УДК 539.3

Динамическая модель слоистой среды с вязкопластическими прослойками

***Н. Г. Бураго*[1], *А. Б. Журавлев*[1], *И. С. Никитин*[2,3]**

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, Проспект Вернадского, 101 к.1.
[2] Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, Москва, 2-ая Брестская ул, д.19/18.
[3] «МАИ» - Национальный Исследовательский Университет,
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

Аннотация

Методом асимптотического осреднения построена уточненная модель слоистой среды с нелинейными вязкопластическими условиями проскальзывания на межслойных границах. Подобные модели могут быть полезными при решении динамических задач сейсморазведки и интерпретации волновых картин, полученных в процессе ее проведения.

Ключевые слова: слоистая среда, условия скольжения, асимптотическое осреднение, вязкопластичность, сейсморазведка.

Введение. В данной работе методом асимптотического осреднения строится уточненная модель слоистой среды с нелинейными вязкопластическими условиями проскальзывания на межслойных границах. Физическим объектом, обладающим подобными свойствами, является, например, флюидосодержащий слоистый пакет в упругом геологическом массиве. Предполагается, что в тонких прослойках между упругими слоями находится очень вязкая жидкость (нефть), или вязкопластическая масса (песок, пропитанный нефтью). Подобные модели могут быть полезными при решении динамических задач сейсморазведки и интерпретации волновых картин, полученных в процессе ее проведения.

1. Описание модели слоистой среды. В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев. Границы раздела имеют координаты $x_1 = x^{(s)} = s\varepsilon$, $s = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, где постоянная толщина слоя $\varepsilon << 1$ является малым параметром. Предполагается, что

Образец для цитирования
Бураго Н. Г., Журавлев А. Б., Никитин И. С., Динамическая модель слоистой среды с вязкопластическими прослойками / *Материалы X Всероссийской научной конференции по механике деформируемого твердого тела* (18–22 сентября 2017 г., Самара, Россия). Самара: СамГТУ, 2017. С. 1–x.

Сведения об авторах

*Николай Георгиевич Бураго*доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в МДТТ ИПМех РАН; e-mail: buragong@yandex.ru

*Алексей Борисович Журавлев*кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаборатория геомеханики ИПМех РАН; e-mail: zhuravlev@zmail.ru

Илья Степанович Никитин доктор физико-математических наук, профессор; директор; ИАП РАН; e-mail: i_nikitin@list.ru

физически между упругими слоями имеются тонкие вязкие или вязкопластические прослойки толщины $\delta << \varepsilon$, однако мы пренебрегаем толщиной этих прослоек и заменяем их условиями скольжения на поджатых границах слоев:

$\sigma_{33} < 0, \qquad [u_3] = [\sigma_{\gamma 3}] = [\sigma_{33}] = 0,$

либо $[u_{\gamma,t}]/\varepsilon = k\sigma_{\gamma 3}$ - линейное условие вязкого скольжения,

либо $[u_{\gamma,t}]/\varepsilon = k\sigma_{\gamma 3} < F(\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3}/\sigma_s^2 - 1) >$ - нелинейное условие вязкопластического скольжения, $k = \delta/(\varepsilon\eta)$, η - коэффициент вязкости.

Здесь квадратные скобки $[f] = f|_{x^{(s)}+0} - f|_{x^{(s)}-0}$ обозначают скачок величины f на межслойной границе, $< F(y) >= F(y)H(y)$ - нелинейная функция, отличная от нуля за пределом текучести $\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3} = \sigma_s^2$, $H(y)$ - функция Хэвисайда, $H(y) = 0$ при $y < 0$ и $H(y) = 1$ при $y \geqslant 0$. Греческие индексы β, γ принимают значения 1 и 2, латинские индексы – значения 1,2,3, u_i - компоненты вектора смещений, $u_{k,t}$ - компоненты вектора скорости, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений. Для компактности формул дифференцирование обозначено следующим образом: $\partial(...)/\partial x_j = (...)_j$, $\partial(...)/\partial t = (...)_t$, $\partial(...)/\partial\xi = (...)_{,\xi}$. Сами слои считаются изотропными линейно-упругими (при $x_3 \neq x^{(s)}$):

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} = 0 \ , \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$$

где ρ - плотность и тензор модулей упругости имеет вид: $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

Будем считать, что искомые функции $u_k = u_k(x_l, \xi, t)$ являются гладкими по «медленным» переменным x_l и гладкими по «быстрой» переменной $\xi = x_3/\varepsilon$, за исключением точек $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$, где они могут терпеть разрывы первого рода. Кроме того, эти функции являются 1-периодическими [**?**]: $[[u_i]] = u_i|_{\xi^{(s)}+1/2} - u_i|_{\xi^{(s)}-1/2} = 0$.

Смещения среды представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра $\varepsilon : u_i = w_i(x_k, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k, \xi, t) + ...$ Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{ij}^{(2)} + ...$, где $\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}u_{k,l}^{(n)} + C_{ijk3}u_{k,\xi}^{(n+1)}$. Процедура получения асимптотической системы уравнений в случае линейных условий для скачков касательных смещений (скольжений) на межслойных границах описана в [**?**].

Аналогично, уточненная теория второго порядка получается, если в асимптотической системе уравнений удержать члены порядка ε^2 и применить операцию осреднения по ячейке периодичности $\langle\rangle$:

$$C_{ijkl}w_{k,jl} + C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(1)}\right\rangle_{,j} + \varepsilon C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(2)}\right\rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(3)}\right\rangle_{,j} = \rho w_{i,tt}$$

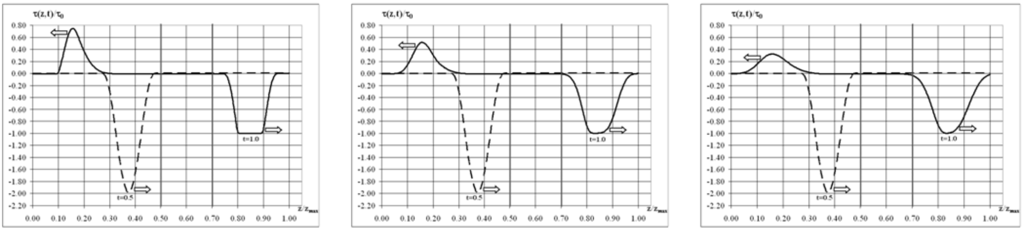
С использованием этих результатов уточненную систему уравнений можно получить в следующем виде:

$$\rho v_{\gamma,t} = s_{\gamma j,j} + \varepsilon^2\mu\Omega_{\gamma,3} \ , \quad \rho v_{3,t} = s_{3j,j} + \varepsilon^2\mu\Omega_{\beta,\beta}$$

$$\tau_{ij,t} = \lambda\delta_{ij}v_{k,k} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) \ , \qquad \varphi_{\gamma,t} = -\kappa s_{\gamma 3} < F(\Delta) >$$

$$\Omega_{\gamma,t} = -\kappa\mu\left((g_\gamma + \Omega_\gamma) < F(\Delta) > + 2s_{\gamma 3}s_{\beta 3}(g_\beta + \Omega_\beta) < F'(\Delta) > /\sigma_s^2\right)$$

$$s_{ij} = \tau_{ij} + \mu(\varphi_i\delta_{j3} + \varphi_j\delta_{i3}) \ , \quad \Delta = s_{\beta 3}s_{\beta 3}/\sigma_s^2 - 1$$



ε =0.0 $\qquad$ ε =0.05 $\qquad$ ε =0.1

Рис. 1. Формы падающей, прошедшей через слоистый пакет и отраженной от него волн в зависимости от параметра ε

$$g_\gamma = \left(\rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu - \varphi_{\gamma,\beta\beta} - (3\lambda + 2\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/(\lambda + 2\mu)\right)/12$$

В этой нестационарной системе введены обозначения $s_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)}$, $v_k = w_{k,t}$. Для дополнительных функций φ_γ и Ω_γ , имеющих смысл распределенных скольжений первого и третьего порядков по ε , получены нелинейные дифференциальные уравнения.

2. Численное решение нестационарной системы уравнений. Полученная модель была использована для исследования волновых процессов в геологических массивах с флюидосодержащей слоистой структурой и динамического деформирования некоторых классов композитов. Численное решение полученной системы уравнений строилось методом конечных объемов по специальной явно-неявной схеме [**?**], с учетом малых параметров вязкости при временных производных функций φ_γ и Ω_γ. Пример численного решения задачи прохождения поперечной волны (пунктир) через слоистый пакет 0.5<x3<0.7 с вязкопластическими прослойками, расположенный в упругой среде, показан на Рис. 1.

Выводы. Из приведенных графиков видно, что учет членов порядка ε^2 в определяющих уравнениях модели приводит к достаточно существенному изменению амплитуд и профилей волн в процессе их распространения по слоистому флюидосодержащему пакету. Подобные модели могут быть полезными при решении задач сейсморазведки.

Благодарность. Работа выполнена по проекту РФФИ № 15-08-02392-а.

Библиографический список

1. Бураго Н. Г., Никитин И. С. Уточненная модель слоистой среды с проскальзыванием на контактных границах // *Прикладная математика и механика*, 2016. Т. 80, № 2. С. 230–241.
2. Никитин И. С. Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 4. С. 154–165.

MSC: 74A60, 74F05

Dynamic theory of layered medium with visco-plastic sublayers

***N. G. Burago*[1], *A. B. Zhuravlev*[1], *I. S. Nikitin*[2,3]**

[1] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS,
101-1, prospekt Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
[2] Institute of Computer Aided Design of RAS,
19/18, 2nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russian Federation.
[3] Moscow Aviation Institute (National Research University) 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

A refined model of a layered medium with nonlinear viscoplastic slip conditions at interlayer boundaries is constructed by the method of asymptotic averaging. Such models can be useful in solving dynamic problems of seismic exploration and interpretation of wave patterns obtained in the process of its conduct.

Keywords: Layered media, slip conditions, asymptotic averaging, viscoplasticity, seismic exploration.

Please cite this article in press as:
Burago N. G., Zhuravlev A. B., Nikitin I. S. Dynamic theory of layered medium with visco-plastic sublayers, In: *Proceedings of the Tenth Russian Conference on Solid Mechanics* (September, 18–22, 2017, Samara, Russian Federation), Samara State Technical Univ., Samara, 2017, pp. 1–x (In Russian).

Authors' Details:

*Nikolai G. Burago*Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of modelling in mechanics of solids IPMech RAS; e-mail: buragong@yandex.ru

*Alexey B. Zhuravlev*Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Geomechanics; e-mail: zhuravlev@zmail.ru

Ilya S. Nikitin Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Director; ICAD RAS; e-mail: i_nikitin@list.ru