Сделанные выше замечания не исчерпывают множества несостоятельных высказываний в рассматриваемой статье. Разъяснение большей части других вопросов, затронутых в этой статье, можно найти непосредственно в [1, 2].

В связи с работами Г. И. Баренблатта уже проведен очень подробный трудоемкий анализ, отраженный частично в печати и в статье [2]. Нет смысла теперь разбирать эту самоуверенно составленную статью Г. И. Баренблатта подробнее; отмеченных особенностей вполне достаточно для квалификации ее содержания.

Из сказанного выше вытекает следующее общее заключение.

В статье, нет ни одного замечания, ни одной новой мысли, которые можно было бы признать научноинтересными по существу проблемы, или по существу критикуемых им работ.

Может показаться странным, что Г. И. Баренблатт, зная неопровержимую критику его работ и рассматриваемой статьи, отстаивает свою полную непогрешимость и публикует эту статью. Для понимания этого его действия надо учесть, что, с одной стороны, теория трещин связана с непривычными тонкостями, а с другой,— имеется ряд лиц, не вникающих в суть этой теории, но накрепко связавших себя положительными высказываниями о работах Г. И. Баренблатта.

К сожалению, в этой обстановке самые факты опровержений и выступление с ответной критикой, независимо от существа, стали для Г. И. Баренблатта и упомянутых лиц нужной целью.

Поступило 16 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошных сред, ч. IV. Ротапринтное изд. Моск. ун-та, 1968.
2. Морозов Е. М., Партон В. З. Об одном обосновании критерия Ирвина на конце трещины. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
3. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле. ПММ, 1959, т. 5, вып. 4.
4. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids, vol. 8, 1960, No. 2.
5. Wunk M. Criteria of ductile fracture initiated by a presswrizied penny-shaped crack. Trans. ASME, Ser. E, 1967, No. 4.
6. Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиноводным концентратором. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 3.
7. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. О модуле сцепления в теории трещин. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
8. Broborg K. B. Critical review of Some theories in fracture mechanics Intern. Journ. of Fracture Mechanics, vol. 4, 1968, No. 4.
9. Баренблатт Г. И. Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.

СОПОСТАВЛЕНИЕ ДВУХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ (*Москва*)

1. Ниже, на простейшем примере развития прямолинейной трещины в условиях плоского деформированного состояния рассматриваются и сопоставляются некоторые следствия исходных допущений, положенных в основу математического описания этого явления в рамках двух разных моделей. Обе модели используют аппарат классической теории упругости. Одну из них будем называть моделью Гриффитса — Ирвина [1, 2], или кратко, моделью ГИ, а вторую модель Христиановича — Баренблатта [3, 4], или кратко, моделью ХБ. Возможны и другие модели (см., например, [5, 6]), но они в этой статье не затрагиваются.

Вопрос о соответствии моделей ГИ и ХБ натуре, т. е. насколько правильно описывают эти модели действительное распространение трещины в реальных твердых телах и в какой мере верны их исходные положения, здесь не рассматривается вовсе. Этот вопрос может служить предметом специального обсуждения с привлечением компетентных механиков-экспериментаторов и физиков. Остаются также в стороне вопросы приоритета построения моделей ГИ и ХБ и получения результатов вычислений тех или иных параметров, определяющих развитие трещин. Здесь требуется

…ва неосновательных вы-
…й части других вопросов,
…].
…нь подробный трудоем-
…Нет смысла теперь раз-
…блатта подробнее; отме-
…ее содержания.
…ино.
…ли, которые можно было
…и по существу критикуе-

…неопровержимую крити-
…полную непогрешимость
…надо учесть, что, с одной
…ии, а с другой,— имеется
…связавших себя положи-

…ержений и выступление
…в Г. И. Баренблатта и

Поступило 16 IX 1968

…ное изд. Моск. ун-та, 1968,
…ии критерия Ирвина на

…трещин в твердом теле,

…s. J. Mech. Phys. Solids,

…ressurized penny-shaped

…олосы пластичности при
…. Докл. АН СССР, 1963,

…сцепления в теории тре-

… mechanics Intern. Journ.

…ке сплошных сред. Ста-
…2.

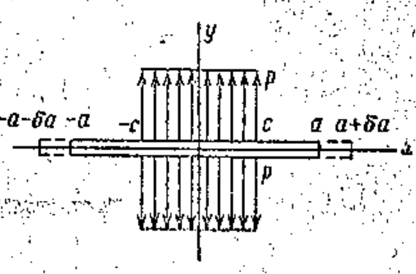
…ИЯ ТРЕЩИН

…ной трещины в условиях
…поставляются некоторые
…атематического описания
…спользуют аппарат клас-
…оделью Гриффитса — Ир-
…гиановича — Баренблатта
…н (см., например, [5, 6]),

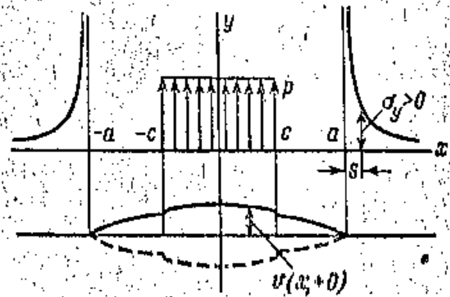
…асколько правильно опи-
…ны в реальных твердых
…е рассматривается вовсе.
…ждения с привлечением
…таются также в стороне
…ия результатов вычисле-
…рещин. Здесь требуется

скрупулезное изучение отечественных и иностранных публикаций, с точным переводом последних.

Автор выражает надежду, что статья, несмотря на элементарный характер своего содержания, поможет устранению некоторых недоразумений, проникших в часть литературы по теории трещин.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Упомянутый выше простейший пример заключается в расширении прямолинейного разреза-щели в упругой плоскости двумя распределенными усилиями интенсивности p, приложенными нормально к противоположным краям щели на фиксированном участке длиной $2c$, меньшей общей протяженности щели $2a$ (фиг. 1).

Методами математической теории упругости [7] можно построить формулу для перемещений $v(x, +0, a, p, c, \lambda, \mu)$ точек верхнего края щели в направлении, перпендикулярном к самой щели (фиг. 2).

Эта формула имеет вид

$$v(x, +0, a, p, c, \lambda, \mu) = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{p}{\pi} \left(2 \arcsin \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \right.$$

$$\left. + c \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - c^2}} \right| - x \ln \left| \frac{c\sqrt{a^2 - x^2} + x\sqrt{a^2 - c^2}}{c\sqrt{a^2 - x^2} - x\sqrt{a^2 - c^2}} \right| \right), \quad |x| \leqslant a \quad (1)$$

В свою очередь напряженное состояние упругой плоскости в точках оси x, расположенных на продолжении щели, характеризуется (фиг. 2) следующими компонентами тензора напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_y, \ \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = \frac{p}{\pi} \left[\frac{2x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \arcsin \frac{c}{a} + \arcsin \frac{a^2 - cx}{a(x - c)} - \arcsin \frac{a^2 + cx}{a(x + c)} \right], \quad x > a \quad (2)$$

Напряжение σ_y и равное ему напряжение σ_x имеют в точках оси x около концов щели интегрируемую особенность вида

$$\sigma_y = \frac{A}{\sqrt{s}} + \text{чл. в. п.} \quad (3)$$

Здесь s — расстояние между рассматриваемой точкой оси x и ближайшим концом щели, а коэффициент A выражается формулой

$$A = \frac{p\sqrt{2a}}{\pi} \arcsin \frac{c}{a} \quad (4)$$

Игнорируя наличие сколь угодно больших напряжений и как следствие сколь угодно больших деформаций в окрестности концов щели, можно определить потенциальную энергию $U = U(a, p, c, \lambda, \mu)$ всей упругой плоскости посредством теоремы Клапейрона. Имеем

$$2U(a, p, c, \lambda, \mu) = 2 \int_{-c}^{+c} pv(x, +0, a, p, c, \lambda, \mu)\, dx =$$

$$
= \frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)} \frac{p^2}{\pi} \int_0^c \left(2\sqrt{a^2-x^2} \arcsin\frac{c}{a} + c \ln \left| \frac{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2-c^2}} \right| - \right.
$$

$$
\left. - x \ln \left| \frac{c\sqrt{a^2-x^2}+x\sqrt{a^2-c^2}}{c\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{a^2-c^2}} \right| \right) dx = \frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)} \frac{p^2}{\pi} \left[a^2 \arcsin^2\frac{c}{a} + \right.
$$

$$
\left. + 2c^2 \ln\frac{a}{c} + 2c\sqrt{a^2-c^2} \arcsin\frac{c}{a} \right] \tag{5}
$$

При достаточно больших значениях равнодействующих распределенных усилий, величина каждой из которых определяется формулой

$$
P = 2pc \tag{6}
$$

у концов щели в материале упругой плоскости образуются разрывы. В обеих моделях, ГИ и ХБ, в данном случае принимается, что разрывы плоскости происходят по симметрично расположенным отрезкам, каждый из которых является продолжением первоначального прямолинейного разреза. Сумму длин этих отрезков и длины первоначального разреза будем называть длиной трещины, развившейся из данного разреза или щели и обозначать ее через $2l$. Определение длины трещины $2l$ как функции интенсивности p разрывающих распределенных усилий, длины $2c$ участка разреза, на котором они приложены, упругих постоянных плоскости λ и μ, а также некоторой величины, характеризующей в соответствующей модели прочность материала, составляет основную задачу различных теорий развития трещин применительно к рассматриваемому примеру.

3. В модели ГИ принимается, что трещина развивается из щели, если применительно к рассматриваемому примеру, элементарная работа δW обеих приложенных к краям щели распределенных сил при фиксированной их интенсивности p в результате воображаемого симметричного расширения щели на бесконечную малую длину $2\delta a$ окажется больше суммы соответствующего приращения потенциальной энергии упругой плоскости $\delta U = \delta U(a, p, c, \lambda, \mu) = \dfrac{\partial U}{\partial a}\delta a$ и так называемой элементарной работы $2\gamma\delta a$, расходуемой на разрыв материала. Таким образом, материал у конца щели начинает разрываться, если при фиксированном значении интенсивности распределенных сил p (а также длины $2c$ участка, на котором они приложены) будет иметь место неравенство

$$
\delta W = \left[\frac{\partial}{\partial a} \int_{-c}^{c} 2pv(x, +0, a, p, c, \lambda, \mu)\, dx \right] \delta a > \frac{\partial U(a, p, c, \lambda, \mu)}{\partial a} \delta a + 2\gamma\delta a \tag{7}
$$

Здесь γ — характерная для данного материала в заданных условиях его деформирования константа — удельная работа, потребная на разрыв упругой плоскости при расширении трещины. Учитывая формулу (5), приходим к следующему условию развития трещины из щели:

$$
\frac{\partial U(a, p, c, \lambda, \mu)}{\partial a} > 2\gamma \tag{8}
$$

В соответствии с моделью ГИ щель не разрывается, если в случае данного примера

$$
\frac{\partial U(a, p, c, \lambda, \mu)}{\partial a} < 2\gamma \tag{9}
$$

Очевидно, что полудлина l так называемой равновесной трещины согласно модели ГИ должна являться корнем уравнения

$$
\frac{\partial U(l, p, c, \lambda, \mu)}{\partial l} = 2\gamma \tag{10}
$$

Чтобы получить левую часть этого уравнения в развернутом виде, следует сначала вычислить частную производную от правой части формулы (5) по параметру a. Получим

$$
\frac{\partial U(p, a, c, \lambda, \mu)}{\partial a} = \frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)} \frac{p^2 a}{\pi} \arcsin^2\frac{c}{a} \tag{11}
$$

Заменяя здесь букву a на букву l, приведем уравнение (10) к виду

$$
\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} \frac{p^2 l}{\pi} \arcsin^2\frac{c}{l} = \gamma \tag{12}
$$

В рассматриваемом примере образовавшаяся равновесная трещина устойчива. В самом деле, при дальнейшем увеличении полудлины трещины l левая часть уравнения (12) убывает и оно обращается в неравенство типа (9). В силу же постулируемых свойств модели ГИ развитие трещины становится при этом невозможным

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Сопоставим выражение (4) для коэффициента A, входящего в формулу (3), с частной производной (11) от потенциальной энергии упругой плоскости по параметру a. Замечаем, что

$$\frac{\partial U}{\partial a}=\frac{\pi(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}A^2 \tag{13}$$

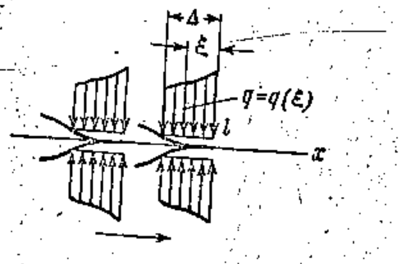
Последнее равенство выражает известный результат Ирвина [2] применительно к рассматриваемому примеру.

Формула (13), справедливая и в значительно более общих случаях действия сил на упругую плоскость при наличии в ней щели, была доказана Ирвиным иным путем.

Условие появления разрывов на конце заданной щели может быть по Ирвину представлено в виде

$$\frac{\pi(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}A^2>2\gamma \tag{14}$$

4. Другая модель, описывающая развитие трещины, именно модель ХБ, в отличие от модели ГИ имеет чисто силовой характер. Условием разрыва материала здесь принимается возникновение неограниченных (согласно формулам математической теории упругости) растягивающих напряжений вблизи конца щели или трещины. Развитие трещины останавливается (в квазистатическом случае) и трещина становится равновесной, когда напряжения в материале упругой плоскости (согласно тем же формулам теории упругости) оказываются всюду конечными, включая и области, непосредственно примыкающие к ее концам.



Фиг. 3

В модели ХБ постулируется наличие так называемых сил сцепления, возникающих при развитии трещины. Эти силы по определению стремятся соединить противоположные края трещины, при расширении последней. Они распределены по заданному извне закону

$$q=q(\xi) \tag{15}$$

где ξ — расстояние какой-либо точки на краю трещины от ближайшего конца последней (фиг. 3). Предполагается, в частности, что функция $q(\xi)$ обращается в нуль при значении аргумента ξ, большем некоторой характерной постоянной Δ, а вид самой функции не зависит от размера полудлины трещины l.

Если величины Δ намного меньше l, то при вычислении размеров трещины в рамках модели ХБ, конкретный вид самой функции $q(\xi)$ оказывается несущественным. В окончательных уравнениях участвует лишь определенный интеграл

$$\int_0^\Delta \frac{q(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi}}=K \tag{16}$$

который называется модулем сцепления. Этот результат принадлежит Г. И. Баренблатту [4].

5. Для простоты последующих выкладок примем, что силы сцепления распределены равномерно с интенсивностью

$$q(\xi)=q=\mathrm{const} \tag{17}$$

на участках щели $-a\leqslant x\leqslant -a+\Delta$ и $a-\Delta\leqslant x\leqslant a$, примыкающих к ее концам (фиг. 4).

Сохраним на участке $-c\leqslant x\leqslant c$ то же равномерно распределенные силы интенсивности p, стремящиеся раздвинуть щель (фиг. 4), что и в п. 2. При наличии описанных выше сил сцепления перемещения $v(x,+0,a,p,c,q,\Delta,\lambda,\mu)$ точек верхнего края щели в направлении, перпендикулярном к самому разрезу плоскости (фиг. 5), выражаются теперь следующей формулой:

$$v(x,+0,a,p,c,q,\Delta,\lambda,\mu)=$$

$$=\frac{\lambda+2\mu}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\left\{2\left[p\arcsin\frac{c}{a}-q\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a-\Delta}{a}\right)\right]\sqrt{a^2-x^2}+\right.$$

$$+pc\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2-c^2}}\right|-px\ln\left|\frac{c\sqrt{a^2-x^2}+x\sqrt{a^2-c^2}}{c\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{a^2-c^2}}\right|+$$

$$+ q(a-\Delta)\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2-(a-\Delta)^2}}{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2-(a-\Delta)^2}}\right| -$$

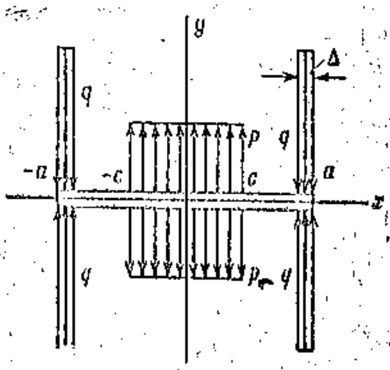
$$- qx\ln\left|\frac{(a-\Delta)\sqrt{a^2-x^2}+x\sqrt{a^2-(a-\Delta)^2}}{(a-\Delta)\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{a^2-(a-\Delta)^2}}\right|\Bigg\} \quad |x| \leqslant a \tag{18}$$

Соответственно для напряжений σ_y в точках, лежащих на оси x внутри упругой плоскости, имеет место выражение

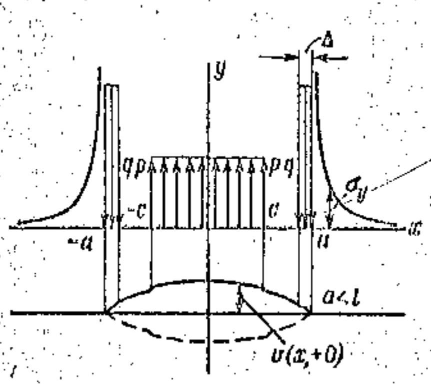
$$\sigma_y = \frac{1}{\pi}\left[p\arcsin\frac{c}{a} - q\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a-\Delta}{a}\right)\right]\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} +$$

$$+ \frac{p}{\pi}\left[\arcsin\frac{a^2-cx}{a(x-c)} - \arcsin\frac{a^2+cx}{a(x+c)}\right] +$$

$$+ \frac{q}{\pi}\left[\pi + \arcsin\frac{a^2-x(a-\Delta)}{a(x-a+\Delta)} - \arcsin\frac{a^2+x(a-\Delta)}{a(x+a-\Delta)}\right], \quad x > a \tag{19}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Так как при абсциссе x, близкой к a, значения σ_y согласно формуле (19) в общем случае неограниченно велики, то в соответствии с наделенными модели ХБ свойствами при

$$p\arcsin\frac{c}{a} - q\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a-\Delta}{a}\right) > 0 \tag{20}$$

края щели начнут разрываться вдоль оси x и она превратится в трещину. Длина трещины будет возрастать, пока в правой части формулы (19) не исчезнет член, обуславливающий появление неограниченно больших положительных (т. е. растягивающих) напряжений в упругой плоскости вблизи концов трещины. Таким образом, в случае равновесной трещины модели ХБ имеет место равенство

$$p\arcsin\frac{c}{l} - q\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{l-\Delta}{l}\right) = 0 \tag{21}$$

котороо является уравнением для отыскания ее полудлины l. Уравнение (21) в интервале $(c+\Delta, \infty)$ может иметь только один корень.

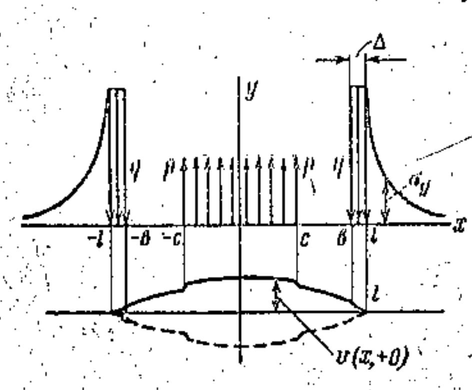
Напряжения σ_y при наличии равновесной трещины выражаются формулой

$$\sigma_y = q + \frac{p}{\pi}\left[\arcsin\frac{l^2-cx}{l(x-c)} - \arcsin\frac{l^2+cx}{l(x+c)}\right] +$$

$$+ \frac{q}{\pi}\left[\arcsin\frac{l^2-x(l-\Delta)}{l(x-l+\Delta)} - \arcsin\frac{l^2+x(l-\Delta)}{l(x+l-\Delta)}\right] \quad |x| \geqslant l \tag{22}$$

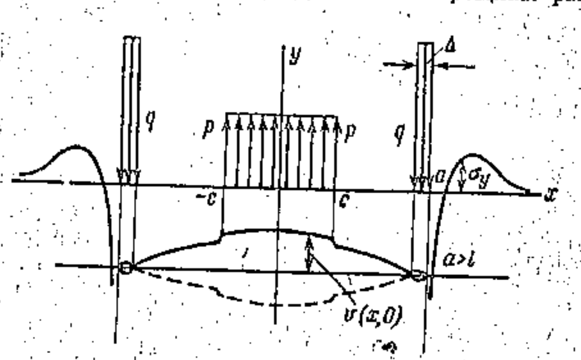
При x, обращающемся в l, величина σ_y становится равной q. Это обстоятельство в сущности и ведет к плавному смыканию краев равновесной трещины в ее концах (фиг. 6). В этом можно убедиться, учитывая равенства (21) в формуле (18), заменив предварительно в ней букву a на букву l.

6. Равновесная трещина модели ХБ (фиг. 6) в рассматриваемом примере устойчива. В самом деле, в условиях статики трещина не может иметь длину $2a$, меньшую длины $2l$ равновесной трещины, ибо в этом случае, как только что было изложено выше, материал упругой плоскости в соответствии с неравенством (20) и формулой (19) должен был бы выдерживать неограниченно большие растягивающие напряжения (фиг. 5), а это в рамках модели ХБ невозможно. С другой стороны, трещина не может иметь и длину $2a$, большую $2l$. В последнем случае знак неравенства (20) изменился бы на обратный, и в силу формулы (18) точки $(x, +0)$ верхнего края трещины вблизи ее концов получили бы отрицательные перемещения и края трещины (фиг. 7) зашли бы один за другой, что естественно, в модели ХБ не допускается.



Фиг. 6

7. Рассмотрим одно вариационное соотношение, связанное с моделью ХБ. Для этой цели на ряду с трещиной длиной $2l$ и распределенными по ее краям усилиями p и силами сцепления q так, как это было описано в п. 5 (фиг. 4), введем другую, несколько удлиненную трещину. Длина этой трещины равна $2h$ (фиг. 8),



Фиг. 7

а приложенные к ней усилия и силы сцепления те же самые. Таким образом, на участках $a \leqslant x \leqslant h$ около концов новой трещины никаких дополнительных сил сцепления не вводится.

Смещения точек верхнего края новой трещины, перпендикулярные к оси x, выражаются формулой

$$
\begin{aligned}
v(x, +0, h, a, b, c, p, q, \lambda, \mu) = \\
= \frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \Bigg\{ 2\left(p \arcsin\frac{c}{h} - q \arcsin\frac{a}{h} + q \arcsin\frac{b}{h}\right)\sqrt{h^2 - x^2} - \\
- px \ln\left|\frac{c\sqrt{h^2 - x^2} + x\sqrt{h^2 - c^2}}{c\sqrt{h^2 - x^2} - x\sqrt{h^2 - c^2}}\right| + pc \ln\left|\frac{\sqrt{h^2 - x^2} + \sqrt{h^2 - c^2}}{\sqrt{h^2 - x^2} - \sqrt{h^2 - c^2}}\right| + \\
+ qx \ln\left|\frac{a\sqrt{h^2 - x^2} + x\sqrt{h^2 - a^2}}{a\sqrt{h^2 - x^2} - x\sqrt{h^2 - a^2}}\right| - qa \ln\left|\frac{\sqrt{h^2 - x^2} + \sqrt{h^2 - a^2}}{\sqrt{h^2 - x^2} - \sqrt{h^2 - a^2}}\right| - \\
- xq \ln\left|\frac{b\sqrt{h^2 - x^2} + x\sqrt{h^2 - b^2}}{b\sqrt{h^2 - x^2} - x\sqrt{h^2 - b^2}}\right| + qb \ln\left|\frac{\sqrt{h^2 - x^2} + \sqrt{h^2 - b^2}}{\sqrt{h^2 - x^2} - \sqrt{h^2 - b^2}}\right| \Bigg\}, \quad |x| \leqslant h \qquad (23)
\end{aligned}
$$

где введено обозначение

$$
b = a - \Delta \qquad (24)
$$

Согласно теореме Клапейрона потенциальная энергия упругой плоскости при наличии в ней удлиненной трещины представляется в виде

$$2U = 2U(h, a, b, c, p, q, \lambda, \mu) = 4\int\limits_0^c pv\,dx - 4\int\limits_b^a qv\,dx = \tag{25}$$

$$= \frac{(\lambda+2\mu)}{\pi\mu(\lambda+\mu)}\left\{p^2\left(b^2\arcsin^2\frac{c}{b} + 2c^2\ln\frac{b}{c} + 2c\sqrt{b^2-c^2}\arcsin\frac{c}{b}\right) + \right.$$

$$+ 2\int\limits_b^a t\left[p\arcsin\frac{c}{t} - q\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{t}\right)\right]^2 dt + 2\int\limits_a^h t\left[p\arcsin\frac{c}{t} - \right.$$

$$\left.\left. - q\left(\arcsin\frac{a}{t} - \arcsin\frac{b}{t}\right)\right]^2 dt\right\}$$

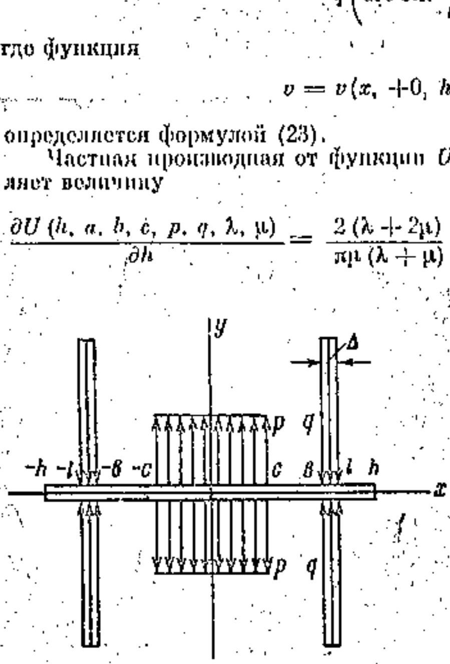
где функция

$$v = v(x, +0, h, a, b, c, p, q, \lambda, \mu) \tag{26}$$

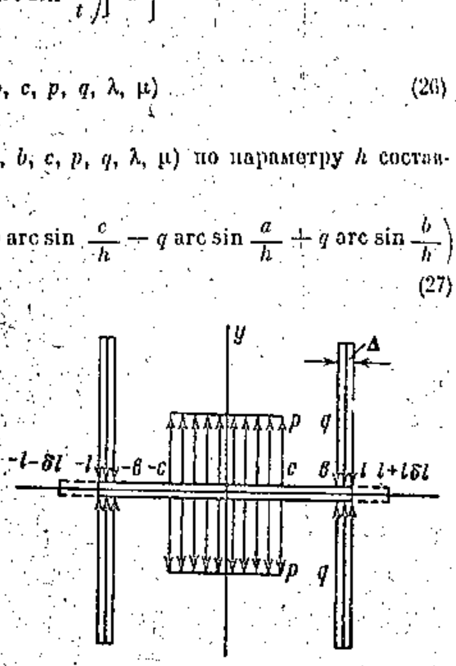
определяется формулой (23).

Частная производная от функции $U(h, a, b, c, p, q, \lambda, \mu)$ по параметру h составляет величину

$$\frac{\partial U(h, a, b, c, p, q, \lambda, \mu)}{\partial h} = \frac{2(\lambda+2\mu)}{\pi\mu(\lambda+\mu)}\,h\left(p\arcsin\frac{c}{h} - q\arcsin\frac{a}{h} + q\arcsin\frac{b}{h}\right)^2 \tag{27}$$



Фиг. 8



Фиг. 9

При неограниченном приближении полудлины h удлиненной трещины к полудлине a первоначальной трещины имеем в пределе

$$\lim_{h\to a}\frac{\partial U(h, a, b, c, p, q, \lambda, \mu)}{\partial h} = \frac{2(\lambda+2\mu)\,a}{\pi\mu(\lambda+\mu)}\left[p\arcsin\frac{c}{a} - q\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{a}\right)\right]^2 \tag{28}$$

Пусть первоначальная трещина является равновесной. Обозначим, как и ранее, ее длину через l, тогда в силу уравнения (21) и равенства (24) имеем

$$\lim_{h\to l}\frac{\partial U(h, l, b, c, p, q, \lambda, \mu)}{\partial h} = 0 \tag{29}$$

Равенство (29) можно рассматривать как уравнение для определения полудлины l равновесной трещины. Оно эквивалентно уравнению (21). Равенство (29) эквивалентно также обращению в нуль вариации δU потенциальной энергии упругой плоскости при воображаемом бесконечно малом расширении длины равновесной трещины на величину $2\delta l$ (фиг. 9) без введения каких-либо сил на участках прироста трещины (аналогично была введена вариация δa в случае модели ГИ, см. п. 3, фиг. 1).

Таким образом, равенство

$$\delta U = 0 \tag{30}$$

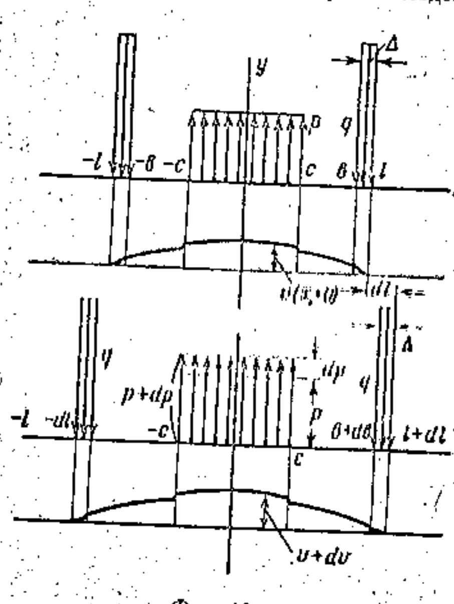
справедливо при условии полного сохранения в варьированном состоянии величин как распределенных усилий p на участке $0 < |x| < c$, так и сил сцепления q на участках $b < |x| < c$, и отсутствии сил на участках $l < |x| < l + \delta l$. Оба состояния упругой плоскости: основное, с трещиной длиной $2l$ (равновесное с точки зрения модели ХБ), и варьированное, с трещиной длиной $2l + 2\delta l$, являются состояниями равновесия упругой полуплоскости при действии одних и тех же сил p и q, но меняющих своего расположения при варьировании.

В рамках модели ХБ вариационное уравнение (30) распространяется и на более сложные случаи развития трещин.

8. Обратимся, наконец, к энергетическим соотношениям в модели ХБ в случае действительного развития трещины применительно к рассматриваемому примеру (фиг. 4). Длина равновесной трещины $2l$, как это следует из уравнения (21), определяется величиной интенсивности p распределенных сил на фиксированном участке $|x| < c$. При увеличении интенсивности p полудлина l равновесной трещины возрастает (фиг. 10), причем в соответствии с уравнением (21) имеем соотношение

$$dp = \left(c\, \frac{{}^1\!/_2 \pi - \arcsin bl^{-1}}{\sqrt{l^2 - c^2}} - \sqrt{\frac{l-b}{l+b}} \arcsin \frac{c}{l} \right) \frac{q\, dl}{l \arcsin^2 cl^{-1}} \qquad (31)$$

между дифференциалами dp и dl переменных p и l.



Фиг. 10

Элементарная работа dW, которую совершают распределенные силы при квазистатическом развитии трещины вследствие увеличения их интенсивности p на бесконечно малую величину dp, выражается формулой

$$dW = \int_{-c}^{+c} 2p \left[\left(\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial l} \frac{dl}{dp} \right) dp \right] dx \qquad (32)$$

где $v = v(x, +0, l, p, c, q, \Delta, \lambda, \mu)$ — функция, которая в случае равновесной трещины имеет вид

$$v(x, +0, l, p, c, q, \Delta, \lambda, \mu) = \frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \left\{ pc \ln \left| \frac{\sqrt{l^2 - x^2} + \sqrt{l^2 - c^2}}{\sqrt{l^2 - x^2} - \sqrt{l^2 - c^2}} \right| - \right.$$

$$- px \ln \left| \frac{c\sqrt{l^2 - x^2} + x\sqrt{l^2 - c^2}}{c\sqrt{l^2 - x^2} - x\sqrt{l^2 - c^2}} \right| + qb \ln \left| \frac{\sqrt{l^2 - x^2} + \sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{l^2 - x^2} - \sqrt{l^2 - b^2}} \right| -$$

$$\left. - qx \ln \left| \frac{b\sqrt{l^2 - x^2} + x\sqrt{l^2 - b^2}}{b\sqrt{l^2 - x^2} - x\sqrt{l^2 - b^2}} \right| \right\}, \quad b = l - \Delta \qquad (33)$$

Чтобы вывести последнюю формулу, достаточно в правой части формулы (18) учесть соотношение (21), предварительно заменив букву a на l. В свою очередь изменение dU потенциальной энергии упругой плоскости при развитии равновесной трещины представляется формулой

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial p} \right) dp \qquad (34)$$

Здесь $U = U(l, p, c, q, \Delta, \lambda, \mu)$ — следующее выражение потенциальной энергии упругой плоскости при наличии в ней трещины, описываемой моделью ХБ

$$U(l, p, c, q, \Delta, \lambda, \mu) = \frac{\lambda + 2\mu}{\pi\mu(\lambda + \mu)} \left\{ p^2 \left(b^2 \arcsin^2 \frac{c}{b} + 2c^2 \ln \frac{b}{c} + \right. \right.$$

$$+ 2c\sqrt{b^2-c^2}\arcsin\frac{c}{b}\Big) + \int_b^l 2t\left[p\arcsin\frac{c}{t} - q\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{t}\right)\right]^2 dt\Big\},\quad b = l - \Delta \tag{35}$$

Для получения этой формулы следует положить $h = a = l$ в формуле (25) предыдущего п. 7. При $b = l$ ее правая часть обращается в выражение (5) для потенциальной энергии упругой плоскости, с разрезом длиной $2l$, нагруженной по схеме фиг. 1.

Очевидно, что элементарная работа dW сил, расширяющих равновесную трещину, расходуется на изменение потенциальной энергии упругой плоскости и на преодоление сопротивления сил сцепления при дополнительном разрыве плоскости на длину $2\delta l$.

Следовательно

$$dR = dW - dU = \left[2p\int_{-c}^{+c}\left(\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial l}\frac{dl}{dp}\right)dx - \left(\frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial l}\frac{dl}{dp}\right)\right]\frac{dp}{dl}\,dl \tag{36}$$

где dR — элементарная работа, затрачиваемая на собственно развитие трещины.

Множитель, который стоит в правой части последнего равенства перед дифференциалом dl, можно выразить через параметры примера, если использовать формулы (33) и (35) для функций $v = v(x, +0, l, p, c, q, \Delta, \lambda, \mu)$ и $U = U(l, p, c, q, \Delta, \lambda, \mu)$, а также соотношение

$$b = l - \Delta \tag{37}$$

После преобразований и упрощений получим для упомянутого множителя — удвоенной удельной работы, идущей на развитие трещины в модели ХБ, выражение

$$2\gamma(l, \Delta, q, \lambda, \mu) = \frac{4(\lambda + 2\mu)}{\pi\mu(\lambda + \mu)}\left\{q^2\left[\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{l}\right)\sqrt{l^2 - b^2} + b\ln\frac{b}{l}\right] + \right.$$
$$\left. + q\frac{dp}{dl}\int_b^l t\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{t}\right)\arcsin\frac{c}{t}\,dt\right\} \tag{38}$$

Соотношение

$$dR = 2\gamma dl \tag{39}$$

аналогично соотношению (10) в модели ГИ. Однако здесь величина 2γ оказывается зависящей от ряда параметров и, в частности, от полудлины l равновесной трещины. (Заметим, что формула (36) справедлива и для подсчета работы, идущей на собственно развитие трещины при возрастании интенсивности p распределенных разрывающих сил, приложенных на участке $-c < x < c$ в модели ГИ. В этом случае v и U определяются формулами (1) и (5), а полудлина l и интенсивность p связаны соотношением (12). Учитывая формулу (10), получим для модели ГИ тоже соотношение (39), однако в нем величина γ будет характерной константой этой модели.)

Будем стремить к нулю размер Δ участков, на которых согласно модели ХБ проявляют себя силы сцепления. Одновременно будем увеличивать интенсивность q сил сцепления так, чтобы оставался неизменным модуль сцепления K, введенный выше посредством формулы (16). При $q = \mathrm{const}$ этот модуль представляется в виде

$$K = 2q\sqrt{\Delta} \tag{40}$$

В пределе получим для удельной работы (28) выражение

$$\gamma = \frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)}K^2 \tag{41}$$

Уравнение (21) в этом предельном случае, т. е. при стремлении величины Δ к нулю, принимает вид

$$p\arcsin\frac{c}{l} = \frac{K}{\sqrt{2l}} \tag{42}$$

Оно обращается в уравнение (12) модели ГИ, если посредством равенства (41) исключить из него модуль сцепления K.

Таким образом, в рассматриваемом примере результаты расчета длины равновесной трещины при использовании модели ГИ являются предельными по отношению к результатам расчета в рамках модели ХБ.

9. Пример, рассмотренный выше, позволил выяснить основные особенности моделей ГИ и ХБ и сопоставить их друг другу посредством фактического вычисления напряженного и деформированного состояний, а также упругой энергии, относящихся каждый раз к конкретному случаю нагружения упругой плоскости по краям ее пря-

линейного разреза. Сделанные заключения сохраняются, разумеется, и в несравненно более общей постановке задачи (см., например, [4] и [5]). В частности, если на участке прямолинейной щели $-a < x < a \leq c$ (фиг. 1) вместо равномерно распределенных разрывающих сил приложены силы произвольной переменной интенсивности $p(x) = p(-x)$, то щель, согласно модели ГИ, начнет превращаться в трещину при условии

$$\frac{(\lambda + 2\mu)\, a}{2\pi\mu\, (\lambda + \mu)} \left(\int\limits_{-c}^{+c} \frac{p(x)\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)^2 > \gamma \tag{43}$$

Отсюда следует, что длина равновесной трещины $2l$ может быть найдена в результате решения уравнения

$$\frac{2(\lambda + 2\mu)\, l}{\pi\mu\, (\lambda + \mu)} \left(\int\limits_0^c \frac{p(x)\, dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} \right)^2 = \gamma \tag{44}$$

При $p(x) = p = \text{const}$ оно обращается в уравнение (12) п. 3.

Соответственно в модели ХБ (фиг. 4) полудлина l равновесной трещины является корнем уравнения

$$\int\limits_0^l \frac{p(x)\, dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} - 2 \int\limits_{l-\Delta}^{l} \frac{q(l - x)\, dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = 0, \quad q(l - x) = q(\xi) \tag{45}$$

выражающего отсутствие в упругом теле неограниченно больших напряжений. Здесь $q(\xi)$ заданный закон (фиг. 3) распределения сил сцепления на участках, примыкающих к концам трещины. При $p(x) = p = \text{const}$ и $q(\xi) = q = \text{const}$ уравнения (45) и (21) п. 5 эквивалентны.

При малых, по сравнению с l значениях величины Δ второй интеграл левой части уравнения (45) представляется в виде

$$\int\limits_{l-\Delta}^{l} \frac{q(l - x)\, dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \int\limits_0^{\Delta} \frac{q(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\xi\, (2l - \xi)}} = \frac{1}{\sqrt{2l}} K + \text{чл. в. п} \tag{46}$$

где K — модуль сцепления, определенный в п. 4 формулой (16). Сопоставляя формулы (44), (45), (46) и учитывая обозначение (41), вновь убеждаемся, что уравнение (44) для определения длины равновесной трещины в рамках модели ГИ является предельным по отношению к аналогичному уравнению (45) модели ХБ.

Возникает естественный вопрос, чем следует руководствоваться при выборе той или иной модели для изучения математической стороны явления распространения трещин в твердом теле, учитывая, что числовые расчеты длины равновесных трещин в упругих телах приводят в обеих моделях практически к одним и тем же результатам. Ответ на этот вопрос следует искать в степени пригодности моделей ГИ и ХБ, а также других, внутренне не противоречивых моделей для феноменологического исследования развития трещин в усложненных условиях, например, в случае тел несовершенной упругости, где, как известно, затрата энергии на собственно развитие трещины может оказаться несравненно меньше необратимого расхода энергии на деформирование самого тела.

Поступило 4 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Phil. trans. Roy. Soc., 1920, A 221, p. 163—198.
2. Irwin G. R. Fracture dynamics, in «Fracturing of Metals», ASM, Cleveland, 1948, p. 147—166.
3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5, стр. 3—41.
4. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3—5.
5. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развиток найдрібніших тріщин в твердому тілі. Прикладна механіка, АН УССР, 1959, № 5, стр. 391—401.
6. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8, No. 2, p. 100—104.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.