Уч. Зап. МГУ, 1946, в. 117
Механика т. 1

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Пространственная задача пластичности явилась предметом внимания многих ученых, начиная с М. Леви (1), предложившего обобщение уравнений плоского пластического течения Сен-Венана на случай пространственного пластического течения. Большие успехи в написании уравнений для пространственного пластического деформирования сделал Генки (2), который развил результаты, полученные ранее Хааром (3) и Мизесом (4). Любопытное построение формул Генки дал недавно Качанов (5), предложивший кроме того дальнейшее обобщение уравнений Генки для изотропной среды с произвольным законом упрочнения.

Особенностью всех предложенных теорий пространственного пластического состояния является предположение о сохранении изотропности среды при деформировании. Таким образом изменение направления пластического течения может быть произведено без изменения условий пластичности, а лишь одним изменением направления действия внешних сил на пластическое тело. Вследствие этого эффект Баушингера не укладывается в рамки этих теорий, т. е. растяжение образца за предел текучести не сопровождается понижением предела текучести при последующем сжатии того же образца, как это имеет место в действительности.

В настоящий момент мы почти не имеем сведений о пластичности монокристаллов при сложном напряженном состоянии. Вследствие этого пока затруднительно дать фактические обоснования поведению поликристаллических тел при пластическом деформировании, применяя статистические методы исследования.

Здесь мы сделаем попытку построить уравнения деформирования тел за пределами упругости, вводя некоторые простейшие гипотезы о характере происходящих явлений, которые на наш взгляд качественно оправдываются экспериментом.

Будем в дальнейшем считать пластическую деформацию настолько малой, что компоненты ее можно с достаточной точностью подсчитать по известным формулам:

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\ e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\ e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\ e_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\ e_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\ e_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

где u, v, w — компоненты смещения.

Через ε_1, ε_2, ε_3 обозначим главные компоненты деформации, а величины $s_1=\varepsilon_1-\frac{1}{3}\theta$, $s_2=\varepsilon_2-\frac{1}{3}\theta$, $s_3=\varepsilon_3-\frac{1}{3}\theta$, где $\theta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$, назовем компонентами формоизменения. Нетрудно видеть, что они не зависят от величины объемной деформации и кроме того

$$s_1+s_2+s_3=0.$$

Если отвлечься от ориентации главных направлений, то величины θ, s_1, s_2 и s_3 могут рассматриваться как обобщенные координаты, определяющие деформацию бесконечно-малого элемента тела. Пусть Θ, S_1, S_2 и S_3—обобщенные силы, соответствующие этим координатам, тогда должно иметь место:

$$\sigma_1\delta\varepsilon_1+\sigma_2\delta\varepsilon_2+\sigma_3\delta\varepsilon_3=\Theta\delta\theta+S_1\delta s_1+S_2\delta s_2+S_3\delta s_3,$$

где σ_1, σ_2 и σ_3—нормальные напряжения на площадках, нормалями которых служат главные направления деформации. Мы введем гипотезу о том, что эти напряжения также являются главными. Так как $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$ и $\delta\varepsilon_3$ независимы, то, замечая, что

$$\delta\theta=\delta\varepsilon_1+\delta\varepsilon_2+\delta\varepsilon_3,\quad \delta s_1=\frac{2}{3}\delta\varepsilon_1-\frac{1}{3}\delta\varepsilon_1 \text{ и т. д.},$$

получим:

$$\sigma_1=\frac{2}{3}S_1-\frac{1}{3}S_2-\frac{1}{3}S_3+\Theta,$$
$$\sigma_2=\frac{2}{3}S_2-\frac{1}{3}S_3-\frac{1}{3}S_1+\Theta,$$
$$\sigma_3=\frac{2}{3}S_3-\frac{1}{3}S_1-\frac{1}{3}S_2+\Theta$$

или

$$\sigma_1=S_1+\Theta-\Gamma,$$
$$\sigma_2=S_2+\Theta-\Gamma,$$
$$\sigma_3=S_3+\Theta-\Gamma,$$

где через Γ обозначена одна треть суммы величин S_1, S_2 и S_3, которые в дальнейшем будут именоваться главными напряжениями формоизменения. Складывая написанные выше соотношения, получим:

$$\Theta=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

и таким образом Θ представляет собой среднеарифметическое нормальное напряжение.

Главные напряжения формоизменения S_1, S_2 и S_3 не определяются однозначно через главные нормальные напряжения, как и следовало ожидать, вследствие зависимости величин s_1, s_2 и s_3 между собой. Имеем:

$$S_1=\Gamma+\frac{2}{3}\sigma_1-\frac{1}{3}\sigma_2-\frac{1}{3}\sigma_3,$$
$$S_2=\Gamma+\frac{2}{3}\sigma_2-\frac{1}{3}\sigma_3-\frac{1}{3}\sigma_1,$$
$$S_3=\Gamma+\frac{2}{3}\sigma_3-\frac{1}{3}\sigma_1-\frac{1}{3}\sigma_2,$$

где величина Γ не может быть определена из соображений статики.

Будем считать, что каждое напряжение формоизменения зависит лишь от соответствующего ему компонента формоизменения, т. е.

$$S_1=f(s_1),\quad S_2=f(s_2),\quad S_3=f(s_3),$$

где f—одна и та же функция. Точно так же среднее напряжение Θ будем считать функцией одной переменной θ объёмной деформации, т. е.

$$\Theta=g(\theta),$$

где g — некоторая известная функция. Высказанное выше составляет нашу вторую гипотезу о деформировании тел. Нетрудно видеть, что при взаимной однозначности написанных функциональных соотношений мы будем иметь дело с изотропным упругим телом. Это тело будет подчиняться закону Гука, если функции f и g будут линейными. Действительно, полагая:

$$S_1 = bs_1, \quad S_2 = bs_2, \quad S_3 = bs_3 \text{ и } \Theta = \varkappa\theta,$$

получим,

$$S_1 + S_2 + S_3 = 3\Gamma = b(s_1 + s_2 + s_3) = 0,$$

следовательно,

$$\sigma_i = S_i + \Theta - \Gamma = bs_i + \varkappa\theta = \left(\varkappa - \frac{b}{3}\right)\theta + b\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Если ввести обозначения

$$b = 2\mu \quad \text{и} \quad \varkappa - \frac{b}{3} = \lambda,$$

то немедленно придем к закону Гука в форме Ляме:

$$\sigma_i = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_i.$$

Принимая иные формы зависимости между S_1, S_2, S_3, Θ и s_1, s_2, s_3, θ, можно получить многие известные ранее тела. Например, при соотношениях интегрального характера вида Вольтерра:

$$S_i = bs_i - \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-\tau)\, s_i(\tau)\, d\tau, \quad \Theta = \varkappa\theta - \int_{-\infty}^{t} \psi(t-\tau)\, \theta(\eta)\, d\tau,$$

придем к уравнениям наследственности типа Больцмана—Вольтерра:

$$\sigma_i = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_i - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\varphi(t-\tau) - \frac{1}{3}\psi(t-\tau) \right] \theta(\tau) + \psi(t-\tau)\, \varepsilon_i(\tau) \right\} d\tau.$$

Полагая

$$S_i = \mu \frac{ds_i}{dt}, \quad \Theta = \varkappa\theta,$$

придем к уравнениям типа сжимаемой вязкой жидкости и т. д.

Здесь мы изучим такую зависимость между S и s, которая известна в литературе под названием линейного упрочнения, т. е. будем считать, что в случае монотонного возрастания s имеет место:

$$S = bs, \text{ пока } s < \frac{1}{b}K$$

и

$$S = K + h\left(s - \frac{K}{b}\right) \text{ при } s > \frac{1}{b}K,$$

где K — пластическая постоянная среды.

График зависимости S от s имеет, следовательно, перелом в точке с координатами $\left(S = K,\ s = \frac{1}{b}K\right)$ (см. рис. 1).

Если после достижения некоторого значения $\bar{s}$ величина s начнет убывать, то S будет уменьшаться по закону прямой с угловым коэфициентом b, т. е.

$$\bar{S} - S = b(s - s),$$

где $\bar{S}$ — значение S, достигнутое при $s = \bar{s}$.

На рис. 2 изображены «петля гистерезиса» при периодическом изменении s.

Таким образом можно указать две прямые

$$S = \pm K + h\left(s \mp \frac{1}{b} K\right),$$

между которыми находятся возможные пары значений S и s. При этом

$$dS = b ds,$$

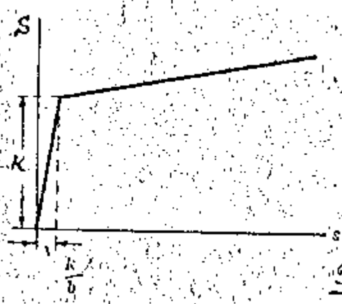

Рис 1

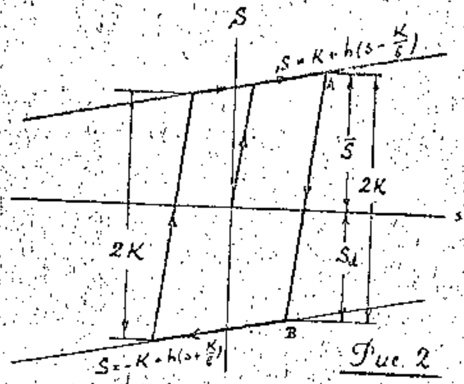

Рис. 2

если точка (S, s) находится строго между обеими прямыми; если же точка (S, s) находится на верхней прямой:

$$S = K + h\left(s - \frac{1}{b} K\right),$$

то

$$dS = h ds \text{ при } ds > 0$$

и

$$dS = b ds \text{ при } ds < 0.$$

Точно так же, если точка (S, s) находится на нижней прямой

$$S = -K + h\left(s + \frac{1}{b} K\right),$$

то

$$dS = h ds \text{ при } ds < 0,$$
$$dS = b ds \text{ при } ds > 0.$$

Очевидно, что по отношению к напряжению S и деформации s имеет место эффект Баушингера. Действительно, перелом графика при «растяжении» из естественного состояния происходит при напряжении

$$S = K,$$

при последующем «сжатии» вначале имеет место «упругая деформация», соответствующая прямой с угловым коэфициентом b:

$$\bar{S} - S = b(\bar{s} - s)$$

и затем, в точке пересечения этой прямой с нижней граничной прямой, имеет место второй перелом графика, соответствующий уже пределу упругости при сжатии.

Нетрудно подсчитать значение этого «предела упругости при сжатии». Действительно, точка A графика расположена на $2K$ выше точки B.

Точно таким же свойством обладают и все другие пары точек пересечения с граничными прямыми прямых с угловым коэффициентом b. Если мы ординату точки пересечения нашей прямой «упругого сжатия» с нижней граничной прямой обозначим через S_d, то будем иметь:

$$S_d = S - 2K.$$

Имея в виду те случаи, в которых S не намного больше K и, во всяком случае, $s < 2K$, получим:

$$S_d < 0 \text{ и } |S_d| < K,$$

т. е. имеет место эффект Баушингера.

Легко видеть, что выбранная зависимость между S и s такова, что имеет место так называемое явление наклепа. Действительно, если при

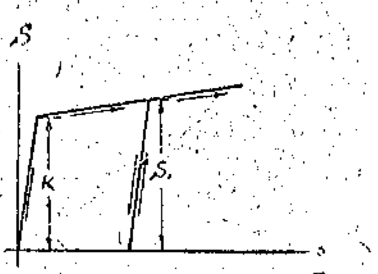

Рис. 3.

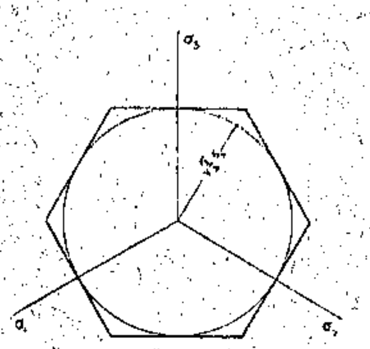

Рис 4

«растяжении» из естественного состояния напряжение S превысит предел упругости K и затем произведем разгрузку до напряжения S, равного нулю, то будем иметь некоторую остаточную деформацию. Если теперь вновь начать «растяжение», то диаграмма пойдет по той же прямой обратно и, достигнув верхней граничной прямой, получит перелом; таким образом предел упругости окажется при повторном растяжении повышенным (см. рис. 3). Если $h=0$, то будем иметь для S и s «идеализированную» диаграмму Прандтля (см. рис. 6) с горизонтальным участком «текучести». Эффект Баушингера и наклеп здесь уже места не имеют. Для случая $h=0$ при растяжении из естественного состояния будем иметь при монотонном возрастании

$$S = bs \text{ при } s < \frac{1}{b}K$$

и

$$S = K \text{ при } s > \frac{1}{b}K.$$

В общем же случае:

$$\begin{aligned} dS &= b\,ds \text{ при } S < K, \\ dS &= b\,ds \text{ при } S = K,\ ds < 0, \\ dS &= b\,ds \text{ при } S = -K,\ ds > 0, \\ dS &= 0 \quad \text{ при } S = K,\ ds > 0, \end{aligned}$$

и

$$dS = 0 \quad \text{при } S = -K,\ ds < 0.$$

Пусть элемент тела находится в естественном состоянии. Тогда, если ни одна из величин S_1, S_2 и S_3 не превышает критического значения K, мы будем иметь дело с обычным упругим изотропным телом. Как было показано выше, в этом случае $\Gamma = 0$ и

$$S_1 = \frac{2}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_3,$$
$$S_2 = \frac{2}{3}\sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_3 - \frac{1}{3}\sigma_1,$$
$$S_3 = \frac{2}{3}\sigma_3 - \frac{1}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_2.$$

Область $|S_1| < K$, $|S_2| < K$, $|S_3| < K$ соответствует упругой области значений σ_1, σ_2, σ_3 и представляет в пространстве Хейга с координатами σ_1, σ_2, σ_3 шестигранную призму с осью одинаково наклоненной к положительным направлениям осей σ_1, σ_2 и σ_3 (см. рис. 4).

Закон Гука нарушается, если одна из величин S в процессе деформирования превысит значение K, поэтому указанная призма является характеристической поверхностью для некоторой новой теории прочности (6).

Из дальнейших примеров будет видно, что значительные пластические деформации элемента будут иметь место, когда два каких-либо напряжения S превысят значение K.

Рассмотрим теперь процесс простого растяжения тела, подчиняющегося вышеприведенному соотношению между S и s.

В этом случае будем иметь:

$$\sigma_1 = \sigma > 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \; \Theta = \frac{1}{3}\sigma$$

и в области упругих деформаций:

$$S_1 = \frac{2}{3}\sigma_1, \quad S_2 = -\frac{1}{3}\sigma_1, \quad S_3 = -\frac{1}{3}\sigma_1.$$

Упругое растяжение будет иметь место пока $S_1 < K$, причем

$$\frac{2}{3}\sigma_1 = S_1 = bs_1 = b\varepsilon_1 - \frac{1}{3}b\theta, \quad \theta = \frac{1}{\varkappa}\Theta = \frac{1}{3}\frac{\sigma}{\varkappa},$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{2}{3b} + \frac{1}{9\varkappa}\right)\sigma = \frac{1}{E}\sigma,$$

где

$$\frac{1}{E} = \frac{6\varkappa + b}{9\varkappa b}.$$

Таким образом напряжение

$$\sigma = \frac{3}{2}K = \sigma_e$$

служит пределом упругости при растяжении. Пусть теперь напряжение σ превысит несколько предел упругости σ_e. При этом будем иметь:

$$S_2 = K + h\left(s_1 - \frac{1}{b}K\right) = K' + hs,$$

где

$$K' = \frac{b-h}{b}K,$$

так как S_1 превысит значение K.

Для S_2 и S_3 будем иметь попрежнему:

$$S_2 = bs_2, \quad S_3 = bs_3.$$

Складывая s_1, s_2 и s_3, получим:

$$3\Gamma = K' + hs_1 + bs_2 + bs_3 = K' - (b-h)\, s_1,$$

так как

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0.$$

Далее имеем:

$$\sigma = \sigma_1 = S_1 + \Theta - \Gamma = K' + hs_1 + \frac{\sigma}{3} - \left(\frac{1}{3} K' - \frac{b-h}{3} s_1\right).$$

Замечая, что

$$s_1 = \varepsilon_1 - \frac{1}{3}\,\theta = \varepsilon_1 - \frac{1}{9}\frac{\sigma}{\varkappa},$$

имеем:

$$\sigma\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\frac{h}{\varkappa} + \frac{b-h}{27}\frac{1}{\varkappa}\right) = K' + \left(h + \frac{b+h}{3}\right)\varepsilon_1,$$

откуда заключаем, что деформирование пойдет далее, следуя закону прямой с угловым коэфициентом:

$$\frac{9\varkappa\,(b+2h)}{18\varkappa + b + 2h} = E' < E,$$

ибо

$$E - E' = \frac{108\varkappa^2\,(b-h)}{(2\varkappa + b)\,(18\varkappa + b + 2h)}.$$

Для предельного случая несжимаемого материала ($\varkappa = \infty$) и идеальной диаграммы Прандтля ($h = 0$) будем иметь $E' = \frac{1}{3}\, E$, вообще же $E' > \frac{1}{3} E$, и таким образом на этом участке диаграммы удлинения не будут сильно отличаться от чисто упругих. Этот результат согласуется с экспериментальными данными, отмечающими остаточные деформации даже при значениях растягивающего напряжения, меньших предела упругости.

Второй участок диаграммы будет иметь место, пока

$$|S_2| = |S_3| < K.$$

Подсчитаем, какому напряжению соответствует начало третьего участка.

Имеем:

$$S_2 = bs_2 = -K = S_3$$

и, следовательно,

$$s_1 = -(s_2 + s_3) = \frac{2}{b} K,$$

после чего

$$S_1 = K' + hs_1 = \frac{b-h}{b} K + \frac{2h}{b} K = \frac{b+h}{b} K$$

и

$$3\Gamma = S_1 + S_2 + S_3 = -\left(1 - \frac{h}{b}\right) K.$$

Таким образом

$$\frac{2}{3}\,\sigma_1 = \frac{2}{3}\,\sigma = S_1 - \Gamma = \left(1 + \frac{h}{b}\right) K + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{h}{b}\right) K = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\frac{h}{b}\right) K,$$

откуда получим значение растягивающего напряжения на границе второго и третьего участка:

$$\sigma_1 = \left(2 + \frac{h}{b}\right) K.$$

Найдем теперь угловой коэфициент наклона третьего участка диаграммы растяжения. Имеем для $\sigma_1 > \sigma_s$:

$$S_1 = K' + hs_1 \quad \text{и} \quad S_2 = S_3 = -K' + hs_2,$$

откуда $3\Gamma = -K'$. Следовательно,

$$\frac{2}{3}\sigma = S_1 - \Gamma = K' + hs_1 + \frac{1}{3}K' = \frac{4}{3}K' + h\left(\varepsilon_1 - \frac{\sigma}{9\varkappa}\right)$$

или

$$\left(1 + \frac{h}{6\varkappa}\right)\sigma = 2K' + \frac{3}{2}h\varepsilon_1$$

и искомый угловой коэфициент равен:

$$E'' = \frac{9\varkappa h}{h + 6\varkappa}.$$

Так как h предполагается значительно меньшим $\varkappa$ и b, то E'' значительно меньше E' и E и, следовательно, третий участок соответствует появлению значительных удлинений при растяжении. Если принять материал несжимаемым ($\varkappa = \infty$) и значение коэфициента упрочнения принять равным нулю, то третий участок будет иметь горизонтальное направление, характеризуя текучесть материала (см. рис. 5).

Рис. 5

В экспериментальных кривых мы не наблюдаем резких изломов диаграммы растяжения, как это следует из нашего теоретического построения. Однако общий характер кривой зависимости σ от ε получается тот же; гладкий же характер кривой может быть объяснен статистическим эффектом распределения характерной величины для отдельных кристаллитов металла.

Прежде чем переходить к более сложным напряженным состояниям, рассмотрим случай кручения круглого цилиндра.

Имеем для элемента, расположенного у поверхности цилиндра:

$$\sigma_1 = -\sigma_2, \ \sigma_3 = 0, \ \max\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sigma_1$$

и, следовательно,

$$\Theta = 0, \ \theta = 0.$$

Так как до достижения предела упругости $\Gamma = 0$, то имеем:

$$S_1 = bs_1 = \sigma_1, \ S_\lambda = bs_2 = -\sigma_2, \ S_3 = 0,$$

кроме того,

$$\max\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = s_1 - s_2 = 2s_2 = \frac{2}{b}\sigma.$$

Очевидно, что величины S_1 и S_2 одновременно достигают предельных значений $\pm K$ при $\max\tau = K$, и диаграмма зависимости касательного напряжения τ при чистом сдвиге от величины сдвига γ имеет лишь два участка. Угловой коэффициент наклона первого участка равен $\frac{1}{2}b$, т. е. модулю сдвига $\mu = G = \frac{1}{2}b$. Чтобы найти угловой коэффициент второго участка, достаточно заметить, что после предела упругости имеем:

$$\max\tau = \sigma_1 = S_1 = K + hs_1 = K + h\max\gamma.$$

Таким образом в случае $h = 0$ имеет место горизонтальная площадка текучести.

Вследствие неоднородности напряженного состояния при кручении, лишь элементы поверхности перейдут в пластическое состояние и, следовательно, диаграмма зависимости крутящего момента от угла закрутки перелома иметь не будет.

Остановимся на величине $\max\tau$, соответствующей переходу в пластическое состояние элемента при чистом сдвиге.

Обозначим эту величину через τ_s. Согласно предыдущему имеем:

$$\tau_s = K.$$

Возникает вопрос: как определить величину τ_s на основании опытов на простое растяжение?

При простом растяжении мы имеем два характерных напряжения: предел упругости

$$\sigma_e = \frac{3}{2}K$$

и предел текучести

$$\sigma_s = \left(2 + \frac{h}{b}\right)K.$$

Следовательно,

$$\tau_s = \frac{2}{3}\sigma_e = 0{,}667\sigma_e \quad \text{и} \quad \tau_s = \frac{\sigma_s}{2 + \frac{h}{b}} \simeq 0{,}5\sigma_s.$$

В реальных материалах обычно не делают строгого различия σ_e от σ_s, и экспериментальные данные дают зависимость, укладывающуюся в интервало $0{,}50\sigma_s - 0{,}67\sigma_s$. Тот же интервал заполняют многие теории прочности.

Рассмотрим теперь случай плоского деформированного состояния несжимаемого упруго-пластического материала без упрочнения ($h = 0$). В этом случае

$$\varepsilon_3 = 0$$

и

$$s_3 = \varepsilon_3 - \frac{1}{3}\theta = -\frac{1}{3}\theta.$$

Для несжимаемого материала имеем $\theta = 0$, следовательно,

$$s_3 = 0,\ s_1 = -s_2 \quad \text{и} \quad S_1 = -S_2,\ S_3 = 0.$$

Далее, в пределах упругости:

$$\sigma_1 = S_1 + \Theta,$$
$$\sigma_2 = -S_2 + \Theta,$$
$$\sigma_3 = \Theta,$$

откуда

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \text{ и } \sigma_1 - \sigma_2 = S_1 - S_2 = 2S_1.$$

Предел упругости будет достигнут, если напряжение S_1 достигнет критического значения K. Для этого необходимо, чтобы

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2K \text{ или } \max\tau = K.$$

Таким образом для плоской деформации несжимаемого материала условие пластичности совпадает с условием Сен-Венана.

В пластической области имеем:

$$\sigma_1 = S_1 - \Gamma + \Theta,$$
$$\sigma_2 = -S_1 - \Gamma + \Theta,$$
$$\sigma_3 = -\Gamma + \Theta,$$

откуда $\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$, т. е. третье главное напряжение равно полусумме главных напряжений, направление которых лежит в плоскости деформирования. Такой же результат следует из теории пластичности Мизеса—Генки.

Для сжимаемого материала выкладки несколько усложняются. Имеем в упругой области:

$$S_1 = bs_1, \quad S_2 = bs_2, \quad S_3 = bs_3,$$

но

$$s_3 = \varepsilon_3 - \frac{1}{3}\theta = -\frac{1}{3}\theta,$$

следовательно,

$$s_2 = -s_1 - s_3 = \frac{1}{3}\theta - s_1$$

и

$$S_2 = \frac{b}{3}\theta - bs_1.$$

Так как объемная деформация бывает обычно небольшой, то следует ожидать, что из трех величин S скорее всего достигнет предельного значения K одна из первых двух. Пусть такой окажется S_1, тогда

$$S_1 = K, \quad S_2 = \frac{b}{3}\theta - K$$

и далее

$$\sigma_1 = K + \Theta = K + \varkappa\theta,$$
$$\sigma_2 = \frac{b}{3}\theta - K + \Theta = -K + \left(\frac{b}{3} + \varkappa\right)\theta,$$

откуда, исключая θ, получим соотношение:

$$\sigma_1\left(\frac{b}{3} + \varkappa\right) - \sigma_2\varkappa = \left(\frac{b}{3} + 2\varkappa\right)K,$$

при котором имеет место наступление предела упругости. Однако, как мы видели ранее на примере простого растяжения, дальнейшее увеличение напряжений не сопровождается большой деформацией, пока и вторая из величин S по абсолютному значению не достигнет критического значения K. По тем же соображениям такой величиной скорее всего может оказаться S_2, причем следует положить, имея в виду, что $h = 0$,

$$S_1 = K, \quad S_2 = -K.$$

Далее, за пределом упругости имеем:

$$\sigma_1 = S_1 + \Theta - \Gamma = K + \Theta - \Gamma,$$
$$\sigma_2 = S_2 + \Theta - \Gamma = -K + \Theta - \Gamma,$$

откуда

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2K.$$

Таким образом вновь получаем условие пластичности Сен-Венана.

Для третьего главного напряжения найдем выражение:

$$\sigma_3 = S_3 + \Theta - \Gamma = S_3 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

но

$$S_3 = -\frac{b}{3}\,\theta = -\frac{b}{9\varkappa}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

и, следовательно,

$$\sigma_3\left(1 + \frac{b}{9\varkappa}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{9\varkappa}\right)(\sigma_1 + \sigma_3),$$

что близко к обычно принимаемому соотношению:

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Обратимся теперь к плоскому напряженному состоянию. В этом случае $\sigma_3 = 0$, и мы имеем в упругой области:

$$\sigma_3 = S_3 + \Theta = 0,$$

откуда

$$S_3 = -(S_1 + S_2)$$

и, следовательно,

$$\sigma_1 = 2S_1 + S_2,$$
$$\sigma_2 = S_1 + 2S_2.$$

Таким образом

$$S_1 = \frac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2),$$
$$S_2 = \frac{1}{3}(2\sigma_2 - \sigma_1),$$
$$S_3 = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Предел упругости может быть достигнут, если одна из величин S примет по модулю значение K.

В зависимости от соотношения величин главных напряжений это будет S_1, S_2 или S_3. Пусть $S_1 = \pm K$, тогда условием предела упругости будет служить равенство:

$$2\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 3K.$$

Аналогичное соотношение будет иметь место и для случая

$$S_2 = \pm K.$$

В случае же $S_3 = \pm K$ имеем условие предела упругости в форме:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \pm 3K.$$

Как уже было показано выше, значительные пластические деформации появятся лишь в том случае, если две из величин S по модулю достигнут критического значения K. Ниже мы остановимся на случае отсутствия упрочнения на графике зависимости S от s, т. е. примем угловой коэфициент h равным нулю (см. рис. 6). Это означает, что при монотонном деформировании величина S, достигнув критического значения $\pm K$, остается постоянной. Случай упрочнения $h \neq 0$ не выносит принципиальных затруднений, усложняя лишь выкладки.

Пусть второе главное напряжение σ_2 равно некоторой постоянной σ_2^0, меньшей $^3/_2\, K$, но больше K, тогда, при $\sigma_1 = 0$, будет иметь место простое растяжение материала в пределах упругости. Будем теперь увеличивать напряжение σ_1. Тогда, как легко усмотреть из выведенных для S_1, S_2 и S_3 формул, напряжения S_1 и S_2 по модулю будут вначале уменьшаться, в то время как напряжение S_3 по модулю будет увеличиваться. Оно первым достигнет критического значения $-K$. При этом будет иметь место:

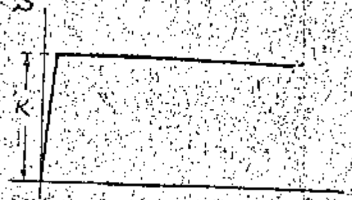

Рис. 6

$$-K = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2^0),$$

откуда следует, что предел упругости будет достигнут при значении главного напряжения σ_1, равным

$$\sigma_1 = 3\sigma_0 - \sigma_2.$$

Значения величин S_1 и S_2 окажутся при этом следующими:

$$S_1 = \frac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2) = 2K - \sigma_2^0,$$

$$S_2 = \frac{1}{3}(2\sigma_2 - \sigma_1) = \sigma_2^0 - K.$$

Убеждаемся, что при условии $K < \sigma_2^0 < \frac{3}{2}K$, действительно, при $|S_3| = K$ имеет место $|S_1| < K$, $|S_2| < K$. Будем далее увеличивать напряжение σ_1. Величины S_1, S_2 и S_3 следует теперь определять из уравнений пластической области

$$\sigma_1 = S_1 + \Theta - \Gamma,$$
$$\sigma_2 = S_2 + \Theta - \Gamma,$$
$$\sigma_3 = S_3 + \Theta - \Gamma.$$

Вследствие отсутствия упрочнения имеем:

$$S_3 = -K,$$

после чего получаем:

$$S_1 = \sigma_1 - K,$$
$$S_2 = \sigma_2^0 - K.$$

Напряжение S_2 в процессе изменения σ_1 остается постоянным и, следовательно, только величина S_1 может достигнуть критического значения K при напряжении σ_1 равном $2K$, после чего начнутся значительные пластические деформации. Если пренебречь объемным деформированием, т. е. считать

$$s_1 \simeq \varepsilon_1, \quad s_2 \simeq \varepsilon_2, \quad s_3 \simeq \varepsilon_3,$$

то из вышеизложенного следует, что деформация в направлении второго главного напряжения, т. е. ε_2, будет сохранять свою величину, в то время как деформации в направлении первого главного напряжения и третьего (равного нулю) будут значительными (имея разные знаки). Плоскость, проходящую через направления значительного деформирования, будем называть плоскостью течения. В этой плоскости будем отмечать направление, соответствующей первой из величин S, достигших критического значения, т. е. направление потери упругости. В разобранном случае таким направлением является направление 3, а плоскостью текучести — плоскость (1,3).

Если $0 < \sigma_2^0 < K$, то картина явления становится несколько иной и величина S_1 первой достигает критического значения K. Из равенства

$$S_1 = K = \frac{2}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_2$$

следует, что это имеет место при напряжении

$$\sigma_1 = \frac{3}{2}K + \frac{1}{2}\sigma_0.$$

Далее из уравнений для пластического состояния:

$$\sigma_1 = K + \Theta - \Gamma,$$
$$\sigma_2^0 = S_2 + \Theta - \Gamma,$$
$$0 = S_3 + \Theta - \Gamma$$

получаем:

$$S_2 = \sigma_2^0 + K - \sigma_1, \quad (\sigma_2 > 0)$$
$$S_3 = K - \sigma_1,$$

откуда следует, что при дальнейшем возрастании σ_1 первым достигнет критического значения S_3 при напряжении

$$\sigma_1 = 2K.$$

Здесь имеем вновь плоскостью течения плоскость (1,3), но направлением потери упругости является направление 1.

Совершенно иная картина явлений имеет место при $\sigma_2 < 0$; тогда при условии $-K < \sigma_2 < 0$ первым достигает критического значения напряжение S_1, а затем напряжение S_2. Как легко видеть из только что разобранного примера, это будет иметь место при напряжении σ_1, равном

$$\sigma_1 = 2K + \sigma_2^0. \quad \text{или} \quad \sigma_1 - \sigma_2^0 = 2K.$$

Если, наконец, $-\frac{3}{2}K < \sigma_2^0 < -K$, то первой критического значения достигнет величина S_2. Из равенства

$$-K = \frac{1}{3}(2\sigma_2^0 - \sigma_1)$$

находим соответствующее значение σ_1:

$$\sigma_1 = 2\sigma_2^0 + 3K.$$

Напряжения S_1 и S_3 имеют при этом значения

$$S_1 = \frac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_2^0 + 2K,$$

$$S_3 = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2) = -\sigma_2^0 - K$$

и при условии $-\frac{3}{2}K < \sigma_2^0 < -K$ не достигают первыми критического значения.

Далее из уравнений

$$\sigma_1 = S_1 + \Theta - \Gamma,$$
$$\sigma_2^0 = -K + \Theta - \Gamma,$$
$$0 = S_3 + \Theta - \Gamma$$

получаем:

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma_2^0 - K,$$
$$S_3 = -\sigma_2^0 - K,$$

и критического значения, следовательно, может достичь лишь величина S_1 при напряжении

$$\sigma_1 = 2K + \sigma_2^0.$$

Таким образом последние два примера дают одну и ту же плоскость течения (1,2), но разные направления потери упругости. Во всех разобранных примерах плоского напряженного состояния мы ограничились фиксированным значением σ_2^0, причем это значение находилось в пределах $-\frac{3}{2}K < \sigma_2^0 < \frac{3}{2}K$.

Рассмотрим теперь последний пример, при котором σ_2 может выйти за эти пределы. Пусть $\sigma_2 = \sigma_1 - a$, где a—малая величина. Тогда в упругой области получаем для величин S_1, S_2 и S_3 значения:

$$S_1 = \frac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{1}{3}a,$$
$$S_2 = \frac{1}{3}(2\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{1}{3}\sigma_1 - \frac{2}{3}a,$$
$$S_3 = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = -\frac{2}{3}\sigma_1 + \frac{1}{3}a,$$

откуда следует, что первой достигнет критического значения величина S_3. Далее имеем в пластической области:

$$\sigma_1 = S_1 + \Theta - \Gamma,$$
$$\sigma_1 - a = S_2 + \Theta - \Gamma,$$
$$0 = -K + \Theta - \Gamma$$

или

$$S_1 = \sigma_1 - K,$$
$$S_2 = \sigma_1 - K - a.$$

Второй достигнет критического значения величина S_1 при $\sigma_1 = 2K$. Напряжение σ_2 может при этом сколь угодно мало отличаться от $2K$. Плоскостью течения будет являться плоскость (1,3). При $a = 0$ и, следовательно, $\sigma_1 = \sigma_2$ вместо плоскости течения будет иметь место одновременно большое пластическое деформирование по направлениям 1 и 2. По направлению 3 будет иметь место пластическая деформация, равная сумме деформаций по направлениям 1 и 2, если не учитывать деформации объема. Действительно, для этого случая имеем при пластическом течении

$$S_1 = K, \quad S_2 = K \text{ и } S_3 = -K,$$

откуда следует:

$$s_1 > 0, \quad s_2 > 0 \quad \text{и} \quad s_3 > 0,$$

а так как

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0 \text{ и } s_1 \simeq \varepsilon_1, \quad s_2 \simeq \varepsilon_2, \quad s_3 \simeq \varepsilon_3,$$

то

$$|\varepsilon_3| = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|.$$

Что же касается соотношения между деформациями ε_1 и ε_2, то оно может быть произвольным и определяется кинематическими условиями деформирования. Заметим, что теория пространственной пластичности Леви и Генки требуют для этого случая равенства:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Резюмируя проведенные исследования плоского напряженного состояния, можно сказать, что при напряжениях σ_1 и σ_2 одного знака плоскостью течения всегда является плоскость, проходящая через третье направление, и условием течения является достижение одним из напряжений σ_1 и σ_2 по модулю значения $2K$. При напряжениях же σ_1 и σ_2 разных знаков течение наступает при условии, совпадающем с условием пластичности Сен-Венана:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2K,$$

и плоскостью течения является плоскость, проходящая через эти оба направления.

Обратимся теперь к пространственному случаю деформирования. Как уже неоднократно было отмечено, достижение одним из напряжений формоизменения критического значения $\pm K$ еще не означает появления больших деформаций, а соответствует лишь переходу за предел упругости. Этот переход может совершиться в некоторой области, занимающей часть тела. Внутри этой области перемещения и напряжения могут быть найдены решением соответствующей системы уравнений, на выводе которых мы здесь не будем останавливаться. Трудности решения этой системы осложняются неизвестностью границы, отделяющей эту область от области чисто упругих деформаций.

Пусть второе из напряжений S также достигнет критического значения $\pm K$; тогда в случае отсутствия упрочнения будем иметь:

$$\sigma_1 = K + \frac{1}{3}\Theta - \frac{1}{3}\Gamma,$$

$$\sigma_2 = -K + \frac{1}{3}\Theta - \frac{1}{3}\Gamma,$$

$$\sigma_3 = S_3 + \frac{1}{3}\Theta - \frac{1}{3}\Gamma,$$

где для определенности положено, что S_1 достигло критического значения $+K$, а S_2 значения $-K$.

Из написанных соотношений получаем:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2K$$

и

$$S_3 = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Так как напряжение S_3 не достигло еще критического значения, то имеем:

$$S_3 = bs_3,$$

где s_3 — соответствующая S_3 компонента формоизменения.

Если считать материал несжимаемым, то

$$s_3 = \varepsilon_3$$

и, следовательно,

$$b\varepsilon_3 = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

При напряжениях σ_1, σ_2 и σ_3, имеющих порядок пластической постоянной, величина ε_3 должна быть очень небольшой, а для предельного случая «идеально-пластического» материала, т. е. для $b = \infty$ имеем:

$$\varepsilon_3 = 0.$$

Заметим, что величина ε_3 является корнем уравнения для главных деформаций:

$$\varepsilon^3 - \theta\varepsilon^2 + \varphi\varepsilon - \psi = 0,$$

где

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$\varphi = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2,$$

$$\psi = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Так как $\varepsilon_3 = 0$, то имеем:

$$\psi = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right), & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right), & \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

и, кроме того, в силу условия несжимаемости:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Нам неизвестно общее решение этой неполной системы двух уравнений для u, v и w. Есть некоторые основания полагать, что плоская деформация является самым общим решением этой системы. Однако наиболее интересным случаем является при пространственном деформировании тот, при котором все три главные деформации имеют значительную величину по сравнению с чисто упругим. Это означает, что все три напряжения формоизменений достигнут критических значений. В этом случае мы должны положить:

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}\Theta - \frac{1}{3}\Gamma \pm K,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{3}\Theta - \frac{1}{3}\Gamma \pm K,$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}\Theta - \frac{1}{3}\Gamma \pm K.$$

Откуда следует, что два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение $2K$. Пусть для определенности,

$$\sigma_1 = \sigma_2 \text{ и } \sigma_3 - \sigma_1 = 2K;$$

это означает, что

$$S_1 = S_2 = -K \text{ и } S_3 = K.$$

Отсюда следует, что компоненты формоизменения s_1 и s_2 отрицательны, а s_3 положительно, при этом

$$s_3 = |s_1| + |s_2|.$$

Направление, соответствующее наибольшей компоненте формоизменения, можно называть истинным направлением течения. Таким образом мы пришли к двум условиям пластичности вместо одного, как это имеет место в теории Леви и теории Генки. Нетрудно написать их для произвольной прямоугольной системы координат. Для этой цели заметим, что выражения

$$\begin{aligned}
\Theta &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\
\Phi &= \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2, \\
\Psi &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + 2\tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2
\end{aligned}$$

представляют ортогональные инварианты тензора напряжений. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_1 + 2K, \\
\Phi &= \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 = 2\sigma_1^2 + 2K\sigma_1, \\
\Psi &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_1^3 + 2K\sigma_1.
\end{aligned}$$

Исключая из полученных равенств напряжение σ, приходим к двум условиям пластичности

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2\left(\frac{\Theta - 2K}{3}\right)^2 + 2K\,\frac{\Theta - 2K}{3}, \\
\Psi &= \left(\frac{\Theta - 2K}{3}\right)^3 + 2K\left(\frac{\Theta - 2K}{3}\right)^2,
\end{aligned}$$

где вместо Θ, Φ и Ψ следует написать приведенные выше их явные представления через компоненты тензора напряжений.

Если к этим двум условиям, представляющим алгебраические уравнения относительно компонент тензора напряжений, добавить три диференциальные уравнения равновесия, то будем иметь систему пяти уравнений с шестью неизвестными функциями. Таким образом введение условия несжимаемости представляет собой идеализацию, ведущую, в случае пространственного деформирования, к статической неопределимости. Аналогичной особенностью обладает и пространственная задача теории упругости. Именно, введение условия несжимаемости делает невозможным однозначное решение пространственной задачи теории упругости, за исключением случая наличия осевой симметрии.

Рассмотрим случай осевой симметрии. Задача пластичности в том виде, как она была развита выше, для этого случая статически определима. Действительно, уравнения равновесия для случая осевой симметрии имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0.
\end{aligned}$$

При этом предполагается, как обычно, что напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ равны нулю и, следовательно, напряжение σ_θ является главным. Таким образом имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_\theta, \\
\sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2}, \\
\sigma_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2}.
\end{aligned}$$

Согласно изложенной выше теории представляется три возможности:

$$\sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_3 = \sigma_1 \quad \text{или} \quad \sigma_1 = \sigma_2$$

соответственно разным главным направлениям течения материала, определяемым по конкретным условиям задачи.

Если главным направлением пластического течения является первое направление, то из соотношения

$$\sigma_2 = \sigma_3$$

немедленно получаем:

$$\sigma_r = \sigma_z \quad \text{и} \quad \tau_{rz} = 0$$

и, следовательно,

$$\sigma_r = \sigma_\theta \pm 2k.$$

Из уравнения равновесия следует, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

откуда получаем:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_r = \pm 2K \ln \frac{c}{r},$$

где c — произвольная постоянная задачи.

Если справедливо соотношение

$$\sigma_1 = \sigma^2 = \sigma_3 \pm 2K,$$

т. е. третье направление является главным направлением течения, то имеем:

$$\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} = \pm 2K + \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2},$$

откуда

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4K^2$$

и, кроме того,

$$\sigma_\theta = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm 2K.$$

Уравнения равновесия принимают, после использования этих равенств, вид:

$$\frac{\partial (r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial z} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm 2K,$$

$$\frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial (r\sigma_z)}{\partial z} = 0,$$

причем напряжения σ_r, σ_z и τ_{rz} связаны соотношением:

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4K^2.$$

Нетрудно видеть, что полученная система уравнений представляет собой систему гиперболического типа и, следовательно, может быть решена методом характеристик, аналогично задаче о плоском состоянии среды, обстоятельно изученной С. А. Христиановичем (7) и В. В. Соколовским (8).

Настоящая статья была написана и сдана в редакцию в начале 1941 года. С тех пор теория пластичности Генки—Мизеса получила дальнейшее развитие в работах А. А. Ильюшина (9, 10). Теория пластичности, основания которой изложены здесь, нашла отражение в моих последующих работах (11, 12, 13). Будущее покажет границы применимости этих теорий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lévy M. Memoire sur les équations générales des mouvement interieurs des corps solides ductiles au delà les limites où l'elasticité pourrait les ramener à leur premier état. C. R. 1870, t. 70, pp 1323—1325.
2. Hencky H. Zur ploriischir Deformationen ind hier durch im Material hervorgeruntonen Nachspannungen. Leitschr. f. angew. Mathened. Mech. 1924. Bd 4. H. 4. ST. 324—334.
3. Haar A. und Karman T. V. Lar Theorie der Spannungzustände in plastischen und sandavtigen Luständen, Göttinger Nachvichten, 1909. S. 204.
4. Mises R. V. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Göttinger Nachvichten, 1913, S. 582.
5. Качанов. Уравнения пластичности. Журнал «Прикладная математика и механика», 1940.
6. Ишлинский А. Ю. Гипотеза прочности формоизменения. «Ученые записки МГУ». Механика, вып. XVI, 1940.
7. Христианович С. А. Плоская задача теории пластичности. Математический сборник, 1937.
8. Соколовский В. В. Плоская задача теории давления земли. Известия Технич. отд. Академии наук, 1939.
9. Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций. Журнал «Прикладная математика и механика», 1943 г., том VII, стр. 246.
10. Ильюшин А. А. Связь между теорией Сен-Венана—Леви-Мизеса и теорией малых упругопластических деформаций». Журнал «Прикладная математика и механика», 1945 г., т. IX, стр. 207.
11. Ишлинский А. Ю. Асимметрическая задача пластичности и проба Бринелли. Журнал «Прикладная математика и механика», 1944 г., т. VIII, стр. 201.
12. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута. Журнал «Прикладная математика и механика», 1943 г., т. VII, стр. 109.
13. Ишлинский А. Ю. Пространственное деформирование не вполне упругих и вязкопластических тел. Известия Отд. технических наук АН СССР, № 3, 1945 г., стр. 250.