.* Уравнения подвижных координат можно взять в следующей общей форме (8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} dV + \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla \delta \mathbf{x} dV = \int_V \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{x} dV \quad (1.33)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \Psi = \Psi\{\boldsymbol{\gamma}, N\}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}} \geq 0 \quad (1.34)$$

Здесь Ψ - энергия деформаций координатной среды, $\boldsymbol{\gamma}$ - тензор конечных деформаций координатной среды:

$$d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} - d\tilde{\mathbf{x}}^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}^T \cdot 2\boldsymbol{\gamma} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.35)$$

N - скалярная мера скорости изменения решения задачи механики сплошной среды в пространстве;

$$N = \sum_k a_k \|\nabla A_k\|^{b_k} \quad (1.36)$$

где a_k, b_k - положительные константы, $\mathbf{A} = (\rho, \rho u, \rho E, \rho x, \rho \chi)$ - вектор решения; $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{x}})$ - внешние "массовые силы" и координатной среде.

Используемые уравнения подвижных координат аналогичны уравнениям нелинейной термоупругой среды, полунорма решения (1.36) играет роль "антитемпературы" и служит управляющим параметром, обеспечивающим адаптацию координатной среды к решению рассматриваемой задачи.

1.6. *Постановка начально-краевой задачи.* Таким образом, мы приходим к следующей постановке задачи. В области

$$V_T = \{(\tilde{\mathbf{x}}, t): \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{V}, t \geq 0\}$$

требуется решить систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{A} dV + \int_V (\mathbf{B} - \mathbf{A}\Omega) : \nabla \delta \mathbf{A} dV = \int_S (\mathbf{B} - \mathbf{A}\Omega) : n \delta \mathbf{A} dS + \int_V \mathbf{C} \cdot \delta \mathbf{A} dV$$

где

$$\mathbf{A} = (\rho, \rho u, \rho E, \rho x, \rho \chi),$$

$$\mathbf{B} = (0, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}, 0, 0),$$

$$\mathbf{C} = (0, \rho F, \rho \mathbf{r} + \rho F \cdot \mathbf{u}, 0, \rho X),$$

и уравнение управления сеткой

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} dV + \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla \delta \mathbf{x} dV = \int_V \tilde{\mathbf{g}} \cdot \delta \mathbf{x} dV \quad (1.37)$$

с учетом определяющих соотношений

$$\begin{aligned} E &= U + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2, \quad U = \Phi - T\eta, \quad \eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} + \kappa_{(1)} \frac{\partial D}{\partial \dot{T}}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \rho \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{F}^{-T} + \kappa_{(2)} \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial D}{\partial \mathbf{e}} \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{q} = \kappa_{(4)} \rho T \frac{\partial D}{\partial \nabla T}, \quad \Phi = \Phi(T, \boldsymbol{\varepsilon}, \chi), \\ \boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}, \quad \Psi = \Psi(\gamma, N), \quad N = \sum_k a_k \|\nabla A_k\|^{b_k}, \quad D = \sum_{i=1}^4 D_i(T, \boldsymbol{\varepsilon}, \chi, \dot{T}, \mathbf{e}, \dot{\chi}, \nabla T) \end{aligned}$$

кинематических соотношений

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0.5(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{e} = 0.5(\mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F}), \quad \mathbf{F} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{x}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = 0.5(\check{\mathbf{F}}^T \cdot \check{\mathbf{F}} - \mathbf{I}), \quad \check{\mathbf{F}} = \check{\nabla} \check{\mathbf{x}}$$

начальных и граничных условий

$$\mathbf{A}|_{t=0} = \mathbf{A}_0(\check{\mathbf{x}}), \quad \check{\mathbf{x}} \in \check{\mathbf{V}}, \quad t = 0;$$

$$\mathbf{A}|_{\check{\mathbf{x}} \in \check{S}_A} = \mathbf{A}_*(\check{\mathbf{x}}, t), \quad \check{\mathbf{x}} \in \check{S}_A, \quad t \geq 0$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_n(\check{\mathbf{x}}, t), \quad \check{\mathbf{x}} \in S \setminus \check{S}_A, \quad t \geq 0$$

1.7. *Постановка граничных условий.* В зависимости от типа подвижных координат на границе, а также в зависимости от вида определяющих соотношений число и вид необходимых граничных условий для корректной постановки задачи меняются.

Будем различать три типа границ [8]:

лагранжева граница: $\Omega_n = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$;

эйлерова входная граница: $\Omega_n < 0$;

эйлерова выходная граница: $\Omega_n > 0$.

Рассмотрим случай лагранжевых границ. В окрестности лагранжевой границы $\Omega_n \approx 0$. Уравнение неразрывности, уравнения лагранжевых координат и уравнение структурных параметров принимают вид обыкновенных дифференциальных уравнений по времени.

Поэтому граничные условия для функций $\rho, \rho \mathbf{x}, \rho \hat{\chi}$ в этом случае не требуются. На лагранжевой границе должно выполняться условие

$$\Omega_n = 0, \quad u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$$

означающее, что граница области решения движется вместе со средой. Будем рассматривать это условие как условие для уравнения подвижных координат, определяющее тип границы - лагранжева граница. Скорость движения такой границы должна быть задана $u_n = u_n^*$ или должны быть заданы действующие на лагранжеву границу внешние силы $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_n^*$. Задание аналогичных ограничений на скорости и силы, действующих в направлениях, касательных к границе, необходимо, если материальная среда имеет механизм сопротивления сдвиговым деформациям или скоростям сдвиговых деформаций. Таким образом, мы рассмотрели задание условий для $\rho \mathbf{u}$. Условия для $\rho \mathbf{E}$ аналогичны условиям для $\rho, \rho \hat{\mathbf{x}}, \rho \hat{\chi}$ при отсутствии теплопроводности и аналогичны условиям для $\rho \mathbf{u}$ при ее наличии. В последнем случае на лагранжевой границе должны быть заданы ограничения либо на саму функцию $\rho \mathbf{E}$

(например, когда задана температура T), либо на ее потоки (например, когда заданы потоки тепла через границу $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_n^*$).

Рассмотрим теперь эйлеровы границы. В случае входной границы должны быть заданы вектор \mathbf{A} и закон движения границы $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = w_n^*$.

В случае эйлеровых выходных границ необходимо задать лишь ограничения на потоки импульса $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ и тепла $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$. Такие ограничения могут иметь вид заданных воздействий $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_n^*$ и $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_n^*$ или соотношений, обеспечивающих "продолжение решения" э> границу области решения, например $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \nabla T = 0$.

При численном решении отличные от нуля члены \mathbf{B} могут возникать во всех уравнениях задачи из-за схемной или искусственной вязкости. При этом ограничения на потоки B_n могут потребоваться для всех случаев границ, на которых соответствующие функции \mathbf{A} не заданы, в качестве дополнительных граничных условий. В этом случае действует для всех уравнений простое правило: на границе должно быть задано либо ограничение на функцию \mathbf{A} , либо ограничение на соответствующий поток B_n .

Ясно, что приведенные рекомендации по постановке граничных условий при решении конкретных задач служат лишь некоторой общей схемой, которая должна уточняться для каждой конкретной задачи. Например, для $\Omega_n < c$ (c - скорость звука) полное задание величин \mathbf{A} на входных границах не требуется [9]; для квазистатических задач упругопластичности граничные условия должны запрещать движение гел как жесткого целого; во многих задачах вид граничных условий может меняться со временем в зависимости от доведения решения.

2. Расчет больших деформаций упругопластической среды методом конечных элементов

Ниже рассматриваются явные и неявные схемы МКЭ для расчета плоских или осесимметричных, квазистатических или динамических процессов деформации упругопластических тел.

2.1. *Постановка задачи.* Основные уравнения в переменных Эйлера имеют вид:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{g} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} dV &= \int_{S \setminus S_A} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{u}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \nabla \mathbf{x}^0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 0.5(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m &= (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}) / 3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_m \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}'_p) \\ \rho &= \rho_0 \det(\mathbf{F}^{-1}), \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}', \quad p = p_1(\rho) + (\gamma - 1)\rho U \\ \mathbf{L} &= \nabla \mathbf{u}, \quad \mathbf{e} = (\mathbf{L})_s, \quad \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}'_p}{dt} = \lambda \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\varepsilon}'_p \cdot \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_p \\ \lambda &= H(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - k_\sigma^2) H(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}) \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{e} k_\sigma^{-2}, \quad \rho \frac{dU}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $(\mathbf{A})_s = 0.5(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ - симметричная часть тензора \mathbf{A} , Система уравнений (2.1) содержит вариационное уравнение движения, уравнение лагран-жевых траекторий, определение дисторсии \mathbf{F}^{-1} , тензора конечных деформаций Альманси, средней деформации, девиатора деформаций и, далее, закон упругости для девиаторных составляющих тензора напряжений Коши, закон сохранения массы, закон сжимаемости (давление представлено суммой "холодной" и "горячей" составляющих), разложение тензора напряжений Коши на шаровую и девиаторную части, определение тензора градиентов скоростей, тензора скоростей деформаций, закон пластического течения и уравнение для внутренней энергии в адиабатическом приближении. Обозначения традиционны и пояснены ранее в разд. 1. Отметим, что ∇ - оператор пространственного дифференцирования в актуальной конфигурации, H - функция Хевисайда, $k_\sigma = \sigma_s \sqrt{2/3}$, σ_s - предел текучести, μ - модуль упругости сдвига.

При постановке начально-краевых задач система уравнений (2.1) дополняется начальными и граничными условиями. Начальные условия имеют вид

$$t = 0 : \overset{0}{\mathbf{x}} = \overset{0}{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p = \boldsymbol{\varepsilon}_{p0}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \quad (2.2)$$

Кинематические граничные условия имеют вид

$$\overset{0}{\mathbf{x}} \in \overset{0}{S}_u \subset \overset{0}{S} : \delta \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^*. \quad (2.3)$$

Динамические граничные условия

$$\overset{0}{\mathbf{x}} \in \overset{0}{S} \setminus \overset{0}{S}_u : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \quad (2.4)$$

являются следствиями вариационных уравнений движения (2.1).

Область изменения лагранжевых координат $\overset{0}{V}$ в общем случае состоит из нескольких (разнесенных в пространстве для задач динамики) подобластей - тел. На части поверхности $\overset{0}{S}_{p1} \subset \overset{0}{S}_p = \overset{0}{S} \setminus \overset{0}{S}_u$ заданы нагрузки \mathbf{P} (взаимодействие с внешними телами), на остальной части поверхности $\overset{0}{S}_{cont} = \overset{0}{S}_p \setminus \overset{0}{S}_{p1}$ нагрузки \mathbf{P} обусловлены взаимодействием рассматриваемых тел между собой. Заранее неизвестная поверхность контакта $\overset{0}{S}_{cont}$ является множеством всех точек $\overset{0}{\mathbf{x}}_+, \overset{0}{\mathbf{x}}_- \in \overset{0}{S} \setminus \overset{0}{S}_u$ таких, что $\forall \overset{0}{\mathbf{x}}_+ \in \overset{0}{S}_{+cont} \exists \overset{0}{\mathbf{x}}_- \in \overset{0}{S}_{-cont} | \overset{0}{\mathbf{x}}_+ \neq \overset{0}{\mathbf{x}}_- \wedge \overset{0}{\mathbf{x}}(\overset{0}{\mathbf{x}}_+, t) = \overset{0}{\mathbf{x}}(\overset{0}{\mathbf{x}}_-, t)$ и $\overset{0}{S}_{cont} = \overset{0}{S}_{+cont} \cup \overset{0}{S}_{-cont} \wedge \overset{0}{S}_{+cont} \cap \overset{0}{S}_{-cont} = \emptyset$. Нагрузки \mathbf{P} и скорости \mathbf{u} на поверхности контакта $\overset{0}{S}_{cont}$ определяются условиями

$$(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^+ = 0, \quad \mathbf{P}^+ = -\mathbf{P}^-, \quad P_{\tau_i} = f(P_n, (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \boldsymbol{\tau}_i^+) \quad (2.5)$$

выражающими непрерывность нормальной составляющей скорости третий закон Ньютона и закон трения, в которых

$$\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-, \quad \boldsymbol{\tau}_i^+ = -\boldsymbol{\tau}_i^- \quad (i = 1, 2), \quad P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad P_{\tau_i} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}_i$$

Здесь $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_i$ - орты нормали и касательных к поверхности $\overset{0}{S}$ в актуальной конфигурации.

Задача состоит в том, чтобы в области $V_T = \{(\overset{0}{\mathbf{x}}, t) : \overset{0}{\mathbf{x}} \in \overset{0}{V}, t \geq 0\}$ решить систему уравнений (2.1) при условиях (2.2)-(2.5).

2.2. Пространственные КЭ-аппроксимации. Изложение методов проведено для плоских задач, в общем трехмерном случае все черты алгоритмов сохраняются. В области $\overset{0}{V} \subset \mathbb{R}^2$ введем сетку треугольных и четырехугольных ячеек (элементов).

Пусть \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, n_1$) - координаты узлов, J_{kl} ($k = 1, 2, \dots, N_2; l = 1, 2, \dots, M_2$) - номера узлов в элементах, G_{kl} ($k = 1, 2, \dots, N_3; l = 1, \dots, M_3$) - номера узлов в граничных элементах. На временном слое \mathbf{n} введем обозначения: $\mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_i^n$ скорости и координаты узлов, $\boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n, U_i^n$ - значения пластических деформаций и внутренней энергии в центрах ячеек. Обозначим через Ω множество номеров узлов сетки, через ω_u множество номеров граничных узлов, в которых заданы кинематические условия: $\mathbf{x}_i^n \in \overset{0}{S}_u$ при $i \in \omega_u$; через Ω - множество номеров элементов.

Используем обычную симплекс-аппроксимацию координат и скоростей на сетке Ω [10]. Интегралы в вариационных уравнениях (2.1) вычислим с помощью квадратурных формул прямоугольников. Точки численного интегрирования для интегралов по области $\overset{0}{V}$ от виртуальной работы сил инерции будем брать в узлах сетки Ω , для интеграла виртуальной работы

напряжений - в центрах элементов. Для интегралов по поверхности точки численного интегрирования возьмем в середине граничных отрезков.

2.3. *Схема типа "крест"*. Сначала рассмотрим применение явной консервативной схемы типа "крест" [11, 12] для интегрирования по времени. Вместо членов явной искусственной вязкости {12} в качестве регуляризатора для расчета ударных волн применим осреднение скоростей на слое Π (по Лаксу [13]). В результате получим следующий алгоритм (эйлеровы переменные):

$$\begin{aligned}
 i \in \omega \setminus \omega_u &: m_i \{u_i^{n+1} - \hat{u}_i^n \gamma_i^n - u_i^n (1 - \gamma_i^n)\} = f_i^n \Delta t_n \\
 i \in \omega_u &: u_i^{n+1} = u_i^*(t_{n+1}) \\
 k \in \Omega &: \varepsilon_{pk}^{n+1} = \varepsilon_{pk}^n + (\lambda_k^{n+1} \sigma_k^n - \varepsilon_{pk}^n \cdot L_k^{n+1} - (L_k^{n+1})^T \cdot \varepsilon_{pk}^n) \Delta t_n \\
 k \in \Omega &: U_k^{n+1} = U_k^n + \sigma_k^n : L_k^{n+1} \Delta t_n / \rho_k^n \\
 k \in \Omega &: a_{pk}^{n+1} = a_{pk}^n + \lambda_k^{n+1} \sigma_k^n : \sigma_k^n \Delta t_n \\
 i \in \omega &: x_i^{n+1} = x_i^n + u_i^{n+1} \Delta t_n
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

где записаны дискретные аналоги уравнений движения, граничных условий для скоростей, закона пластического течения, уравнений лагранжевых траекторий, уравнения внутренней энергии и уравнения пластической работы.

Узловые массы m_i вычисляются один раз перед началом расчета:

$$m_i = \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{M_2} V_k^0 \rho_k^0 M_k^{-2} \tilde{H}(i - J_{kl}) \tag{2.7}$$

где V_k^0 - начальный объем элемента, M_2 - число узлов в элементе, N_2 - число элементов, функция \tilde{H} указывает адрес рассылки вкладов от массы элемента в приузловые массы: $\tilde{H}(0) = 1$, $\tilde{H}(j) = 0$ для $j \neq 0$. Принят следующий способ осреднения скоростей на слое:

$$\hat{u}_i^n = 0.5(\max_{j \in \omega_i} u_j^n + \min_{j \in \omega_i} u_j^n) \tag{2.8}$$

где ω_i - номера узлов - соседей узла i . Испытывались и другие способы осреднения, при которых \hat{u}_i^n определялось как среднее арифметическое среди скоростей u_j^n ($j \in \omega_i$) или как среднее с весом (осреднение "по площадям"). Принятый способ в меньшей степени зависит от конкретного шаблона в окрестности узла и от того, является ли узел внутренним или граничным.

Параметр гибридности γ_i^n задается в виде

$$\gamma_i^n = \min\{1, \gamma_0 + \kappa |\hat{u}_i^n - u_i^n|\} \tag{2.9}$$

где разность $|\hat{u}_i^n - u_i^n|$ дает оценку второй производной от скоростей по пространственным переменным в окрестности узла i , коэффициент $\gamma_0 = |u_{\text{impact}}|/c$, где u_{impact} - относительная скорость удара, $c^2 = dp/d\rho + 4/3 \mu / \rho$ - скорость звука, $\kappa = |0.2 u_{\text{impact}}|^{-1}$ - характерная величина скачка скорости. Параметр γ_i^n включает лаксову вязкость в окрестности ударных волн и увеличивает ее (не свыше единицы) с ростом скорости удара.

Для вычисления пластических деформаций ε_{pk}^{n+1} и пластической работы a_{pk}^{n+1} на новом временном слое в каждой ячейке (конечном элементе) вычисляются следующие величины:

$$(F_k^n)^{-1} = \sum_{j=1}^{M_2} \nabla_{kj}^n \otimes X_{kj}, \quad \varepsilon_k^n = 0.5(I - (F_k^n)^{-T} \cdot (F_k^n)^{-1}),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{1k}^n = \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}_k^n / 3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k^n = \boldsymbol{\varepsilon}_k^n - \mathbf{I} \boldsymbol{\varepsilon}_{1k}^n \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^n = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_k^n - \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n), \quad L_k^{n+1} = \sum_{j=1}^{M_2} \nabla_{kj}^n u_{J_{kj}}^{n+1}$$

$$\lambda_k^{n+1} = H(\boldsymbol{\sigma}_k^n : \boldsymbol{\sigma}_k^n - (k_\sigma^2)_k^n) H(\boldsymbol{\sigma}_k^n : L_k^{n+1}) \boldsymbol{\sigma}_k^n : L_k^{n+1} (k_\sigma^{-2})_k^n$$

а далее применяются соответствующие формулы (2.6). Здесь ∇_{kj}^n - дискретный оператор пространственного дифференцирования в актуальной конфигурации. Его определение для центров симплекс-элементов по методу конечных элементов [10] совпадает с естественной аппроксимацией производных [12]. В случае пространственно двумерных задач имеем (\mathbf{e}_i - декартовы орты):

$$\nabla_{kj}^n \cdot \mathbf{e}_1 = 0.5[(x_2)_{J_{kj+1}}^n - (x_2)_{J_{kj-1}}^n] V_k^{-1n}$$

$$\nabla_{kj}^n \cdot \mathbf{e}_2 = -0.5[(x_1)_{J_{kj+1}}^n - (x_1)_{J_{kj-1}}^n] V_k^{-1n} \quad (2.11)$$

где при $j = M_2$ полагаем $J_{kj+1} = J_{k1}$, а при $j = 1$ полагаем $J_{kj-1} = J_{kM_2}$. Величина V_k^n обозначает площадь k -й ячейки в актуальной конфигурации:

$$V_k^n = 0.5 \sum_{j=1}^{M_2} (x_1)_{J_{kj}}^n [(x_2)_{J_{kj-1}}^n - (x_2)_{J_{kj+1}}^n] \quad (2.12)$$

Рассмотрим вычисление узловых сил \mathbf{f}_i^n . Их составляющие без учета контактных усилий $\mathbf{f}_i^{n(0)}$ определяются путем следующих операций в элементах и граничных отрезках:

$$\mathbf{f}_i^{n(0)} = \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{M_2} \mathbf{g}_{kj}^n \tilde{\mathbf{H}}(i - J_{kj}) + \sum_{k=1}^{N_3} \sum_{j=1}^{M_3} \mathbf{q}_{G_{kj}}^n \tilde{\mathbf{H}}(i - G_{kj}) \quad (2.13)$$

где вклады от напряжений в элементах определяются так:

$$(\mathbf{F}^{-1})_k^n = \sum_{j=1}^{M_2} \nabla_{kj}^n \mathbf{x}_{J_{kj}}^0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k^n = 0.5(\mathbf{I} - (\mathbf{F}_k^n)^{-T} \cdot (\mathbf{F}_k^n)^{-1})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{1k}^n = \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}_k^n / 3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k^n = \boldsymbol{\varepsilon}_k^n - \mathbf{I} \boldsymbol{\varepsilon}_{1k}^n, \quad (\boldsymbol{\sigma}_k^n)^{(0)} = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_k^n - \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^n = (k_\sigma)_k^n (\boldsymbol{\sigma}_k^n)^{(0)} / \sqrt{(\boldsymbol{\sigma}_k^n)^{(0)} : (\boldsymbol{\sigma}_k^n)^{(0)}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n = \boldsymbol{\varepsilon}_k^n - \boldsymbol{\sigma}_k^n / (2\mu) \quad (2.14)$$

$$\rho_k^n = \rho_k^0 \det((\mathbf{F}^{-1})_k^n), \quad p_k^n = p(\rho_k^n, U_k^n), \quad \boldsymbol{\sigma}_k^n = -I p_k^n + \boldsymbol{\sigma}_k^n$$

$$V_k^n = V_k^0 \rho_k^0 / \rho_k^n, \quad \mathbf{g}_{kj}^n = -V_k^n \boldsymbol{\sigma}_k^n \cdot \nabla_{kj}^n$$

шестая и седьмая формулы здесь производят коррекцию напряжению и пластических деформаций [12]. Вклады в узловые силы от внешних поверхностных нагрузок определяются так (двумерный случай):

$$\mathbf{q}_{kj}^n = 0.5 \mathbf{P}_k^n \mathbf{S}_k^n \quad (2.15)$$

где \mathbf{S}_k^n - длина граничного отрезка.

2.4. *Расчет контактной границы.* Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}, t) \in S$ - произвольная поверхностная точка, \mathbf{n} - внешняя нормаль к поверхности в этой точке. Обозначим через \mathbf{x}^* радиус-вектор точки пересечения продолжения нормали $(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{n}, \alpha \geq 0)$ с поверхностью S причем $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{x}^*, t)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$. В случае если \mathbf{x}^* не существует, т.е. если линия продолжающая

внешнюю нормаль не пересекает S , то положим $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{n}$. Для всех $\mathbf{x} \in S$ должно быть выполнено неравенство

$$(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (2.16)$$

выражающее условие непроникания одной части поверхности в другую. равенство соответствует точкам контактной поверхности $\mathbf{x}^*, \mathbf{x} \in S_{\text{cont}}$ в соответствии с определением подразд. 2.1. Отметим, что условие непрерывности нормальной составляющей скорости на контактной границе является следствием записанного неравенства.

Условия контакта, приведенные в подразд. 2.1, введем в уравнение виртуальных работ с помощью метода множителей Лагранжа (14). В результате это уравнение примет такой вид:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{g} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} dV = \int_{S_p} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS - \\ - \int_{S_p} \delta P_n (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_p} P_n (\delta \mathbf{x}^* - \delta \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_p} P_\tau (\delta \mathbf{x}^* - \delta \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau} dS \end{aligned} \quad (2.17)$$

Роль множителя Лангража для неравенства (1.6) играет нормальная нагрузка контактного взаимодействия $P_n(\mathbf{x}, t)$, подлежащая определению.

Численная аппроксимация интеграла в левой части и первого интеграла в правой части уравнения виртуальных работ уже рассмотрена в подразд. 2.3. Ниже рассмотрим аппроксимацию добавочных "контактных" интегралов.

Сначала определим поверхность контакта, т.е. те узлы и отрезки границы, которые участвуют в формировании этих интегралов. Для этого из каждого граничного узла G_{r1} ($r = 1, 2, \dots, N_3$) опустим нормали на каждый граничный отрезок $G_{k1}G_{k2}$ ($k = 1, 2, \dots, N_3$). Отберем пары "граничный узел - граничный отрезок", удовлетворяющие следующим условиям:

$$\mathbf{x}_{32}^n \times \mathbf{x}_{12}^n \cdot \mathbf{e}_3 \leq 0 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{x}_{32}^{n+1} \times \mathbf{x}_{12}^{n+1} \cdot \mathbf{e}_3 > 0 \quad (2.19)$$

$$0 \leq \xi_k^n \leq 1, \quad \xi_k^n = (\mathbf{x}_{12}^n \cdot \mathbf{x}_{32}^n) / (\mathbf{x}_{32}^n \cdot \mathbf{x}_{32}^n) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{n}_{*k}^n \cdot \mathbf{n}_k^n < 0 \quad (2.21)$$

где

$$\mathbf{x}_{ij}^n = \mathbf{x}_i^n - \mathbf{x}_j^n, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n}_k^n = (\mathbf{x}_{32}^n \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1 - (\mathbf{x}_{32}^n \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2 \quad (2.23)$$

Здесь для краткости обозначено: $x_1 = x_{G_{r1}}$, $x_2 = x_{G_{k2}}$, $x_3 = x_{G_{k2}}$; \mathbf{n}_{*i}^n - внешняя нормаль к границе в точке x_i^* . Записанные признаки контакта означают следующее: (2.18) - условие непроникания на временном слое \mathbf{n} для данной тройки узлов выполнено; (2.19) - по результатам предварительного расчета временного слоя $n+1$ для данной тройки узлов выполнено условие контакта (равенство) или имеет место "счетное проникание"; (2.20) - нормаль, опущенная из узла \mathbf{x}_i на отрезок $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2$, пересекает этот отрезок (а не его продолжение); (2.21) - нормаль к границе в точке \mathbf{x}_i и внешняя нормаль к граничному отрезку $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2$ направлены навстречу друг другу.

Пары "граничный узел - граничный отрезок", удовлетворяющие условиям (2.18)-(2.21), определяют множество Ω_{cont} , характеризуемое информационным массивом контактных пар (элементов.) K_{r1} ($r = 1, 2, \dots, N_C; 1 = 1, 2, 3$), где N_C - число контактных пар, K_{r1} содержит номер граничного узла G_{r1} , а K_{r2} , K_{r3} содержат номера концевых узлов граничного отрезка G_{k1} , G_{k2} соответственно.

Контактные интегралы в правой «исти уравнения виртуальных работ представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \delta \int_{S_{\text{cont}}^n} \mathbf{P}_n^n (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_{r=1}^{N_c} (\mathbf{P}_n)_r^n (\delta \mathbf{x}_{K_{r1}} - \delta \mathbf{x}_{K_{r2}} (1 - \xi_r^n) - \delta \mathbf{x}_{K_{r3}} \xi_r^n) \cdot \mathbf{n}_r^n S_r^n + \\ + \sum_{r=1}^{N_k} \delta (\mathbf{P}_n)_r (\mathbf{x}_{K_{r1}} - \mathbf{x}_{K_{r2}} (1 - \xi_r^n) - \mathbf{x}_{K_{r3}} \xi_r^n) \cdot \mathbf{n}_r^n S_r^n \end{aligned} \quad (2.24)$$

и

$$\int_{S_{\text{cont}}^n} \mathbf{P}_\tau^n (\delta \mathbf{x}^* - \delta \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}^n dS \approx \sum_{r=1}^{N_k} (\mathbf{P}_\tau)_r^n (\delta \mathbf{x}_{K_{r1}} - \delta \mathbf{x}_{K_{r2}} (1 - \xi_r^n) - \delta \mathbf{x}_{K_{r3}} \xi_r^n) \cdot \boldsymbol{\tau}_r^n S_r^n \quad (2.25)$$

С учетом этих интегралов соотношения для скоростей переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} i \in (\omega \setminus \omega_u) \setminus \omega_{\text{cont}} : m_i \mathbf{u}_i^{n+1} - \gamma_i^n \hat{\mathbf{u}}_i^n - (1 - \gamma_i^n) \mathbf{u}_i^n &= \mathbf{f}_i^n \Delta t_n \\ i \in \omega_u : \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_{*i}^{n+1} \\ i \in \omega_{\text{cont}} : m_i \mathbf{u}_i^{n+1} - \gamma_i^n \hat{\mathbf{u}}_i^n - (1 - \gamma_i^n) \mathbf{u}_i^n &= (\mathbf{f}_i^n + \mathbf{P}_i^n) \Delta t_n \end{aligned} \quad (2.26)$$

Остальные уравнения схемы (2.6) не изменятся. Через S_{cont} обозначено множество номеров узлов, участвующих в образовании контактных пар. Для контактных узлов в выражениях уравнений движения появились подлежащие определению добавки \mathbf{P}_i^n от контактных нагрузок.

В соответствии с аппроксимациями (2.25) контактные силы \mathbf{P}_i^n определяются так:

$$\mathbf{P}_i^n = \sum_{r=1}^{N_c} \sum_{l=1}^3 [(p_n)_r^n \mathbf{n}_r^n + (p_\tau)_r^n \boldsymbol{\tau}_r^n] S_r^n \kappa_{il}^n \tilde{\mathbf{H}}(i - K_{rl}) \quad (2.27)$$

Следствием модифицированного уравнения виртуальных работ является также соотношение

$$(\mathbf{x}_{K_{r1}} - \mathbf{x}_{K_{r2}} (1 - \xi_r^n) - \mathbf{x}_{K_{r3}} \xi_r^n) \cdot \mathbf{n}_r^n = 0 \quad (2.28)$$

обеспечивающее принадлежность узлов K_{rl} контактной границе. Участвующие в выражениях (2.27) величины κ_{il}^n имеют вид:

$$\kappa_{r1}^n = -1, \quad \kappa_{r2}^n = 1 - \xi_r^n, \quad \kappa_{rl}^n = \xi_r^n$$

Подведем итоги. Учет контактного взаимодействия привел к появлению новой группы искоемых величин - множителей Лагранжа $(p_n)_r^n$, ($r = 1, 2, \dots, N_c$) и добавились дополнительные соотношения (2.28), ограничивающих класс возможных движений контактных узлов. В первоначально явной схеме типа "крест" возникла группа соотношений (имеется в виду группа соотношений для координат и скоростей контактных узлов и соотношения (2.28) для контактных нагрузок), которые характеризуются недиагональной матрицей. Решение такой системы уравнений должно удовлетворять условию

$$\{p_n\}_r^n \leq 0 \quad (2.29)$$

означающему, что нормальные контактные нагрузки должны действовать против направления внешней нормали к границе. При нарушении этого условия соответствующая контактная пара исключается из числа контактных, и система уравнений решается заново.

Для решения системы уравнений на контактной границе применен следующий простой итерационный процесс типа Гаусса-Зейделя:

Шаг 0. Для получения начального приближения проводится расчет всех ве-«ичии на новом временном слое $n+1$ по схеме (2.6) без учета контактного взаимодействия. Множество Ω_{cont} при этом пусто ($N_c = 0$).

Шаг 1. Путем проверки условий (2.18)-(2.21), (2.29) определяется зона контакта, т.е. формируется информационный массив K_n . Если по сравнению с предыдущей итерацией он изменился, то переходим к выполнению шага 2, иначе процесс окончен;

Шаг 2. Последовательно для каждой контактной пары K_n ($r = 1, 2, \dots, N_c$) варьируется величина $(p_n)_r^n$ при постоянных $(p_n)_k^n$ ($k \neq r$). При этом изменяются величины $\mathbf{P}_{K_n}^n$, $\mathbf{u}_{K_n}^{n+1}$, $\mathbf{x}_{K_n}^{n+1}$ ($l = 1, 2, 3$) в соответствии с формулами (2.27), (2.26), (2.6) и меняется невязка соотношения (2.28). За новое значение величины $(p_n)_r^n$ принимается то, которое приводит к удовлетворению ограничения (2.28). В соответствии с новым значением $(p_n)_r^n$ исправляются значения $\mathbf{P}_{K_n}^n$, $\mathbf{u}_{K_n}^{n+1}$, $\mathbf{x}_{K_n}^{n+1}$. Итерационный процесс оканчивается, если для всех контактных пар условие (2.28) выполнено с заданной точностью. Далее переходим к выполнению шага 1.

2.5. *Комментарий к схеме типа "крест"*. Порядок расчета по рас. смотренной схеме типа "крест" таков. На первом этапе (предиктор уравнений движения) определяются силы \mathbf{f}_i^n без учета контакта. На втором этапе (корректор уравнений движения) проводятся итерации (2.16), определяются контактные усилия, зона контакта, окончательные значения сил $\mathbf{f}_i^n + \mathbf{P}_i^n$ с учетом контакта и новые значения скоростей на слое $n+1$. На третьем этапе определяются новые значения пластических деформаций, пластической работы и температуры. На четвертом этапе определяются новые значения актуальных координат.

Прообразом данной схемы является известная схема типа "крест", предложенная для расчета упругопластических течений М. Уилкинсом [12]. Здесь эта схема распространена на нерегулярные сетки. Изменен выбор основных переменных (пластические деформации вместо напряжений). Учтены эффекты упрочнения и термоэффекты. Изменен регуляризатор решения в окрестности ударных волн (лаксова вязкость вместо комбинации линейной и квадратичной тензорной явной искусственной вязкости). Построен более точный алгоритм расчет» контактных границ.

Применение пластических деформаций вместо напряжений в качестве основных искомым функций дает лучшее описание эффектов упругости материала. Причина этого в том, что при чисто упругих деформациях в алгоритме, изложенном здесь, используется гиперупругое описание свойств среды (нсдифференциальное по времени), что обеспечивает запоминание средой своей начальной конфигурации. При использовании же напряжений как основных переменных среда является гипопругой (продифференцированные по времени законы упругости). В последнем случае из-за накопления погрешностей численного интегрирования по времени расчет упругих соударении содержит дефекты: числаннчя модель упругого тела не восстанавливает своей формы после упругого удара и колеблется возле новой искаженной конфигурации (паразитные остаточные деформации). Такие дефекты искажают и решение задачи в пластической области.

Применение лаксовой вязкости в окрестности ударных волн позволило повысить надежность алгоритма, исключить полностью такие Неприятные счетные эффекты, как выворачивание лагранжевых ячв-ск и другие проявления мелкомасштабной "шумовой" неустойчивости. Это же позволило избавиться от необходимости в каждом новом расчете заново подбирать подходящие значения коэффициентов искусственной вязкости, что приходится делать в методе М. Уилкинса.

Учет эффектов упрочнения и термоэффектов нс связан с какой-либо принципиальной переделкой алгоритма, а лишь является его пополнением, отвечающим потребности лучшего описания поведения сплошной среды. Отметим, что в задачах динамики упругопластической среды диффузионные члены в уравнении притока тепла пренебрежимо малы, так как на коротких интервалах времени динамического процесса они не успевают проявить себя и процесс весьма близок к адиабатическому.

Используемые в методе элементарные операции обмена импульсом (2.13) и (2.17) в основных и вспомогательных контактных элементах консервативны, так как сумма обменных вкладов импульса на межузловых границах равна нулю:

$$\sum_{l=1}^3 \mathbf{g}_{kl}^n = 0 \quad (2.30)$$

в силу аналогичного свойства дискретного оператора пространственного дифференцирования ∇_{kl}^n . Наличие в методе неконсервативных операций осреднения скоростей (2.11), необходимых для подавления коротковолновых возмущений, делает необходимым контроль точности решения по импульсу. Кроме того, как обычно в схемах типа "крест" [11, 12], необходим контроль балансных энергетических интегральных соотношений (контроль по энергии). Предложенный алгоритм расчета контактных границ в известной нам литературе аналогов не имеет. Этот алгоритм не содержит каких-либо априорных предположений о свойствах контактирующих сред, не нуждается в информации из внутренних областей, прилегающих к контактной границе, однороден, прост в реализации. Консервативность алгоритма по импульсу обеспечивает выполнение третьего закона Ньютона на контактной границе, а условие непрерывности нормальных составляющих скорости служит в нем для определения контактных нормальных усилий, и его выполнение является критерием окончания итераций.

Имеются другие алгоритмы расчета контактных границ, которые позволяют удовлетворить условиям на контактной границе лишь приближенно, не гарантируют консервативность обмена импульсом, а также отсутствие "счетного налезания" [12,15,16].

Сложность нелинейной системы уравнений подразд. 2.1 и нерегулярный характер шаблонов сетки не позволяют провести априорное исследование сходимости метода. Для одномерных задач в газодинамическом приближении схемы типа "крест" исследованы в [11]. Аналогичное исследование с использованием первых дифференциальных приближений [17] показывает, что метод устойчив при обычном ограничении по челу Куранта

$$\Delta t_n \leq \min_{k \in \Omega} \left\{ \frac{1}{c_k^n} \left[\max_l (|\nabla_{kl}^n \cdot \mathbf{e}_1|, |\nabla_{kl}^n \cdot \mathbf{e}_2|) \right]^{-1} \right\} \quad (2.31)$$

При больших скоростях удара (порядка скорости звука) вводилось Дополнительное ограничение "по точности" на шаг во времени, выражающее требование достаточной малости приращений деформации и "предикторного налезания" границ $\Delta t_n \leq \delta / \|\mathbf{e}\|$, где δ - максимально допустимое приращение деформации на шаге по времени.

2.6. *Схема квазивторого порядка точности.* Данная схема для гиперболического уравнения переноса описана в работе [18] и часто используется при решении нестационарных газодинамических задач. В нашем случае схема имеет вид:

$$\begin{aligned} i \in \omega \setminus \omega_u : m_i \{ \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n \} &= ((1.5 + \varepsilon) \mathbf{f}_i^n - (0.5 + \varepsilon) \mathbf{f}_i^{n-1}) \Delta t_n \\ i \in \omega_u : \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^*(t_{n+1}) \\ k \in \Omega : \varepsilon_{pk}^{n+1} &= \varepsilon_{pk}^n + (\lambda_k^{n+1} \sigma_k^n - \varepsilon_{pk}^n \cdot \mathbf{L}_k^{n+1} - (\mathbf{L}_k^{n+1})^T \cdot \varepsilon_{pk}^n) \Delta t_n \\ k \in \Omega : \mathbf{U}_k^{n+1} &= \mathbf{U}_k^n + \sigma_k^n : \mathbf{L}_k^{n+1} \Delta t_n / \rho_k^n \\ k \in \Omega : \mathbf{a}_{pk}^{n+1} &= \mathbf{a}_{pk}^n + \lambda_k^{n+1} \sigma_k^n : \sigma_k^n \Delta t_n \\ i \in \omega : x_i^{n+1} &= x_i^n + u_i^{n+1} \Delta t_n \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.5$, ε - малое положительное число. Аналогом этой схемы интегрирования по времени для случая задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений является схема Адамса—Башфорта (тре» слойн»я схема). Условия устойчивости для этой схемы, как показывает анализ Фурье для модельной задачи с уравнением переноса, являются вдвое более ограничительными, нежели условия Куранта (2.31). Для» дач динамики упругопластической среды схема (2.32) впервые применена в настоящей работе.

2.7. Полностью консервативная явная схема. Эта схема подробно обсуждается в работе [11] применительно к задачам газовой динамики в лагранжевых переменных (в случае подхода Лагранжа); В нашем случае она может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
i \in \omega \setminus \omega_u &: m_i \{ \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n \} = \mathbf{f}_i^n \Delta t_n \\
i \in \omega_u &: \mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^*(t_{n+1}) \\
k \in \Omega &: \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n + (\lambda_k^{n+1} \boldsymbol{\sigma}_k^n - \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n \cdot \mathbf{L}_k^{n+1/2} - (\mathbf{L}_k^{n+1/2})^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n) \Delta t_n \\
k \in \Omega &: \mathbf{U}_k^{n+1} = \mathbf{U}_k^n + \boldsymbol{\sigma}_k^n : \mathbf{L}_k^{n+1/2} \Delta t_n / \rho_k^n \\
k \in \Omega &: \mathbf{a}_{pk}^{n+1} = \mathbf{a}_{pk}^n + \lambda_k^{n+1/2} \boldsymbol{\sigma}_k^n : \boldsymbol{\sigma}_k^n \Delta t_n \\
i \in \omega &: x_i^{n+1} = x_i^n + u_i^{n+1/2} \Delta t_n
\end{aligned} \tag{2.33}$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{L}_k^{n+1/2} = (\mathbf{L}_k^n + \mathbf{L}_k^{n+1}) / 2, \quad \mathbf{u}_k^{n+1/2} = (\mathbf{u}_k^n + \mathbf{u}_k^{n+1}) / 2, \quad \lambda_k^{n+1/2} = (\lambda_k^n + \lambda_k^{n+1}) / 2 \tag{2.34}$$

Отметим, что схема (2.33) слабо неустойчива [11]. Для устранения этого недостатка в расчете использовалась малая искусственная вязкость в виде тензора вязких напряжений:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_v &= -p_v \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}'_v, \quad p_v = -\frac{dp}{d\rho} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \Delta t / 2, \\
\boldsymbol{\sigma}'_v &= 2\mu \mathbf{e}' \Delta t / 2, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{e} - (\mathbf{e} : \mathbf{I}) \mathbf{I} / 3, \quad \mathbf{e} = 0.5(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Устойчивость схемы при наличии вязкостных членов легко устанавливается из анализа первого дифференциального приближения, который и подсказывает вид членов (2.35).

Отметим, что при больших скоростях удара в схемы (2.32), (2.33) Приходится вводить регуляризатор Лакса ((2.6), первая строка), (2.8), (2.9) для устранения осцилляций в зоне сильных ударных волн.

Схема (2.33) была получена в работах [11, 16] с помощью интегро-интерполяционного метода и метода, основанного на прямой аппроксимации гамильтониана. Хотя разностные уравнения в этих двух случаях совпадают с рассмотренными выше, принятая в нашей работе галеркин-ская вариационная формулировка уравнений приводит к иному порядку реализации вычислений (2.33), более экономному, а именно: каждая ячейка сетки обрабатывается один раз на шаге по времени. Это замечание об экономности используемого подхода относится и к схемам (2.6), (2.32).

Расчет контактных границ в схемах (2.32), (2.33) проводится аналогично тому, как это описано выше для схемы (2.6).

3. Неявные схемы для квазистатических и динамических задач

3.1. *Квазиньютоновская неявная схема.* Простейшая неявная схема для задач упругопластичности, основанная на квазилинеаризации исходных нелинейных уравнений и использующая на каждом шаге по времени одну итерацию по методу Ньютона, имеет вид (обозначения, принятые для явных схем, здесь сохраняются):

$$\begin{aligned}
 i \in \omega \setminus \omega_u : m_i \{ \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n \} &= (\mathbf{f}_i^n + \Delta \mathbf{f}_i^n) \Delta t_n \\
 i \in \omega_u : \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^*(t_{n+1}) \\
 k \in \Omega : \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n + (\lambda_k^{n+1} \boldsymbol{\sigma}_k^n - \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n \cdot \mathbf{L}_k^{n+1} - (\mathbf{L}_k^{n+1})^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n) \Delta t_n \\
 k \in \Omega : \mathbf{U}_k^{n+1} &= \mathbf{U}_k^n + \boldsymbol{\sigma}_k^n : \mathbf{L}_k^{n+1} \Delta t_n / \rho_k^n \\
 k \in \Omega : \mathbf{a}_{pk}^{n+1} &= \mathbf{a}_{pk}^n + \lambda_k^{n+1} \boldsymbol{\sigma}_k^n : \boldsymbol{\sigma}_k^n \Delta t_n \\
 i \in \omega : \mathbf{x}_i^{n+1} &= \mathbf{x}_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1} \Delta t_n
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Величины $\Delta \mathbf{f}_i^n$, \mathbf{L}_k^n , λ_k^n вычисляются так:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{f}_i^n &= \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{M_2} \Delta \mathbf{g}_{kl}^n \tilde{\mathbf{H}}(i - \mathbf{J}_{kl}) + \sum_{k=1}^{N_3} \sum_{l=1}^{M_3} \Delta \mathbf{q}_k^n \tilde{\mathbf{H}}(i - \mathbf{G}_{kl}) \\
 \Delta \mathbf{L}_k^{n+1} &= \sum_{j=1}^{M_2} \nabla_{kj}^n \mathbf{u}_{J_{kj}}^{n+1} \Delta t_n, \quad \Delta \lambda_k^{n+1} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_k^n : \boldsymbol{\sigma}_k^n - (k_\sigma^2)_k^n) \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_k^n : \mathbf{L}_k^{n+1}) \boldsymbol{\sigma}_k^n : \mathbf{L}_k^{n+1} (k_\sigma^{-2})_k^n \Delta t_n \\
 \Delta \mathbf{g}_k^n &= \Delta \boldsymbol{\sigma}_k^n \cdot \nabla_{kl}^n \mathbf{V}_k^n, \quad \Delta \mathbf{q}_k^n = (\mathbf{p}_k^{n+1} - \mathbf{p}_k^n) \mathbf{S}_k^n / 2, \\
 \Delta \boldsymbol{\sigma}_k^n &= 2\mu(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^n - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n) + \mathbf{I} \left(\frac{d\rho}{d\rho} \right)_k^n \rho_k^n \mathbf{I} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^n, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^n = 0.5(\mathbf{L}_k^{n+1} + (\mathbf{L}_k^{n+1})^T) \Delta t_n \\
 \mathbf{L}_k^{n+1} &= \sum_{j=1}^{M_2} \nabla_{kj}^n \mathbf{u}_{J_{kj}}^{n+1}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Нетрудно показать, что схема (3.1) имеет почти второй порядок точности и безусловно устойчива. Шаг по времени, тем не менее, ограничен условием точности

$$\Delta t_n \leq \min_{k \in \Omega} \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\max}}{\left\| \sum_{l=1}^{M_2} \nabla_{kl}^n \mathbf{u}_{J_{kl}}^{n+1} \right\|} \tag{3.3}$$

где $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\max}$ максимально допустимое приращение деформаций на шаге по времени В практических расчетах $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\max} \approx 0.1 \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{lim}}$ ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{lim}}$ - деформация, отвечающая пределу текучести).

Порядок вычислений по схеме (3.1) таков же, как и для явных схем. Отличие состоит в том, что в случае неявной схемы скорости \mathbf{u}_i^{n+1} (или приращения лагранжевых координат $\Delta \mathbf{x}_i^{n+1}$) определяются из решения вспомогательной линейной системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 i \in \omega \setminus \omega_u : m_i \{ \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n \} &= (\mathbf{f}_i^n + \Delta \mathbf{f}_i^n(\mathbf{u}_i^{n+1})) \Delta t_n \\
 i \in \omega_u : \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^*(t_{n+1})
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\Delta \mathbf{f}_i^n$ как видно из формул (3.2), являются линейными функциями новых скоростей \mathbf{u}_i^{n+1} ($i \in \omega$).

Задача (3.4) может быть записана в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Az} = \mathbf{b} \quad (3.5)$$

где $\mathbf{z} = \{\mathbf{u}_i^{n+1}\}_{i=1}^{N_1}$ - вектор искомых узловых скоростей, \mathbf{A} - матрица "жесткости", \mathbf{b} - известный вектор правых частей; размерность системы уравнений не превосходит $2N_1$. В большинстве случаев метод конечных элементов так и реализуется. Заметим, что решение задачи (3.4) можно найти более простым и эффективным безматричным способом, который рассматривается ниже.

3.2. *Решение вспомогательных задач.* Матрицу жесткости \mathbf{A} и вектор правых частей \mathbf{b} специально формировать и запоминать не потребуется, если воспользоваться каким-либо итерационным методом решения, использующим невязки уравнений (3.4):

$$\mathbf{g} = \mathbf{Az} - \mathbf{b} = \left\{ m_i \frac{1}{\Delta t_n} (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) - \mathbf{f}_i^n - \Delta \mathbf{f}_i^n (\mathbf{u}_i^{n+1}) \right\}_{i=1}^{N_1}$$

Действительно, вычисление невязок \mathbf{g} для любого заданного вектора приближенного решения \mathbf{z} можно выполнить, не используя матриц жесткости. Пусть вектор приближенного решения \mathbf{z} задан. Тогда по формулам (3.1) -(3.3) последовательно вычисляем величины

$$\Delta \mathbf{L}_k^{n+1}, \Delta \lambda_k^{n+1}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^{n+1}, \Delta \boldsymbol{\sigma}_k^{n+1}, \Delta \mathbf{g}_k^n, \Delta \mathbf{f}_k^n$$

Окончательно невязка определяется непосредственно соотношениями (3.4). Столь же просто определяется и однородная часть невязки ($\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{Az}$):

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{Az} = \left\{ m_i \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{u}_i^{n+1} - \Delta \mathbf{f}_i^n (\mathbf{u}_i^{n+1}) \right\}_{i=1}^{N_1}$$

Ясно, что среди множества итерационных методов желательно выбрать наиболее эффективный. На наш взгляд таким методом является метод сопряженных градиентов [19, 20]. Алгоритм имеет следующий вид. По произвольному начальному приближению \mathbf{z}_0 определяются начальная невязка \mathbf{g}_0 и начальное направление поиска \mathbf{s}_0 улучшенного решения

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{Az}_0 - \mathbf{b}, \quad \mathbf{s}_0 = \mathbf{g}_0$$

Тогда для итераций $i = 0, 1, 2, \dots$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i+1} &= \mathbf{z}_i - \alpha_i \mathbf{s}_i, \quad \alpha_i = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{s}_i) / (\mathbf{As}_i \cdot \mathbf{s}_i), \quad \mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{g}_i - \alpha_i \mathbf{As}_i \\ \mathbf{s}_{i+1} &= \mathbf{g}_{i+1} - \beta_i \mathbf{s}_i, \quad \beta_i = (\mathbf{g}_{i+1} \cdot \mathbf{g}_{i+1}) / (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Метод сопряженных градиентов вырабатывает \mathbf{A} -ортогональный базис \mathbf{s}_i в арифметическом пространстве решения ($\mathbf{As}_i \cdot \mathbf{s}_j = a_i \delta_{ij}$, δ_{ij} - дельта Кронекера), поэтому число итераций, необходимых для отыскания решения, не превышает числа искомых компонентов вектора \mathbf{z} .

К сожалению, процесс (3.6) в реальных задачах упругопластичности является весьма чувствительным к ошибкам округления и может быть неустойчивым (в частности, он может "зацикливаться"). Чтобы избежать влияния ошибок округления, неизбежных при вычислениях на ЭВМ, в работе [21] (там же дальнейшие ссылки) было предложено использовать предварительное преобусловливание системы уравнений. Для этого проводится предварительное преобразование системы уравнений для уменьшения интервала изменения значений собственных чисел матрицы жесткости \mathbf{A} путем умножения системы уравнений на приближенную обратную матрицу этой системы уравнений. Это улучшает обусловленность рассматриваемой алгебраической задачи. Пусть \mathbf{B} - матрица в некотором смысле близкая к \mathbf{A} . Тогда матрица $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ будет близка к единичной матрице \mathbf{I} . Для матрицы $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}$, характеризующей преобусловленную систему, решение можно будет найти легче и процесс (3.6) будет работать удовлетворительно. Обобщенный метод сопряженных градиентов имеет следующий вид

для $i = 0$:

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{Az}_0 - \mathbf{b}, \quad \mathbf{h}_0 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g}_0, \quad \mathbf{s}_0 = \mathbf{h}_0$$

для $i = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i+1} &= \mathbf{z}_i - \alpha_i \mathbf{s}_i, \quad \alpha_i = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{s}_i) / (\mathbf{As}_i \cdot \mathbf{s}_i), \quad \mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{g}_i - \alpha_i \mathbf{As}_i, \quad \mathbf{h}_{i+1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g}_{i+1} \\ \mathbf{s}_{i+1} &= \mathbf{h}_{i+1} - \beta_i \mathbf{s}_i, \quad \beta_i = (\mathbf{g}_{i+1} \cdot \mathbf{h}_{i+1}) / (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{h}_i) \end{aligned} \quad (3.7)$$

В качестве матрицы \mathbf{B} в настоящей работе использовалась диагональная матрица, составленная из диагональных элементов упругой матрицы жесткости \mathbf{A} . Этого оказалось вполне достаточно для обеспечения устойчивой работы итерационного процесса (3.7) при реализации на ЕС ЭВМ с обычной точностью. Такой выбор матрицы \mathbf{B} делает ее обращение тривиальной операцией, выполняемой один раз перед началом процесса (3.7). Операция $\mathbf{h}_i = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}_i$ сводится к покомпонентному умножению двух векторов.

Применяется следующий критерий останова процесса (3.7):

$$(\mathbf{g}_{i+1}, \mathbf{h}_{i+1}) < \varepsilon^2 \vee (\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i) \alpha_i^2 < \varepsilon^2 \quad (3.8)$$

где ε - "машинное эpsilon" (22), приближенно равное 10^{-6} для ЕС ЭВМ. В случае $(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i) < \varepsilon^2$ полагалось, что метод дает отказ из-за того, что задача вырождена, а при невыполнении условий (3.8) для $i > 2N_1$ ($2N_1$ - число неизвестных) полагалось, что "задача плохо обусловлена". В этих случаях метод (3.7) не позволял определить решение либо в силу его неединственности (точка ветвления), либо в силу очень плохой обусловленности задачи. Практически же в большинстве таких ситуаций (очень редких) причины оказывались весьма прозаическими: как правило, были ошибки в задании входных данных либо для свойств среды, либо для краевых условий.

3.3. *Векторизация вычислительного процесса.* Явные схемы разд. 2 и описанная выше неявная схема (а также кратко описываемые ниже другие неявные схемы) практически без изменений хорошо поддаются векторизации, т.е. представляются в виде цепочки операций сложения, вычитания, умножения компонентов векторов высокой размерности [23]. Такие операции на многих современных ЭВМ выполняются на порядок быстрее обычных скалярных операций за счет конвейерной обработки данных, организуемой с помощью так называемых "векторных ускорителей вычислений" [24]. В настоящей работе использовалась ЭВМ ЕС 1055М и система ускорения вычислений МАМО [25].

Имеются два "узких места*" в алгоритме вычислений, которые пришлось реализовать в "скалярном варианте". Первое "узкое место" связано с вычислением градиентов скоростей или приращений перемещений:

$$\Delta \mathbf{L}_k^n = \sum_{l=1}^{M_2} \nabla_{kl}^n \mathbf{u}_{J_{kl}}^n \Delta t_n$$

Наличие сложного индекса у величин $\mathbf{u}_{J_{kl}}^n$ подразумевает выборку этих величин по списку J_{kl} , которая и производилась в скалярном цикле.

Второе "узкое место" связано разностью вкладов в невязку \mathbf{g} или, что то же самое, в вектор $\Delta \mathbf{f}_k^n$ от элементов (разноска невязок от элементов на узлы). Формула (3.2), реализующая эту операцию, также связана с работой со списком J_{kl} (номера узлов в элементах) и реализована в скалярном цикле. Все остальные операции проводились с использованием векторных операций системы МАМО с векторами размерности N_2 (число точек численного интегрирования) для вычисления невязок и с векторами размерности $2N_1$ (число искомых компонентов вектора \mathbf{g}) для вычислений по методу сопряженных градиентов.

В результате использования системы МАМО получена экономия процессорного времени счета в 3-4 раза. Фактически это означает, что затраты времени на решение задачи с N_1 узлами в скалярном режиме таковы, что с использованием МАМО за то же время эта же задача решается на более мелкой сетке с $4N_1$ узлами и, следовательно, с большей точностью.

3.4. *Применение итераций на вложенных сетках.* Использование последовательности вложенных сеток в итерационных алгоритмах решения служит еще одним путем к повышению эффективности алгоритмов и ускорению процесса решения. Различные аспекты приложения этой идеи к эллиптическим краевым задачам можно найти в работах [26-28] (там же — дальнейшие ссылки).

Основными привлекательными чертами такого подхода являются:

- во-первых, ускорение сходимости итерационных процессов [26] за счет того, что итерации на грубой начальной сетке сходятся быстро (дают длинноволновую составляющую решения). Это решение используется затем на более мелкой сетке в качестве начального приближения;
- во-вторых, применение решений на вложенных сетках позволяет использовать априорную информацию об асимптотической скорости убывания погрешности для уточнения решения (28);
- третья возможность повышения точности решения связана с "фиктивной интерполяцией" решения на локальную измельченную сетку и использованием невязок на измельченных шаблонах для определения уточняющих поправок к решению (27).

В настоящей работе была реализована первая из упомянутых выше возможностей использования вложенных сеток. Сначала решение находится на начальной грубой сетке, затем оно интерполируется на следующую более мелкую сетку и используется для метода сопряженных градиентов в качестве начального приближения.

Такое начальное приближение является хорошим и за счет этого резко сокращается число итераций в методе сопряженных градиентов, затрачиваемых на отыскание решения. Численные эксперименты и измерения затрат процессорного времени на решение задачи показали, что в соответствии с теоретическими предсказаниями [26] и численными экспериментами других авторов [29]. в наших расчетах имеет место почти линейная зависимость числа операций, затрачиваемых на решение задачи, от размерности вектора решения. Значение коэффициента пропорциональности определяется объемом вычислений, необходимых для решения задачи на начальной грубой сетке. В эволюционных задачах для начальной грубой сетки также есть хорошее начальное приближение к решению, именно решение задачи на предыдущем временном шаге. Поэтому в таких задачах коэффициент пропорциональности между числом операций и размерностью задачи резко уменьшается уже после первого шага по времени или по параметру нагружения.

3.5. Метод дифференцирования по параметру- Кроме квази-Ньютоновской неявной схемы, были реализованы и некоторые другие схемы, что не составило большого труда, поскольку алгоритмические отличия схем невелики.

Как известно (см., например, (301), в квазистатических задачах наряду с методом Ньютона широко используется также метод Продолжения по параметру (метод дифференцирования по параметру). Если обобщение метода Ньютона на задачи динамики приводит к квази-Ньютоновской схеме (3.1). то аналогичное обобщение метода дифференцирования по параметру (точнее, его простейшего частного случая - метода приращений) на задачи динамики приводит к следующей неявной схеме:

$$\begin{aligned}
 i \in \omega \setminus \omega_u : m_i \{ (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) / \Delta t_n - (\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_i^{n-1}) / \Delta t_{n-1} \} &= \Delta \mathbf{f}_i^n(\mathbf{u}_i^{n+1}) \\
 i \in \omega_u : \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^*(t_{n+1}) \\
 k \in \Omega : \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n + (\lambda_k^{n+1} \boldsymbol{\sigma}_k^n - \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n \cdot \mathbf{L}_k^{n+1} - (\mathbf{L}_k^{n+1})^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{pk}^n) \Delta t_n \\
 k \in \Omega : \mathbf{U}_k^{n+1} &= \mathbf{U}_k^n + \boldsymbol{\sigma}_k^n : \mathbf{L}_k^{n+1} \Delta t_n / \rho_k^n \\
 k \in \Omega : \mathbf{a}_{pk}^{n+1} &= \mathbf{a}_{pk}^n + \lambda_k^{n+1} \boldsymbol{\sigma}_k^n : \boldsymbol{\sigma}_k^n \Delta t_n \\
 i \in \omega : x_i^{n+1} &= x_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1} \Delta t_n
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Легко видеть, что отличие от схемы (3.1) состоит лишь в аппроксимации уравнения движения. Схема (3.9) аппроксимирует продифференцированное по времени уравнение движения.

Разрешающая алгебраическая задача для вектора \mathbf{u}_i^{n+1} в этом случае незначительно отличается лишь свободными членами от аналогичной задачи в квази-Ньютоновском методе (3.4).

Неявные схемы (3.1), (3.9) пригодны и для стационарных и для нестационарных задач. Заметим, что решение по этим схемам на каждом шаге по времени (или по нагрузке для задач квазистатики) находится итерационным путем. При этом решение \mathbf{u}_i^{n+1} достаточно близко к решению на предыдущем временном слое \mathbf{u}_i^n , которое, следовательно, является хорошим

начальным приближением для итерационного процесса. Указанные особенности приводят к тому, что в задачах динамики эти схемы по быстродействию весьма близки к явным схемам, так как для задач динамики итераций требуется немного (для шагов по времени меньше курантовского достаточно 1-2 итераций).

3.6. *Расчет контактной границы.* В случае неявных схем учет контактного взаимодействия проводится методом штрафных функций. Используется модифицированное уравнение виртуальных работ (2.17), к которому полагается

$$p_n = \lambda_* (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad \lambda_* \gg 1$$

Аппроксимация контактных дополнительных членов в уравнении (2.17) проводится так же, как и в подразд. 2.4, их влияние учитывается при вычислении невязок в итерационном процессе метода сопряженных градиентов. Перед расчетом нового временного слоя определяется зона контакта по условиям (2.19)—(2.21). В случае, если на слое n множество Ω_{cont} было пустым, условие (2.21) при отборе контактных пар заменяется более слабым условием (условием достаточной близости)

$$|\mathbf{x}_{32}^{n+1} \times \mathbf{x}_{12}^{n+1} \cdot \mathbf{e}_3|^2 < 0.1 |\mathbf{x}_{32}^{n+1}|^2 h_{\min} \quad (3.10)$$

где h_{\min} - минимальная длина граничного отрезка сетки. Учет контактных взаимодействий практически не усложнил процесса решения задач и был реализован просто как дополнительный модуль (Блок), определяющий зону контакта на каждом шаге и вычисляющий контактные поправки к невязкам уравнений движения.

4. Результаты расчетов

4.1. *Проверка методов на тестовых примерах.* Представленные в разделе 2 методы реализованы в виде пакета программ АСТРА для ЕС ЭВМ. Работа методов и программ была проверена путем решения следующих известных задач:

- квазистатических задач о сжатии цилиндра и кубика, задач Лямэ о цилиндре под действием внутреннего и внешнего давлений, задач изгиба упругопластических круглых пластин и цилиндрических оболочек, задача Нейбера о цилиндре с выточкой;
- динамических задач о распространении плоских упругопластических волн в слое конечной толщины, динамической задачи о распространении ударной волны при истекании холодного идеального газа на жесткую стенку, в которой проверялось описание тепловых эффектов, задачи об ударе упругопластическим цилиндром в жесткую стенку, задачи о распространении цилиндрических волн в полом цилиндра при действии импульса внутреннего давления и др.

Решение задач контролировалось путем расчета задач различными «вными и неявными» методами, описанными в разд. 2. Сходимость решений контролировалась путем просчета вариантов при последовательном Дроблении шагов по пространственным переменным и времени.

Следует отметить хорошее согласование результатов, полученных по РЮЛИЧНЫМ методам, между собой и с упомянутыми известными решениями. Это дает определенную уверенность в том, что приближенные решения задач, полученные с помощью пакета программ АСТРА, достаточно близки к соответствующим точным решениям.

4.2. *Расчет гребенчатого соединения двух разнородных упруго-пластических тел.* На рис. 1,в показана конфигурация взаимодействующих тел. Задача решается в условиях осевой симметрии, вертикальная координатная z , является осью симметрии. Поверхности внешнего тела вращения дои $r = 0.5$ и при $z=0$ соприкасаются с жесткими стенками обоймы.

Трение на стенках полагалось равным нулю. На поверхности внутренне- z тела вращения при $z = 1$ действует внешняя сжимающая равномерно распределенная нагрузка. На контактных поверхностях между взаимодействующими телами проскальзывание и отлипание не допускались. Задавались следующие свойства упругопластических тел:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= 560, \quad \mu^{(1)} = 375, \quad \sigma_s^{(1)} = 1, \quad (d\sigma_s / da_p)^{(1)} = 100 \\ \lambda^{(2)} &= 560, \quad \mu^{(2)} = 375, \quad \sigma_s^{(2)} = 2, \quad (d\sigma_s / da_p)^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

На рис.1,6 показано распределение напряжений вдоль оси симметрии и на внешней поверхности при $r = 0,5$. Графики соответствуют значению внешней нагрузки $p = -1.2$. На оси симметрии напряжения a_{zz} и a_{rr} имеют ярко выраженные максимумы в местах утоньшения вкладыша. распределение контактных напряжений на зубьях, пронумерованных в порядке убывания координаты r , показано на рис.1,в. Видно, что работает в основном первый зуб. На рис. 1,г показано распределение напряжений в сечении $z = 1$. Отметим, что сходные задачи рассматривались в работе [32].

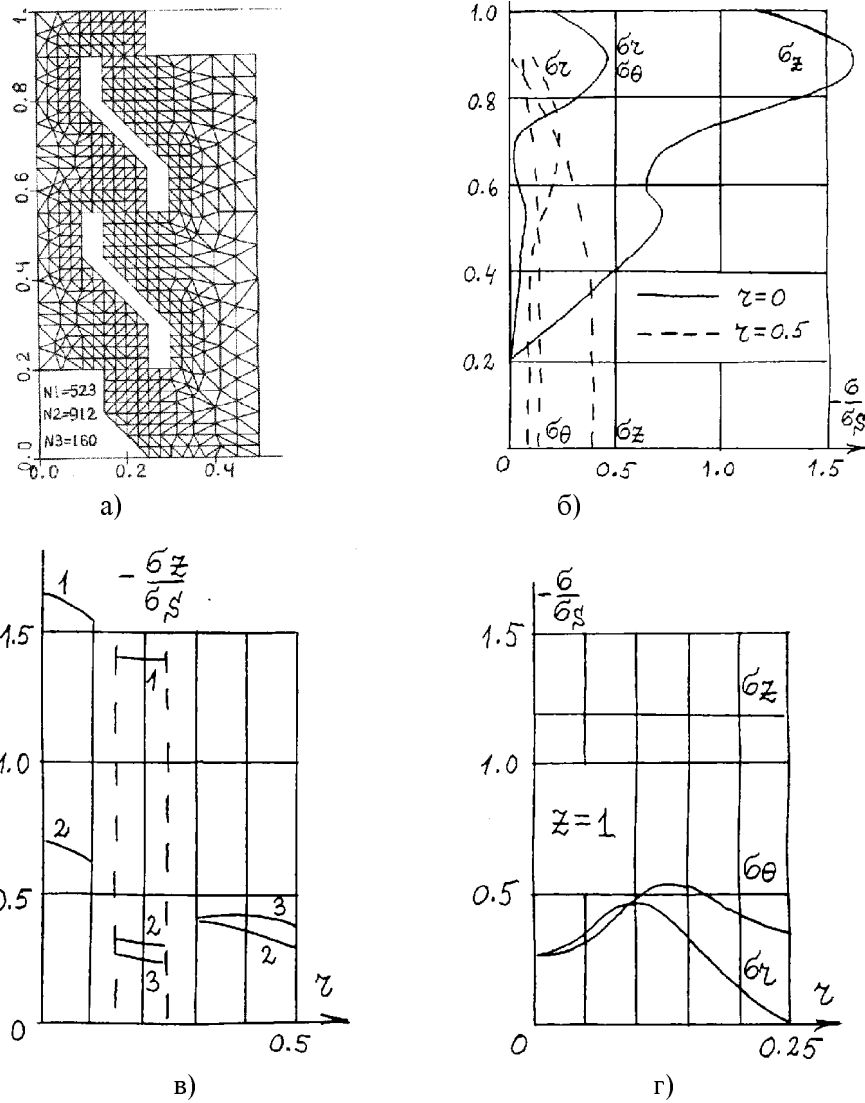


Рис. 1. К расчету гребенчатого соединения двух разнородных упругопластических тел вращения
 а) расчетная сетка; б) распределение напряжений вдоль оси симметрии ($r=0$) и на внешней поверхности ($r=0.5$); в) - распределение контактных напряжений яа зубьях (1 - в сечении $z=0.9$, 2 - $z=0.55$, 3 - $z=0.2$); г) - распределение налряжений в сечении $z=1$.

4.3. Расчет плотины и составного основания с учетом действия собственного веса. В условиях плоской деформации на основе уравнений теории упругости была решена задача для следующей системы четырех деформируемых тел (рис. 2, д): бетонной плотины I, бетонного основания II, скального основания III, грунта IV. В теле I видны фиктивные разрезы, игнорируемые при расчете и необходимые на стадии построения сетки. Расчетная сетка показана на рис. 2, б. Свойства упругих тел принимались следующие:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 150, \quad \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 125, \quad c^{(1)} = c^{(2)} = c^{(3)} = 1, \quad c^{(4)} = 2 \\ \lambda^{(3)} = 500, \quad \mu^{(3)} = 250, \quad \lambda^{(4)} = 50, \quad \mu^{(4)} = 25 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ускорение сил тяжести $f_z = -1_{10} - 4$. На рис. 2, в показана деформированная конфигурация системы и построены изолинии вертикальных смещений. Смещения границ на этом рисунке увеличены в 100 раз для наглядности. Та же картинка в реальных смещениях приведена на Рис. 2, г. Изолинии горизонтальных смещений приведены на рис. 2, д. Грунт как бы раздается в стороны под действием плотины. Наиболее напряженное состояние наблюдается в левой части

основания плотины, что ясно видно из рис. 2.е, на котором показаны изолинии среднего напряжения.

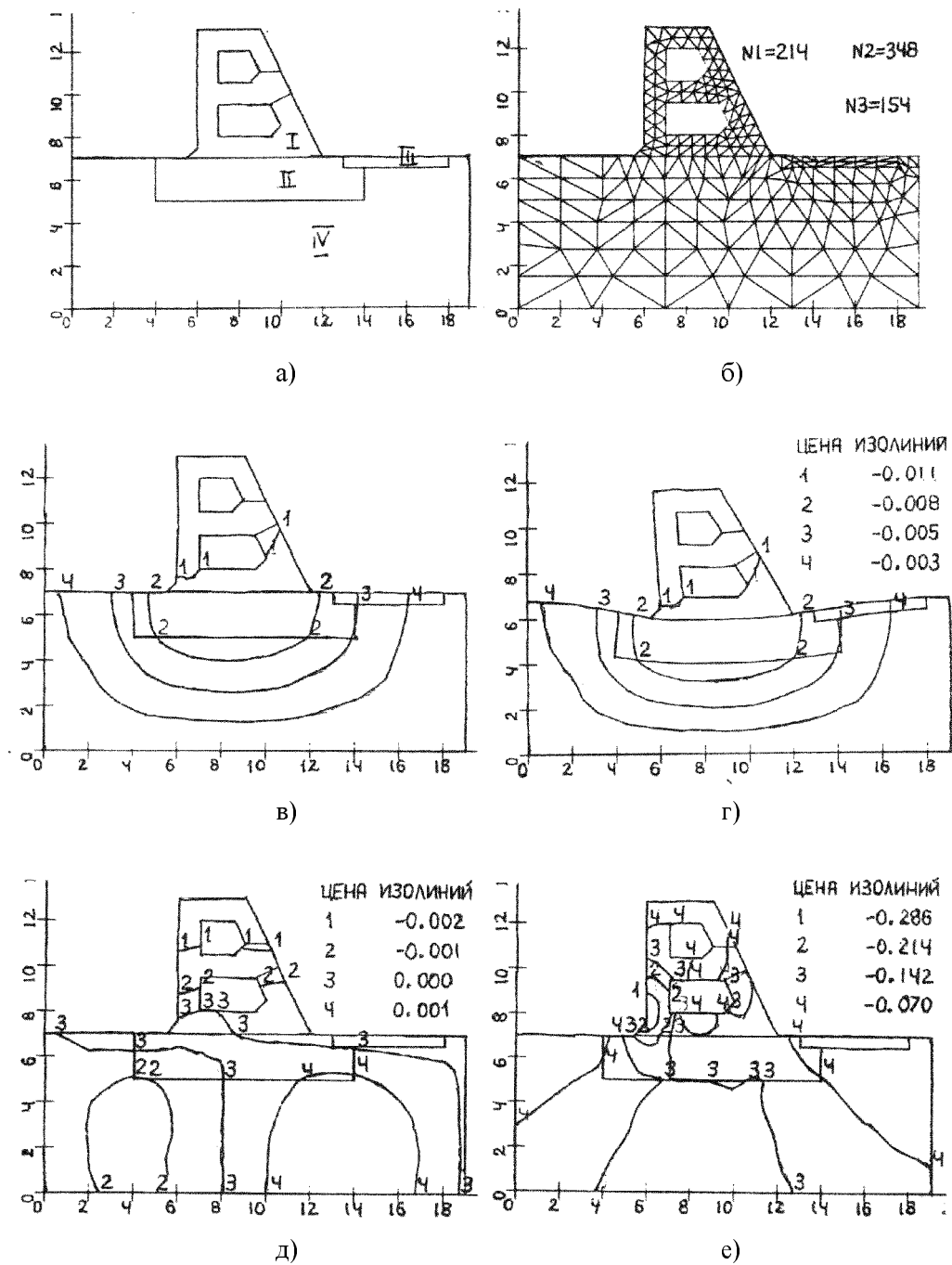


Рис. 2. К расчету плотины и составного основания под действием собственного веса: а — конфигурация взаимодействующих тел (I - бетонная плотина, II - бетонное основание, III - скальное основание, IV — грунт); б - расчетная сетка; в - начальная конфигурация (показаны изолинии вертикальных смещений; 1: -0,011, 2: -0,008, 3: -0,005, 4: -0,003); г — изолинии вертикальных смещений (деформированная конфигурация); д - изолинии горизонтальных смещений (1 -0,02, 2: -0,001, 3: 0,000, 4: 0,001); е - изолинии среднего напряжения (1: -0,286, 2: -0,214, 3: -0,142, 4: -0,070)

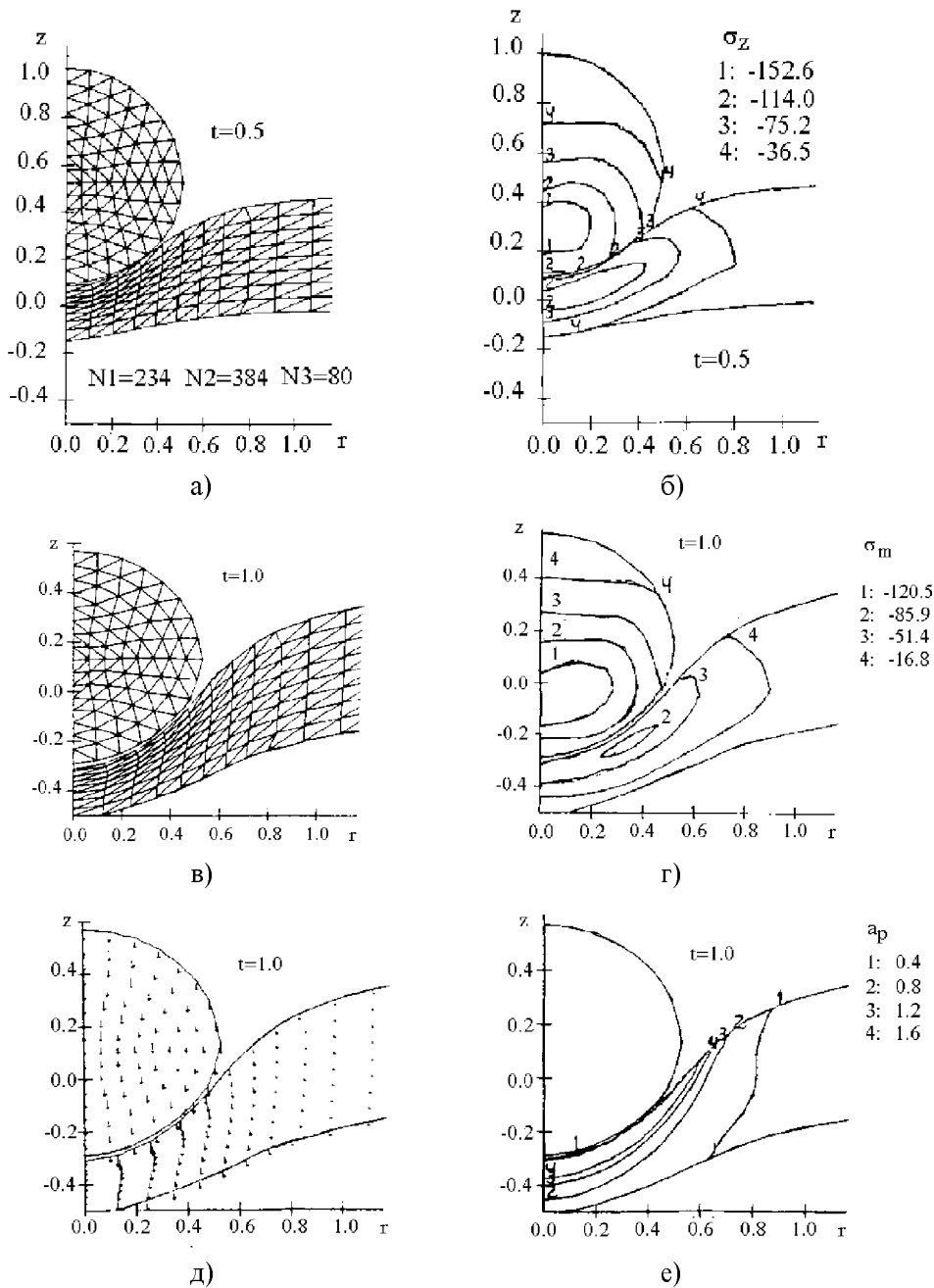


Рис. 3. Удар упругопластическим стальным шаром в упругопластическую» алюминиевую пластину: а) деформированная конфигурация сетки ($t = 0,5$); б) изолинии напряжения σ_z ($t=0,5$) 1: -152,657, 2: -113,946, 3: -75,234, 4: -36,523; в) деформированная конфигурация сетки ($t=1,0$); г) изолинии среднего напряжения σ_m ($t=1,0$) 1: -120,495, 2: -85,936, 3: -51,378, 4: -16,820; д) поле скоростей ($t=1,0$); е) изолинии удельной пластической работы ($t=1,0$) 1: 0,400, 2: 0,800, 3: 1,200, 4: 1,600.

4.4. Удар шаром в пластину. Указанная в заголовке задача решалась для двух случаев: стальной шар ударяет в алюминиевую пластинку и алюминиевый шар ударяет в стальную пластинку. В обоих случаях скорость удара равнялась скорости звука в материале ударника. Тепловыми эффектами в этой задаче мы пренебрегали. Единицей времени служило время пробега продольных волн сжатия по радиусу ударника. Свойства материалов задавались такие:

сталь: $\lambda = 729$, $\mu = 369$, $\sigma_s = 1$, $d\sigma_s / da_p = 0$, $c = 1$

алюминий : $\lambda = 729$, $\mu = 369$, $\sigma_s = 1$, $d\sigma_s / da_p = 0$, $c = 1$ (4.3)

На рис. 3, а, в показаны конфигурации лагранжых сеток для соуда-муищихся тел в моменты времени 0,5 и 1,0. На рис. 3, б показаны изолинии напряжения σ_z для момента времени 0,5. Ясно видны фронты удар-ду волн в материалах ударника и преграды. На рис. 3, г показаны изолинии среднего напряжения для момента времени 1,0. Для этого момента времени на рис. 3, д показано поле скоростей, а на рис. 3, е — поле (эолиний) пластической работы. Этот пример иллюстрирует работу предложенного алгоритма расчета контактного взаимодействия тел при ударе

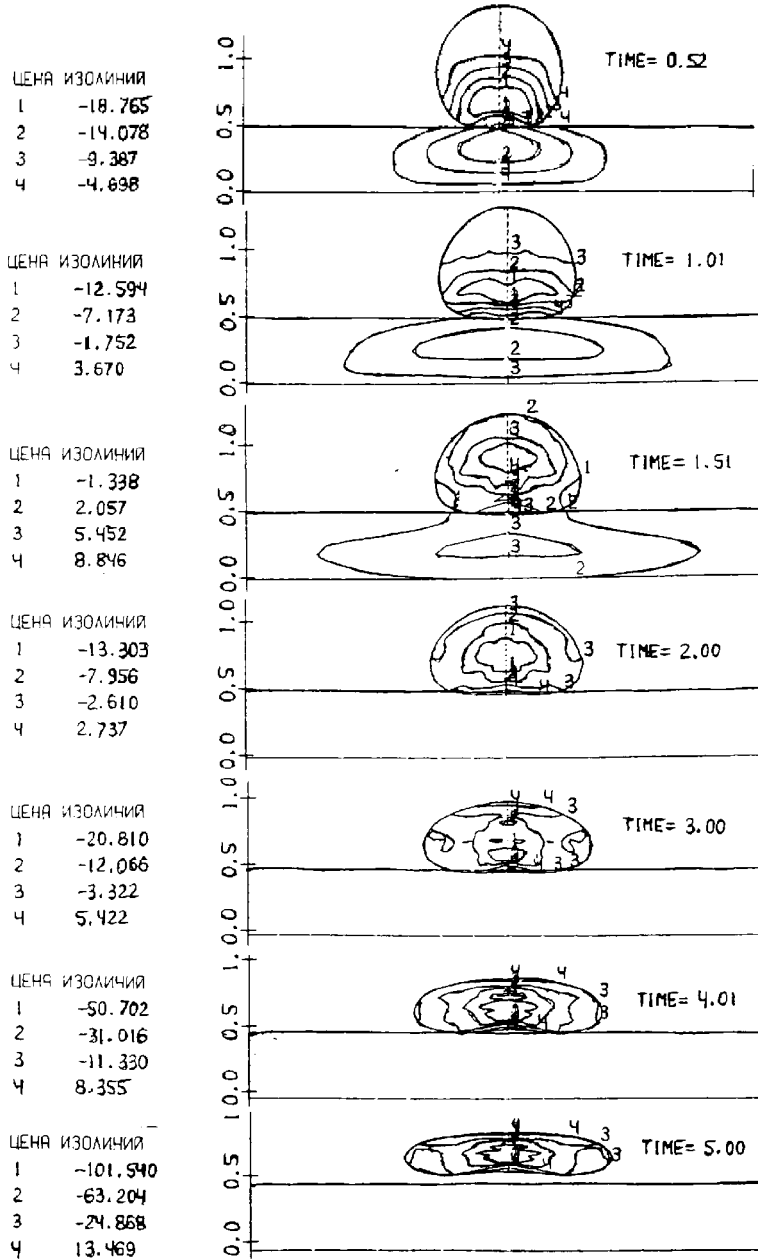


Рис. 4. Удар алюминиевого шара в стальную пластину

Рис. 4 содержит кинограмму процесса соударения алюминиевого шара с упругой стальной пластинкой и показывает конфигурацию соударяющихся тел на протяжении всего процесса удара вплоть до отскока ударника от преграды. В результате удара шар расплющивается в "лепешку". При $t=5$ уже после отскока периферийные области "лепешки" продолжают интенсивное движение от оси симметрии, в центральной области шара при этом наблюдается зона всестороннего растяжения, что указывает на возможность разрушения ударника. На контакте выполнялись условия скольжения.

4.5. Удар упругопластического цилиндра в толстую упругопластическую плиту. Рис. 5 посвящен задаче удара стальным ударником в толстую алюминиевую преграду. Свойства материалов те же, что и в предыдущем подразделе. Скорость удара составляла половину скорости звука в материале ударника. Начальная конфигурация соударяющихся тел и начальная сетка показаны на рис. 5, а. В нижней части рис. 5, б-г показана конфигурация лагранжевых сеток для моментов времени $t=12, 24, 36$. Время пробега продольных упругих волн сжатия по радиусу ударника равно 3. В верхней части рис. 5, в показаны изолинии среднего напряжения для момента времени $t=24$. В центральной части ударника имеется зона всестороннего растяжения, отмеченная изолинией 4. Аналогичные зоны растяжения в преграде образуются в областях, удаленных от оси симметрии на расстояние радиуса ударника.

На Рис. 5, г в верхней части приведены изолинии пластической работы. Пластическая работа максимальна в зонах преграды и ударника, находящихся вблизи поверхности контакта, испытывающих интенсивное формоизменение. На контакте выполнялись условия свободного скольжения.

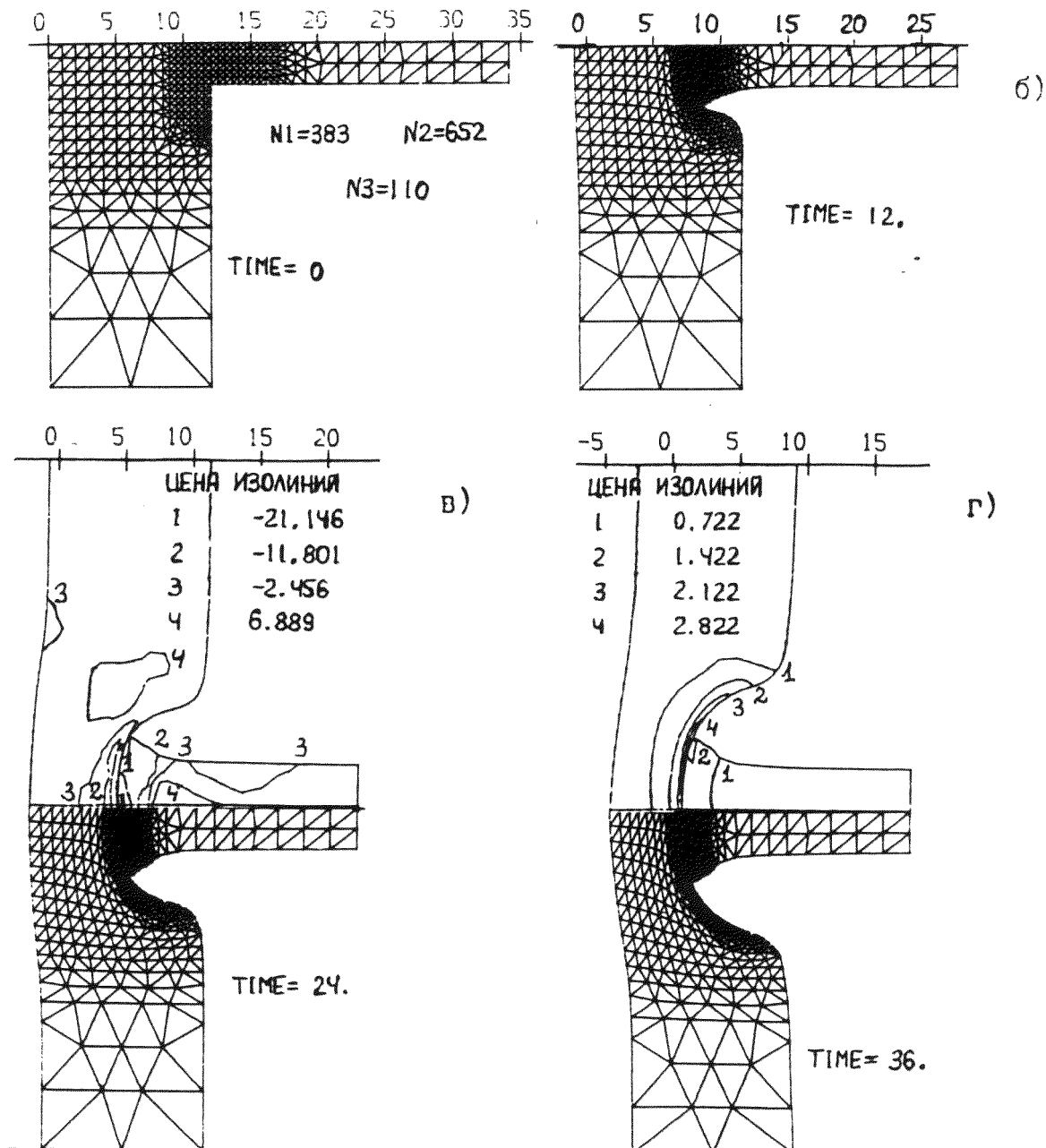


Рис. 5. Удар упругопластического цилиндра в толстую упругопластическую плиту.

4.6. Расчет образования воронки при взрыве. Конфигурация рассматриваемой системы деформируемых тел показана на рис. 6, а. В начальный момент времени в материале имеется небольшой прямоугольный вырез, в который помещен заряд ВВ - взрывчатого вещества. Сетка изображена на рис. 6, б. Фрагмент области решения, показанный на рис. 6, в, позволяет рассмотреть сетку в материале ВВ. Предполагалось что в начальный момент времени в заряде ВВ происходит мгновенная детонация, превращающая его в газ со следующими свойствами:

$$\gamma = 1.4, \quad U_0 = 5, \quad \rho_0 = 100, \quad p = (\gamma - 1)\rho U \quad (4.4)$$

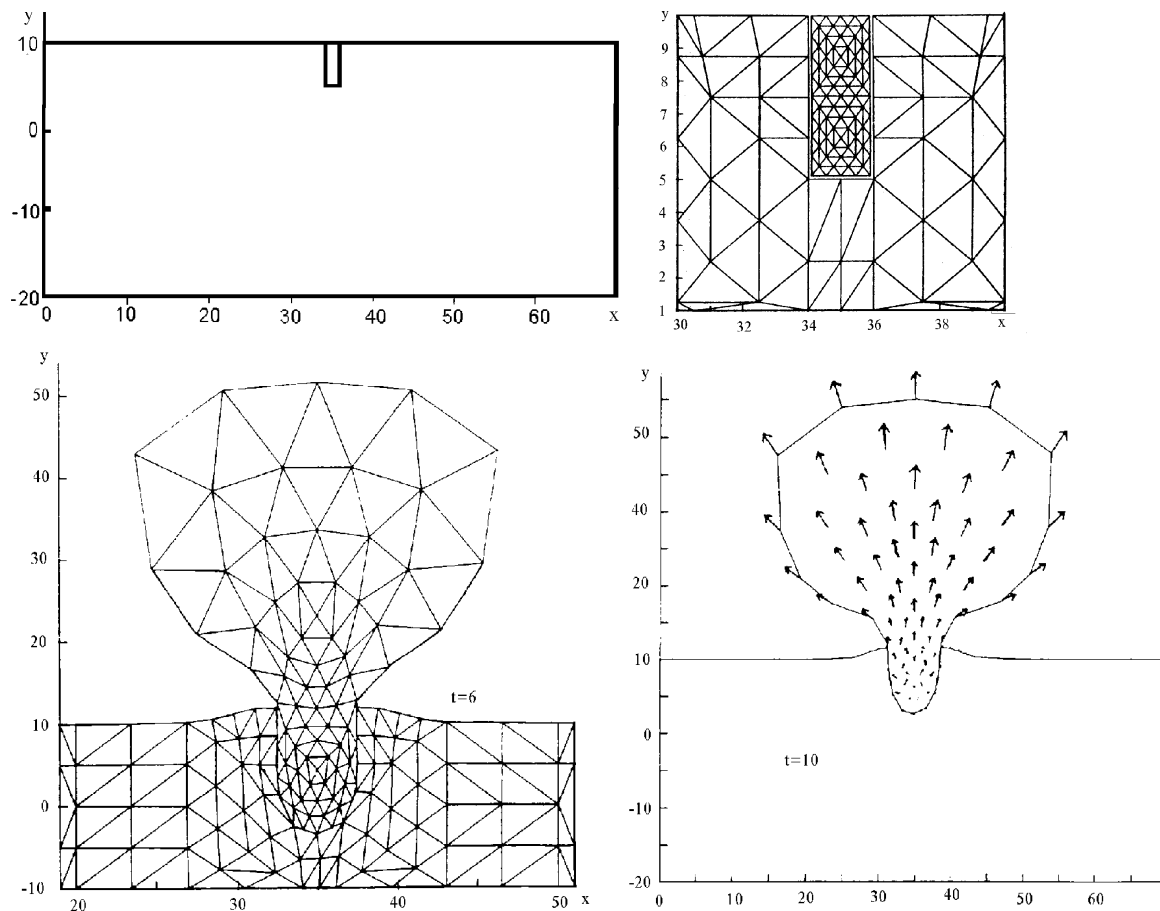


Рис. 6. (начало). К расчету образования воронки при взрыве: а) конфигурация деформируемых тел ($t = 0$); б) расчетная сетка в окрестности ВВ; в) деформированная сетка ($t=6$), г) поле скоростей ($t = 10$).

Материал имел свойства алюминия из подразд. 4.3. Начальная внутренняя энергия газа обеспечивала давление газа порядка 200 пределов текучести материала. Деформированная конфигурация лагранжевой сетки для момента времени $t = 6$ показана на рис. 6, в; единицей времени служило время пробега продольных волн сжатия характерного расстояния в материале. На рис. 6, г видно облако газа. Отчетливо видна контактная граница между газом и материалом. На контактной границе выполнялись условия скольжения. Виден также вал, образующийся вокруг воронки. Для момента времени $t=10$ на рис. 6, д показано поле скоростей. На периферии газового облака скорости имеют величину порядка четырех скоростей звука в материале. К моменту времени $t=15$ давление в нижней части газового облака спадает до величин порядка единицы и активный процесс разрастания воронки прекращается. Воронка при этом сохраняет конфигурацию, подобную показанной на рис. 6, д.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1971. 247 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1. 492 с; Т. 2. 568 с.
3. *Кукубжшинов В.Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. 1985. Т. 8, № 4. С. 25-65.
4. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
5. *Кондауров В.Н.* Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. №4. С. 133-139.
6. *Левитас В.И.* Теория вольных упругопластических деформаций при высоком давлении // Пробл. прочности. 1986. № 8. Г. 86-94.
7. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидродинамики неиньотонических жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
8. *Бурого Н.Г.* Формулировка уравнений механики сплошной среды • подвижных адаптивных координатах // Численные методы в механике деформируемого твердого тела. М.: ВЦ АН СССР, 1984. С. 38-49.
9. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
10. *Сегерлинд Л.* Применение МКЭ. М.: Мир, 1979. 392 с.
11. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
12. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212-263.
13. *Lax P.O.* Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math. 1954. Vol. 7. P. 158-193.
14. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах М.: Наука, 1979, 319с.
15. *Запгаров К.И., Кукуджанов В.Н.* Математическое моделирование взаимодействия и разрушения упругопластических тел. М., 1986. 67с. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикладной математики им. М.В.Келдыша; № 280).
16. *Тишкин В.Ф.* Построение дискретных конечно-разностных моделей сплошных сред на основе вариационного подхода. М., 1984. 18с. (Препр. / АН СССР Ин-т приклад. математики им. М.В. Келдыша; № 150).
17. *Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука. 1985. 364 с.
18. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир 1980
19. *Hestens M.R., Stiefel E.* Method of conjugate gradients for solving linear systems // J. Res. Nat. Bur. Std., 1952, Vol. 69, p. 409-436.
20. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, М.: Мир, 1985, 558 с.
21. *Еремин А.Ю., Марьяшкин Н.Я.* Метод сопряженных градиентов с неполным разложением Холецкого для решения систем линейных алгебраических уравнения, М., 1984. 14 с. (Препр. / АН СССР. Вычисл. центр).
22. *Меткалф М.* Оптимизация в фортране. М.: Мир, 1985. 264 с.
23. *Бураго Н.Г.* О векторном варианте метода конечных элементов на вложенных сетках и векторизации КЭ-алгоритмов решения задач теории упругости и пласт. точности // Численная реализация физико-механических задач прочности: 2 Всесоюз. конф., Горький, 1987. 25-27 июня.
24. Параллельные вычисления. / Под ред. Г. Родрига. М.: Наука, 1986. 376 с
25. *Горбунов А.А., Грязное В.Л.* Применение матричного модуля ЭВМ ЕС-1055М для численного решения задач конвекции // Проблемы динамики вязкой жидкости. Новосибирск: ИТПМ АН СССР, 1985, С. 100-103.

26. Федоренко Р.П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений // УМН, 1973, т.28, вып. 2, С. 121-182.
27. Брандт А. Расчеты многосеточным адаптивным методом в гидродинамике // Ракетная техника и космонавтика. 1980. Т. 18, № 10. С 38-43
28. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979, 320 с.
29. Петренко И.И., Пуртов С.В., Федосеев А.И. Решение больших задач МКЭ многосеточным методом: Алгоритм разбиения на подобласти. Серпухов, 1986. 15 с. (Препр. . АН СССР, Ин-т физики высоких энергий; ИФВЭ 86-200).
30. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Выпучивание и закритические деформации упругоупругих оболочек вращения в условиях осевой симметрии// Численные методы в механике твердого деформируемого тела. М.: ВЦ АН СССР 1978.С.47-68.
31. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе решения систем нелинейных уравнений // ДАН СССР, 1953, Т. 88, С. 601-602.
32. Подгорный А.М., Гонтароский П.П., Марченко Г.А. и др. Некоторые прикладные упругопластические задачи смешанного типа. Харьков, 1976, 43 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; N. 36).