Прикладная математика и механика. Том 30, 1966, 6, 1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ НА СТРУНЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЦЕЛИКОМ НАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

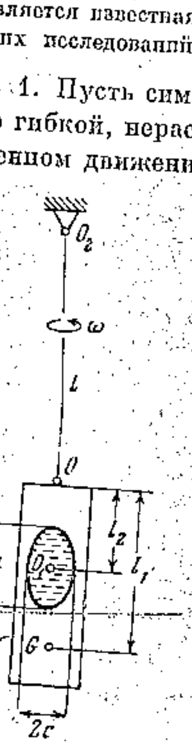
А. Ю. Ишлинский, М. Е. Темченко

(Москва, Киев)

В предлагаемом исследовании устойчивости вращения на струне твердого тела с полостью, наполненной идеальной жидкостью, вновь применяется метод, развитый в [1]. Сущность этого метода заключается в описании движения жидкости по отношению к системе координат, связанной с самим твердым телом, совершающим движение при воздействии на него жидкости, собственной тяжести, а также сил реакций связи.

Задача, рассмотренная ниже, в случае отсутствия жидкости была предметом исследования в [2]. Другим ее предельным случаем при длине струны, равной нулю, является известная задача С. Л. Соболева, исследованная в [1,3]. Отдельные приемы этих исследований ниже используются.

1. Пусть симметричное твердое тело, будучи подвешенным на идеально гибкой, нерастяжимой и безынерционной струне длиною l, в невозмущенном движении вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (фиг. 1). Внутри тела имеется полость формы эллипсоида вращения, целиком заполненная идеальной несжимаемой жидкостью. Оси симметрии полости и самого тела совпадают. В невозмущенном движении жидкость вращается вместе с телом, образуя с ним как бы единое твердое целое. Требуется исследовать устойчивость такого стационарного движения.



Фиг. 1

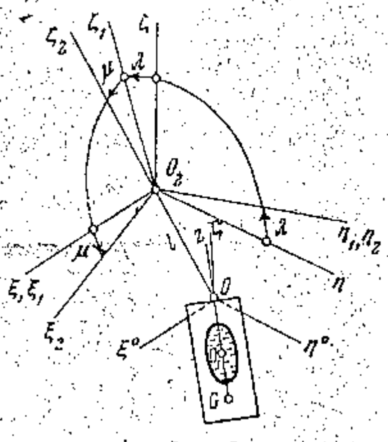
2. Обратимся вначале к выводу дифференциальных уравнений движения рассматриваемого тела, предполагая, что это движение мало отличается от упомянутого стационарного вращения вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω.

Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ с вертикально направленной осью ζ и началом O_2 в точке крепления струны к неподвижному основанию, а также поступательно перемещающуюся систему $\xi^\circ\eta^\circ\zeta^\circ$ с началом O в точке крепления тела к струне (фиг. 2). Соответствующие оси этих систем параллельны.

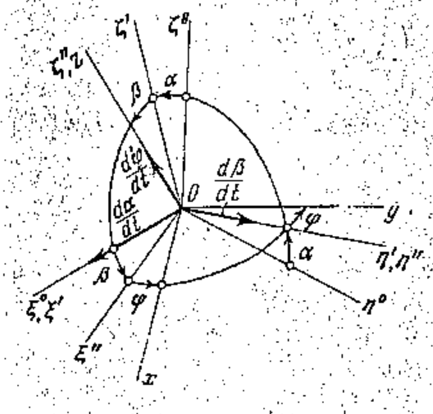
В точке O расположим также начало системы координат xyz, жестко связанной с телом. Ось z этой системы направим по оси симметрии тела и полости, а оси x и y расположим в плоскости, перпендикулярной оси z, так, чтобы они вместе с этой осью образовывали правую систему координат.

Положение струны по отношению к системе $\xi\eta\zeta$ определим двумя углами λ и μ; при этом λ — угол между осью ζ и проекцией на плоскость $\eta\zeta$ прямой, направленной по струне вверх; μ — угол между этой прямой и плоскостью $\eta\zeta$ (фиг. 2).

Положение твердого тела по отношению к системе $\xi^\circ\eta^\circ\zeta^\circ$ определим тремя углами Эйлера — Крылова (фиг. 3): углом α между осью ζ° и



Фиг. 2



Фиг. 3

проекцией оси симметрии тела (оси z) на плоскость $\eta^\circ\zeta^\circ$, углом β — между осью z и той же плоскостью $\eta^\circ\zeta^\circ$ и, наконец, углом φ между осью x и вспомогательной осью ξ'', образующей прямой угол с осью z и содержащейся в плоскости $\xi^\circ z$.

Таблица косинусов углов между осями систем координат $\xi\eta\zeta$ и xyz или (что то же) между осями $\xi^\circ\eta^\circ\zeta^\circ$ и xyz в рассматриваемом случае имеет вид

	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta\cos\varphi$	$\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi$	$-\sin\beta\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi$
y	$-\cos\beta\sin\varphi$	$-\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi$	$\sin\beta\cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi$
z	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$

(2.1)

Нетрудно убедиться, используя фиг. 3, что проекции ω_x, ω_y и ω_z угловой скорости системы координат xyz на ее же собственные оси будут следующими:

$$\omega_x = \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\cos\varphi + \frac{d\beta}{dt}\sin\varphi$$
$$\omega_y = -\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\sin\varphi + \frac{d\beta}{dt}\cos\varphi \qquad (2.2)$$
$$\omega_z = \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta + \frac{d\varphi}{dt}$$

Для дальнейшего полезно также определить в системе $\xi\eta\zeta$ координаты точки O — крепления тела к струне. Имеем

$$\xi_0 = -l\sin\mu, \quad \eta_0 = l\cos\mu\sin\lambda, \quad \zeta_0 = -l\cos\mu\cos\lambda \qquad (2.3)$$

Выражение для живой силы твердого тела можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + m \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_G & y_G & z_G \\ (v_0)_x & (v_0)_y & (v_0)_z \end{vmatrix} + \frac{1}{2} [(A + ml_1^2)(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2] \tag{2.4}$$

Здесь m — масса твердого тела; $A + ml_1^2 = B + ml_1^2$ и C — его моменты инерции соответственно относительно осей x, y и z; v_0 — абсолютная скорость начала координат O; x_G, y_G, z_G — координаты центра тяжести тела в системе xyz; l_1 — расстояние от центра тяжести тела до точки крепления его к струне (фиг. 1).

Учитывая выражение (2.4), формулы (2.2) и (2.3), получим явное представление живой силы через обобщенные координаты α, β, λ, μ и обобщенные скорости $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$, $d\lambda/dt$, $d\mu/dt$, $d\varphi/dt$ (обобщенная координата φ — циклическая), именно

$$T = \frac{1}{2} m\left[l^2 \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + l^2 \cos^2\mu \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right] + ml_1 l \frac{d\alpha}{dt} \cos\beta \left[\frac{d\mu}{dt} \sin\mu \sin(\alpha - \lambda) + \right.$$

$$\left. + \frac{d\lambda}{dt} \cos\mu \cos(\alpha - \lambda)\right] + ml_1 l \frac{d\beta}{dt}\left[\frac{d\mu}{dt} \cos\beta \cos\mu + \right.$$

$$\left. + \frac{d\mu}{dt} \sin\mu \sin\beta \cos(\alpha - \lambda) - \frac{d\lambda}{dt} \cos\mu \sin\beta \sin(\alpha - \lambda)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(A + ml_1^2)\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \cos^2\beta + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{2} C \left[\frac{d\alpha}{dt} \sin\beta + \frac{d\varphi}{dt}\right]^2 \tag{2.5}$$

Составим теперь уравнения движения твердого тела посредством второй методы Лагранжа. Ограничиваясь малыми первого порядка относительно координат λ, μ, α, β и их производных по времени, придем к следующей совокупности линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$ml\left(l \frac{d^2\lambda}{dt^2} + l_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) = Q_\lambda, \quad ml\left(l \frac{d^2\mu}{dt^2} + l_1 \frac{d^2\beta}{dt^2}\right) = Q_\mu$$

$$A \frac{d^2\alpha}{dt^2} + C\beta \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\beta}{dt} + ml_1\left(l \frac{d^2\lambda}{dt^2} + l_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) = Q_\alpha \tag{2.6}$$

$$A \frac{d^2\beta}{dt^2} - C \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + ml_1\left(l \frac{d^2\mu}{dt^2} + l_1 \frac{d^2\beta}{dt^2}\right) = Q_\beta$$

$$C \frac{d}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = Q_\varphi.$$

3. Правые части уравнений (2.6) представляют собой обобщенные силы, отвечающие выбранным независимым координатам твердого тела. Они являются коэффициентами при вариациях соответствующих обобщенных координат в выражении элементарной работы δW действующих на тело активных сил при его произвольном возможном перемещении. Имеем [4]

$$\delta W = \mathbf{P}\delta\mathbf{r}_0 + \mathbf{L}_0\delta\boldsymbol{\gamma} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{P}$ — главный вектор всех активных сил, приложенных к телу, а $\mathbf{L}_0$ — их главный момент относительно точки O; $\delta\mathbf{r}_0$ — возможное смещение точки O; $\delta\boldsymbol{\gamma}$ — вектор возможного поворота тела.

Обозначим через P_ξ, P_η, P_ζ проекции вектора $\mathbf{P}$ на оси ξ, η, ζ и через L_α, L_β, L_φ — суммы моментов активных сил, соответственно относительно осей ξ°, η' и z (фиг. 3).

Тогда при малых углах α и β получим для δW выражение

$$\delta W = P_\xi \delta\xi_0 + P_\eta \delta\eta_0 + P_\zeta \delta\zeta_0 + L_\alpha \delta\alpha + L_\beta \delta\beta + L_\varphi \delta\varphi \qquad (3.2)$$

или, при использовании формул (2.3), считая, как и ранее углы λ и μ также малыми

$$\delta W = l(P_\eta + \lambda P_\zeta)\,\delta\lambda + l(P_\zeta \mu - P_\xi)\,\delta\mu + L_\alpha \delta\alpha + L_\beta \delta\beta + L_\varphi \delta\varphi \qquad (3.3)$$

Из последнего выражения следует

$$Q_\lambda = l(P_\eta + \lambda P_\zeta), \quad Q_\mu = l(P_\zeta \mu - P_\xi), \quad Q_\alpha = L_\alpha, \quad Q_\beta = L_\beta, \quad Q_\varphi = L_\varphi \qquad (3.4)$$

Активными силами, действующими на тело, являются сила тяжести mg и силы воздействия на тело со стороны заключенной в нем жидкости. Отсюда, в частности, следует, что обобщенная сила Q_φ равна нулю. Действительно, она представляет собой сумму моментов силы тяжести и сил давления жидкости относительно оси z. Однако, в силу симметрии, центр тяжести тела расположен на оси z, а вектор удельного давления жидкости на тело всюду эту ось пересекает.

Учитывая таблицу косинусов (2.1), формулы (3.3) и малость углов α, β, λ и μ, уравнения движения (2.6) можно представить в виде

$$\begin{gathered}
ml\left(l\frac{d^2\lambda}{dt^2} + l_1\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) = -mgl\lambda + l\,[F_x \sin\varphi + F_y \cos\varphi - F_z\alpha] + lF_z\lambda \\
ml\left(l\frac{d^2\mu}{dt^2} + l_1\frac{d^2\beta}{dt^2}\right) = -mgl\mu - l\,[F_x \cos\varphi - F_y \sin\varphi + F_z\beta] + lF_z\mu \\
(A + ml_1^2)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + ml_1 l\frac{d^2\lambda}{dt^2} + C\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\beta}{dt} = -mgl_1\alpha + M_x\cos\varphi - M_y\sin\varphi \\
(A + ml_1^2)\frac{d^2\beta}{dt^2} + ml_1 l\frac{d^2\mu}{dt^2} - C\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = -mgl_1\beta + M_x\sin\varphi + M_y\cos\varphi \\
C\frac{d}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = 0
\end{gathered} \qquad (3.5)$$

В этих уравнениях, помимо величин, уже встречавшихся ранее, g — ускорение силы тяжести и

$$F_x = \iint_\sigma p^* \cos xv\, d\sigma, \quad F_y = \iint_\sigma p^* \cos yv\, d\sigma, \quad F_z = \iint_\sigma p^* \cos zv\, d\sigma \qquad (3.6)$$

проекции на оси x, y и z главного вектора сил давления жидкости на тело.

В свою очередь,

$$M_x = \iint_\sigma (p^* y \cos zv - p^* z \cos yv)\, d\sigma, \quad M_y = \iint_\sigma (p^* z \cos xv - p^* x \cos zv)\, d\sigma \qquad (3.7)$$

— проекции соответственно на оси x и y главного момента упомянутых выше сил относительно точки подвеса O. Интегрирование в соотношениях (3.6) и (3.7) ведется по границе полости σ; $\cos xv$, $\cos yv$ и $\cos zv$ — направляющие косинусы внешней нормали v к поверхности полости; x, y и z — текущие координаты элемента поверхности $d\sigma$.

Формулы (3.6) и (3.7) (см. [5]) можно заменить следующими

$$F_x = \iiint\limits_{\tau} \frac{\partial p^*}{\partial x}\, d\tau, \qquad F_y = \iiint\limits_{\tau} \frac{\partial p^*}{\partial y}\, d\tau; \qquad F_z = \iiint\limits_{\tau} \frac{\partial p^*}{\partial z}\, d\tau \tag{3.8}$$

$$M_x = \iiint\limits_{\tau} \left(y \frac{\partial p^*}{\partial z} - z \frac{\partial p^*}{\partial y}\right) d\tau, \qquad M_y = \iiint\limits_{\tau} \left(z \frac{\partial p^*}{\partial x} - x \frac{\partial p^*}{\partial z}\right) d\tau \tag{3.9}$$

Здесь уже интегрирование производится по всему объёму полости τ.

4. Для определения давления p^* внутри жидкости, как функции координат x, y, z и времени t, следует обратиться к уравнениям движения жидкости по отношению к подвижной системе координат xyz, жестко связанной с твердым телом. В этих уравнениях будем считать малыми проекции u_x, u_y, u_z относительной скорости какой-либо частицы жидкости и их производные по координатам. Пренебрегая, кроме того, произведениями упомянутых малых величин, получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} - w_x^e - w_x^c - g \cos \zeta x \qquad (xyz) \tag{4.1}$$

Символ (xyz) означает, что две другие формулы получаются циклической перестановкой; w_x^e, w_y^e, w_z^e — проекции на оси x, y, z переносного и w_x^c, w_y^c, w_z^c — кориолисова ускорений частицы жидкости; $\cos \zeta x$, $\cos \zeta y$, $\cos \zeta z$ — направляющие косинусы оси ζ в системе координат xyz. Последние с точностью до членов второго порядка относительно малых углов α и β равны соответственно величинам $\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi$, $\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi$ и 1 (фиг. 3 и (2.1)). Для проекций переносного ускорения имеем формулы

$$w_x^e = w_x^0 + \frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y + \omega_x (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 x \qquad (xyz) \tag{4.2}$$

Здесь w_x^0, w_y^0, w_z^0 — проекции на оси x, y, z абсолютного ускорения точки O — начала системы координат xyz, которые с точностью до малых второго порядка относительно производных углов α, β, λ и μ представляются выражениями (4.3)

$$w_x^0 = -l \frac{d^2\mu}{dt^2} \cos \varphi + l \frac{d^2\lambda}{dt^2} \sin \varphi, \qquad w_y^0 = l \frac{d^2\mu}{dt^2} \sin \varphi + l \frac{d^2\lambda}{dt^2} \cos \varphi, \qquad w_z^0 = 0$$

С той же точностью, согласно формулам (2.2), имеем (4.4)

$$\omega_x = \frac{d\alpha}{dt} \cos \varphi + \frac{d\beta}{dt} \sin \varphi, \qquad \omega_y = -\frac{d\alpha}{dt} \sin \varphi + \frac{d\beta}{dt} \cos \varphi, \qquad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

Из последнего уравнения (3.5) следует, что $\omega = \mathrm{const}$ и, если опустить несущественную константу, $\varphi = \omega t$. Опуская, кроме того, в выражениях (4.2) члены второго порядка относительно ω_x и ω_y (имеющих порядок величин $d\alpha / dt$ и $d\beta / dt$), а также члены, содержащие производную ω_z по времени, получим

$$\begin{aligned} w_x^e &= -l \frac{d^2\mu}{dt^2} \cos \varphi + l \frac{d^2\lambda}{dt^2} \sin \varphi + \frac{d\omega_y}{dt} z + \omega\omega_x z - \omega^2 x \\ w_y^e &= l \frac{d^2\mu}{dt^2} \sin \varphi + l \frac{d^2\lambda}{dt^2} \cos \varphi - \frac{d\omega_x}{dt} z + \omega\omega_y z - \omega^2 y \\ w_z^e &= \frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x + \omega\omega_x x + \omega\omega_y y \end{aligned} \tag{4.5}$$

Проекции кориолисова ускорения на оси x, y и z будут равны [4]

$$w_x^c = 2(\omega_y u_z - \omega_z u_y), \quad w_y^c = 2(\omega_z u_x - \omega_x u_z), \quad w_z^c = 2(\omega_x u_y - \omega_y u_x) \tag{4.6}$$

Здесь также следует опустить члены, содержащие множителями ω_x и ω_y, и положить $\omega_z = \omega$

С учетом формул (4.2) и (4.6) уравнения (4.1) приводятся к виду:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - 2\omega u_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x} - 2z\frac{d\omega_y}{dt} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + 2\omega u_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y} + 2z\frac{d\omega_x}{dt}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial z}$$

В них (4.8)

$$p_1 = p^* + \rho\left[\omega z(x\omega_x + y\omega_y) - {}^1/_2\omega^2(x^2 + y^2)\right] + \rho g\left[x(\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi) + \right.$$
$$\left. + y(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi) + z\right] + \rho(xw_x^0 + yw_y^0 + zw_z^0) + \rho z\left(y\frac{d\omega_x}{dt} - x\frac{d\omega_y}{dt}\right)$$

и ω_x, ω_y, w_x^0, w_y^0, w_z^0 определяются согласно равенствам (4.3) и (4.4).

Функции u_x, u_y, u_z должны, кроме того, удовлетворять условию несжимаемости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{4.9}$$

и граничному условию

$$u_x \cos x\nu + u_y \cos y\nu + u_z \cos z\nu = 0 \tag{4.10}$$

Последнее означает обращение в нуль проекции относительной скорости частицы жидкости, соприкасающейся с границей полости, на нормаль к ней.

5. Следуя С. Л. Соболеву [3], ищем u_x, u_y и u_z в виде (5.1)

$$u_x = U_x(t)(z + l_2), \quad u_y = U_y(t)(z + l_2), \quad u_z = -\frac{c^2}{a^2}\left[xU_x(t) + yU_y(t)\right]$$

Здесь $U_x(t)$ и $U_y(t)$ — функции времени, подлежащие определению [1]; l_2 — расстояние между центром эллипсоидальной полости и началом системы координат xyz (фиг. 1).

Обозначим буквами a и c соответственно большую и малую полуоси эллипсоидальной полости. Тогда ее уравнение приобретает вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{(z + l_2)^2}{c^2} = 1 \tag{5.2}$$

а направляющие косинусы нормали ν в системе координат xyz будут следующими:

$$\cos x\nu = \frac{xc^2}{D}, \quad \cos y\nu = \frac{yc^2}{D}, \quad \cos z\nu = \frac{a^2(z + l_2)}{D} \tag{5.3}$$

$$D = \sqrt{c^4(x^2 + y^2) + a^4(z + l_2)^2} \tag{5.4}$$

Путем непосредственной подстановки соотношений (5.1) и (5.3) в граничное условие (4.10) и условие несжимаемости (4.9) убеждаемся, что последние удовлетворяются тождественно.

[1] Ср. также замечание в начале статьи [1].

Обратимся теперь к рассмотрению системы (4.7). Умножим первое ее уравнение на $\cos x\nu$, второе — на $\cos y\nu$, а третье — на $\cos z\nu$ и сложим. Тогда при использовании выражений (5.1) и (5.3) имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{2c^2}{D} z \left\{ x\left[\omega U_y(t) - \frac{d\omega_y}{dt}\right] + y\left[-\omega U_x(t) + \frac{d\omega_x}{dt}\right]\right\} + \\ + \frac{2c^2 l_2 \omega}{D}\left[xU_y(t) - yU_x(t)\right] \tag{5.5}$$

Последнее соотношение обратится в тождество, если в нем положить

$$p_1 = \rho z\left[xP^*(t) + yQ^*(t)\right] + \rho\left[xP_1^*(t) + yQ_1^*(t)\right] \tag{5.6}$$

и функции $P^*(t)$, $P_1^*(t)$, $Q^*(t)$ и $Q_1^*(t)$ выбрать следующими:

$$P^*(t) = \frac{2c^2}{a^2+c^2}\left[\omega U_y(t) - \frac{d\omega_y}{dt}\right], \qquad P_1^*(t) = \frac{2l_2}{a^2+c^2}\left[a^2\frac{d\omega_y}{dt} + \omega U_y(t)c^2\right]$$
$$Q^*(t) = \frac{2c^2}{a^2+c^2}\left[-\omega U_x(t) + \frac{d\omega_x}{dt}\right], \qquad Q_1^*(t) = -\frac{2l_2}{a^2+c^2}\left[a^2\frac{d\omega_x}{dt} + \omega U_x(t)c^2\right] \tag{5.7}$$

Умножим теперь второе уравнение системы (4.7) на $i = \sqrt{-1}$ и сложим с первым. Тогда при использовании равенств (5.1), (5.6), (5.7) и сокращении на выражение $z + l_2$ получим соотношение, необходимое в дальнейшем для определения функций $U_x(t)$ и $U_y(t)$, именно

$$\left[(a^2+c^2)\frac{d}{dt} + 2\omega a^2 i\right]\left[U_x(t) + iU_y(t)\right] = 2a^2 i\left(\frac{d\omega_x}{dt} + i\frac{d\omega_y}{dt}\right) \tag{5.8}$$

6. Обратимся теперь к рассмотрению системы (3.5). Умножим второе и четвертое ее уравнения на $i = \sqrt{-1}$ и сложим соответственно первое уравнение со вторым, а третье — с четвертым. Введем далее комплекснозначные функции действительного переменного t

$$\zeta^* = \alpha + i\beta, \qquad z^* = \lambda + i\mu \tag{6.1}$$

Тогда, при учете третьего равенства (4.4), имеем

$$(A + ml_1^2)\frac{d^2\zeta^*}{dt^2} - iC\omega\frac{d\zeta^*}{dt} + ml_1 l\frac{d^2 z^*}{dt^2} + mgl_1\zeta^* = (M_x + iM_y)e^{i\omega t}$$
$$m\left(l\frac{d^2 z^*}{dt^2} + l_1\frac{d^2\zeta^*}{dt^2}\right) + (mg - F_z)z^* = -i(F_x + iF_y)e^{i\omega t} - F_z\zeta^* \tag{6.2}$$

Вычислим выражения $F_x + iF_y$, F_z, $M_x + iM_y$, которые стоят в правых частях системы (6.2). Для этой цели в формулы (3.8) и (3.9) подставим выражение для давления p^*, которое можно получить, исключая переменную p_1 из соотношений (4.8) и (5.6). Далее следует учесть, что

$$\iiint_\tau \rho xz\,d\tau = \iiint_\tau \rho xy\,d\tau = \iiint_\tau \rho zy\,d\tau = 0, \quad \iiint_\tau \rho(x^2 - y^2)\,d\tau = 0$$
$$\iiint_\tau \rho x\,d\tau = \iiint_\tau \rho y\,d\tau = 0, \quad \iiint_\tau \rho\,d\tau = m_1, \quad \iiint_\tau \rho z\,d\tau = -m_1 l_2 \tag{6.3}$$
$$\iiint_\tau \rho(z^2 - y^2)\,d\tau = \iiint_\tau \rho(z^2 - x^2)\,d\tau = \frac{4}{15}\pi\rho a^2 c(c^2 - a^2) + m_1 l_2^2$$

Здесь, кроме обозначений, уже встречавшихся ранее, ρ и m_1 — соответственно удельная плотность и масса жидкости, заполняющей эллипсоидальную полость твердого тела.

Если, кроме того, заметить, что, согласно формулам (4.3), (4.4) и (6.1),

$$\omega_x + i\omega_y = \frac{d\zeta^*}{dt} e^{-i\omega t}, \qquad w_x{}^0 + iw_y{}^0 = il\frac{d^2z^*}{dt^2} e^{-i\omega t} \tag{6.4}$$

то после сравнительно несложных выкладок и использования равенств (5.7), (5.8) получим искомое выражение для $F_x + iF_y$ и F_z

$$F_x + iF_y = -m_1 i\left[l\frac{d^2z^*}{dt^2} + l_2\frac{d^2\zeta^*}{dt^2} + g\zeta^*\right]e^{-i\omega t}, \qquad F_z = -m_1 g \tag{6.5}$$

а также дифференциальное соотношение для $M_x + iM_y$, именно,

$$M_x + iM_y = k\frac{i(c^2-a^2)\,d^3\zeta^*/dt^3 + 2\omega c^2\,d^2\zeta^*/dt^2 + (a^2+c^2)\,\omega^2\,d\zeta^*/dt}{(a^2+c^2)\,d/dt + 2i\omega a^2}\,e^{-i\omega t} -$$

$$-\left[m_1 l_2{}^2\frac{d^2\zeta^*}{dt^2} + m_1 g l_2\zeta^* + m_1 l_2 l\,\frac{d^2z^*}{dt^2} + i\omega k\frac{d\zeta^*}{dt}\right]e^{-i\omega t} \tag{6.6}$$

в котором

$$k = {}^4/_{15}\pi\rho a^2 c\,(c^2 - a^2) \tag{6.7}$$

7. Исключая из уравнений (6.2) величины $F_x + iF_y$, F_z и $M_x + iM_y$ посредством формул и соотношений (6.5) и (6.6) получим систему уравнений относительно комплекснозначных функций времени ζ^* и z^*

$$(A^* + k\eta)\frac{d^3\zeta^*}{dt^3} - i\omega\,[C + (A^* + k)\eta]\frac{d^2\zeta^*}{dt^2} + [K - \omega^2(C\eta - k\eta + k)]\frac{d\zeta^*}{dt} -$$

$$- i\omega\eta K\zeta^* + (ml_1 + m_1 l_2)\,l\frac{d^3z^*}{dt^3} - i\omega\eta l\,(ml_1 + m_1 l_2)\frac{d^2z^*}{dt^2} = 0 \tag{7.1}$$

$$l\frac{d^2z^*}{dt^2} + z_0\frac{d^2\zeta^*}{dt^2} + gz^* = 0$$

Здесь

$$A^* = A + ml_1^2 + m_1 l_2^2, \quad \eta = \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}, \quad z_0 = \frac{ml_1 + m_1 l_2}{m + m_1}$$
$$K = g\,(ml_1 + m_1 l_2), \tag{7.2}$$

Решение совокупности (7.1) естественно искать в виде

$$\zeta^* = \zeta^0 e^{i\lambda t}; \qquad z^* = z^0 e^{i\lambda t} \tag{7.3}$$

При этом характеристическое уравнение приводится к следующему:

$$f(\lambda;\omega) = (A^0 + k\eta)\lambda^5 - \omega\,[C + (A^0 + k)\eta]\lambda^4 + [-K - (A^* + k\eta)\frac{g}{l} +$$

$$+ C\omega^2\eta + k\omega^2(1 - \eta)]\lambda^3 + [K\eta + C\frac{g}{l} + \frac{g}{l}(A^* + k)\eta]\,\omega\lambda^2 +$$

$$+ \frac{g}{l}\,[K - k\omega^2(1 - \eta) - C\omega^2\eta]\,\lambda - K\omega\eta\frac{g}{l} = 0 \tag{7.4}$$

Здесь

$$A^0 = A^* - z_c\,(ml_1 + m_1 l_2) \tag{7.5}$$

Уравнения (7.1) совместно с равенством $\omega_z = \omega = \mathrm{const}$ описывают движение рассматриваемого тела. Поэтому исследование устойчивости его движения сводится к изучению поведения функций (7.3). Очевидно, что критерием устойчивости движения в данном случае является условие действительности корней характеристического уравнения (7.4). Нахождению этого условия и будут посвящены нижеследующие пункты.

8. Рассмотрим вначале несколько частных случаев. а) Длина струны $l \to 0$. При этом характеристическое уравнение (7.4) преобразуется к виду

$$(A^* + k\eta)\lambda^3 - [C + (A^* + k)\eta]\,\omega\lambda^2 - [K - k\omega^2(1-\eta) - C\omega^2\eta]\,\lambda + K\omega\eta = 0 \tag{8.1}$$

Заметим, что с точностью до обозначений уравнение (8.1) полностью совпадает с уравнением, полученным в работах [1] и [3] при изучении устойчивости волчка с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью [1].

б) Полость имеет форму сферы. При этом предположении $a = c$ и, согласно равенству (6.7) и третьему соотношению (7.2), $k = 0$, $\eta = 0$. Характеристическое уравнение (7.4) преобразуется к виду

$$\lambda\left\{\lambda^4 - \frac{C}{A^0}\,\omega\lambda^3 - \frac{g}{l}\left[1 + \frac{(ml_1 + m_1l_2)(l + z_c)}{A^0}\right]\lambda^2 + \frac{C}{A^0}\,\omega\,\frac{g}{l}\,\lambda + \frac{g^2}{l}\,\frac{ml_1 + m_1l_2}{A^0}\right\} = 0 \tag{8.2}$$

Один из корней уравнения (8.2) равен нулю, а оставшиеся четыре корня, как нетрудно показать, расположены на интервалах

$$(-\infty, -\sqrt{g/l}),\ (-\sqrt{g/l}, 0)\ (0, \sqrt{g/l}),\ (\sqrt{g/l}, \infty)$$

Таким образом, движение тела при наличии сферической полости, целиком наполненной идеальной жидкостью, будет всегда устойчивым. Оно имеет тот же характер, что и движение вращающегося сплошного твердого тела, исследованного в [2].

9. Обратимся теперь вновь к изучению устойчивости движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Для этой цели рассмотрим характеристическое уравнение (7.4) и займемся определением условий действительности его корней (т. е. условий устойчивости движения).

В настоящее время известен ряд критериев действительности корней алгебраических уравнений n-й степени (см., например, [6]). Однако в рассматриваемом случае задачи (ввиду сложности коэффициентов уравнений (7.4)) эти критерии оказываются крайне громоздкими и вследствие этого — мало пригодными для изучения условий устойчивости исследуемого тела при произвольном изменении параметров, входящих в уравнения (7.1) его движения. Ниже приводится графо-аналитический прием исследования корней уравнения (7.4), который дает возможность сравнительно просто выявить зоны устойчивого и неустойчивого движения исследуемого тела при произвольном задании величины угловой скорости его вращения ω.

В соответствии с правилом Декарта [7], число положительных корней уравнения (7.4) при любых значениях параметра $\omega > 0$ не может быть более трех[2], а отрицательных — не более двух. Покажем далее, что уравнение (7.4) при $\omega > 0$ всегда имеет два отрицательных корня.

В самом деле, принимая во внимание равенства (7.2) и (7.5), имеем

$$f(-\sqrt{g/l}, \omega) = \frac{g^2}{l^2}\,(A^* - A^\circ)\,(\omega\eta\sqrt{g/l}) > 0 \tag{9.1}$$

Однако $f(-\infty; \omega) < 0$ и $f(0; \omega) < 0$. Следовательно, в интервалах $-\infty < \lambda < -\sqrt{g/l}$ и $-\sqrt{g/l} < \lambda < 0$ находится по одному (отрицательному) корню уравнения (7.4).

---

[1] При условии, что знак при величине момента K будет изменен на обратный по сравнению со случаем, разобранным в [1] и [3].

[2] В случае $\omega = 0$ четыре корня уравнения (7.4) действительны (пятый равен нулю).

Для определения характера трех остальных корней уравнения (7.4) сгруппируем члены его левой части по степеням ω, именно

$$p(\lambda)\,\omega^2 - q(\lambda)\omega + r(\lambda) = 0 \tag{9.2}$$

Здесь

$$p(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{g}{l}\right)\varepsilon\eta^2,\quad q(\lambda) = \eta\left[R(\lambda) + \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{g}{l}\right)(\varepsilon - \varkappa)\right],\quad r(\lambda) = \lambda R(\lambda) \tag{9.3}$$

$$R(\lambda) = (A^0 + k\eta)\lambda^4 - \left[K + \frac{g}{l}(A^* + k\eta)\right]\lambda^2 + \frac{g}{l}K$$

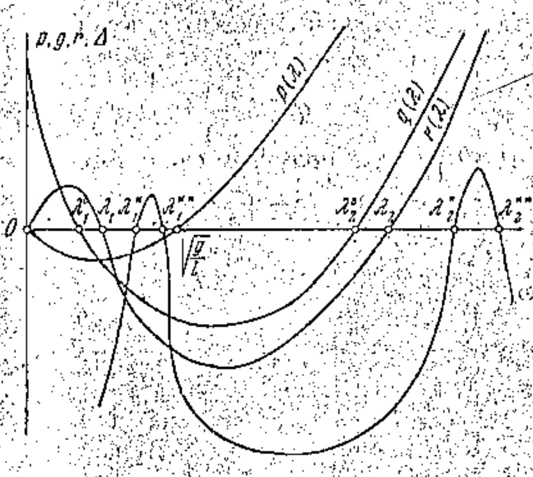
$$\varepsilon = \frac{C\eta + k(1-\eta)}{\eta^2} > 0,\quad \varkappa = \frac{k(1-\eta)(1-\eta^2)}{\eta^2} > 0,\quad (\varepsilon - \varkappa) > 0 \tag{9.4}$$

Графики полиномов $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, $r(\lambda)$ при $\lambda \geqslant 0$ представлены на фиг. 4. Анализ полученных графиков показывает, что при $\lambda \geqslant 0$ полином $r(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda = 0$ и еще при двух значениях λ, обозначенных через λ_1 и λ_2. В свою очередь полином $q(\lambda)$ равен нулю только при $\lambda = \lambda_1^0$ и $\lambda = \lambda_2^0$. Наконец, полином $p(\lambda)$ становится равным нулю, когда λ либо равно нулю, либо $\sqrt{g}\,/\sqrt{l}$.

Уравнение (9.2) можно разрешить относительно ω и построить график функции

$$\omega(\lambda) = \frac{q(\lambda) \pm \sqrt{q^2(\lambda) - 4p(\lambda)\,r(\lambda)}}{2p(\lambda)} \tag{9.5}$$

Пользуясь этим графиком, можно по заданному значению угловой скорости ω выяснить — все ли корни уравнения (7.4) относительно λ действительны и, следовательно, — устойчиво движение твердого тела с жидким наполнением или нет.



Фиг. 4

В той области значений λ, где дискриминант

$$\Delta(\lambda) = 4p(\lambda)r(\lambda) - q^2(\lambda) \tag{9.6}$$

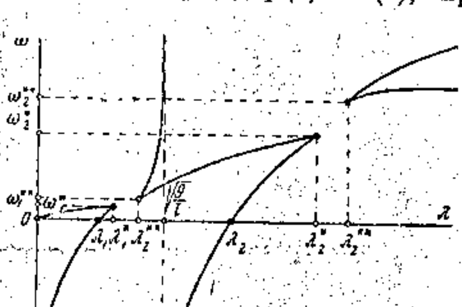
положителен, значения ω, согласно формуле (9.5), комплексно-сопряженные количества. Это будет в интервалах $(\lambda_1^*, \lambda_1^{**})$ и $(\lambda_2^*, \lambda_2^{**})$, где λ_1^*, λ_2^*, λ_1^{**}, λ_2^{**} — положительные корни уже многочлена $\Delta(\lambda)$; корни (равно как и отрицательные с теми же модулями) существуют при любых значениях параметров, входящих в выражение (9.6). Для доказательства следует дискриминант $\Delta(\lambda)$ представить в виде произведения

$$\Delta(\lambda) = -\eta^2\left[R(\lambda) - \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{g}{l}\right)(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varkappa})^2\right] \times$$

$$\times \left[R(\lambda) - \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{g}{l}\right)(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varkappa})^2\right] \tag{9.7}$$

и принять во внимание вид полинома $R(\lambda)$, согласно первой формуле (9.4).

При величинах λ, совпадающих с одним из корней дискриминанта $\Delta(\lambda)$, оба значения ω, согласно формуле (9.5), становятся равными друг другу. Обозначим их соответственно через $\omega_1{}^*$, $\omega_2{}^*$, $\omega_1{}^{**}$ и $\omega_2{}^{**}$. Оказывается, что им соответствуют точки возврата кривой $\omega = \omega(\lambda)$. Эта кривая изображена на фиг. 5. При ее построении следует учесть расположение нулей полиномов $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ и $r(\lambda)$, определяемых формулами (9.3) и фиг. 4.



Фиг. 5

В интервалах $(\omega_1{}^*, \omega_1{}^{**})$ и $(\omega_2{}^*, \omega_2{}^{**})$ (см. фиг. 5) каждому значению ω соответствуют только три действительные корня (из них два отрицательных) уравнения пятой степени (7.4) относительно λ. Оставшиеся два корня становятся комплексными.

Согласно изложенному выше, приходим, таким образом, к следующему выводу: движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью, при значениях угловой скорости, изменяющейся в пределах $\omega_1{}^* < \omega < \omega_1{}^{**}$ и $\omega_2{}^* < \omega < \omega_2{}^{**}$, неустойчиво. Вне этих пределов изменения ω движение рассматриваемого тела, напротив, устойчиво.

10. Критические значения угловой скорости $\omega_1{}^*$, $\omega_1{}^{**}$, $\omega_2{}^*$, $\omega_2{}^{**}$ определяются выражением (9.5), если положить в нем

$$q^2(\lambda) - 4p(\lambda)r(\lambda) = -\Delta(\lambda) = 0$$

В результате получаем следующие простые формулы

$$\omega_1{}^* = \frac{q(\lambda_1{}^*)}{2p(\lambda_1{}^*)} = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon\varkappa}}{\varepsilon\eta}\lambda_1{}^*, \qquad \omega_2{}^* = \frac{q(\lambda_2{}^*)}{2p(\lambda_2{}^*)} = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon\varkappa}}{\varepsilon\eta}\lambda_2{}^*$$

$$\omega_1{}^{**} = \frac{q(\lambda_1{}^{**})}{2p(\lambda_1{}^{**})} = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon\varkappa}}{\varepsilon\eta}\lambda_1{}^{**}, \qquad \omega_2{}^{**} = \frac{q(\lambda_2{}^{**})}{2p(\lambda_2{}^{**})} = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon\varkappa}}{\varepsilon\eta}\lambda_2{}^{**} \qquad (10.1)$$

в которых $\lambda_1{}^*$, $\lambda_1{}^{**}$, $\lambda_2{}^*$ и $\lambda_2{}^{**}$, как уже упоминалось ранее, — соответственно положительные корни дискриминанта $\Delta(\lambda)$.

11. В качестве примера определим критические значения угловой скорости ω вращения твердого тела, параметры которого определяются следующими величинами:

$$A = 15.84,\ C = 3.74\ [\textit{гсм}\cdot \textit{сек}^2],\ m = 0.8145,\ m_1 = 0.0334\ [\textit{г}\cdot\textit{сек}^2\textit{см}^{-1}]$$

$$a = 1.5,\ c = 4.35,\ l_1 = 6.6,\ l_2 = 5.5,\ l = 50\ [\textit{см}]$$

В данном случае, согласно формулам (10.1),

$$\omega_1{}^* = 48,\ \omega_1{}^{**} = 53,\ \omega_2{}^* = 264,\ \omega_2{}^{**} = 309\ [\textit{об/мин}]$$

Таким образом, при значениях параметра ω в пределах

$$48 < \omega < 53, \qquad 264 < \omega < 300\ [\textit{об/мин}]$$

движение исследуемого твердого тела должно быть неустойчивым; для всех же значений ω вне этих интервалов движение устойчиво.

Критические значения угловой скорости для тех же параметров были вычислены и при использовании критерия, изложенного в [6]. Они оказались равными приведенным выше, однако их вычисление потребовало затраты значительно большего труда.

12. Для проверки полученного выше критерия устойчивости движения твердого тела с жидким наполнением в физико-технической лаборатории Института механики АН УССР Э. В. Виртом и А. П. Полывянной под руководством доктора технических наук С. В. Малашенко были проведены экспериментальные исследования на установке, описанной в [8].

К оси вертикально поставленного мотора посредством тонкой струны или капроновой нити прикреплялась исследуемая модель, представляющая собой полый корпус с расположенным внутри него цилиндрическим вкладышем. Вкладыш состоял из двух составных частей, которые герметически соединялись, образуя эллипсоидальную полость (см. фиг. 7 в [8]). В верхней части вкладыша имелось отверстие, через которое полость заполнялась жидкостью (в описываемых экспериментах в качестве наполнения был использован этиловый спирт).

Модели сообщалось вращение с числом оборотов в пределах от 100 до 3000 об/мин. Стабилизация угловой скорости осуществлялась прецизионным звуковым генератором и тиратроном.

Устойчивость (или неустойчивость) движения модели при различных значениях угловой скорости определялась посредством легких ударов по модели и визуального наблюдения за последующим ее поведением.

Экспериментальные исследования с моделью, параметры которой приведены в п. 11 настоящей работы, показали, что при изменении угловой скорости вращения в интервале 100—220 об/мин движение модели устойчиво. В интервале изменения угловой скорости 220—450 об/мин устойчивое ее движение нарушалось, а при увеличении угловой скорости от 450 об/мин и выше движение модели было вновь устойчивым.

Экспериментальное определение границ существования первой зоны критических значений угловой скорости (см. п. 11 настоящей работы) не проводилось (на применявшейся установке нельзя было получать стабилизированное вращение с угловой скоростью, меньшей 100 об/мин).

Поступила 29 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Темченко М. Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
2. Морозова Е. П. Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне. ПММ, 1956, т 20, вып. 5.
3. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
4. Суслов Г. К. Теоретическая механика. Гостехиздат. 1946.
5. Кибель Н. Е., Кочин Н. А., Розе Н. Б. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, 1948, т. 1.
6. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса — Гурвитца для полиномов и целых функций. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1949, т. 26, Изд-во АН СССР.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Гостехиздат, 1955.
8. Малашенко С. В., Темченко М. Е. Об одном методе экспериментального исследования устойчивости движения волчка, внутри которого имеется полость, наполненная жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.