БУРАГО Н.Г.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКИХ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК[1]

В работе из общих уравнений для сплошного деформируемого твердого тела [1,2] выведены уравнения для расчета больших деформаций тонких непологих оболочек переменной толщины с учетом эффектов поперечных сдвигов и обжатия, сложной реологии (материалы дифференциального типа) и термоэффектов. Уравнения просты и удобны для численных методов. Их решение может быть получено с использованием простейших аппроксимаций решения и его первых производных. Другие формы уравнений, основы теории, анализ состояния проблемы и дополнительные ссылки на литературу можно найти в [3-11]/

1) Пусть в момент времени $t=0$ оболочка занимает область V_0 трехмерного евклидова пространства X. Введем в X прямоугольную декартову систему координат $x_i = x^i$ с ортами $\mathbf{e}_i, i=1,2,3$. Область V_0 зададим функцией

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(\eta) = \mathbf{y}^0(\eta_1,\eta_2) + \eta_3\mathbf{m}^0(\eta_1,\eta_2) \qquad (1)$$

где

$$\eta = (\eta_1,\eta_2,\eta_3),\ \mathbf{x}^0 = x^{0i}\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{y}^0 = y^{0i}\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{m}^0 = m^{0i}\mathbf{e}_i$$

$$\eta \in V_\eta,\quad V_\eta = \{\eta : (\eta^1,\eta^2) \in \Omega_\eta \subset R_2, \eta^3 \in [-0.5, 0.5]\},$$

(по повторяющимся латинским индексам суммировать от 1 до 3).

Функция $\mathbf{x}^0(\eta)$ отображает область V_η пространства R_3 независимых криволинейных лагранжевых координат η на область V^0. Функция $\mathbf{y}^0$ отображает плоскую область $\Omega_\eta \subset R_2$ на срединную поверхность оболочки Ω^0.

---

[1] Бураго Н.Г. Уравнения для расчета больших деформаций тонких непологих оболочек. Сб. "Численные методы механики твердого деформируемого тела" / Ред. Г. И. Пшеничнов, М.:ВЦ АНСССР , 1984. С. 50-59. Ввиду плохого качества сканированных копий данной статьи для удобства чтения текст постранично набран заново.

Функция $\mathbf{m}^0$ имеет вид

$$\mathbf{m}^0 = h^0(\eta^1,\eta^2)\mathbf{n}^0(\eta^1,\eta^2) \qquad (2)$$

где h^0 - толщина оболочки, $\mathbf{n}^0$ - единичная нормаль к срединной поверхности Ω^0 и $(\eta^1,\eta^2)\in\Omega_\eta$.

Сложная оболочечная конструкция для расчета должна быть расчленена на минимальное число фрагментов, геометрия каждого из которых можно описать отображением вида (1),(2). Сращивание решений на границах фрагментов не будет трудным делом, поскольку в излагаемой теории координаты деформированного состояния, скорости, краевые усилия и моменты, внешние воздействия на оболочку рассматриваются в декартовом базисе пространства X.

Дальнейшее изложение относится к любому из упомянутых фрагментов, называемому оболочкой.

2. Следуя [4], примем, что линия $(\eta^1,\eta^2)=const$ в процессе деформации остается прямой, но отклоняется от направления нормали к деформированной срединной поверхности и изменяет свою длину. Тогда закон движения материальных точек оболочки запишется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\eta,t) = \mathbf{y}(\eta_1,\eta_2,t) + \eta_3\mathbf{m}(\eta_1,\eta_2,t) \qquad (3)$$

где $\eta\in V_\eta$, $t\geq 0$. функции $\mathbf{y} = y^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{m} = m^i\mathbf{e}_i$ таковы, что

$$\mathbf{y}\big|_{t=0} = \mathbf{y}^0, \quad \mathbf{m}\big|_{t=0} = \mathbf{m}^0$$

Радиус-вектор $\mathbf{x}(\eta,t)$ определяет область V, которую оболочка займет при $t\geq 0$. Радиус-вектор $\mathbf{y}(\eta_1,\eta_2,t)$ определяет деформированную срединную поверхность, а вектор $\mathbf{m}(\eta_1,\eta_2,t)$ определяет деформированную "нормаль". Величины $\mathbf{y}$ и $\mathbf{m}$ примем в качестве основных искомых кинематических характеристик. При большой деформации они более удобны, нежели обычно применяемые [4] проекции перемещений на локальный базис, связанный с геометрией оболочки, и углы поворота.

Рассмотрим основную и упрощенную теории. Члены, опускаемые в упрощенной теории, подчеркнем волнистой линией. Греческие индексы принимают значения 1,2.

Скорости отнесем к декартову базису

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i = \frac{dx^i}{dt}\mathbf{e}_i = (v^i + \eta_3 w^i)\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i , \quad \mathbf{w} = w^i \mathbf{e}_i , \quad v^i = \frac{dy^i}{dt}, \quad w^i = \frac{dm^i}{dt} \qquad (4)$$

точка здесь и далее означает материальную производную по времени.

Введем базис сопутствующей системы координат

$$\hat{\mathbf{Э}}_i = \partial x^m / \partial \eta^i \mathbf{e}_m , \qquad \hat{\mathbf{Э}}^i = \partial \eta^i / \partial x^m \mathbf{e}_m$$

Далее символами $_{,i}$ и $_{,\alpha}$ обозначим частные производные по переменным η^i и η^α. Введем тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\sigma}^{ik}\hat{\mathbf{Э}}_i\hat{\mathbf{Э}}_k$, тензор деформаций Альманси $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_{ik}\hat{\mathbf{Э}}^i\hat{\mathbf{Э}}^k$

$$\hat{\varepsilon}_{ik} = 0.5(\hat{g}_{ik} - g^o_{ik}), \quad \hat{g}_{ik} = \hat{\mathbf{Э}}_i \cdot \hat{\mathbf{Э}}_k , \quad g^0_{ik} = \hat{g}_{ik}\big|_{t=0}$$

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = y^k_{,\alpha} y_{k,\beta} + \eta^3 (y^k_{,\alpha} m_{k,\beta} + m^k_{,\alpha} y_{k,\beta}) + (\eta^3)^2 m^k_{,\alpha} m_{k,\beta} \qquad (5)$$

$$\hat{g}_{\alpha 3} = \hat{g}_{3\alpha} = y^k_{,\alpha} m_k + \eta^3 m^k_{,\alpha} m_k , \quad \hat{g}_{33} = m^k m_k$$

где $\hat{g}_{ik}$ и g^0_{ik} - метрики деформированного и начального состояния. Для жонглирования индексами, для построения инвариантов, а также для определения элементов площади dS и объема dV используем значение метрики $\hat{g}_{ik}$ на срединной деформированной поверхности

$$\tilde{g}_{ik} = \hat{g}_{ik}\big|_{\eta^3=0}, \quad dV = \tilde{J} dV_\eta , \quad dV_\eta = d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3$$

$$\tilde{J}^2 = (\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}^2_{12})\tilde{g}_{33} + 2\tilde{g}_{12}\tilde{g}_{23}\tilde{g}_{31} - \tilde{g}^2_{13}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}^2_{23}\tilde{g}_{11}$$

$$dS = \kappa d\Omega_\eta , \quad d\Omega_\eta = d\eta^1 d\eta^2 , \quad \eta^3 = \pm 0.5 \qquad (6)$$

$$\kappa = \tilde{J}/h , \quad h^2 = \tilde{g}_{33}, \quad \Lambda^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta}\nu^\alpha \nu^\beta , \quad dl^2_\eta = (d\eta^1)^2 + (d\eta^2)^2$$

где ν^1 и ν^2 - направляющие косинусы единичной касательной к плоскому контуру l_η, ограничивающему область Ω_η.

Используя переменные η в качестве произвольных криволинейных координат в области V, в арифметическом пространстве R_3 сделаем их декартовыми координатами, наделив их ортонормированным базисом. Это оправдает применение в пространстве R_3 таких понятий как нормаль и касательная.

3. Запишем для трехмерного случая закон сохранения массы

$$\rho J = \rho_0 J_0 \tag{7}$$

где $J = \det(x^k_{,l})$ и нуликами отмечены начальные значения при $t = 0$; закон сохранения импульса (вариационная лагранжева форма):

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho u^i \delta x_i dV\right) + \int_V (\hat{\sigma}^{ik} x^n_{,i} \delta x_{n,k} -$$
$$-\rho F^i \delta x_i) dV = \int_S p^i \delta x_i \, dS \tag{8}$$

уравнение распространения тепла

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho c_\varepsilon T \delta T dV\right) + \int_V ((D_* + \rho r)\delta T -$$
$$-\lambda \hat{g}^{ik} T_{,i} \delta T_{,k}) dV = \int_S q_n \delta T dS \tag{9}$$

(см. [1,2]) и выведем их следствия для теории оболочек. Здесь $\rho(\eta, t)$ - плотность массы, $F^i \mathbf{e}_i$ - внешние массовые силы, $p^i \mathbf{e}_i$ - внешние поверхностные силы, $T(\eta, t)$ - температура, c_ε - теплоемкость при постоянной деформации, λ - коэффициент теплопроводности (принят закон Фурье), q_n - внешний тепловой поток, r - массовый источник тепла, $\delta x^k(\eta)$, $\delta T(\eta)$ - вариации координат и температуры, $\hat{e}_{ik}$ - компоненты тензора скоростей деформаций $\mathbf{e} = \hat{e}_{ik} \hat{\text{Э}}^i \hat{\text{Э}}^k$:

$$\hat{e}_{ik} = 0.5(x^n_{,i} u_{n,k} + u^n_{,i} x_{n,k}) \tag{10}$$

r_* - приток тепла за счет работы внутренних сил

$$r_* = D + (\hat{\sigma}^{ik} - \hat{D}^{ik}_\varepsilon)_{,T} T \hat{e}_{ik} - (\hat{D}_t)_{,T} T \tag{11}$$

где $_{,T}$ - частная производная по температуре, D - скорость диссипации механической работы, определяемая соотношением [2]:

$$D = \hat{D}_{\varepsilon}^{ik}\hat{e}_{ik} - D_t \tag{12}$$

Примем третью гипотезу в дополнение к (3) и (6) : температура постоянна вдоль линий $(\eta^1, \eta^2) = const$ возможную разницу во внешних тепловых потоках на поверхностях $\eta = \pm 0.5$ учтем как дополнительный источник тепла.

Подставим в уравнения (9), (10) выражения для скоростей и координат деформированного состояния (3), элементов площади и объема (6), выражения для вариаций координат

$$\delta x^k = \delta y^k + \eta^3 \delta m^k$$

и выполним интегрирование по координате η^3.

В результате получим вариационные аналоги уравнений движения и распространения тепла для теории оболочек

$$\int\limits_{\Omega_\eta} \{\mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(N)} \cdot \delta\mathbf{y}_{,\alpha} + \mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(M)} \cdot \delta\mathbf{m}_{,\alpha} + (\mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(Q)} + \kappa^{-1}\frac{d}{dt}\mathbf{I}_{(m)} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta\mathbf{m} +$$

$$+(\kappa^{-1}\frac{d}{dt}\mathbf{I}_{(y)} - \mathbf{f}) \cdot \delta\mathbf{y}\}\kappa d\Omega_\eta = \int\limits_{l_\eta} (\mathbf{N} \cdot d\mathbf{y} + \mathbf{M} \cdot d\mathbf{m})\Lambda dl_\eta \tag{13а}$$

$$\int\limits_{\Omega_\eta} \left\{ L\tilde{g}^{\alpha\beta} T_{,\alpha} \delta T_{,\beta} + \left(\kappa^{-1}\frac{d}{dt}(\rho_{(y)}\kappa c_\varepsilon T) - D_0 - R \right)\delta T \right\} \kappa d\Omega_\eta =$$

$$= -\int\limits_{l_\eta} Q_n \delta T \Lambda dl_\eta \tag{13б}$$

Здесь введены следующие обозначения:

*) обозначения, сокращающие запись

$$\mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(N)} = \hat{N}^{\alpha\beta}\mathbf{y}_{,\beta} + \hat{M}^{\alpha\beta}\mathbf{m}_{,\beta} + \hat{N}^{\alpha 3}\mathbf{m}$$

$$\mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(M)} = \hat{M}^{\alpha\beta}\mathbf{y}_{,\beta} + \hat{T}^{\alpha\beta}\mathbf{m}_{,\beta} + \hat{M}^{\alpha 3}\mathbf{m}$$

$$\mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(Q)} = \hat{N}^{3\beta}\mathbf{y}_{,\beta} + \hat{M}^{3\beta}\mathbf{m}_{,\beta} + \hat{N}^{33}\mathbf{m}$$

$$\mathbf{I}_{(y)} = \kappa(\rho_{(y)}\mathbf{v} + \rho_{(ym)}\mathbf{w})$$
$$\mathbf{I}_{(m)} = \kappa(\rho_{(ym)}\mathbf{v} + \rho_{(m)}\mathbf{w})$$

*) линейный интегральный оператор, используемый далее

$$\underset{k}{\mathrm{int}}(...)_{(y)} = \int_{-0.5}^{0.5} (...)(\eta^3)^k d\eta^3$$

*) силы и моменты первого и второго порядка

$$\hat{N}^{ik} = \underset{0}{\mathrm{int}}(\hat{\sigma}^{ik}), \quad \hat{M}^{ik} = \underset{1}{\mathrm{int}}(\hat{\sigma}^{ik}), \quad \hat{T}^{ik} = \underset{2}{\mathrm{int}}(\hat{\sigma}^{ik}) \tag{14}$$

*) распределенные внешние нагрузки

$$\mathbf{f} = f^k\mathbf{e}_k = \mathbf{P}\big|_{\eta^3=0.5} + \mathbf{P}\big|_{\eta^3=-0.5} + \underset{0}{\mathrm{int}}(\rho\mathbf{F}) \tag{15}$$

*) распределенные внешние моменты

$$\boldsymbol{\mu} = \mu^k\mathbf{e}_k = 0.5(\mathbf{P}\big|_{\eta^3=0.5} - \mathbf{P}\big|_{\eta^3=-0.5}) + \underset{1}{\mathrm{int}}(\rho\mathbf{F}) \tag{16}$$

*) внешние краевые усилия и моменты

$$\mathbf{N} = N^k\mathbf{e}_k = \underset{0}{\mathrm{int}}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{M} = M^k\mathbf{e}_k = \underset{1}{\mathrm{int}}(\mathbf{p}) \tag{17}$$

*) инерционные коэффициенты

$$\rho_{(y)} = \underset{0}{\mathrm{int}}(\rho), \quad \rho_{(ym)} = \underset{1}{\mathrm{int}}(\rho), \quad \rho_{(m)} = \underset{2}{\mathrm{int}}(\rho) \tag{18}$$

*) приток тепла за счет работы внутренних сил в единицу времени

$$D_0 = \underset{0}{\mathrm{int}}(D_*) \tag{19}$$

*) внешние источники (стоки) тепла

$$R = -q_n\big|_{\eta^3=0.5} - q_n\big|_{\eta^3=-0.5} + \underset{0}{\mathrm{int}}(\rho r) \tag{20}$$

*) внешние тепловые потоки

$$Q_n = \underset{0}{\mathrm{int}}(q_n) \tag{21}$$

*) интегральный коэффициент теплопроводности

$$L = \underset{0}{\mathrm{int}}(\lambda) \tag{22}$$

В уравнении (12) векторы перемножаются скалярно. В формулах для вычисления $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, Q_n надо считать $(\eta^1,\eta^2)\in l_\eta$, для остальных введенных величин - $(\eta^1,\eta^2)\in \Omega_\eta$.

Интегрируя уравнения (13) по частям и применяя основную лемму вариационного исчисления, получим дифференциальную форму уравнений

$$\frac{d}{dt}\mathbf{I}_{(y)} = (\kappa\mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(N)})_{,\alpha} + \kappa\mathbf{f} \qquad (23)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{I}_{(m)} = (\kappa\mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(M)})_{,\alpha} - \kappa\mathbf{\Phi}_{(Q)} + \kappa\boldsymbol{\mu}$$

$$\frac{d}{dt}(\kappa\rho_{(y)}c_\varepsilon T) = (\kappa L\tilde{g}^{\alpha\beta}T_{,\beta})_{,\alpha} + \kappa(D_0 + R) \qquad (24)$$

и естественные граничные условия

$$\kappa\mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(N)}\xi_\alpha = \mathbf{N}$$

$$\kappa\mathbf{\Phi}^{\alpha}_{(M)}\xi_\alpha = \mathbf{M} \qquad (25)$$

$$\kappa L\tilde{g}^{\alpha\beta}T_{,\beta}\xi_\alpha = -Q_n$$

где ξ_1 и ξ_2 - направляющие косинусы внешней единичной нормали к плоскому контуру $l_\eta \subset R_2$.

Интегрируя по координате η^3 закон сохранения массы (7) и учитывая гипотезу (6): $J \approx \tilde{J}$, получим

$$\rho\tilde{J} = \rho_0\tilde{J}^0, \quad \rho_{(ym)}\kappa = \rho^0_{(ym)}\kappa^0, \quad \rho_{(y)}\kappa = \rho^0_{(y)}\kappa^0 \qquad (26)$$

где нулик отмечает значение величин при $t = 0$. Таким образом, плотность и инерционные коэффициенты выражаются через их начальные значения и градиенты функций $\mathbf{y}$ и $\mathbf{m}$.

4. Для широкого класса сплошных сред дифференциального типа, обладающих упругими, вязкими и пластическими свойствами, реологические соотношения имеют вид [2]

$$\hat{\sigma}^{ik} = \hat{a}^{ik}(T, \hat{\varepsilon}_{ij}, \hat{\chi}) \qquad (27)$$

$$\frac{d}{dt}\chi = \hat{\chi}^{ik}_{\varepsilon}\hat{e}_{ik} + \hat{\chi}_t \qquad (28)$$

где $T, \hat{\varepsilon}, \hat{\chi}$ - параметры состояния для рассматриваемого класса сред; $\hat{\chi}$ - совокупность функционалов процесса деформации, являющихся некоторыми тензорами (например, пластические деформации – тензор второго ранга, пластическая работа – скаляр и т.д.). Величины $\hat{a}^{ik}, \hat{\chi}_{\varepsilon}, \hat{\chi}_{t}$ в выражениях (27) - (28) и величины D_{ε}, D_{t} в выражении для скорости диссипации (12) для конкретной среды являются определенными тензорнозначными функциями параметров состояния (см. [2]).

В случае сложной реологии связь между интегральными силовыми факторами (14) и деформациями срединной поверхности и нормали (5) формулируется для скоростей этих величин и не зависит от координаты η^3. Действительно, дифференцируя (27) по времени и используя (28) и (5), имеем дифференциальное следствие связи (27)

$$\frac{d}{dt}\hat{\sigma}^{ik} = \hat{a}^{ik}_{,T}\frac{d}{dt}T + \hat{B}^{ijkl}u_{r,l} + \hat{C}^{ij}$$

где выражения для коэффициентов $\hat{B}$ и $\hat{C}$ легко выписать. Продифференцируем соотношения (14) по времени, подставим в результат (27) и выполним интегрирование по η^3, тогда получаем

$$\frac{d}{dt}F^{ij}_{(n)} = A^{ijk\beta}_{(n)}v_{k,\beta} + A^{ijk\beta}_{(n+1)}w_{k,\beta} + E^{ijk}_{(n)}w_k + G^{ij}_{(n)}\frac{d}{dt}T + R^{ij}_{(n)} \qquad (29)$$

где

$$F^{ij}_{(0)} = \hat{N}^{ij}, \quad F^{ij}_{(1)} = \hat{M}^{ij}, \quad F^{ij}_{(2)} = \hat{T}^{ij}$$

$$A^{ijk\beta}_{(n)} = \underset{n}{\mathrm{int}}(B^{ijk\beta}), \quad E^{ijk}_{(n)} = \underset{n}{\mathrm{int}}(B^{ijk\beta} + \hat{\sigma}^{ij}m^k / h)$$

$$G^{ij}_{(n)} = \underset{n}{\mathrm{int}}(\hat{a}^{ij}_{,T}), \quad R^{ij}_{(n)} = \underset{n}{\mathrm{int}}(\hat{C}^{ij})$$

С помощью связи (29) в области Ω_{η} замыкаются вспомогательные краевые задачи теории оболочек при использовании неявных шаговых или итерационных методов. Для явных методов связь (29) не требуется.

6. Рассмотрим в общем виде постановку краевой задачи для данной теории. Следующие искомые функции примем за основные

$$\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{y}, \mathbf{m}, T, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \hat{\chi})$$

Все остальные искомые функции выражаются через основные $\mathbf{\Gamma}$ и их первые пространственные производные. Набор $\mathbf{\Gamma}$ определен "с точностью до взаимно однозначной замены основных искомых функций".

Основными уравнениями являются: *) уравнения движения (23), уравнение распространения тепла (24) или их вариационные формы ((12), (13)) или соответствующая интегральная форма; *) связь (4) между скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ и кинематическими переменными $\mathbf{y}$ и $\mathbf{m}$; *) уравнения (28) для функционалов процесса деформации. Остальные соотношения теории рассматриваются как вспомогательные, с помощью которых все искомые функции выражены через основные.

Из-за сложной реологии область решения та же, что и для трехмерного случая (традиционная ситуация):

$$\mathbf{Ц} = \{(\eta, t) : \eta \in V_\eta, t \geq 0\}$$

Основные уравнения дополняются начальными условиями

$$\mathbf{\Gamma}\big|_{t=0} = \mathbf{\Gamma}^0 \tag{30}$$

и граничными условиями: главными граничными условиями

$$\begin{aligned} &(\eta^1, \eta^2) \in l_{\eta(y^k)} \subset l_\eta : \quad y^k = y_з^k(\eta^1, \eta^2, t) \\ &(\eta^1, \eta^2) \in l_{\eta(m^k)} \subset l_\eta : \quad m^k = m_з^k(\eta^1, \eta^2, t) \\ &(\eta^1, \eta^2) \in l_{\eta(T)} \subset l_\eta : \quad T^k = T_з^k(\eta^1, \eta^2, t) \end{aligned} \tag{31}$$

где $y_з^k, m_з^k, T_з$ - заданные функции, и естественные граничные условия (25), которые задаются на остальных частях граничного контура l_η: $l_{\eta(N^k)} = l_\eta \setminus l_{\eta(y^k)}$, $l_{\eta(M^k)} = l_\eta \setminus l_{\eta(m^k)}$, $l_{\eta(Q_n)} = l_\eta \setminus l_{\eta(T)}$. Для статики (инерционные члены отброшены) условия (31) должны запрещать смещения оболочки как жесткого целого и обеспечивать единственность решения температурной задачи.

Расчеты по теории можно выполнять обычными методами.

6. Уравнения теории сформулированы с использованием математических компонент тензоров. Для интерпретации результатов надо использовать переход к физическим проекциям

$$\varepsilon_{ij}^{\Phi} = \frac{\hat{\varepsilon}_{ij}}{H_{(i)}H_{(j)}}, \quad \sigma_{\Phi}^{ij} = \hat{\sigma}^{ij} H_{(i)} H_{(j)}, \quad N_{\Phi}^{ij} = \hat{N}^{ij} H_{(i)} H_{(j)},$$

$$M_{\Phi}^{ij} = \hat{M}^{ij} H_{(i)} H_{(j)}, \quad T_{\Phi}^{ij} = \hat{T}^{ij} H_{(i)} H_{(j)}, \quad H_{(i)} = |\hat{\mathrm{Э}}_i|$$

Для величин y^k, m^k, v^k, w^k математические и физические проекции совпадают, для $\hat{\chi}$ переход зависит от их конкретного определения.

Автор благодарит В.Н.Кукуджанова, Г.И.Пшеничнова и И.В.Ширко за обсуждение работы.

Литература

1 Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.б Наука, 1970.

2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М., МГУ, 1971.

3. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.

4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М., Наука, 1974.

5. Григорьев А.С. О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, N. 1.

6. Шаповалов Л.А. Уравнения эластики тонкой оболочки при неосесимметричной деформации. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, N. 3.

7. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М., Наука, 1978.

8. Бердичевский В.Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек. ПММ. 1979. т. 43. вып. 4.

9. Галимов К.Э. Некоторые вопросы нелинейной теории оболочек. Исслед. по теории пластин и оболочек, N. 16, Казань Казанский гос. университет. 1981.

10. Черных К.Д. Нелинейная теория нелинейно-упругих оболочек. Изв. АН СССР, МТТ, 1980, N. 2.

11. Naghdi P.M. "Fin. Elast. Winter Annu. Meet. ASME, Atlanta, Gr., 1977". New York, N.Y., 1977, pp. 77-89.