ТЕОРІЯ ПРУЖНОССТІ

Академік АН УРСР О. Ю. ІШЛІНСЬКИЙ

РОЗТЯГ НЕСКІНЧЕННО ДОВГОЇ ІДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧНОЇ ШТАБИ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

1. При розтягуванні штаби постійної ширини зусиллям q, рівномірно розподіленим по її торцях (рис. 1), пластичний стан утворюється при

$$q = 2K, \tag{1}$$

де K — пластична стала матеріалу. При цьому у всіх точках штаби виникає так званий граничний напружений стан, що характеризується такими компонентами напружень:

$$\sigma_x^0 = 2K;\ \sigma_y^0 = 0;\ \tau_{xy}^0 = 0. \tag{2}$$

У випадку розтягування штаби змінної ширини, матеріал якої не має усталення, тобто є ідеально пластичним, досягти граничного напруженого стану у всіх її точках, як правило, неможливо. Поряд з елементами, що

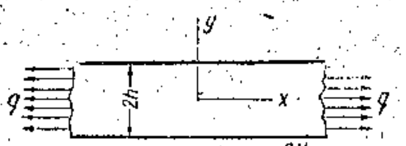

Рис. 1.

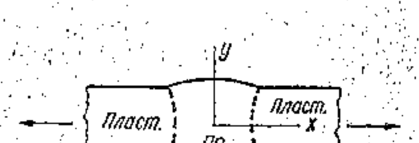

Рис. 2.

перебувають у пластичному стані, майже завжди виявляються цілі ділянки штаби, де деформації залишаються в межах пружності (рис. 2). Розв'язання відповідної пружно-пластичної задачі становить, звичайно, дуже великі математичні труднощі.

Цікаво, що в деяких особливих випадках, коли штаба мало (строго кажучи, нескінченно мало) відрізняється від штаби постійної ширини, «суцільний» пластичний напружений стан її все-таки виявляється можливим. Так буде, зокрема, якщо «збурена» границя вихідної штаби постійної ширини являє собою синусоїду, довжина хвилі якої дорівнює або в непарне число раз менша подвійної ширини «незбуреної» штаби. В силу лінійності рівнянь, що описують напружений стан «збуреної» штаби, те ж саме має місце і для «збурень», що є скінченною або нескінченною сумою таких найпростіших синусоїдальних «збурень». В останньому випадку амплітуди складових збурень повинні досить швидко зменшуватись у міру зменшення довжини їх хвиль, в противному разі відповідні ряди для компонентів напруженого стану штаби можуть виявитися розбіжними (див. нижче).

2. Таким чином, тільки при періодичних збуреннях границі штаби,

що не мають парних гармонік і довжина періоду яких вдвоє більша ширини штаби, можлива поява «суцільного» пластичного напруженого стану.

Компоненти тензора напружень, які ми позначимо σ_x^1, σ_y^1, τ_{xy}^1, задовольняють при цьому умову ідеальної пластичності

$$(\sigma_x^1 - \sigma_y^1)^2 + 4\tau_{xy}^{1^2} = 4K^2, \tag{3}$$

а також рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^1}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^1}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

і граничні умови

$$\sigma_x^1 \cos x\nu + \tau_{xy}^1 \cos y\nu = 0; \quad \tau_{xy}^1 \cos x\nu + \sigma_y^1 \cos y\nu = 0. \tag{5}$$

Останні повинні задовольнятися на криволінійних границях штаби. У зв'язку з тим, що далі штаба вважатиметься нескінченно довгою, умови на торцях можна замінити вимогою обмеженості розв'язку рівнянь (9) при $x \to \pm\infty$. Шукаючи розв'язок рівнянь пластичності методом характеристик з урахуванням граничних умов на криволінійних границях, легко показати, що розв'язок буде єдиним, якщо він в усій області неперервний.

3. Нехай рівняння, якими визначаються криволінійні границі штаби, мають вигляд (рис. 3)

$$y = \pm (h + \delta \cos ax), \tag{6}$$

де h — половина ширини вихідної прямолінійної штаби; δ — мала величина, що являє собою амплітуду „збурення" границі вихідної штаби; a — параметр, що характеризує довжину хвилі „збурення"

$$\lambda = \frac{2\pi}{a}. \tag{7}$$

Припустимо, що при малій амплітуді „збурення" δ порівняно з шириною штаби $2h$ напружений стан „збуреної" штаби σ_x^1, σ_y^1, τ_{xy}^1 мало відрізняється від такого ж стану вихідної штаби σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0.

Розв'язок рівнянь (3) і (4) шукатимемо у вигляді

$$\sigma_x^1 = \sigma_x^0 + \sigma_x; \quad \sigma_y^1 = \sigma_y^0 + \sigma_y; \quad \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}, \tag{8}$$

де σ_x, σ_y, τ_{xy} — малі „збурення" напруженого стану вихідної штаби, ширина якої постійна. Підставляючи вирази (8) у систему рівнянь (3) та (4) з урахуванням формули (2), одержуємо співвідношення:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \sigma_x = \sigma_y, \tag{9}$$

в останньому з яких ми знехтували членами другого порядку і вище відносно малих величин σ_x, σ_y, τ_{xy}.

З перших двох співвідношень (9) виключимо змінну τ_{xy}. Тоді, використовуючи третє співвідношення (9), одержимо для визначення σ_x рівняння

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = 0. \tag{10}$$

Скористаємося таким частинним розв'язком цього рівняння:

$$\sigma_x = C \cos ax \cos ay, \tag{11}$$

де C — деяка стала.

Підставляючи цей розв'язок у рівняння (9), одержимо для функції τ_{xy} такий вираз:

$$\tau_{xy} = C \sin ax \sin ay + D, \tag{12}$$

де D — нова стала.

Для визначення сталих C і D треба використати граничні умови задачі.

4. Користуючись рівнянням (6), легко показати, що з точністю до малих другого порядку відносно амплітуди „збурення" δ

$$\cos x\nu = a\delta \sin ax; \ \cos y\nu = 1. \tag{13}$$

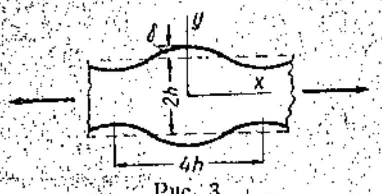

Рис. 3.

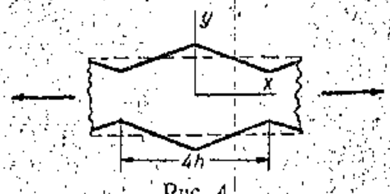

Рис. 4.

В результаті граничні умови (5) можна привести до вигляду:

$$\sigma_x^1 a\delta \sin ax + \tau_{xy}^1 = 0; \ \tau_{xy}^1 a\delta \sin ax + \sigma_y^1 = 0. \tag{14}$$

Підставляючи сюди значення σ_x^1, σ_y^1, τ_{xy}^1 згідно з формулами (8) і приймаючи до уваги рівності (2), а також нехтуючи малими величинами вищого порядку, одержимо співвідношення:

$$2Ka\delta \sin ax + \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_y = 0. \tag{15}$$

Ці співвідношення повинні задовольнятися на криволінійній границі штаби (6). Однак з такою ж точністю можна вимагати їх виконання при $y = \pm h$, тобто на незбуреній границі. Похибка, що при цьому допускається, має другий порядок малості через малість величин τ_{xy} і σ_y.

Беручи до уваги формули (11) і (12), граничні умови можна представити у вигляді:

$$-2Ka\delta \sin ax = C \sin ax \sin ah + D; \quad C \cos ax \cos ah = 0. \tag{16}$$

Кожне з них мусить виконуватися при будь-якому значенні x, тому константа D повинна дорівнювати нулю. Враховуючи це, одержуємо такі рівності:

$$-2Ka\delta = C \sin ah; \quad C \cos ah = 0. \tag{17}$$

В розглянутому випадку константа C не може бути нулем, бо інакше границі штаби виявилися б прямолінійними. Згідно з другою рівністю (17) це можливе лише тоді, коли параметр a виражається формулою

$$a = \frac{\pi(2n+1)}{2h}, \tag{18}$$

що відповідає довжині хвилі синусоїди „збурення" границі

$$\lambda = \frac{4h}{2n+1}. \tag{19}$$

Беручи далі до уваги співвідношення (18) у першій рівності (17), одержимо

$$C = (-1)^{n-1} \frac{K\pi\delta(2n+1)}{h}. \tag{20}$$

В результаті у відповідності з формулами (2), (8), (11), (12) і (20) матимемо такі вирази для компонентів тензора напружень штаби змінної ширини:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^1 &= 2K + (-1)^{n-1} K \frac{\pi\delta(2n+1)}{h} \cos ax \cos ay \\ \sigma_y^1 &= (-1)^{n-1} \frac{K\pi\delta(2n+1)}{h} \cos ax \cos ay \\ \tau_{xy}^1 &= (-1)^{n-1} \frac{K\pi\delta(2n+1)}{h} \sin ax \sin ay \end{aligned}\right\}, \tag{21}$$

де параметр a визначається за формулою (18).

5. У загальному випадку, якщо „збурення" границі мають вигляд нескінченної суми

$$y - h = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h} x + \beta_n \sin \frac{\pi(2n+1)}{2h} x \right], \tag{22}$$

відповідні „збурення" напруженого стану виражаються формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= \frac{\pi}{h} K \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n+1) \times \\ &\times \left[\alpha_n \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h} x + \beta_n \sin \frac{\pi(2n+1)}{2h} x \right] \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h} y \\ \tau_{xy} &= \frac{K\pi}{h} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n+1) \times \\ &\times \left[\alpha_n \sin \frac{\pi(2n+1)}{2h} x + \beta_n \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h} x \right] \sin \frac{\pi(2n+1)}{2h} y \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Відповідні ряди сходяться у тому випадку, коли ряд (22) являє собою досить гладку функцію, завдяки чому коефіцієнти α_n, β_n спадають швидше, ніж $\frac{1}{n^2}$. Необхідною умовою цього є вимога гладкості границі штаби. Штаба, що має злами на границі (рис. 4), з цієї ж причини не може перейти в «суцільний» пластичний стан.

6. Аналогічно викладеному вище може бути досліджений і випадок антисиметричного «збурення» границі штаби у формі

$$y = \pm h + \delta \cos ax, \tag{24}$$

а також загальний випадок періодичного «збурення».

ЛІТЕРАТУРА

1. Теория пластичности, Сб. под ред. Ю. Н. Работнова, ИИЛ, М., 1948.
2. А. Ю. Ишлинский, Прикладная математика и механика, 7, 109 (1943).

Інститут математики
АН УРСР

Надійшло до редакції
5. IV 1957 р.

Академик АН УССР А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

РАСТЯЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Резюме

При растяжении полосы переменного сечения за предел упругости наряду с элементами, находящимися в пластическом состоянии, как правило, имеются целые области, где деформации останутся в пределах упругости. Материал полосы при этом предполагается лишенным упрочнения, т. е. идеально пластическим.

В статье показано, что в случае особых видов границы полосы возможно тем не менее «сплошное» пластическое состояние. Граница полосы должна представлять тогда периодическую кривую, лишенную четных гармоник. Длина периода границы должна быть в два раза больше средней ширины полосы, а амплитуда колебания ширины, строго говоря, бесконечно малой. Граница полосы должна быть достаточно гладкой, в противном случае ряды, представляющие решения, расходятся, что указывает на наличие упругих зон полосы, не достигающих предела упругости.

A. Y. ISHLINSKY, Member Academy of Sciences, Ukrainian SSR

EXTENSION OF AN INFINITELY LONG IDEALLY PLASTIC BAR OF VARIABLE CROSS-SECTION

Summary

On extending a bar of variable cross-section beyond the limit of elasticity there are, as a rule — besides the elements which are in a plastic state — regions of the bar where the deformations keep within the limits of elasticity. The bar material is assumed to lack hardening, i. e. to be ideally plastic.

In the present paper, it is shown that with a special shape of the bar boundary, a «continuous» plastic state is nevertheless possible. The bar boundary should in this case take the form of a periodic curve lacking even harmonics. The length of the boundary period should be twice that of the average width of the bar, while the range of fluctuation of the width should, strictly speaking, be infinitely small. The bar boundary should be sufficiently smooth. Otherwise, the series expressing the solution will be divergent, thus indicating the presence of elastic zones in the bar, which have not reached the limit of elasticity.