

Трение меха	163
Углы зацепления	166
Углы зацепления	168
.....	172
.....	174
.....	176

О ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА ПРИ ТРЕНИИ КАЧЕНИЯ

А. Ю. ШИЛИНСКИЙ

(Москва)

При качении катка по горизонтальному основанию приходится преодолевать так называемое сопротивление перекатыванию или трение качения (трение второго рода), обусловленное необратимой затратой работы в области контакта поверхностей катка и основания.

При теоретическом исследовании качения катка по не вполне упругому (а также вязкому, пластическому и сыпучему) основанию обычно пренебрегают влиянием на величину момента сопротивления перекатыванию горизонтальных составляющих сил взаимодействия катка и основания, а также частичных скольжений поверхностей катка и основания друг по другу в области их соприкосновения¹.

В случае качения абсолютно упругого катка по абсолютно упругому основанию, напротив, эти обстоятельства играют главную роль.

Если оставить в стороне вопрос о рассеянии энергии в виде упругих волн, исходящих от места соприкосновения катка и основания, то приходим к выводу, что при перекатывании упругих тел работа затрачивается исключительно на преодоление сил кулонова трения в той части области контакта катка и основания, где происходит их относительное проскальзывание.

Наличие в области контакта зон проскальзывания впервые было обнаружено О. Рейнольдсом [1]. Он же заметил, что ведущий каток на одном и том же пути делает больше оборотов, чем каток ведомый, и дал объяснение кажущемуся проскальзыванию посредством учета относительной деформации катка и основания в направлении движения.

Схему О. Рейнольдса использовал для построения теории фрикционной передачи Г. Фромм [2] и для трения качения Н. И. Глаголев [3]. Оба упомянутых автора рассматривали свои задачи в условиях плоской деформации. Разграничение зон проскальзывания и зон, где проскальзывание отсутствует, потребовало от них принятия некоторых дополнительных допущений.

Ниже исследуется теория трения качения абсолютно жесткого катка по упрощенной модели абсолютно упругого основания без привлечения каких-либо предварительных предположений о характере явления². Предположения О. Рейнольдса оправдываются при этом непосредственным расчетом.

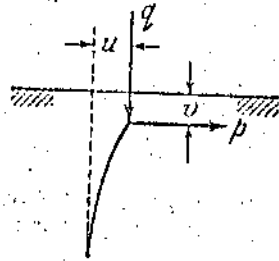
¹ При несовершенной упругости основания главная часть работы при преодолении сопротивления перекатыванию поглощается внутренним трением в материале основания. Вследствие этого эпюра вертикальных усилий воздействия основания на каток оказывается не симметричной относительно вертикальной плоскости, содержащей ось катка [4].

² Первый набросок этой теории был написан автором в 1939 г. Краткое изложение его см. в [5].

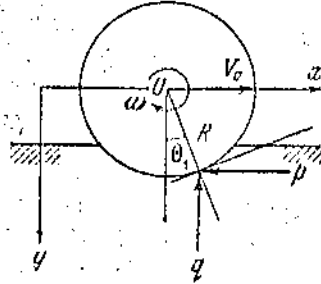
Итак, пусть горизонтальное основание, по которому перемещается каток, состоит из бесконечного числа упругих стержней, горизонтальные и вертикальные смещения торцов которых u и v (фиг. 1) связаны соотношениями

$$p = Au, \quad q = Bv \quad (1)$$

соответственно с горизонтальной и вертикальной составляющими p и q распределенного усилия, действующего на основание. Соотношения (1) являются обобщением известной гипотезы Винклера-Циммермана в теории балок, лежащих на упругом основании.



Фиг. 1



Фиг. 2

Обозначим через θ_1 угол между вертикалью и нормалью, построенными в месте контакта какого-либо упругого стержня с катком. Тогда нормальная составляющая реакции основания (фиг. 2) имеет вид

$$p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1 \quad (2)$$

а касательная

$$-p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1 \quad (3)$$

Могут представиться, вообще говоря, три различных характера контакта упругого основания с катком. Может быть, во-первых, в рассматриваемом месте контакт без скольжения торцов упругих стержней. В этом случае, согласно закону Кулона трения, должно соблюдаться неравенство

$$|-p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1| \leq f(p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1) \quad (4)$$

где f — коэффициент трения поверхности катка по основанию¹. При контакте без скольжения скорость соответствующей точки катка равна скорости совпадающей с ней точки основания.

Обозначим через V_0 скорость центра катка и через ω — его угловую скорость и введем неподвижную систему координат xy , ось x которой горизонтальна и направлена в сторону движения центра катка, а ось y — вертикально вниз (фиг. 2). Проекции скорости какой-либо точки катка на оси этой системы координат соответственно равны величинам

$$V_x = V_0 - \omega R \cos \theta_1, \quad V_y = \omega R \sin \theta_1 \quad (5)$$

В силу принятых законов деформирования основания следует считать, что вертикальная и горизонтальная составляющие смещения какой-либо точки основания u и v являются функциями двух переменных: координат

¹ Выражение $p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1$ считается положительным.

ты x и времени t . Здесь под x следует понимать координату начального положения соответствующей точки основания, т. е. положения до деформации основания катком (лагранжева координата).

Проекции скорости какой-либо точки основания на оси x и y суть

$$V_x' = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad V_y' = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (6)$$

В точках контакта, где нет проскальзываний, должно быть $V_x = V_x'$, $V_y = V_y'$, следовательно

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = V_0 - \omega R \cos \theta_1, \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \omega R \sin \theta_1 \quad (7)$$

Таким образом, часть области контакта, где нет скольжения поверхности катка по поверхности основания, характеризуется равенствами (7) и неравенством (4).

В дальнейшей области, где проскальзывания отсутствуют, будет называться зоной H .

Второй возможный случай — в рассматриваемой точке поверхности каток скользит по основанию в сторону движения центра катка. Это возможно лишь при условии $V_x > V_x'$, т. е. при

$$V_0 - \omega R \cos \theta_1 > \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (8)$$

Нормальная составляющая реакции основания в этом случае направлена против скорости центра катка; поэтому имеем

$$-p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1 = -f(p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1) \quad (9)$$

Равенство (9) и неравенство (8) определяют часть области контакта, где есть проскальзывание поверхности катка по поверхности основания вперед. Эту часть области контакта в дальнейшем назовем зоной G^+ .

Наконец, в третьем случае в рассматриваемой точке возможно относительное скольжение поверхности катка назад, т. е. в сторону, противоположную движению его центра. При этом должно соблюдаться неравенство

$$V_0 - \omega R \cos \theta_1 < \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (10)$$

и равенство

$$-p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1 = f(p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1) \quad (11)$$

которые характеризуют зону G^- проскальзывания поверхности катка по поверхности основания в направлении, обратном движению центра катка.

Обратимся теперь к построению формул, определяющих выражение для перемещений u и v в зонах H , G^+ и G^- , а также условий существования этих зон и их взаимного расположения.

Введем подвижную систему координат $\xi\eta$ с началом в центре катка. Ось η этой системы направлена вертикально вниз, а ось ξ — в сторону движения катка параллельно недеформированной границе основания. Пусть расположение осей неподвижной системы координат $xу$ таково, что в мгновение времени $t=0$ они соответственно совпадают с осями ξ и η .

Горизонтальная и вертикальная составляющие смещения торца элементарного упругого стержня основания u и v могут рассматриваться также как функции переменных ξ и t , где через ξ обозначена координата торца упругого стержня в предположении отсутствия деформации основания.

Однако, если скорость центра катка $-V_0$ и его угловая скорость ω постоянны, то по отношению к системе координат $\xi\eta$ основание находится в состоянии стационарного движения, и, следовательно, в этом случае перемещения u и v являются функциями только одной переменной ξ , т. е.

$$u(x, t) = u(\xi), \quad v(x, t) = v(\xi) \quad (12)$$

Имени в виду, что теперь

$$x = V_0 t + \xi \quad (13)$$

получаем тождество

$$u(V_0 t + \xi, t) = u(\xi) \quad (14)$$

Отсюда, дифференцируя по ξ и t , имеем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} V_0 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} \quad (16)$$

Заметим, что частная производная от перемещения $u(x, t)$ по переменной x и равная ей обыкновенная производная от функции $u(\xi)$ по ξ представляет собой продольную деформацию материала основания в направлении движения катка.

Соотношения, аналогичные (15) и (16), могут быть получены и для вертикальных смещений v точек основания.

В зоне H имеем согласно соотношению (16) и первому из равенств (7)

$$-V_0 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} = V_0 - \omega R \cos \theta_1 \quad (17)$$

Замечая, что (фиг. 3)

$$\xi + u(\xi) = R \sin \theta_1 \quad (18)$$

получаем равенство

$$1 + \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} = R \cos \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\xi} \quad (19)$$

Используя равенство (19), можно привести дифференциальное соотношение (17) к виду

$$\frac{d\theta_1}{d\xi} = \frac{\omega}{V_0} \quad (20)$$

Отсюда следует, что в зоне H имеет место зависимость

$$\theta_1 = \frac{\omega}{V_0} \xi + \text{const} \quad (21)$$

В дальнейшем вместо координаты ξ удобно ввести угол θ между вертикалью и радиусом катка, проведенным к точке пересечения окружности катка с осью элементарного стержня в недеформированном состоянии последнего. Нетрудно видеть (фиг. 3), что

$$\xi = R \sin \theta \quad (22)$$

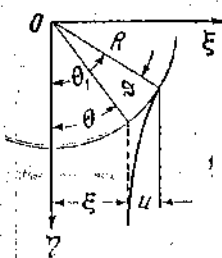
Полагая, далее,

$$\theta_1 = \theta + \vartheta \tag{23}$$

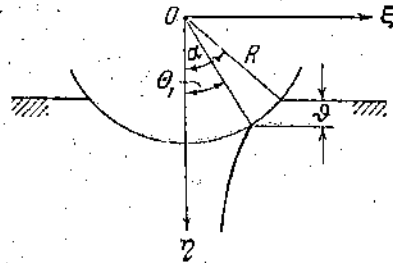
получим, согласно равенству (21) формулу

$$\vartheta = \frac{\omega R}{V_0} \sin \theta - \theta + \text{const} \tag{24}$$

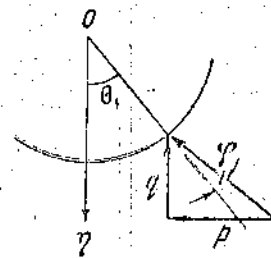
справедливую в той части области контакта, где относительное проскальзывание поверхностей катка и основания отсутствует (зона H).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Значение угла ϑ , как функции переменной θ , вполне определяет перемещения u и v точек основания, если только известен угол α , который образует с вертикалью радиус катка, проведенный к торцу элементарного упругого стержня, вступающего в данное мгновение в контакт с катком.

Действительно (фиг. 3 и 4), имеем

$$u = R(\sin \theta_1 - \sin \theta), \quad v = R(\cos \theta_1 - \cos \alpha) \tag{25}$$

где следует вместо θ_1 подставить его выражение согласно формуле (23). Чтобы найти значения функций $\vartheta(\theta)$ в зоне G^+ , положим в равенство (9)

$$f = \lg \varphi \tag{26}$$

где φ — угол трения, и приводим это равенство к виду

$$p = q \lg(\varphi + \theta_1) \tag{27}$$

Равенство (27) означает, в сущности, что в зоне G^+ полная реакция основания отклоняется на угол трения φ от нормали к поверхности контакта в сторону, противоположную направлению относительного скольжения поверхности катка по поверхности основания (фиг. 5).

Подставим в равенство (27) выражения усилий p и q согласно соотношениям (1) и, далее, пользуясь формулами (25), исключим из него перемещения u и v . В результате получим уравнение

$$A(\sin \theta_1 - \sin \theta) = B(\cos \theta_1 - \cos \alpha) \lg(\varphi + \theta_1) \tag{28}$$

Уравнение (28) допускает при $\theta = \pm \alpha$ корень $\theta_1 = \theta$. Это означает, в частности, что если зона G^+ примыкает к заднему краю области контакта катка с основанием, то она оканчивается в точке с координатой

$$\xi = -a = -R \sin \alpha \tag{29}$$

Действительно, согласно формулам (23) и (25), угол ϑ и перемещения u и v обращаются при $\theta_1 = \theta = \alpha$ в нуль. Если зона G^+ примыкает

к переднему краю области контакта, то величины ϑ , u и v также обращаются в нуль. Те же выводы справедливы и для зоны G^- .

Учитывая формулу (23), можно уравнение (28) представить в виде, удобном для последовательных итераций, а именно,

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{B \operatorname{tg}(\varphi + \theta + \vartheta)}{2A \cos(\theta + \frac{1}{2}\vartheta)} [\cos(\theta + \vartheta) - \cos \alpha]. \quad (30)$$

При малых значениях углов θ , α , ϑ , а также угла трения φ разложим правую часть уравнения (30) в степенной ряд начинается с членов третьего порядка малости. Поэтому с точностью до малых более высокого порядка имеем следующее приближенное равенство:

$$\vartheta(\theta) = \frac{B}{2A} (\varphi + \theta) (\alpha^2 - \theta^2) \quad (31)$$

При значительном трении в этой формуле следует заменить множитель $(\varphi + \theta)$ на $\operatorname{tg}(\varphi + \theta)$. С точностью до малых второго порядка включительно относительно θ и α имеем в этом случае для функции $\vartheta(\theta)$ следующее представление:

$$\vartheta = f \frac{B}{2A} (\alpha^2 - \theta^2) \quad (32)$$

Насколько формула (31) дает удовлетворительное решение уравнения (30), показывает следующий числовой расчет.

Пусть $\sin \alpha = 0.15$ ($\alpha = 0.1506$), $\operatorname{tg} \varphi = 0.100$ ($\varphi = 0.0985$), $A = B$. Тогда результаты вычислений функций $\vartheta(\theta)$ могут быть сведены в таблицу 1.

В колонке ϑ_0 этой таблицы приведены результаты вычислений по формулам (31). В колонке ϑ_1 — по формуле (30), в правую часть которой вместо ϑ подставлено значение ϑ_0 . В колонке ϑ_2 приведены результаты последующей итерации.

Остановимся, наконец, на определении вида функции $\vartheta(\theta)$ в зоне G^- . Заметим, что равенство (11), справедливое для всех точек зоны G^- , обращается в равенство (9) для зоны G^+ , если изменить знак у коэффициента трения f на обратный. Поэтому достаточно изменить знак у угла трения φ в формуле (31), чтобы получить приближенную формулу для $\vartheta(\theta)$, справедливую в зоне G^- , а именно:

$$\vartheta(\theta) = -\frac{B}{2A} (\varphi - \theta) (\alpha^2 - \theta^2) \quad (33)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться только приближенными формулами (31) и (33), так как точность их, как показывают данные таблицы 1, вполне удовлетворительна.

Для значений функции $\vartheta(\theta)$ в области H можно построить, исполь-

Таблица 1

θ/α	$\vartheta_0 \cdot 10^4$	$\vartheta_1 \cdot 10^4$	$\vartheta_2 \cdot 10^4$
-0.9	-0.7728	-0.7808	
-0.8	-0.8486	-0.8540	
-0.7	-0.3324	-0.3346	
-0.6	0.6766	0.6830	2.095
-0.5	2.074	2.098	
-0.4	3.757	3.802	
-0.3	5.624	5.690	
-0.2	7.572	7.672	
-0.1	9.490	9.620	
0	11.30	11.44	11.44
0.1	12.88	13.03	
0.2	14.13	14.29	
0.3	14.95	15.11	
0.4	15.23	15.35	
0.5	14.88	14.97	14.96
0.6	13.80	13.84	
0.7	11.86	11.45	
0.8	8.983	8.972	
0.9	5.069	5.040	

зую формулу (24), следующую приближенную формулу, справедливую до членов третьего порядка относительно переменной θ включительно

$$\vartheta(\theta) = \left(\frac{\omega R}{V_0} - 1\right)\theta - \frac{\omega R}{6V_0}\theta^3 + \text{const} \quad (34)$$

Введем в рассмотрение величину

$$s = 1 - \frac{\omega R}{V_0} \quad (35)$$

которую назовем мерой кажущегося проскальзывания. При качении абсолютно жесткого катка по абсолютно жесткому основанию $V_0 = \omega R$ и, следовательно, $s = 0$. При перекатывании по деформируемому основанию ведомый каток, как правило, за один оборот перемещается на расстояние, большее длины окружности. Следовательно, в этом случае $V_0 > \omega R$, и кажущееся проскальзывание s положительно. Для ведущего катка, напротив, $\omega R > V_0$ и $s < 0$.

Используя выражение (35), можно формулу (34) представить в виде

$$\vartheta(\theta) = -s\theta - \frac{1}{6}(1-s)\theta^3 + \text{const} \quad (36)$$

Представим результаты построения функции $\vartheta(\theta)$ для всех трех возможных зон H , G^+ и G^- вместе с условиями осуществления последних, в виде следующей таблицы:

Таблица 2

Зона	$\vartheta(\theta)$	Необходимое условие существования зоны
H	$-s\theta - \frac{1}{6}(1-s)\theta^3 + \text{const}$ (36)	$ -p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1 \leq f(p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1)$ (4)
G^+	$\frac{B}{2A}(\varphi + \theta)(\alpha^2 - \theta^2)$ (31)	$V_0 - \omega R \cos \theta_1 > \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ (8)
G^-	$-\frac{B}{2A}(\varphi - \theta)(\alpha^2 - \theta^2)$ (33)	$V_0 - \omega R \cos \theta_1 < \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ (10)

Используя формулу (26), условие (4) можно представить в виде:

$$-\text{tg} \varphi (p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1) \leq -p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1 \leq \text{tg} \varphi (p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1) \quad (37)$$

и приности его к виду, аналогичному равенству (27), а именно:

$$-q \text{tg}(\varphi - \theta_1) < p < q \text{tg}(\varphi + \theta_1) \quad (38)$$

Заменяя здесь усилия p и q их выражениями, согласно соотношениям (1), получим

$$-\frac{B}{A} v \text{tg}(\varphi - \theta_1) < u < \frac{B}{A} v \text{tg}(\varphi + \theta_1) \quad (39)$$

Формулы (25) для смещений u и v можно преобразовать, учитывая (23) и производя разложения по степеням ϑ следующим образом:

$$u = R\vartheta \cos \theta, \quad v = R(\cos \theta - \cos \alpha) - R\vartheta \sin \theta \quad (40)$$

Члены высшего порядка относительно ϑ в формулах (40) отбрасываем. Подставив теперь полученные выражения для n в n и неравенств (39) и вновь заменим θ_1 на ϑ по формуле (23). С той же точностью относительно ϑ получим

$$-\frac{B}{A} \left[\operatorname{tg}(\varphi - \theta) (\cos \theta - \cos \alpha) - \frac{\vartheta}{\cos^2(\varphi + \theta)} + \vartheta \sin \theta \right] \leq \vartheta \cos \theta \leq \frac{B}{A} \left[\operatorname{tg}(\varphi + \theta) (\cos \theta - \cos \alpha) + \frac{\vartheta}{\cos^2(\varphi + \theta)} - \vartheta \sin \theta \right] \quad (41)$$

Сохраняя в неравенствах (40) лишь члены третьего порядка относительно углов θ , α , φ и их произведений, приходим к следующим неравенствам:

$$-\frac{B}{2A} (\varphi - \theta) (\alpha^2 - \theta^2) \leq \vartheta \leq \frac{B}{2A} (\varphi + \theta) (\alpha^2 - \theta^2) \quad (42)$$

Эти неравенства должны соблюдаться в зоне H . Их можно было получить и непосредственно, если заметить, что в зоне H угловое смещение ϑ должно быть меньше, чем в зоне G^+ , где имеется скольжение поверхности катка по поверхности основания в сторону движения центра катка и больше, чем в зоне G^- , где скольжение направлено в обратную сторону.

Условие (8) можно преобразовать следующим образом. Воспользуемся соотношением (16) и формулой (19). Согласно условию (8) получим

$$-V_0 \left(-1 + R \cos \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\xi} \right) < V_0 - \omega R \cos \theta_1 \quad (43)$$

Отсюда

$$\frac{d\theta_1}{d\xi} > \frac{\omega}{V_0}$$

Учитывая равенство (22), заменим здесь дифференцирование по переменной ξ дифференцированием по θ и, кроме того, подставим вместо угла θ_1 его представление, согласно формуле (23). В результате получим неравенство

$$\frac{d\vartheta}{d\theta} > \frac{\omega R}{V_0} \cos \theta - 1 \quad (44)$$

которое должно соблюдаться во всей зоне G^+ .

В зоне G^- , как нетрудно убедиться, должно соблюдаться обратное неравенство

$$\frac{d\vartheta}{d\theta} < \frac{\omega R}{V_0} \cos \theta - 1 \quad (45)$$

Заметим, что в зоне H неравенство (44) или (45) следует заменить равенством

$$\frac{d\vartheta}{d\theta} = \frac{\omega R}{V_0} \cos \theta - 1 \quad (46)$$

из которого после интегрирования вновь следует формула (24).

Используя формулу (35) и разлагая $\cos \theta$ в ряд, получим, что в зоне G^+ должно соблюдаться неравенство

$$\frac{d\vartheta}{d\theta} > -s - (1-s) \frac{\theta^2}{2} \quad (47)$$

Так как и новая G^+ функция Φ представляется формулой (31), то неравенство (47) обрывается в следующее:

$$\frac{B}{2A}(\alpha^2 - 3\theta^2 - 2\varphi\theta) > -s - (1-s)\frac{\theta^2}{2} \quad (48)$$

или, что то же:

$$s > \left(3\frac{B}{A} - 1 + s\right)\frac{\theta^2}{2} + \frac{B}{A}\varphi\theta - \frac{B}{2A}\alpha^2 \quad (49)$$

Аналогично можно получить условие

$$s < \left(3\frac{B}{A} - 1 + s\right)\frac{\theta^2}{2} - \frac{B}{A}\varphi\theta - \frac{B}{2A}\alpha^2 \quad (50)$$

которое должно соблюдаться во всех точках зоны G^- . Таблицу 2 можно теперь заменить следующей таблицей 3.

Таблица 3

Зона	$\Phi(\theta)$	Необходимые условия
H	$-s\theta - \frac{\theta^3}{6} + \text{const} \quad (36')$	$-\frac{B}{2A}(\varphi-0)(\alpha^2-0^2) < \theta < \frac{B}{2A}(\varphi+0)(\alpha^2-0^2) \quad (42)$
G^+	$\frac{B}{2A}(\varphi+\theta)(\alpha^2-0^2) \quad (31')$	$s > \left(3\frac{B}{A} - 1\right)\frac{\theta^2}{2} + \frac{B}{A}\varphi\theta - \frac{B}{2A}\alpha^2 \quad (49')$
G^-	$-\frac{B}{2A}(\varphi-0)(\alpha^2-0^2) \quad (33')$	$s < \left(3\frac{B}{A} - 1\right)\frac{\theta^2}{2} - \frac{B}{A}\varphi\theta - \frac{B}{2A}\alpha^2 \quad (50')$

В таблице опущены члены, содержащие произведения $s\theta^2$ и $s\theta^3$, как имеющие более высокий порядок малости.

Рассмотрим теперь условие образования той или иной зоны у переднего края контакта, т. е. при $\theta = \alpha$. В соответствии с неравенством (49') зона G^+ образуется, если с точностью до малых высшего порядка мера кажущегося проскальзывания s удовлетворяет неравенству:

$$s > \left(\frac{B}{A} - \frac{1}{2}\right)\alpha^2 + \frac{B}{A}\alpha\varphi \quad (51)$$

Зона G^- образуется, если

$$s < \left(\frac{B}{A} - \frac{1}{2}\right)\alpha^2 - \frac{B}{2A}\alpha\varphi \quad (52)$$

При

$$\left(\frac{B}{A} - \frac{1}{2}\right)\alpha^2 + \frac{B}{A}\alpha\varphi > s > \left(\frac{B}{A} - \frac{1}{2}\right)\alpha^2 - \frac{B}{A}\alpha\varphi \quad (53)$$

образуется зона H . Нетрудно проверить, что неравенство (42) при этом удовлетворяется. Действительно, если зона H содержит передний край области контакта, то при $\theta = \alpha$ должно быть $\Phi = 0$, что позволяет определить константу в формуле (36') и представить последнюю в виде

$$\Phi = s(\alpha - \theta) + \frac{1}{6}(\alpha^3 - \theta^3) \quad (54)$$

Подставляя найденное выражение для Φ в условие (42) и производя сокращение на двучлен $\alpha - \theta$, получим условие осуществления зоны H в следующем виде:

$$-\frac{B}{2A}(\varphi - \theta)(\alpha + \theta) - \frac{\alpha^2 + \alpha\theta + \theta^2}{6} < s < \frac{B}{2A}(\varphi + \theta)(\alpha + \theta) - \frac{\alpha^2 + \alpha\theta + \theta^2}{6} \quad (55)$$

которое при $\theta = \alpha$ совпадает с неравенством (53).

Вопрос о том, какая зона образуется у переднего края области контакта, перемещаемого по упругому основанию, можно решить и непосредственно. Рассмотрим для этой цели элементарный стержень упругого основания, вступающий в контакт с поверхностью катка. Если он окажется в зоне H , т. е. не будет скользить по поверхности катка, то составляющие скорости его торца окажутся равными

$$V_x = V_0 - \omega R \cos \alpha, \quad V_y = \omega R \sin \alpha \quad (56)$$

Спустя бесконечно малое время t_1 , торец будет иметь смещения

$$u_1 (V_0 - \omega R \cos \alpha) t_1, \quad v_1 = \omega R \sin \alpha t_1 \quad (57)$$

вследствие чего возникнут усилия

$$p_1 = A (V_0 - \omega R \cos \alpha) t_1, \quad q_1 = B V_0 \sin \alpha t_1 \quad (58)$$

В зоне H должно осуществиться условие (38), которое, в сущности, означает, что реакция основания отклоняется от нормали к поверхности контакта не более чем на угол трения. Подставляя в условия (38) вместо p и q значения p_1 и q_1 , согласно формулам (58) и производя сокращения, получим следующее неравенство:

$$-\frac{B}{A} \sin \alpha \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) \leq 1 - \frac{\omega R}{V_0} \cos \alpha \leq \frac{B}{A} \sin \alpha \operatorname{tg}(\varphi + \alpha) \quad (59)$$

которое при переходе к малым углам α и φ и учете формулы (35) переходит в неравенство (53).

Если у переднего края контакта началась зона H , то она непременно окончится в пределах области контакта и перейдет в зону G^+ или G^- . Действительно, неравенство (55), которое должно осуществляться во всей зоне H , при $\theta = -\alpha$ принимает вид

$$-\frac{1}{6} \alpha^2 \leq s \leq -\frac{1}{6} \alpha^2 \quad (60)$$

и, следовательно, оказывается возможным в исключительном случае

$$s = -\frac{1}{6} \alpha^2 \quad (61)$$

При этом надлежит еще дополнительно удостовериться в соблюдении неравенства (55) при указанном значении меры проскальзывания s на всем интервале $-\alpha < \theta \leq \alpha$ при заданных коэффициентах A и B и углах α и φ .

Картина расположения зон H , G^+ и G^- лучше всего уясняется на числовом примере.

Возьмем $A = B$, $\alpha = 0.15$ и $\varphi = 0.10$. В соответствии с условием (53) зона H начнется у переднего края области контакта, если

$$0.02625 > s > -0.00375$$

При $s > 0.02625$ у переднего края возникает зона G^+ , а при $s < -0.00375$ — зона G^- . К зоне G^+ будут относиться только те точки, для которых согласно неравенству (49')

$$f_1(\theta) = \left(\frac{3B}{A} - 1\right) \frac{\theta^2}{2} + \frac{B}{A} \theta \varphi - \frac{B}{2A} \alpha^2 = \theta^2 + 0.10 - 0.01125 < s$$

и к зоне G^- , соответственно неравенству (50')

$$f_2(\theta) = \theta^2 - 0.1 \theta - 0.01125 > s$$

Если зона H начнется у переднего края, т. е. при $\theta = \alpha$, то она будет продолжаться в сторону уменьшающихся углов, пока не нарушится одно из неравенств (55), которое, при выбранных числовых данных, имеет вид:

$$\frac{1}{3} \theta^2 - 0.01125 < s < \frac{1}{3} \theta^2 + 0.10 - 0.00375$$

Если же зона H начнется внутри области контакта вследствие нарушения одного из неравенств

$$f_1(\theta) < s \quad \text{или} \quad f_2(\theta) > s$$

то она будет продолжаться, пока не нарушатся неравенства (42), а именно

$$\begin{aligned} \vartheta^+(\theta) &= \frac{1}{2} (0.1 + \theta) (0.0225 - \theta^2) > \vartheta > \\ &> -\frac{1}{4} (0.1 - \theta) (0.0225 - \theta^2) = \vartheta^-(\theta) \end{aligned}$$

На фиг. 6 построены графики функций $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$, а на фиг. 7 функции $\vartheta^+(\theta)$ и $\vartheta^-(\theta)$, а также вид функции $\vartheta^*(\theta)$ для зоны H при двух значениях моря проскальзывания s . Если $s = -\frac{1}{6} \alpha^2$, то вся область контакта состоит из зоны H .

Несколько меняется картина распределения зон, если $\varphi > \alpha$. Рассмотрим числовой пример при следующих данных:

$$\varphi = 0.1, \quad \alpha = 0.01, \quad A = B$$

Здесь границами значений s , при которых возможна зона H , являются числа

$$-0.00095 < s < 0.00105$$

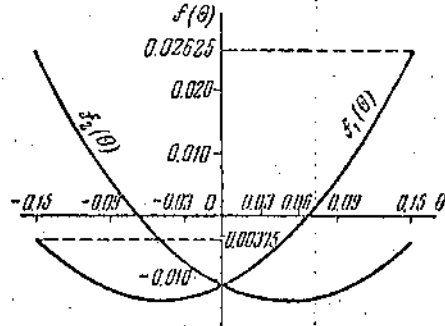
Вид функций $\vartheta^+(\theta)$ и $\vartheta^-(\theta)$, характеризующих смещения соответственно в зонах G^+ и G^- , показаны на фиг. 8. Графики этих функций близки к параболам

$$\begin{aligned} \vartheta^*(\theta) &= \pm \frac{B}{2A} \varphi (\alpha^2 - \theta^2) = \\ &= \pm 0.05 (0.0001 - \theta^2) \end{aligned}$$

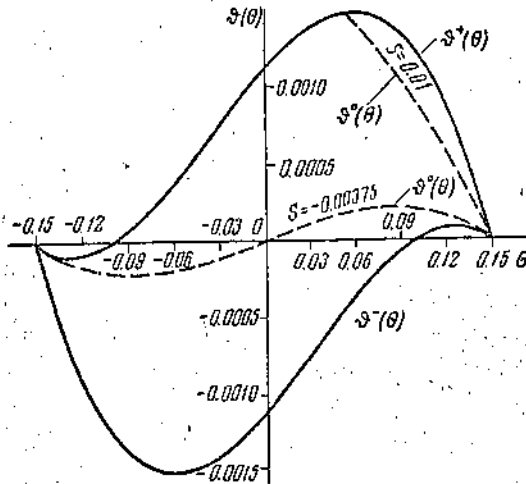
Возможность осуществления всех трех зон G^+ , G^- и H на одной и той же области контакта исключается. Либо вся область контакта (при $s > 0.00105$) представляет собой зону G^+ , либо (при $s < -0.00095$) — зону G^- , либо зона H , начавшись у переднего края, переходит затем в одну из зон G^+ или G^- . Точка, где зона H граничит с зоной G^+ или с зоной G^- , с достаточной точностью определяется пересечением прямой $\vartheta = -s(\alpha - \theta)$ с одной из парабол $\vartheta^*(\theta)$. (фиг. 8)¹

Случай, когда зона H занимает всю область контакта, осуществляется при $s \approx 0$.

Обратимся теперь к подсчету момента сопротивления перекатывания. Силы, действующие на каток, могут быть приведены к горизонтальной



Фиг. 6



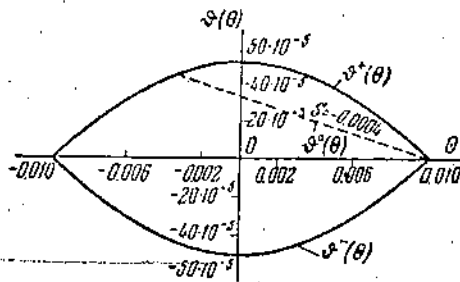
Фиг. 7

Зона H начнется у переднего края, переходит затем в одну из зон G^+ или G^- . Точка, где зона H граничит с зоной G^+ или с зоной G^- , с достаточной точностью определяется пересечением прямой $\vartheta = -s(\alpha - \theta)$ с одной из парабол $\vartheta^*(\theta)$. (фиг. 8)¹

¹ Имено, случай $\alpha \ll \varphi$ исследован в работе^[5].

силе P и вертикальной нагрузке Q , приложенных к центру катка, моменту M и распределенным реакциям основания p и q .

В случае ведомого катка сила P имеет направление скорости центра катка, а момент M направлен против вращения катка (фиг. 9).

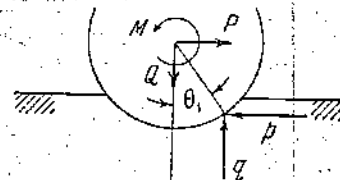


Фиг. 8

отношениям (1), можно найти, как изменяются в области контакта распределенные усилия p и q . Если скорость центра катка V_0 и его угловая скорость ω постоянны, то все перечисленные силы взаимно уравновешиваются. В соответствии с законами статики силы P и Q и момент M определяются по формулам

$$P = - \int_{-a}^a p(\xi) d\xi, \quad Q = \int_{-a}^a q(\xi) d\xi \quad (62)$$

$$M = \int_{-a}^a \{-R \cos \theta_1 p(\xi) + [\xi + u(\xi)] q(\xi)\} d\xi$$



Фиг. 9

Для определения потерь на трение составим соотношение

$$PV_0 = M\omega + N' \quad (63)$$

где PV_0 — мощность, развиваемая силой P (рассматривается ведомый каток), $M\omega$ — мощность, расходуемая на преодоление момента внешнего торможения, и N' — мощность, которая теряется на преодоление трения в области контакта катка и упругого основания. Отношение

$$T = \frac{N'}{V_0} \quad (64)$$

следует рассматривать как дополнительное сопротивление, которое приходится преодолеть силе P наряду с моментом M . Величину T знаменем силой трения качения. Его можно представить в виде

$$T = P - M \frac{\omega}{V_0} = P - \frac{M}{R} + s \frac{M}{R} \quad (65)$$

Здесь использована формула (23) для меры кажущегося проскальзывания s .

Заметим, что величина s играет в образовании силы трения качения существенную роль. При неизменных величинах Q , R , A , B и f с увеличением момента M растет и величина s , поэтому сила T становится наибольшей при предельном значении s , когда зона H обращается в точку и вся область контакта наполняется зоной G^+ .

Согласно уравнению (33) это наступает при

$$s = \left(\frac{H}{A} - \frac{1}{2} \right) \alpha^2 + \frac{H}{A} \alpha \varphi \quad (66)$$

Распределение усилий q почти не зависит от горизонтальных смещений основания и в соответствии с формулами (40) и (41) может быть представлено в виде

$$q = BR (\cos \theta - \cos \alpha - \vartheta \sin \theta) \approx BR \frac{\alpha^2 - \theta^2}{2} \quad (67)$$

Используя формулу (67), согласно второму равенству (62) и соотношению (22), имеем

$$Q = \int_{-\alpha}^{\alpha} BR \frac{\alpha^2 - \theta^2}{2} R \cos \theta d\theta \approx BR^2 \frac{2}{3} \alpha^2 \quad (68)$$

Откуда

$$\alpha = \sqrt{\frac{3Q}{2BR^2}} \quad (69)$$

Подставляя найденное значение α в формулу (66), для s получим

$$s = \left(\frac{B}{A} - \frac{1}{2} \right) \frac{3Q}{2BR^2} + \frac{\varphi \sqrt{3Q}}{R \sqrt{2AB}} \quad (70)$$

Если $\varphi > \alpha$ или, во всяком случае, не на много меньше α , то можно приближенно принять, что

$$P = Jq = JR \frac{\alpha^2 - \theta^2}{2} \quad (71)$$

после чего, в соответствии с формулами (62), имеем

$$P = JB R^2 \frac{2}{3} \alpha^2 = JQ, \quad M = PR \left(1 - \frac{3\alpha^2}{5} \right) \quad (72)$$

При подсчете величины момента принято, что

$$\cos \theta_1 \approx \cos \theta + \vartheta \sin \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \quad (73)$$

и, кроме того, опущен член, содержащий перемещение u (5).

Подставляя, согласно формулам (70) и (72) величины s , P и M в соотношение (65), получаем приближенную формулу для максимальной силы трения качения в виде

$$T = \frac{\sqrt{3} J^2 Q^3}{\sqrt{2AB} R^2} \quad (74)$$

В других случаях, когда область контакта содержит также и зону H , определение силы трения качения требует, как правило, числовых расчетов. Некоторые относящиеся сюда общие результаты даны в [5].

Поступило 21 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Reynolds O. On Rolling Friction. Philos. Transact. of the Royal Soc. of London, vol. 166, p. 155, 1876.
2. Фромм Н. Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben. Zeitschrift für angewandte Math. und Mech., Bd. 7, H. 1, Februar, 1927.
3. Глаголев Н. И., Сопротивление перекатыванию цилиндрических тел. ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.
4. Ишлинский А. Ю., Трение качения. ПММ, т. II, вып. 2, 1938.
5. Ишлинский А. Ю., Теория сопротивления перекатыванию (трение качения) и смежных явлений. Сб. докладов конференции по трению и износу в машинах. Изд. АН СССР, 1940.