МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1981

УДК 531.3

О ДВИЖЕНИИ ПЛОСКИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

ИШЛИНСКИЙ А. Ю., СОКОЛОВ Б. Н., ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

Рассматривается движение плоских тел по плоскости под действием сил сухого трения. Построены и проанализированы фазовые траектории движения кольца и диска; рассчитаны траектории движения стержня с массами на концах. Динамика систем с сухим трением рассматривалась ранее [1–4].

1. Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается плоское тело (пластина), движущееся под действием сил сухого трения по горизонтальной плоскости. Предполагается, что давление p пластины на поверхность в каждой точке пропорционально плотности пластины ρ в этой же точке, т. е. ее массе, отнесенной к площади пластины. Это означает, что вертикальные сдвиговые напряжения в теле пренебрежимо малы. Обозначим $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$ — радиус-вектор и вектор скорости центра масс пластины, ω — ее угловая скорость, k — коэффициент сухого трения пластины, m — масса пластины, I — ее центральный момент инерции вокруг вертикальной оси, g — ускорение силы тяжести.

Запишем уравнения движения пластины. Сила сухого трения $d\mathbf{f}$, действующая на элемент dS поверхности пластины, пропорциональна давлению p и направлена против вектора скорости $\mathbf{v}$ элемента, если этот элемент движется

$$d\mathbf{f}=-kg\rho\mathbf{v}dS|\mathbf{v}|^{-1} \text{ при } \mathbf{v}\neq 0 \tag{1.1}$$

Здесь предполагается, что сила трения, действующая на точку с нулевой скоростью, равна нулю. Такое предположение оправдано для пластин, не имеющих сосредоточенных масс.

Далее, в п. 4 будет рассмотрен случай, при котором сила трения в точке, обладающей нулевой скоростью, имеет конечную величину.

Введем систему координат, связанную с пластиной, с центром в ее центре масс. Обозначим через $\mathbf{r}$ радиус-вектор, соединяющий начало координат и элемент dS поверхности пластины. Скорость элемента dS равна: $\mathbf{v}=\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$.

Главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\mathbf{M}$ относительно центра масс сил трения, приложенных к пластине, равны

$$\mathbf{F}=-kg\iint\limits_D \rho\frac{\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|}dS \tag{1.2}$$

$$\mathbf{M}=-kg\iint\limits_D \rho\mathbf{r}\times\frac{\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|}dS \tag{1.3}$$

где D — область, занятая плоской пластиной. Вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярен плоскости движения, его величину с соответствующим знаком обозначим M.

Масса m и центральный момент инерции I пластины определяются интегралами

$$m=\iint_D \rho\, dS, \quad I=\iint_D r^2\rho\, dS \tag{1.4}$$

С учетом соотношений (1.2)–(1.4) движение пластины описывается следующими уравнениями:

$$\mathbf{R}^{\cdot}=\mathbf{V},\ m\mathbf{V}^{\cdot}=\mathbf{F},\ \varphi^{\cdot}=\omega,\ I\omega^{\cdot}=M \tag{1.5}$$

где φ — угол поворота пластины, отсчитанный от некоторого неподвижного направления.

Если пластина обладает аксиальной симметрией (относительно оси, проходящей через центр масс 0 перпендикулярно плоскости движения), то вектор скорости $\mathbf{V}$ сохраняет постоянное направление. Для этого, очевидно, достаточно показать, что $\mathbf{V}\times\mathbf{F}=0$, т. е. главный вектор сил трения направлен вдоль вектора скорости $\mathbf{V}$.

Рассмотрим два вектора $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$, симметричные относительно нормали $\mathbf{V}_1$ к вектору $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{r}'=a_1\mathbf{V}+a_2\mathbf{V}_1, \quad \mathbf{r}''=-a_1\mathbf{V}+a_2\mathbf{V}_1 \tag{1.6}$$

где a_1, a_2 — произвольные постоянные.

В силу симметрии области D относительно оси, направленной по вектору $\mathbf{V}_1$ и проходящей через центр масс, векторы $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат области D. Поэтому для равенства нулю интеграла

$$\mathbf{V}\times\mathbf{F}=-kg\iint_D \rho\mathbf{V}\times\frac{\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|}\,dS$$

достаточно равенства нулю следующего выражения (при всех a_1, a_2):

$$Q=\mathbf{V}\times\frac{\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'}{|\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'|}+\mathbf{V}\times\frac{\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}''}{|\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}''|} \tag{1.7}$$

Подставим выражения (1.6) в соотношение (1.7) и воспользуемся известным векторным равенством $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab})$. После упрощения получим

$$Q=\frac{a_1\boldsymbol{\omega}\mathbf{V}^2-a_1\mathbf{V}(\mathbf{V}\boldsymbol{\omega})}{|\mathbf{V}+a_2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_1+a_1\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}|}-\frac{a_1\boldsymbol{\omega}\mathbf{V}^2-a_1\mathbf{V}(\mathbf{V}\boldsymbol{\omega})}{|\mathbf{V}-a_1\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}+a_2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_1|} \tag{1.8}$$

Замечая, что $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_1=b_1\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}=b_2\mathbf{V}_1$, где b_1, b_2 — скаляры, имеем

$$|\mathbf{V}+a_2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_1+a_1\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}|=|\mathbf{V}+a_2b_1\mathbf{V}+a_1b_2\mathbf{V}_1|$$

$$|\mathbf{V}+a_2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_1-a_1\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}|=|\mathbf{V}+a_2b_1\mathbf{V}-a_1b_2\mathbf{V}_1|$$

В силу ортогональности векторов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_1$ знаменатели дробей (1.8) равны, следовательно, $Q=0$, что и требовалось доказать.

Далее будем рассматривать движение аксиально-симметричных пластин постоянной плотности. Введем полярную систему координат r, ψ с центром в центре масс пластины. Обозначим через ψ угол между вектором скорости центра масс и радиусом, соединяющим начало координат и элемент $dS=rdrd\psi$ поверхности пластины. Предположим, что пластина ограничена внутренним контуром радиуса r_1 и внешним контуром радиуса r_2.

Вычислим проекцию F на вектор $\mathbf{V}$ главного вектора сил трения $\mathbf{F}$ (этот вектор коллинеарен $\mathbf{V}$). Распишем в координатной форме векторное произведение в (1.2), учитывая, что $dS=rdrd\psi$, а угол ψ отсчитывается от направления вектора **V**. Получим

$$F=-kg\rho\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{V-r\omega\sin\psi}{(V^2+r^2\omega^2-2rV\omega\sin\psi)^{1/2}}\,r\,dr\,d\psi \tag{1.9}$$

Величина момента M из (1.3) с учетом соответствующего знака равна

$$M=-kg\rho\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{r\omega-V\sin\psi}{(V^2+r^2\omega^2-2rV\omega\sin\psi)^{1/2}}\,r^2\,dr\,d\psi \tag{1.10}$$

Согласно формулам (1.4), масса m и центральный момент инерции I пластины соответственно равны

$$m=\rho\pi(r_2^2-r_1^2),\quad I={}^1/_2\rho\pi(r_2^4-r_1^4) \tag{1.11}$$

Объединяя соотношения (1.9)—(1.11) и вводя в них безразмерные (отмечены штрихом) переменные $r'=rr_2^{-1}$, $V'=V/(\pi^{-1}kgr_2)^{1/2}$, $\omega'=\omega/(\pi^{-1}r_2^{-1}kg)^{1/2}$, $t'=t(\pi^{-1}r_2^{-1}kg)^{1/2}$, получаем, согласно формулам (1.5), уравнения движения (штрихи далее опущены):

$$\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]V^{\cdot}=-\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1/r_2}^{1}r\frac{V-r\omega\sin\psi}{(V^2+r^2\omega^2-2rV\omega\sin\psi)^{1/2}}\,dr\,d\psi$$

$$\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4\right]\omega^{\cdot}=-2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1/r_2}^{1}r^2\frac{r\omega-V\sin\psi}{(V^2+r^2\omega^2-2rV\omega\sin\psi)^{1/2}}\,dr\,d\psi \tag{1.12}$$

Система (1.12) инвариантна по отношению к следующим преобразованиям:

$$V\to-V,\ \omega\to\omega;\ V\to V,\ \omega\to-\omega \tag{1.13}$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Поэтому семейство траекторий системы (1.12) на плоскости ω, V симметрично относительно прямых $V=0$, $\omega=0$. Следовательно, эту систему достаточно рассмотреть в квадранте $\omega\geqslant0$, $V\geqslant0$ на плоскости ω, V. В этой области после элементарных преобразований правая часть уравнений (1.12) может быть записана в виде интегралов от эллиптических интегралов

$$\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]V^{\cdot}=-2\int\limits_{r_1/r_2}^{1}\left[r\frac{r+\beta}{\beta}E\left(\frac{2\sqrt{r\beta^{-1}}}{1+r\beta^{-1}}\right)+r\frac{\beta-r}{\beta}K\left(\frac{2\sqrt{r\beta^{-1}}}{1+r\beta^{-1}}\right)\right]dr$$

$$\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4\right]\omega^{\cdot}=-4\int\limits_{r_1/r_2}^{1}\left[r(r+\beta)E\left(\frac{2\sqrt{r\beta^{-1}}}{1+r\beta^{-1}}\right)+r(r-\beta)K\left(\frac{2\sqrt{r\beta^{-1}}}{1+r\beta^{-1}}\right)\right]dr \tag{1.14}$$

где $\beta=V\omega^{-1}$, K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

2. Движение кольца. Рассмотрим тонкое кольцо: $r_2-r_1\ll r_2$. Разделим обе части уравнений (1.12) на $1-r_1r_2^{-1}$ и перейдем к пределу в правых частях полученных уравнений при $r_1\to r_2$. Получим следующие уравнения движения кольца по плоскости:

$$V^{\cdot}=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(V-\omega\sin\psi)(V^2+\omega^2-2V\omega\sin\psi)^{-1/2}\,d\psi$$

$$\omega^{\cdot}=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\omega-V\sin\psi)(V^2+\omega^2-2V\omega\sin\psi)^{-1/2}\,d\psi \tag{2.1}$$

Система (2.1), дополнительно к преобразованиям (1.13), инвариантна по отношению к преобразованию $V\to\omega$, $\omega\to V$. Поэтому семейство траекторий этой системы симметрично относительно прямых $V=0$, $\omega=0$, $V=\omega$. Следовательно, систему (2.1) достаточно исследовать в области $0\leqslant V\leqslant\omega$, где система (2.1) эквивалентна вытекающей из (1.14) системе

$$V^{\cdot}=-\left[\frac{1+\beta}{\beta}E\left(\frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\right)+\frac{\beta-1}{\beta}K\left(\frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\right)\right],\quad 0\leqslant\beta=V\omega^{-1}\leqslant 1$$

$$\omega^{\cdot}=-\left[(\beta+1)E\left(\frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\right)+(1-\beta)K\left(\frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\right)\right] \tag{2.2}$$

Упростить уравнения (2.2) можно при помощи формул [5]:

$$E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{1}{1+k}(2E(k)-k'^2K(k))$$

$$K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=(1+k)K(k),\quad k'^2=1-k^2 \tag{2.3}$$

В результате получим систему

$$V^{\cdot}=-\frac{2}{\beta}[E(\beta)-(1-\beta^2)K(\beta)],\quad \omega^{\cdot}=-2E(\beta) \tag{2.4}$$

Оценим величину кинетической энергии кольца H как функцию времени. В безразмерных переменных, с точностью до постоянного множителя, $H=(V^2+\omega^2)/2$. Умножим первое уравнение (2.1) на V, второе — на ω и сложим их. После упрощений получим

$$(\sqrt{V^2+\omega^2})^{\cdot}=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\frac{2V\omega}{V^2+\omega^2}\sin\psi}\,d\psi \tag{2.5}$$

Из очевидного неравенства $\sqrt{2}\leqslant(1+a)^{1/2}+(1-a)^{1/2}\leqslant 2$ $(0\leqslant a\leqslant 1)$ следует оценка интеграла

$$\sqrt{2}\pi\leqslant\int_0^{\pi}\left(\sqrt{1+\frac{2V\omega}{V^2+\omega^2}\sin\psi}+\sqrt{1-\frac{2V\omega}{V^2+\omega^2}\sin\psi}\right)d\psi\leqslant 2\pi$$

поэтому в силу (2.5) имеем

$$-\sqrt{2}\pi\geqslant 2[(2H)^{1/2}]^{\cdot}\geqslant-2\pi,\quad H=(V^2+\omega^2)/2$$

Следовательно

$$H_0^{1/2}-\pi(t-t_0)\geqslant H^{1/2}\geqslant H_0^{1/2}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}(t-t_0)$$

$$H_0={}^1/_2(V_0^2+\omega_0^2)$$

где H_0 — значение H в начальный момент $t=t_0$.

Отсюда получаем оценку времени T движения кольца до его полной остановки в зависимости от начальных данных V_0, ω_0:

$$\sqrt{2}\sqrt{V_0^2+\omega_0^2}/\pi \geqslant T \geqslant \sqrt{V_0^2+\omega_0^2}/\pi$$

Построим фазовые траектории движения кольца. Разделим первое уравнение (2.4) на второе

$$\frac{dV}{d\omega}=\frac{1}{\beta}\left[1-(1-\beta^2)\frac{K(\beta)}{E(\beta)}\right]=\Phi(\beta),\quad \beta=\frac{V}{\omega} \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) однородно, поэтому его изоклинами являются прямые, проходящие через начало координат. Из неравенства $E\leqslant K$ следует неравенство

$$\Phi(\beta)<\beta,\ 0<\beta<1,\ \beta=V\omega^{-1} \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) интегрируется в квадратурах. Его решение, удовлетворяющее начальным данным $\omega=\omega_0$, $V=V_0$ при $t=0$, имеет вид

$$\omega=\omega_0\exp\int\limits_{V_0/\omega_0}^{V/\omega}\frac{d\beta}{\Phi(\beta)-\beta} \tag{2.8}$$

Покажем, что все фазовые траектории, кроме траектории $V=0$, отвечающей чистому вращению, в начале координат имеют общую касательную, являющуюся биссектрисой первого координатного угла.

Допустим, что существует траектория $V=V(\omega)$, касательная к которой в начале координат имеет тангенс угла наклона к оси ω, равный k $(0<k<1)$. Тогда в точке $\omega=0$ должно быть выполнено: $k=\lim\Phi(V/\omega)=\Phi(k)$ при $\omega\to 0$. Это соотношение противоречит неравенству (2.7). Утверждение доказано.

Покажем, что если в начальный момент $t=0$ было выполнено условие $V_0<\omega_0$, то $V(t)<\omega(t)$ вплоть до полной остановки кольца (движение рассматривается при $0\leqslant V\leqslant\omega$).

Предположим обратное, т. е. при $t=t_1>0$ имеет место равенство $V(t_1)=\omega(t_1)>0$. Покажем, что

$$\int\limits_{V_0/\omega_0}^{1}\frac{d\beta}{\Phi(\beta)-\beta}=-\infty \tag{2.9}$$

Тогда из формулы (2.8) следует $\omega(t_1)=0$, что противоречит сделанному допущению $\omega(t_1)=V(t_1)>0$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\beta)-\beta=\frac{1-\beta^2}{\beta}\left[1-\frac{K(\beta)}{E(\beta)}\right]=\frac{1-\beta^2}{\beta}\left[\frac{E(\beta)-K(\beta)}{E(\beta)}\right]$$

Воспользуемся асимптотическим представлением эллиптических интегралов в окрестности $\beta=1$ [5]:

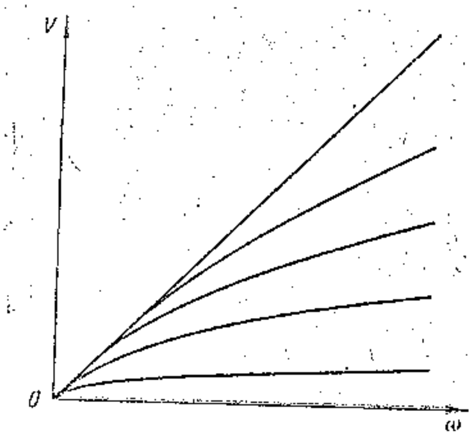
$$E(\beta)=1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{\beta'}-\frac{1}{2}\right)\beta'^2+\ldots,\qquad (\beta'=\sqrt{1-\beta^2}\to 0)$$

$$K(\beta)=\ln\frac{4}{\beta'}+\frac{1}{2^2}\left(\ln\frac{4}{\beta'}-1\right)\beta'^2+\ldots$$

и представим $\Phi(\beta)-\beta$ в виде ряда

$$\Phi(\beta)-\beta=(1-\beta^2)\beta^{-1}E^{-1}(\beta)\left[1-\ln\frac{4}{\beta'}+\frac{\beta'^2}{4}\ln\frac{4}{\beta'}+\ldots\right]$$

Следовательно, в окрестности $\beta=1$ подынтегральная функция (2.8) имеет неинтегрируемую особенность вида $(1-\beta)^{-1}\ln^{-1}(1-\beta)$ и интеграл (2.9) расходится, что и требовалось доказать.



Фиг. 1

Из доказанных свойств следует, что все фазовые траектории уравнения (2.6) в области $0\leqslant V\leqslant\omega$, кроме прямой $V=0$, есть кривые, касающиеся прямой $V=\omega$ в точке $V=\omega=0$. Фазовые траектории уравнения (2.6), полученные численно, представлены на фиг. 1.

Из полученных результатов и данных расчетов вытекают следующие качественные особенности движения кольца по плоскости.

Для всех движений кольца, кроме поступательного движения ($\omega=0$) и чистого вращения ($V=0$), V и ω обращаются в нуль одновременно в момент остановки. Непосредственно перед остановкой выполняется условие $V=\omega$, т. е. мгновенный центр скоростей перед остановкой находится в точке окружности кольца (напомним, что в безразмерных переменных кольцо имеет единичный радиус).

3. Движение диска. Рассмотрим движение круглого диска по плоскости. Уравнения (1.14) при $r_1=0$ принимают вид (движение рассматривается при $V\geqslant 0$, $\omega\geqslant 0$):

$$V^{\cdot}=-2\int_0^1\left[r\frac{r+\beta}{\beta}E\left(\frac{2\sqrt{r\beta^{-1}}}{1+r\beta^{-1}}\right)+r\frac{\beta-r}{\beta}K\left(\frac{2\sqrt{r\beta^{-1}}}{1+r\beta^{-1}}\right)\right]dr$$

$$\omega^{\cdot}=-4\int_0^1\left[r(r+\beta)E\left(\frac{2\sqrt{r\beta^{-1}}}{1+r\beta^{-1}}\right)+r(r-\beta)K\left(\frac{2\sqrt{r\beta^{-1}}}{1+r\beta^{-1}}\right)\right]dr \qquad (3.1)$$

Рассмотрим случай $\beta\geqslant 1$ и обозначим $\zeta=r\beta^{-1}$. Воспользуемся соотношениями (2.3) и упростим правые части уравнений (3.1):

$$V^{\cdot}=-4\beta^2\int_0^{1/\beta}\zeta E(\zeta)\,d\zeta$$

$$\omega^{\cdot}=-8\beta^3\int_0^{1/\beta}[\zeta E(\zeta)-\zeta(1-\zeta^2)K(\zeta)]\,d\zeta \qquad (3.2)$$

Верны соотношения (см. [5]):

$$\int E(k)\,dk={}^1/_3(1+k^2)E(k)-{}^1/_3k'^2K(k)$$

$$\int K(k)k^3\,dk={}^1/_9[(4+k^2)E(k)-k'^2(4+3k^2)K(k)] \qquad (3.3)$$

$$\int K(k)k\,dk=E(k)-k'^2K(k),\quad k'^2=1-k^2$$

Использование этих соотношений позволяет проинтегрировать правые части уравнений (3.3)

$$\begin{aligned} V^{\cdot} &= -{}^4/_3\beta^2[(\beta^{-2}+1)E(\beta^{-1})+(\beta^{-2}-1)K(\beta^{-1})] \\ \omega^{\cdot} &= -{}^8/_9\beta^3[(4\beta^{-2}-2)E(\beta^{-1})+(3\beta^{-2}-2)(\beta^{-2}-1)K(\beta^{-1})] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассмотрим теперь случай $\beta<1$. Представим правые части уравнений (3.1) в виде суммы двух интегралов

$$\begin{aligned} V^{\cdot} &= -2\left[\int_0^\beta A_1(r,\beta)\,dr+\int_\beta^1 A_1(r,\beta)\,dr\right] \\ \omega^{\cdot} &= -4\left[\int_0^\beta A_2(r,\beta)\,dr+\int_\beta^1 A_2(r,\beta)\,dr\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

где через A_1, A_2 обозначены подынтегральные функции в правых частях уравнений (3.1).

Вычислим следующие интегралы, фигурирующие в системе (3.5):

$$\begin{aligned} I_{11} &= -2\int_0^\beta A_1(r,\beta)\,dr, \quad I_{12}=-2\int_\beta^1 A_1(r,\beta)\,dr \\ I_{21} &= -4\int_0^\beta A_2(r,\beta)\,dr, \quad I_{22}=-4\int_\beta^1 A_2(r,\beta)\,dr \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если в подынтегральных выражениях интегралов I_{11}, I_{21} заменить переменную интегрирования $r=\beta\zeta$, то эти интегралы перейдут в интегралы, стоящие в правых частях системы (3.2), причем верхний предел окажется равным единице. Поэтому I_{11}, I_{21} равны правым частям системы (3.4), где в квадратных скобках следует положить $\beta=1$. Таким образом, имеем

$$I_{11}=-{}^4/_3\pi\beta^2, \quad I_{21}=-{}^8/_9\pi\beta^3 \tag{3.7}$$

Вычислим теперь интегралы I_{12}, I_{22} из (3.6). Сделаем в подынтегральных функциях этих интегралов замену переменной $r=\beta\zeta^{-1}$ и воспользуемся соотношениями (2.3). После преобразований получим

$$\begin{aligned} I_{12} &= 4\beta^2\int_1^\beta[\zeta^{-4}E(\zeta)-(1-\zeta^2)\zeta^{-4}K(\zeta)]\,d\zeta \\ I_{22} &= 8\beta^3\int_1^\beta \zeta^{-4}E(\zeta)\,d\zeta \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для интегрирования (3.8) воспользуемся формулами [5]:

$$\begin{aligned} &\int\frac{E}{k^4}\,dk=\frac{1}{9k^3}[2(k^2-2)E(k)+k'^2K(k)] \\ &\frac{d}{dk}\left[\frac{1}{k}(K(k)-E(k))\right]=[E(k)-k'^2K(k)]\frac{1}{k^2k'^2} \\ &\int\frac{K\,dk}{k}=-\frac{E(k)}{k}, \quad k'^2=1-k^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Преобразуем первый интеграл (3.8), воспользовавшись вторым соотношением (3.9) и интегрированием по частям

$$\int(\zeta^{-4}E-\zeta'^2\zeta^{-4}K)\,d\zeta=\int\frac{\zeta'^2}{\zeta^2}\left(\frac{E}{\zeta^2\zeta'^2}-\frac{K}{\zeta^2}\right)d\zeta=$$

$$=-\frac{\zeta'^2}{\zeta^2}\frac{1}{\zeta}(E-K)-2\int\zeta^{-4}(E-K)\,d\zeta,\qquad \zeta'^2=1-\zeta^2$$

Отсюда следует равенство

$$3\int(\zeta^{-4}E-\zeta^{-4}K)\,d\zeta+\int\zeta^{-2}K\,d\zeta=-\zeta'^2\zeta^{-3}(E-K)$$

Используя третье равенство (3.9), приходим к соотношению

$$\int(\zeta^{-4}E-\zeta^{-4}K)\,d\zeta=-\frac{1}{3}\frac{\zeta'^2}{\zeta^3}(E-K)+\frac{1}{3}\frac{E}{\zeta}$$

Добавляя к обеим частям полученного равенства третье равенство (3.9), получим после упрощений

$$\int\left(\frac{E}{\zeta^4}-\frac{\zeta'^2K}{\zeta^4}\right)d\zeta=\frac{1-\zeta^2}{3\zeta^3}K-\frac{1+\zeta^2}{3\zeta^3}E$$

Использование этого равенства и первого соотношения (3.9) дает искомые значения интегралов I_{12}, I_{22} из (3.6):

$$I_{12}=4\beta^2\left[\frac{1-\beta^2}{3\beta^3}K(\beta)-\frac{1+\beta^2}{3\beta^3}E(\beta)+\frac{\pi}{3}\right]$$

$$I_{22}=\frac{8}{9}\beta^3\left[\frac{2(\beta^2-2)}{\beta^3}E(\beta)+\frac{(1-\beta^2)}{\beta^3}K(\beta)+\pi\right]$$

Вместе с соотношениями (3.7) эти равенства позволяют записать уравнения движения диска в случае $\beta<1$ в виде

$$V^{\cdot}=\frac{4}{3\beta}[(1-\beta^2)K(\beta)-(1+\beta^2)E(\beta)]\qquad(3.10)$$

$$\omega^{\cdot}=\frac{8}{9}[2(\beta^2-2)E(\beta)+(1-\beta^2)K(\beta)]$$

Отметим, что уравнения (3.4), (3.10), полученные другим способом, приведены в [2].

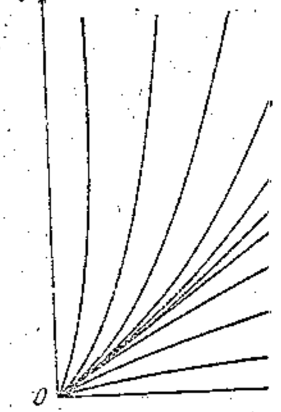
Построим семейство траекторий системы (3.1) в квадранте $V\geqslant0$, $\omega\geqslant0$. Для этого воспользуемся уравнениями (3.4) в области $V\omega^{-1}>1$ и уравнениями (3.10) в области $0\leqslant V\omega^{-1}\leqslant1$. Результаты численного решения этих уравнений приведены на фиг. 2.

Покажем, что все траектории системы (3.1), кроме траекторий $V=0$, $\omega=0$, имеют общую касательную в начале координат. Обозначим через $\Phi_1(\beta)$ отношение правой части первого уравнения (3.4) к правой части второго, а через $\Phi_2(\beta)$ — соответствующее отношение для уравнения (3.10). Пусть уравнение касательной к некоторой траектории системы (3.1) имеет вид $V=k\omega$. Тогда k должно удовлетворять уравнению

$$\Phi_i(k)=k\quad(i=1 \text{ при } k>1,\ i=2 \text{ при } 0<k<1)\qquad(3.11)$$

Исследование, аналогичное проведенному в п. 2, показывает, что при

$i=1$ это уравнение не и
нение (3.11) исследова
бражена зависимость (
отвечает абсцисса пер
координатного угла. И
единственный положит
корень определяет пр
траекторий в начале ко
метим, что прямая $V=$
Аналогично тому, к
могут быть доказаны

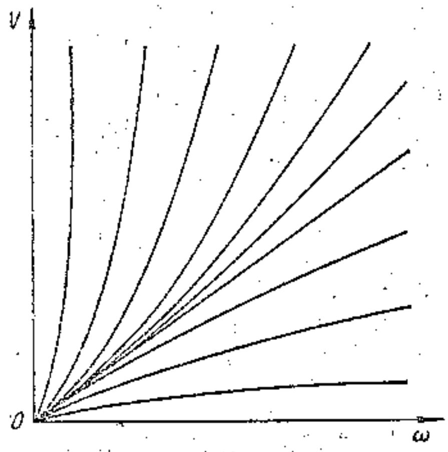


Ф

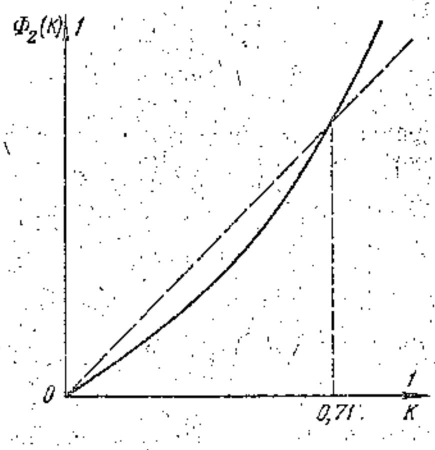
одновременно для ли
нательного движения
прямой $V=k^*\omega$ толь
Это означает, что
щения ($V_0=0$) и пос
ред полной останов
вательно, мгновенн
остановкой находит
4. Движение по
ние по плоскости сл
терпальные точки м
ной длины l. Под д
система начинает ск
Введем обозначе
(фиг. 4), $\mathbf{R}$ — радиу
центра масс, φ — уг
отсчитанный против
стемы, r_1, r_2 — расст
фициент трения i-й
щей на i-ю точку,
относительно центр
центральный момен
Запишем уравне
на точку m_i со ст
силы $\mathbf{F}_i$ равны по

$i=1$ это уравнение не имеет решений ($\Phi_1(k)>k$ при $k>1$). При $i=2$ уравнение (3.11) исследовалось численно. На фиг. 3 сплошной линией изображена зависимость $\Phi_2(k)$ от k. Отметим, что корню уравнения (3.11) отвечает абсцисса пересечения графика $\Phi_2(k)$ с биссектрисой первого координатного угла. Из графика следует, что уравнение (3.11) имеет единственный положительный корень $k^*\in(0, 1)$, равный $k^*\approx 0{,}71$. Этот корень определяет прямую $V=k^*\omega$ — общую касательную к семейству траекторий в начале координат, разделяющую семейство на две части. Отметим, что прямая $V=k^*\omega$ сама есть траектория системы (3.1).

Аналогично тому, как это было сделано для кольца в п. 2, для диска могут быть доказаны следующие положения: V и ω обращаются в нуль



Фиг. 2



Фиг. 3

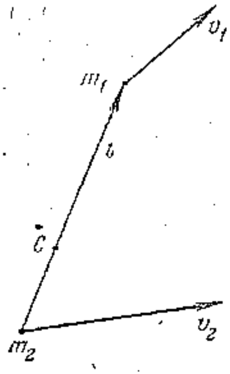
одновременно для любых движений, кроме чистого вращения или поступательного движения; все фазовые траектории в плоскости ω, V касаются прямой $V=k^*\omega$ только в начале координат.

Это означает, что при любых начальных данных, кроме чистого вращения ($V_0=0$) и поступательного движения ($\omega_0=0$), непосредственно перед полной остановкой тела выполняется соотношение $V=k^*\omega$. Следовательно, мгновенный центр вращения диска непосредственно перед его остановкой находится на расстоянии 0,71 радиуса от его центра.

4. Движение по плоскости двухмассовой системы. Рассмотрим движение по плоскости следующей механической системы (см. фиг. 4). Две материальные точки массы m_1, m_2 соединены невесомым стержнем постоянной длины l. Под действием сил сухого трения после начального толчка система начинает скользить по горизонтальной плоскости.

Введем обозначения: пусть $\mathbf{l}$ — вектор, соединяющий точки m_2 и m_1 (фиг. 4), $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра масс C системы, $\mathbf{V}$ — вектор скорости центра масс, φ — угол, образованный координатной осью Ox и вектором $\mathbf{l}$, отсчитанный против часовой стрелки, ω — угловая скорость вращения системы, r_1, r_2 — расстояние от центра масс C до точек m_1 и m_2, k_i — коэффициент трения i-й точки о плоскость, $\mathbf{f}_i$ — вектор силы трения, действующей на i-ю точку, $\mathbf{v}_i$ — вектор скорости i-й точки ($i=1, 2$), $\mathbf{M}$ — момент относительно центра масс C сил трения, действующих на систему, I — центральный момент инерции системы.

Запишем уравнения движения. Обозначим через $\mathbf{F}_i$ силу, действующую на точку m_i со стороны стержня. Стержень безынерционен, поэтому силы $\mathbf{F}_i$ равны по величине, противоположны по направлению и направ-



Фиг. 4

лены вдоль стержня

$$\mathbf{F}_2=-\mathbf{F}_1=G\mathbf{e},\quad \mathbf{e}=\mathbf{l}|\mathbf{l}|^{-1} \tag{4.1}$$

Здесь G — сила натяжения стержня ($G>0$, если стержень растянут, $G<0$, если стержень сжат), $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль стержня. Составим, с учетом равенств (4.1), уравнения движения точек

$$m\mathbf{v}_1^{\cdot}=\mathbf{f}_1-\mathbf{F}_2;\quad m\mathbf{v}_2^{\cdot}=\mathbf{f}_2+\mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{v}_1^{\cdot}=\mathbf{v}_2^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{l}-\omega^2\mathbf{l} \tag{4.2}$$

Последнее уравнение (4.2) следует из условия нерастяжимости стержня.

Сила сухого трения $\mathbf{f}_i$, приложенная к точке m_i, направлена против вектора скорости, если точка m_i движется, либо против вектора внешних сил, если точка покоится [1, 2]:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{f}_i=-k_im_ig\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_i|^{-1},\quad \text{если}\quad |\mathbf{v}_i|\neq0\\
&\mathbf{f}_i=-\min\{k_im_ig,\ |\mathbf{F}_i|\}\mathbf{F}_i|\mathbf{F}_i|^{-1},\quad \text{если}\quad \mathbf{v}_i=0,\ \mathbf{F}_i\neq0\\
&\mathbf{f}_i=0,\quad \text{если}\quad \mathbf{v}_i=0,\quad \mathbf{F}_i=0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь вместо $\mathbf{v}_i$ следует подставить (см. фиг. 4) соотношение

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{V}+(-1)^{i+1}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}r_i \tag{4.4}$$

Момент $\mathbf{M}$ сил трения и момент инерции I относительно центра масс равны

$$\mathbf{M}=\mathbf{e}\times\mathbf{f}_1r_1-\mathbf{e}\times\mathbf{f}_2r_2,\quad I=m_1r_1^2+m_2r_2^2 \tag{4.5}$$

С учетом формул (4.3) — (4.5) уравнения движения системы будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}^{\cdot}=\mathbf{V},\quad \mathbf{V}^{\cdot}=(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2)(m_1+m_2)^{-1}\\
&\varphi^{\cdot}=\omega,\quad \omega^{\cdot}=MI^{-1}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Если скорости обеих точек m_1, m_2 не равны нулю, то сила трения определяется непосредственно из соотношения (4.3) и тогда соотношения (4.3), (4.6) образуют замкнутую систему уравнений.

Рассмотрим случай, когда скорость одного из концов стержня обратилась в нуль, например $\mathbf{v}_2=0$, $\mathbf{v}_1\neq0$. Исключим $\mathbf{v}_1^{\cdot}$, $\mathbf{v}_2^{\cdot}$ из первых двух уравнений (4.2) и подставим их в третье уравнение (4.2). Полученное равенство

$$m_1^{-1}(\mathbf{f}_1-\mathbf{F}_2)=m_2^{-1}(\mathbf{f}_2+\mathbf{F}_2)+\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{l}-\omega^2\mathbf{l}$$

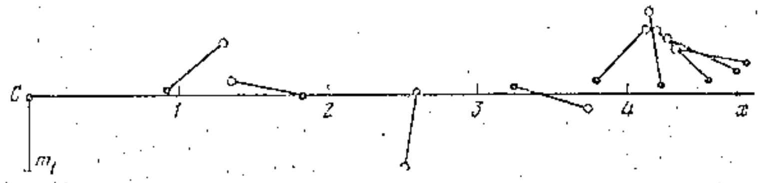
умножим на орт $\mathbf{e}$

$$(m_1^{-1}+m_2^{-1})\mathbf{F}_2\mathbf{e}+m_2^{-1}\mathbf{f}_2\mathbf{e}=\omega^2l \tag{4.7}$$

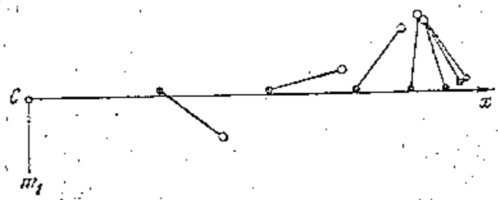
Здесь принято во внимание, что $\mathbf{v}_1=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{l}$ (так как $\mathbf{v}_2=0$), и поэтому $\mathbf{f}_1\mathbf{e}=0$ в силу первого равенства (4.3).

1. Если принять, что $k_2m_2g\leqslant|\mathbf{F}_2|$, по второй формуле (4.3) получим $\mathbf{f}_2=-k_2m_2g\mathbf{F}_2|\mathbf{F}_2|^{-1}$. Подставим это значение $\mathbf{f}_2$ в уравнение (4.7) и разрешим его относительно $\mathbf{F}_2\mathbf{e}$:

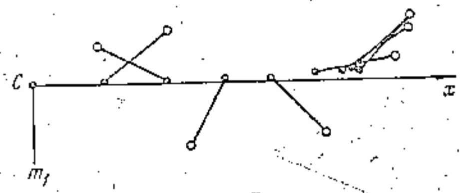
$$\mathbf{F}_2\mathbf{e}=\omega^2l\left[m_1^{-1}+m_2^{-1}\left(1-\frac{k_2m_2g}{|\mathbf{F}_2|}\right)\right]^{-1} \tag{4.8}$$



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Выражение в круглых скобках последней формулы неотрицательно, поэтому $\mathbf{F}_2\mathbf{e}\geqslant 0$, следовательно, в этом случае

$$\mathbf{F}_2=\mathbf{e}|\mathbf{F}_2|,\quad \mathbf{f}_2=-k_2m_2g\mathbf{e} \tag{4.9}$$

Подставим $\mathbf{F}_2$ из (4.9) в (4.8) и найдем отсюда $|\mathbf{F}_2|$, а затем подставим $|\mathbf{F}_2|$ в исходное для первого условия неравенство $k_2m_2g\leqslant|\mathbf{F}_2|$. Получим условие, соответствующее данному случаю, $k_2m_2g\leqslant m_1\omega^2 l$.

2. В случае $k_2m_2g>|\mathbf{F}_2|$ вторая формула (4.3) дает $\mathbf{f}_2=-\mathbf{F}_2$ и тогда из (4.7) получим $\mathbf{F}_2\mathbf{e}=m_1\omega^2 l$. Следовательно, $\mathbf{f}_2=-m_1\omega^2\mathbf{l}$ $(k_2m_2g>m_1\omega^2 l)$.

Объединяя полученные формулы и аналогичные им для случая $\mathbf{v}_1=0$, будем иметь

$$\mathbf{f}_i=(-1)^{i+1}m_j\omega^2\mathbf{l} \quad \text{при} \quad m_j\omega^2 l<k_im_ig \quad (i=1,2)$$
$$\mathbf{f}_i=(-1)^{i+1}k_im_ig\mathbf{e} \quad \text{при} \quad m_j\omega^2 l\geqslant k_im_ig \quad (j=3-i) \tag{4.10}$$

Уравнения (4.6) вместе с соотношениями (4.3), (4.10) полностью определяют движение системы.

Для некоторых значений параметров уравнения (4.6) были проинтегрированы численно методом Рунге – Кутта. При расчетах принималось $m_1=m_2=1$ кг, $r_1=r_2=0{,}5$ м, $k_1=k_2=0{,}02$. Результаты представлены на фиг. 5–7. Темными точками отмечены положения центра масс на плоскости движения, светлыми точками – соответствующие положения массы m_1 (с интервалом времени 1 с).

Начальная скорость центра масс V_0 системы выбиралась направленной вдоль оси Ox. Начальные значения скорости центра масс и угловой скорости вращения составляли: $V_0=1$ м/с, $\omega_0=2{,}5$ с$^{-1}$ (фиг. 5); $V_0=1$ м/с, $\omega_0=1$ с$^{-1}$ (фиг. 6); $V_0=0{,}5$ м/с, $\omega_0=2{,}5$ с$^{-1}$ (фиг. 7). Отметим, что при вращении системы против часовой стрелки центр масс отклоняется влево по ходу движения. Перед остановкой системы сначала обращается в нуль скорость одной из точек, а вторая некоторое время вращается вокруг нее до полной остановки.

Авторы благодарят Л. Д. Акуленко за полезные обсуждения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 824 с.
3. *Пожарицкий Г. К.* Исчезающие скольжения механических систем с сухим трением.– ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 558.
4. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка.– В кн.: Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967, с. 60.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.VII.1980

МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО Т
№ 4 • 1981

УДК 534

ИССЛЕДОВАН
ГАРМОНИЧЕ
ВТОРОГО П

В теории нелин
ляется амплитудно-
Большая часть иссл
ных методов расче
различных типов.
В публикуемой
тера, позволяющие
колебаний разных
риационная задача
ях на величины в
Это решение может
тельных систем [6].
На основе полу
них оценок ампли
порядка. При помо
ческого маятника
главной области не

1. Рассмотрим
с симметричным
при наличии сил

$p=$

$p\geqslant 0, d$

Условия (1.1)
ветственно и мен
ется между экст
щая сила» всегда
Пусть $x(t, A,$
$x(0, A, \omega)=-A<$
следовательно, x
$x(t, A, \omega)<0$ пр
найдется такое ω

В силу симметрич