

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова «ЯрГУ им. П. Г. Демидова»

На правах рукописи

Очиров Артем Александрович

**Исследование закономерностей формирования
массопереноса, инициируемого волновыми движениями
жидкости.**

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Белоножко Дмитрий Федорович

Ярославль — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Ретроспектива развития представлений о массопереносе, возникающем в связи с распространением волн по поверхности жидкости.	12
Глава 2. Метод расчета траекторий движения индивидуальных жидких частичек	38
2.1 Введение	38
2.2 Формулировка задачи	40
2.3 Свойства решения	44
2.4 Принцип перехода к переменным Лагранжа	46
2.5 Применение принципа расчета скорости жидких частиц к двухслойной системе	48
2.5.1 Дрейфовые и циклические составляющие скорости	50
2.5.2 Примеры расчета траекторий материальных частиц	55
2.5.3 Область закритических значений в смысле реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца	61
2.6 Заключение	63
Глава 3. Применение метода расчета траекторий движения индивидуальных жидких частичек	64
3.1 Введение	64
3.2 Волновой пакет Стокса	64
3.2.1 Введение	64
3.2.2 Математическая формулировка задачи	65
3.2.3 Решение задачи	66
3.2.4 Результаты	72

3.3	Влияние тангенциального разрыва скоростей на скорости индивидуальных жидких частиц и скорости дрейфа Стокса, вызванного распространением волнового пакета Стокса по границе раздела жидких сред	73
3.4	Влияние поверхностного электрического заряда на дрейф Стокса	77
3.4.1	Введение	77
3.4.2	Математическая формулировка задачи	78
3.4.3	Решение задачи	80
3.4.4	Заключение	83
3.5	Совокупное действие поверхностного электрического заряда и тангенциального разрыва скоростей на скорость дрейфа, связанного с распространением волнового пакета Стокса по границе раздела жидких сред	84
3.6	Заключение	88
Глава 4. О влиянии плёнки поверхностно-активного вещества на дрейфовое течение, вызванное волновым возмущением поверхности вязкой жидкости		
4.1	Введение	90
4.2	Постановка задачи	91
4.3	Решение	94
4.4	Перераспределение ПАВ, связанное с волновым возмущением поверхности жидкости	97
4.5	Траектории движения индивидуальных жидких частиц в линейном приближении	99
4.6	Учет влияния скорости движения верхней среды	102
4.7	Дрейфовые компоненты поля скоростей	104
4.8	Траектории движения жидких частиц в присутствии плёнки ПАВ	111
4.9	Заключение	112
	Заключение	114
	Список литературы	116
	Список рисунков	141

Введение

В самых разнообразных и порой неожиданных академических, биофизических, технических, геофизических приложениях исследователи сталкиваются с проблемой массопереноса, инициированного волновым движением вдоль поверхности жидкости. Волновой массоперенос имеет самое непосредственное отношение к проблемам расчета переноса загрязнения по поверхности океана; транспортировки примеси в многослойных структурах, формирующихся как в атмосфере, так и в океане; к вопросам моделирования закономерностей миграции некоторых видов флоры и фауны. Особый интерес исследователей связан с переносом поверхностно-активных веществ (ПАВ) вдоль поверхности жидкости и влиянием плёнки ПАВ на переносные свойства волн. В связи с этим не менее значимыми оказываются вопросы разработки методов мониторинга и управления местоположением областей загрязнения поверхности открытых водоемов и его влияния на динамику волнового движения. Исследование влияния растворимых и нерастворимых плёнок ПАВ на волновое движение на поверхности жидкости тесно связано с одной стороны с перспективой формирования более полного понимания физической сути явления, а с другой — для разработки новых методов управления условиями и характером протекания различного рода неустойчивостей, реализующихся на поверхности жидкости. Вопросы массопереноса у современных исследователей вызывают интерес в контексте самых разнообразных приложений: это исследование перемешивания вязких и вязкопластичных сред (см. например работы Д.М. Климова, А.Г. Петрова, Д.В. Георгиевского [145; 165; 203—205]), исследование седиментации частиц, взвешенных в жидкости и перенос твердых частиц потоком жидкости (см. например работы А.Н. Рожкова, А.В. Базилевского, В.А. Калиниченко [86; 87; 119; 209]), исследование циркуляционных течений и волновых движений в различных постановках (см. например работы Ю.Д. Чашечкина, А.В. Кистовича, А.Н. Дубовика [9—11; 51; 147—149; 164]), активно исследуются концентрационно-конвективные и конвективные массопереносы (см. например работы Е.Б. Соболевой, Г.Г. Цыпкина [90; 215; 216]). Исследование массопереноса в открытых водоемах интересно в контексте работ сотрудников института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, в которых рассматривается состав взвешенного вещества и живых организмов в мировом океане и их взаимное влияние

и влияние на экосистему в целом [141; 143]. Влияние ПАВ на потоки жидкости также активно исследуется в настоящее время (см. например работы А.Н. Рожкова, А.В. Базилевского [116—118]). Сотрудниками института океанологии им. П.П. Ширшова РАН в настоящее время активно исследуются вопросы мониторинга поверхностных загрязнений вод открытых водоемов [150; 160—162; 206]. Для развития этих исследований необходимо развивать теорию влияния упругой плёнки ПАВ на динамику волнового движения жидкости. Динамику волнового движения в том числе вязкой жидкости в лагранжевом описании активно изучают в Нижнем Новгороде (см. например работы ученых Федерального исследовательского центра институт прикладной физики РАН и НИУ ВШЭ Нижегородский филиал [111—113; 151—154; 174; 227]). Волновое движение в присутствии конвекции различной природы активно исследуется в Пермском государственном университете и институте механики сплошных сред УрО РАН (см. например работы Б.Л. Смородина, А.А. Черепанова, Д.В. Любимова, Т.П. Любимовой, А.В. Тараут, Д.С. Голдобина, А.И. Мизева, Р.В. Бирих [70; 71; 82; 144; 166; 171—173; 175; 214; 219; 223]). В институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН изучаются вопросы, связанные со взаимным влиянием ледяного покрова и волнового возмущения поверхности жидкости (см. например работы Л.А. Ткачевой, И.В. Стуровой [217; 218; 220—222]), вопросы движения твердых частиц различной формы в жидкости при волновом возмущении ее поверхности (см. например работы В.Л. Сенницкого, О.С. Пятигорской [207; 208; 210]), а также вопросы динамики движения жидкости в различных постановках (см. например работы Е.А. Карабут, Е.Н. Журавлевой, В.Л. Сенницкого, В.И. Букреева, В.Ю. Ляпидевского [56; 114; 142; 156; 158; 163; 177; 211; 212]). Динамика волнового движения в жидкости в различных постановках рассматривается исследователями института электрофизики УрО РАН (см. например работы Н.М. Зубарева, О.В. Зубаревой [114; 157—159]).

Несмотря на давнюю историю вопроса и большое количество исследований в этой области, во многих практических приложениях дрейф, связанный с волновым возмущением поверхности жидкости, учитывается при помощи модели, предложенной Дж. Г. Стоксом еще в середине XIX века. До сих пор не предложено простой аналитической, удобной для применения на практике процедуры расчета скорости дрейфа Стокса в многослойных системах жидкостей. В начале XXI столетия активизировались экспериментальные и теоретические исследования в области построения траекторий индивидуальных частиц жид-

кости, причем теоретические работы направлены в основном на использование численных методов расчета.

Целью данной работы является аналитическое асимптотическое исследование основных закономерностей волнового массопереноса в идеальных и вязких жидкостях, а также изучение влияния тангенциального разрыва скоростей, поверхностного электрического заряда и плёнки поверхностно-активного вещества на скорость дрейфа и характер движения индивидуальных жидких частиц, участвующих в периодическом и переносном движениях, связанных с распространением волн по поверхности жидкости.

Для достижения поставленной цели были аналитически асимптотически решены следующие **задачи**:

1. построить процедуру расчета скорости среднего волнового массопереноса и траекторий движения индивидуальных жидких частиц для движущихся относительно друг друга контактирующих слоёв жидкости;
2. исследовать влияние тангенциального разрыва скоростей на границе раздела двух идеальных жидкостей на скорость волнового массопереноса и на движение, участвующих в нём материальных частиц;
3. исследовать влияние поверхностного электрического заряда на закономерности движения индивидуальных жидких частиц и на скорость массопереноса, связанного с распространением волны по поверхности жидкости;
4. исследовать влияние амплитудной модуляции волнового движения на закономерности движения материальных частиц и на скорость волнового массопереноса;
5. изучить влияние упругой плёнки поверхностно-активного вещества на закономерности движения индивидуальных жидких частиц и на скорость волнового массопереноса в вязких ньютоновских жидкостях;
6. выяснить характер влияния волнового движения поверхности несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости на картину распределения поверхностно-активного вещества, нанесённого на поверхность жидкости;
7. провести исследование влияния скорости движения идеальной среды над поверхностью вязкой ньютоновской жидкости на гашение волн упругой плёнкой поверхностно-активного вещества и на характер пе-

пераспределения вещества этой плёнки вдоль поверхности раздела рассматриваемых сред.

Научная новизна:

1. В рамках классической модели механики сплошной среды разработана оригинальная аналитическая асимптотическая методика расчета траекторий движения индивидуальных жидких частиц, участвующих в волновом движении жидкости. Методика опирается на представления о лагранжевых и эйлеровых координатах и правила преобразований при изменении системы отсчета. В отличие от известных подходов, она может быть непосредственно применима к расчёту массопереноса в многослойных жидкостях с волновым движением и тангенциальным разрывом поля скоростей на границах слоёв.
2. С использованием классической модели гидродинамики идеальной жидкости аналитически обнаружено, что начальный этап развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, сопровождается развитием нарастающих по интенсивности встречных дрейфовых течений вдоль поверхности контактирующих жидкостей. Течения направлены таким образом, чтобы уменьшить величину тангенциального разрыва поля скоростей, инициировавшего неустойчивость.
3. Аналитически с использованием метода разложения по малому параметру во втором приближении по амплитуде волны получены скорости дрейфового движения в несжимаемой ньютоновской жидкости конечной вязкости покрытой упругой нерастворимой плёнкой поверхностно–активного вещества.
4. Впервые во втором приближении по амплитуде волны, распространяющейся вдоль поверхности вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, покрытой упругой нерастворимой плёнкой поверхностно–активного вещества, найдены скорости и траектории, вовлечённых в волновое движение индивидуальных жидких частиц.
5. Впервые получены аналитические асимптотические выражения, в линейном приближении по амплитуде волнового возмущения описывающие перераспределение концентрации поверхностно–активного вещества, связанное с волновым возмущением поверхности вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, в том числе с учетом скорости относительного движения вязкой и располагающейся над ней идеальной жидких

сред. Получены соотношения, описывающие перераспределение концентрации ПАВ вдоль профиля волны в зависимости от упругости плёнки.

Практическая значимость работы состоит в том, что полученные результаты представляют собой основу для дальнейшего развития теоретических представлений о дрейфовых движениях, инициированных волновым движением вдоль поверхности жидкости, о траекториях индивидуальных жидких частиц, формирующих дрейфовое и циклическое движения, о характере перераспределения поверхностно-активных веществ вдоль поверхности жидкости. В результате работы было обнаружено новое — связанное с массопереносом — свойство неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, которое представляет интерес для приложений, имеющих дело с системой двух жидкостей, испытывающих тангенциальный разрыв скоростей вдоль границы раздела. Результаты по определению характера перераспределения плёнки ПАВ вдоль поверхности жидкости могут быть применены в задачах мониторинга и прогнозирования распространения нефтяных разливов и других поверхностно-активных формирований в мировом океане. В работе развита оригинальная методика расчета траекторий движения индивидуальных частиц жидкости, которая значительно улучшает существующие представления о переносе вещества волнами и может быть использована в самых разнообразных метеорологических, биофизических, геофизических, технических, технологических и академических приложениях.

Методология и методы исследования. заключается в использовании стандартных аналитических асимптотических методов математической физики, метода разложения по малому параметру. При решении были использованы классические модели гидродинамики и электрогидродинамики.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Результаты разработки оригинальной аналитической асимптотической методики перехода от описания поля скоростей в переменных Эйлера к описанию в переменных Лагранжа. Методика позволяет совершать аналитический асимптотический переход в задачах со сдвиговым течением жидкостей.
2. Новое свойство неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, заключающееся в формировании дрейфовых течений в контактирующих жидкостях, стремящихся уменьшить, тангенциальный разрыв скоростей, инициировавший неустойчивость.

3. Результаты аналитического расчета влияния поверхностного электрического заряда на скорость среднего дрейфа и траектории движения индивидуальных частиц жидкости, в условиях распространения по поверхности жидкости капиллярно–гравитационной волны.
4. Результаты аналитического расчета влияния амплитудной модуляции капиллярно–гравитационного волнового возмущения поверхности жидкости, на скорость иницируемого дрейфа и траектории движения индивидуальных частиц жидкости.
5. Результаты анализа влияния плёнки поверхностно–активного вещества на траектории движения индивидуальных частиц жидкости.
6. Результаты разработки нового аналитического асимптотического описания закономерностей перераспределении поверхностно–активного вещества, связанного с распространением капиллярно–гравитационной волны по поверхности вязкой жидкости.
7. Результаты аналитического расчета скорости дрейфового течения, иницируемого волновым движением вдоль поверхности произвольно вязкой жидкости, покрытой плёнкой поверхностно–активного вещества.

Достоверность полученных результатов подтверждается предельными переходами к известным аналитическим выражениям, использованием апробированных методов и аналитических подходов к решению задач. Результаты находятся в соответствии с экспериментальными данными, и теоретическими результатами полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: VIII, X, XI и XII международной конференции «Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере» (Ярославль, 2009, 2013, 2015, 2019); IX международной конференции «Современные проблемы электрофизики и электродинамики жидкостей» (Петергоф, 2009); XI и XII международной конференции «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики» (Петергоф, 2015, 2019); II, III, IV, V, VI, VII международной научно – практической конференции «Путь в науку. Физика» (Ярославль, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019); всероссийской молодёжной научной конференции «Путь в науку. Математика» (Ярославль, 2019); 67 региональной научно – технической конференции студентов, маги-

странтов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием (Ярославль, 2014); всероссийской школе – семинаре «Волны — 2016», «Волны — 2017», «Волны — 2018», «Волны — 2019» (Можайск, 2016, 2017, 2018, 2019); XXI всероссийской школе – конференции молодых ученых «Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические процессы» (Борок, 2017); международной конференции «Динамические системы в науке и технологиях» (DSST-2018) (Алушта, 2018); 9-ой, 10-ой международной конференции – школе молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2018, 2019); VI международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Дилижан, Армения, 2019).

Личный вклад. Соискатель самостоятельно работал над составлением математических формулировок решаемых задач; проводил аналитические и численные вычисления. Обсуждение и интерпретация результатов исследований в работах [2–4; 124; 126; 138; 190; 196] проводились совместно с научным руководителем — Белоножкой Д. Ф., а в работе [183] — полностью самостоятельно. В работе [2] соискателем проанализировано дисперсионное уравнение и выявлены составляющие дрейфового движения, связанные с касательными упругими натяжениями в вязкой жидкости. В работах [3; 4; 196] автором были получены выражения для скорости дрейфа, вызванного распространением волнового пакета Стокса по поверхности идеальной жидкости; в системе двух идеальных жидкостей, испытывающих сдвиг вдоль поверхности раздела. Соискателем проанализировал влияние поверхностного электрического заряда на скорость волнового дрейфа. В работах [124; 138] автор изучил влияние плёнки поверхностно-активного вещества (ПАВ) на характер дрейфового движения, связанного с распространением бегущей волны вдоль поверхности ньютоновской жидкости и картину перераспределения вещества плёнки. В линейном приближении по амплитуде волнового возмущения автором было получено решение для добавки к равновесной концентрации упругой плёнки ПАВ, а в квадратичном приближении по амплитуде волны построены выражения для скорости дрейфа. В исследованиях [126; 183; 190] рассматривалась система двух идеальных несмешивающихся жидкостей с тангенциальным разрывом скорости вдоль поверхности раздела. Во втором приближении по амплитуде волны соискатель получил выражения для скорости массопереноса и траекторий движения материальных частиц, обусловленных волновым движением вдоль границы раздела. Автор проанализировал влияние скорости относительного

поступательного движения сред на вид траекторий жидких частиц и обнаружил новое свойство неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, заключающееся в уменьшении скорости относительного движения контактирующих жидкостей за счет возникновения встречных дрейфовых течений.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 работах, изданных в журналах, рекомендованных ВАК и/или в периодических научных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus, а также в сборниках материалов и тезисах докладов международных и всероссийских конференций и прочих изданиях.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 142 страницы, включая 25 рисунков. Список литературы содержит 227 наименований.

Глава 1. Ретроспектива развития представлений о массопереносе, возникающем в связи с распространением волн по поверхности жидкости.

Общие факты и положения. В 1847 году Дж. Г. Стокс [92] впервые показал, что при распространении нелинейной волны длиной λ , круговой частотой ω и волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ по поверхности жидкости, ее материальные частички медленно (в сравнении с фазовой и групповой скоростью) перемещаются в направлении распространения волны. Скорость формирующегося таким образом среднего дрейфового течения пропорциональна квадрату амплитуды a и экспоненциально убывает с глубиной d :

$$U_{drift} = a^2 k \omega e^{-2kd}.$$

Это явление получило название «дрейф Стокса». Качественно механизм дрейфа связан с затуханием скорости материальной частички жидкости при ее уходе на глубину. Волновое движение вызывает петлеобразные движения жидких частиц в вертикальной плоскости. При этом нижняя часть петли, описываемой жидкой частицей, оказывается меньше верхней, и после каждого цикла частичка возвращается не в исходное положение, а в несколько смещенное в направлении распространения волны. Это смещение тем больше, чем больше разница высот на которых бывает частица, а, значит, растет с амплитудой волнового движения. Кроме квадрата амплитуды скорость дрейфа Стокса пропорциональна частоте волнового движения, что тоже достаточно очевидно: с увеличением числа циклов в единицу времени растет количество смещений частицы в направлении распространения волны.

Несмотря на более чем вековую историю, феномен дрейфа, вызванного волновым движением, до сих пор является предметом активных исследований, и оказывается востребованным, порой, в самых неожиданных приложениях. Например, идея Стокса оказалась полезной при разработке модели гидромагнитного динамо [43]. Некоторые черты, характерные для дрейфа Стокса, проявляются в экспериментах с дрейфом Дарвина [33] (возникновение движения жидких частиц вслед за упавшим на поверхность жидкости твердым телом [24]). Другим убедительным примером актуальности рассматриваемой темы является недавнее исследование [75], показавшее, что лангусты вида

Panulirus Cygnus сохраняют свою популяцию около берегов Австралии только благодаря существованию дрейфа Стокса. Учет дрейфа Стокса позволил создать корректную модель годичных перемещений *Panulirus Cygnus*. В статье [72] проведен обзор работ по исследованию течений над коралловыми рифами. Авторы установили существенный вклад дрейфа Стокса в формирование течения над рифами. В исследовании [99] отмечено, что дрейф Стокса способствует существованию выделенного направления дрейфа икры и личинок морских животных, в частности арктической трески. Дрейф Стокса важно учитывать при анализе причин переноса загрязнений по поверхности Мирового океана. Это подтвердил японский исследователь А. Исобе вместе с соавторами [88]. Они проанализировали закономерности переноса частичек мезопластика и микропластика во Внутреннем Японском море. Их исследование особенно примечательно на фоне работы [69], в которой выявлено наличие микропластиковых и мезопластиковых частиц в консервированной рыбе. Н. Кумар и Ф. Феддерсен попытались учесть дрейф Стокса в моделях, описывающих движение жидкости в пришельфовой зоне в случае нестратифицированной [52] и стратифицированной [53] жидкости. По их заключению, дрейф Стокса играет определенную роль в перераспределении температуры воды. М. Курцик, С. С. Чень и Т. М. Озгокмен наблюдали за волнами в океане, индуцированными ураганным ветром (ураганом Исаак) в Мексиканском заливе [23]. Они обнаружили, что благодаря дрейфу Стокса может изменяться направление общего течения, причем на значительные углы — до 20 градусов. Авторы утверждают, что дрейф Стокса принципиально важно учитывать в моделях переноса вещества в верхних слоях океана, особенно в присутствии сильных ветров.

Формула для дрейфа Дж. Г. Стокса выведена для гравитационных волн в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Вполне логичным развитием этой модели представляется включение в рассмотрение поверхностного натяжения и вязкости жидкости. Включение в модель лапласовских сил не вызывает затруднений. Переход к капиллярно-гравитационным волнам [54] сводится к изменению взаимосвязи между частотой, волновым числом и другими параметрами задачи: вместо частоты гравитационных волн $\omega = \sqrt{gk}$, в модели с волновым массопереносом, вызванным капиллярно-гравитационными волнами, нужно использовать формулу $\omega = \sqrt{gk(1 + (\gamma/\rho g)k^2)}$ (γ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости).

С корректным учетом вязкости ситуация не такая простая. Нужно решать уравнения Навье–Стокса с граничными условиями на свободной поверхности, причем, как минимум во втором приближении по амплитуде волны, поскольку дрейф — эффект второго порядка малости. Первая попытка расчета волнового движения на поверхности вязкой жидкости во втором приближении по амплитуде волны датируется 1909 годом и принадлежит У. Харрисону [39]. Также как и Дж. Г. Стокс У. Харрисон рассматривал исключительно гравитационные волны, не принимая во внимания лапласовские силы на поверхности жидкости. Он получил довольно громоздкое аналитическое решение, которое на предмет дрейфовых свойств должным образом не анализировалось.

После работы У. Харрисона, видимо, в связи с мировыми войнами, наблюдалось некоторое затишье в исследованиях, развивающих идеи Дж. Г. Стокса. Этот период длился до появления до сих пор активно цитируемой работы М. С. Лонге–Хиггинса [63]. М. С. Лонге–Хиггинс предложил учитывать влияние вязкости на движение жидкости с помощью подхода, который в теории обтекания твердых тел стал называться «теория пограничного слоя». Казалось, что главный принцип этой теории легко сработает и в задаче расчетом волнового движения, распространяющегося по свободной поверхности жидкости. Область течения разбивается на тонкий приповерхностный слой толщиной $\delta = \sqrt{2\nu/\omega} \ll \lambda$, в котором учитывается вихревое движение, возникающее из-за влияния вязкости, и удаленную от свободной поверхности область, в которой движение жидкости подчиняется законам потенциального течения. Задача решалась в переменных Эйлера, а для расчета скорости дрейфа выполнялся специальный пересчет — преобразование скорости в переменных Эйлера $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ к скорости в переменных Лагранжа $\mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + \left(\left(\int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{r}, \tau) d\tau \right) \cdot \nabla \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

Нужно сказать, что основное внимание М. С. Лонге–Хиггинс сосредоточил на анализе свойств течения вблизи свободной поверхности и вблизи дна. Скорость течения во внутренней части жидкости вблизи дна описывается выражением:

$$U_{drift} = \frac{5a^2\omega k}{4 \sinh^2 kh}.$$

Для вязкого пограничного слоя, прилегающего к свободной поверхности, в статье [63] представлена формула для расчета градиента тангенциальной компоненты скорости, но не приведена формула для расчета самой скорости. Важно

отметить, что в работе [63], наверное впервые в истории вопроса сравнивается теория и эксперимент, который в главной своей части подтвердил классическую формулу Дж. Г. Стокса (а вернее — ее обобщение, учитывающее наличие капиллярных сил. Таким образом, М. С. Лонге–Хиггинс открыл новую страницу в истории изучения явления, связанную с попыткой разработать теорию пограничного слоя вблизи дна и вблизи свободной поверхности жидкости.

Наряду с работами Дж. Г. Стокса [92] и М. С. Лонге–Хиггинса [61; 63] одной из знаковых работ по развитию теории дрейфового движения, инициированного распространением волн по поверхности жидкости является работа У. Дж. Пирсона [81]. У. Дж. Пирсон, в отличие от своих предшественников, с самого начала работал непосредственно в переменных Лагранжа. Впоследствии исследователи долго будут оспаривать преимущества и недостатки такого подхода. Кратко результат полученный У. Дж. Пирсоном сводится к следующему. Метод возмущений во втором приближении по крутизне волны применяется для решения уравнений движения вязкой жидкости, записанных непосредственно в переменных Лагранжа. Сами уравнения были сформулированы еще Г. Ламбом [54]. В качестве уравнения непрерывности использовалось соотношение, подразумевающее, что Лагранжевы координаты жидких частиц совпадают с декартовыми координатами их начального положения:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1.$$

Здесь a , b и c — переменные Лагранжа (у У. Дж. Пирсона обозначены α , β и δ). Уравнения движения при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{tt} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u &= -\frac{p_x}{\rho} \\ y_{tt} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v &= -\frac{p_y}{\rho} \\ z_{tt} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w &= -\frac{p_z}{\rho} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $x_{tt} = u_t + uu_x + vu_y + wu_z$, $\nabla^2 = \{\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2\}$, а u , v и w — это компоненты вектора скорости жидкой частицы. Умножая уравнения (1.2)

на x_a, y_a и z_a соответственно, затем на x_b, y_b и z_b и на x_c, y_c и z_c получим:

$$\begin{aligned} x_{tt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p, y, z)}{\partial(a, b, c)} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u \\ y_{tt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(x, p, z)}{\partial(a, b, c)} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \\ z_{tt} + g &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(x, y, p)}{\partial(a, b, c)} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w \end{aligned} \quad (1.3)$$

Запись оператора Лапласа ∇^2 в форме Лагранжа для составляющей скорости u выглядит следующим образом:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial \left(\frac{\partial(x_t, y, z)}{\partial(a, b, c)}, y, z \right)}{\partial(a, b, c)} + \frac{\partial \left(x, \frac{\partial(x, x_t, z)}{\partial(a, b, c)}, z \right)}{\partial(a, b, c)} + \frac{\partial \left(x, y, \frac{\partial(x, y, x_t)}{\partial(a, b, c)} \right)}{\partial(a, b, c)} \quad (1.4)$$

Аналогичным образом выглядит действие оператора для составляющих скорости v и w . Малое удаление жидкой частицы от положения $x = a, y = b, z = c$ и $p = p_0 - \rho g c$ расписывается в виде:

$$\begin{aligned} x &= a + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots \\ y &= b + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \dots \\ z &= c + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon^3 z_3 + \dots \\ p &= p_0 - \rho g c + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) и (1.5) в (1.3) и выделяя линейные слагаемые по ε получим формулировку в первом порядке малости:

$$\begin{aligned} x_{1tt} + g z_{1a} + \frac{p_{1a}}{\rho} - \frac{\mu}{\rho} \nabla_L^2 x_{1t} &= 0; \\ y_{1tt} + g z_{1b} + \frac{p_{1b}}{\rho} - \frac{\mu}{\rho} \nabla_L^2 y_{1t} &= 0; \\ z_{1tt} + g z_{1c} + \frac{p_{1c}}{\rho} - \frac{\mu}{\rho} \nabla_L^2 z_{1t} &= 0; \end{aligned} \quad (1.6)$$

здесь $\nabla_L^2 = \{\partial^2/\partial a^2, \partial^2/\partial b^2, \partial^2/\partial c^2\}$. Решения задачи первого порядка малости (1.6) подставляются в задачу второго порядка малости. Уравнения второго порядка малости у У. Дж. Пирсона записаны двумя разными способами, которые можно свести друг к другу:

$$\begin{aligned} x_{2tt} + \frac{p_{2a}}{\rho} + g z_{2a} - \frac{\mu}{\rho} \nabla_L^2 x_{2t} &= \frac{p_{1a} x_{1a}}{\rho} + \frac{p_{1b} y_{1a}}{\rho} + \frac{p_{1c} z_{1a}}{\rho} - g(z_{1a} y_{1b} - y_{1a} z_{1b}) - \\ &- \frac{2\mu}{\rho} (x_{1a} x_{1taa} + y_{1b} x_{1tbb} + z_{1c} x_{1tcc}) - \frac{\mu}{\rho} (x_{1ta} \nabla_L^2 x_1 + x_{1tb} \nabla_L^2 y_1 + x_{1tc} \nabla_L^2 z_1) - \\ &- \frac{2\mu}{\rho} ((y_{1a} + x_{1b}) x_{1tba} + (z_{1a} + x_{1c}) x_{1tac} + (z_{1b} + y_{1c}) x_{1tbc}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
y_{2tt} + \frac{p_{2b}}{\rho} + gz_{2b} - \frac{\mu}{\rho} \nabla_L^2 y_{2t} &= \frac{p_{1a}x_{1b}}{\rho} + \frac{p_{1b}y_{1b}}{\rho} + \frac{p_{1c}z_{1b}}{\rho} - g(x_{1b}z_{1a} - x_{1a}z_{1b}) - \\
&- \frac{2\mu}{\rho} (x_{1a}y_{1taa} + y_{1b}y_{1tbb} + z_{1c}y_{1tcc}) - \frac{\mu}{\rho} (y_{1ta} \nabla_L^2 x_1 + y_{1tb} \nabla_L^2 y_1 + y_{1tc} \nabla_L^2 z_1) - \\
&- \frac{2\mu}{\rho} ((y_{1a} + x_{1b}) y_{1tba} + (z_{1a} + x_{1c}) y_{1tac} + (z_{1b} + y_{1c}) y_{1tbc}) \quad (1.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{2tt} + \frac{p_{2c}}{\rho} + gz_{2c} - \frac{\mu}{\rho} \nabla_L^2 z_{2t} &= \frac{p_{1a}x_{1c}}{\rho} + \frac{p_{1b}y_{1c}}{\rho} + \frac{p_{1c}z_{1c}}{\rho} - g(x_{1a}y_{1b} - x_{1b}y_{1a}) - \\
&- \frac{2\mu}{\rho} (x_{1a}z_{1taa} + y_{1b}z_{1tbb} + z_{1c}z_{1tcc}) - \frac{\mu}{\rho} (z_{1ta} \nabla_L^2 x_1 + z_{1tb} \nabla_L^2 y_1 + z_{1tc} \nabla_L^2 z_1) - \\
&- \frac{2\mu}{\rho} ((y_{1a} + x_{1b}) z_{1tba} + (z_{1a} + x_{1c}) z_{1tac} + (z_{1b} + y_{1c}) z_{1tbc}) \quad (1.9)
\end{aligned}$$

или:

$$\begin{aligned}
x_{2tt} + \frac{p_{2a}}{\rho} + gz_{2a} - \frac{\mu}{\rho} \nabla_L^2 x_{2t} &= -(x_{1tt}x_{1a} + y_{1tt}y_{1a} + z_{1tt}z_{1a}) + \frac{\mu}{\rho} [(x_{1a} \nabla_L^2 x_{1t} + \\
&+ y_{1a} \nabla_L^2 y_{1t} + z_{1a} \nabla_L^2 z_{1t}) - 2(x_{1taa}x_{1a} + x_{1tbb}y_{1b} + x_{1tcc}z_{1c} + x_{1tab}(y_{1a} + x_{1b}) + \\
&+ x_{1tac}(z_{1a} + x_{1c}) + x_{1tbc}(y_{1c} + z_{1b})) - x_{1ta} \nabla_L^2 x_1 - x_{1tb} \nabla_L^2 y_1 - x_{1tc} \nabla_L^2 z_1] \quad (1.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2tt} + \frac{p_{2b}}{\rho} + gz_{2b} - \frac{\mu}{\rho} \nabla_L^2 y_{2t} &= -(x_{1tt}x_{1b} + y_{1tt}y_{1b} + z_{1tt}z_{1b}) + \frac{\mu}{\rho} [(x_{1b} \nabla_L^2 x_{1t} + \\
&+ y_{1b} \nabla_L^2 y_{1t} + z_{1b} \nabla_L^2 z_{1t}) - 2(y_{1taa}x_{1a} + y_{1tbb}y_{1b} + y_{1tcc}z_{1c} + y_{1tab}(y_{1a} + x_{1b}) + \\
&+ y_{1tac}(z_{1a} + x_{1c}) + y_{1tbc}(y_{1c} + z_{1b})) - y_{1ta} \nabla_L^2 x_1 - y_{1tb} \nabla_L^2 y_1 - y_{1tc} \nabla_L^2 z_1] \quad (1.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{2tt} + \frac{p_{2c}}{\rho} + gz_{2c} - \frac{\mu}{\rho} \nabla_L^2 z_{2t} &= -(x_{1tt}x_{1c} + y_{1tt}y_{1c} + z_{1tt}z_{1c}) + \frac{\mu}{\rho} [(x_{1c} \nabla_L^2 x_{1t} + \\
&+ y_{1c} \nabla_L^2 y_{1t} + z_{1c} \nabla_L^2 z_{1t}) - 2(z_{1taa}x_{1a} + z_{1tbb}y_{1b} + z_{1tcc}z_{1c} + z_{1tab}(y_{1a} + x_{1b}) + \\
&+ z_{1tac}(z_{1a} + x_{1c}) + z_{1tbc}(y_{1c} + z_{1b})) - z_{1ta} \nabla_L^2 x_1 - z_{1tb} \nabla_L^2 y_1 - z_{1tc} \nabla_L^2 z_1] \quad (1.12)
\end{aligned}$$

К обеим системам уравнений (1.7)–(1.9) и (1.10)–(1.12) необходимо добавить уравнение непрерывности:

$$x_{2a} + y_{2b} + z_{2c} + x_{1a}y_{1b} + x_{1a}z_{1c} + y_{1b}z_{1c} - x_{1c}z_{1a} - y_{1c}z_{1b} - x_{1c}y_{1a} = 0 \quad (1.13)$$

На момент появления подход У. Дж. Пирсона казался передовым инструментом для преодоления массы расчетных трудностей, которые «с боем» преодолевались в модели М. С. Лонге–Хиггинса. Нужно сказать, что методика У. Дж. Пирсона действительно позволяет получать некоторые выгоды при

расчете дрейфа в однослойных жидких системах со свободной поверхностью. Главное удобство ее применения заключается в том, что решение задачи в переменных Лагранжа непосредственно приводит к выражениям для расчета скорости дрейфа. Никаких промежуточных перерасчетных процедур, как в случае использования переменных Эйлера, не требуется. И все-таки такой подход не универсален. Он может оказаться плохо пригодным даже в некоторых простых ситуациях. Рассмотрим, например, расчет течения в системе двух идеальных жидкостей, по границе раздела которых распространяется бегущее волновое возмущение. В такой задаче имеется возможность смещения со временем двух изначально контактирующих на границе раздела жидких частиц, принадлежащих разным жидкостям. При использовании лагранжевого описания требуются приложить немало дополнительных усилий, чтобы корректно записать условие баланса давлений на поверхности раздела образуемой не контактирующими, а непрерывно «проскальзывающими» друг относительно друга жидкими частичками. Это означает, что сразу на этапе записи граничного условия придется решать такого же рода проблемы, как при пересчете скорости из переменных Эйлера в переменные Лагранжа. Время показало, что полный отказ от переменных Эйлера на стадии постановки задачи не всегда оправдан и аппарат У. Дж. Пирсона является мощным, но отнюдь не универсальным средством исследования.

Теория пограничного слоя вблизи свободной поверхности: противоречия, перспективы, значимость для оценки волнового дрейфа.

Работы М. С. Лонге–Хиггинса стимулировали экспериментаторов на проверку предложенной им теории пограничного слоя вблизи свободной поверхности, в развитии которой сам М. С. Лонге–Хиггинс видел путь обобщения представлений Дж. Г. Стокса о волновом массопереносе на жидкости с конечной вязкостью. Эксперименты обнаружили, что на исследуемое явление существенным образом влияет конечность глубины жидкости, используемой в экспериментальных стендах. Было обнаружено придонное течение, которое теорией М. С. Лонге–Хиггинса не объяснялось в принципе. Часть исследователей бросили свои силы на объяснение этого неожиданного явления [28–30; 57].

Тем временем М. С. Лонге–Хиггинс в работе [61] продолжал совершенствовать свою модель вязкого пограничного слоя вблизи свободной поверхности.

Им было получено выражение для скорости внутри приповерхностного вязкого слоя:

$$U_{drift} = 4a^2 \omega k^2 \coth kh \left(1 - e^{-\frac{n}{\delta}} \cos \frac{n}{\delta} \right).$$

И снова особое внимание было уделено исследованию поведения градиента скорости в околоповерхностном слое. В частности, М. С. Лонге–Хиггинс обратил внимание на несоответствие полученного им градиента скорости и значения, рассчитанного с помощью подхода, развитого его предшественником У. Харрисоном в [39]. М. С. Лонге–Хиггинс объяснил это несоответствие неверной трактовкой Харрисоном граничного условия на давление на свободной поверхности, но экспериментальные доказательства представленные М. С. Лонге–Хиггинсом представляются неубедительными. В представленном им сравнении теории и эксперимента бросаются в глаза значительные погрешности, не позволяющие с полной уверенностью утверждать преимущества формулы М. С. Лонге–Хиггинса. Нужно отметить, что выше описанные результаты получены аналитически в достаточно простом приближении, когда волновое возмущение представляет собой одну единственную моду.

Воодушевленные результатами М. С. Лонге–Хиггинса исследователи из самых различных стран бросили свои силы на как можно более полное обобщение теории пограничного слоя вблизи свободной поверхности вязкой жидкости. В 70-е годы XX-го века эти исследования сопровождались нешуточной дискуссией, которую по накалу эмоций можно, пожалуй, сравнить со спорами начала XX-го века об основаниях физики.

В 1969 году исследователем М.–С. Чанг была опубликована работа, в которой была сделана попытка обобщить результат М. С. Лонге–Хиггинса на произвольный поток волн в океане [7]. Задача исследовалась в общем виде, подразумевающим произвольное спектральное представление волн. В отличие от М. С. Лонге–Хиггинса М.–С. Чанг решил задачу в описании Лагранжа, воспользовавшись подходом У. Дж. Пирсона. Полученный в работе результат согласуется в предельном переходе с результатом Дж. Г. Стокса для скорости дрейфа идеальной жидкости, инициированного распространением периодической волны. Автор утверждал, что и результат М. С. Лонге–Хиггинса для скорости придонного дрейфа и градиента скорости около свободной поверхности его модель тоже успешно описывает. Однако, представленные в работе

формулы, математический аппарат и сам ход рассуждений чрезмерно запутаны и слабо пригодны для практического использования. В частности, для применения на практике необходимо с помощью неких эвристических соображений задавать спектральное представление волн, распространяющихся по поверхности — без дополнительных условностей рассчитать скорость дрейфа просто невозможно. Используемый в работе М.–С. Чанг математический аппарат настолько громоздок и недетализирован, что проследить за математическими выкладками рядовому прикладнику не представляется возможным. При этом, сравнение теоретических оценок с экспериментальными исследованиями целиком опирается на приближение идеальной жидкости. Измерительные погрешности таковы, что не позволяют говорить о хорошем соотношении теории и эксперимента.

Работа М.–С. Чанг подверглась сокрушительной критике со стороны другого исследователя — Н. Е. Хуанга [45]. В одной своей заметке Н. Е. Хуанг прямо указал на математическую ошибку в рассуждениях М.–С. Чанга. В другой работе [46] анализ, схожий с анализом М.–С. Чанга был осуществлен с помощью эйлеровых переменных. Результат четко показывал, что градиент скорости вблизи свободной поверхности соответствует модели У. Харрисона, а подход М. С. Лонге–Хиггинса в пределе бесконечно глубокой жидкости описывает нереально интенсивный дрейф, не укладывающийся в рамки здравого смысла.

Позднее нашлись исследователи — У. Унлуата и Ч. Ч. Мэй [98] и Б. Дор [29], указавшие на математические ошибки в работе Н. Е. Хуанга [46] и настаивающие на согласовании своих результатов с результатом М. С. Лонге–Хиггинса [62]. Сам Чанг в более поздних работах [8] настоял на справедливости математических выводов своей ранней работы [7], подвергшейся критике Н. Е. Хуанга [45].

В том же ключе провели анализ задачи У. Унлуата и Ч. Ч. Мэй [98]. Они рассмотрели задачу в постановке, предложенной М. С. Лонге–Хиггинсом [62; 63] и тоже попытались внести свою лепту в теорию пограничного слоя вблизи свободной поверхности, решая задачу в переменных Лагранжа и используя разложение У. Дж. Пирсона по малому параметру. Они привели доводы, свидетельствующие о некорректности решения в постановке бесконечно глубокой жидкости. В их работе сделан вывод о том, что стандартная теория возмущений должна работать с большими значениями толщины пограничного слоя,

чем у предшественников. Тогда задача оказывается корректной, решается аналитически, а выражение для градиента скорости вблизи свободной поверхности оказывается совпадающим с результатом М. С. Лонге–Хиггинса. Используя же методы, что и У. Унлуата и Ч. Ч. Мэй [98] другой исследователь — О. С. Мадсен [66] построил модель, в которой учитывался влияние ветра ветра и силы Кориолиса на дрейфовые течения в вязком глубоком океане. В 1994 году это исследование получило продолжение а работе З. Ксу и А. Боуэн [110]. Задача была решена в переменных Эйлера с учетом силы Кориолиса и влияния ветра на дрейфовое движение в водоемах с различным профилем дна.

Значительный вклад в развитие теории пограничного слоя вблизи возмущенной волновым движением поверхности вязкой жидкости внес Б. Дор. Он сконцентрировал внимание на исследование именно массопереноса, а не теории пограничного слоя самой по себе. В работе [28] им была решена задача по расчету скорости массопереноса в двухслойной системе вязких жидкостей в приближении волн малой амплитуды. Использовались переменные Эйлера. Задача решалась во втором порядке малости по амплитуде волнового движения, реализующегося границе раздела несмешивающихся жидкостей. Жидкости как и у М. С. Лонге–Хиггинса делились на вязкие пограничные слои и охватывающие большие объемы области потенциального течения. Были получены выражения для скорости дрейфа во внутренних областях и в пограничных слоях жидкостей. Работа [29] является развитием исследования [28]. Автор применил ортогональную криволинейную систему координат, с одной из координатных поверхностей, движущейся вместе с профилем волны (это позволяет упростить запись граничных условий непосредственно на границе раздела). Рассматривались бегущие и стоячие волны, случай, когда верхняя граница ограничена твердой поверхностью. В условиях, когда верхняя граница — свободная поверхность, дополнительно рассматривалось нелинейное волновое взаимодействие. Обе жидкости вновь разделялись области с пограничным слоем вблизи границы раздела и внешние по отношению к пограничным слоям области потенциального течения. Соответственно накладывались ограничения на длину волны ($\sqrt{2\nu/\omega L^2 k_{max}} \ll 1$) и толщину жидкого слоя ($\sqrt{2\nu/\omega L^2} \ll h$). Пространственными вязкими эффектами (пространственным затуханием и изменением фазовой скорости из-за влияния вязкости) в работе пренебрегалось. Для пересчета скорости Эйлера в скорость Лагранжа, как и у М. С. Лонге–Хиггинса, использовалась формула (1.1). В работе [32] рассмотрено обобщение решения,

полученного М. С. Лонге–Хиггинсом [63], на трехмерный случай. Были построены формулы для скорости дрейфа в области потенциального течения при распространении двух волн под углом γ друг к другу. Задача снова решалась в криволинейных ортогональных координатах, движущихся вместе с профилем волны. В следующей работе [30] основной упор делался на расчет дрейфа, вызванного распространением бегущих волн большой амплитуды (для стоячих волн на свободной поверхности и стоячих волн на границе раздела теория представлена в работах [26; 27]). В основном анализ проводился для волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости. В работе [25] обобщается результат М. С. Лонге–Хиггинса [63] на случай границы, вода–воздух и рассматривается изменение профиля скорости дрейфа, связанного с влиянием воздуха на свободную поверхность. Важным результатом является обнаружение того, что для границы вода–воздух, влияние ветра можно не учитывать только для волн с длиной порядка метров и более. Подходы, развитые в работе [30] были успешно использованы применительно к периодическим волнам, распространяющимся по границе раздела двух полубесконечных жидкостей (вода–воздух) [31].

Примерно в то же время А.-К. Лиу и С. Г. Дэвис [57] рассматривали стоячие и бегущие волны в слабо вязкой жидкости, с учетом затухания движения со временем. Задача была решена в переменных Эйлера. Главным методом стал метод малых возмущений с введением многих масштабов. В отличие от работ М. С. Лонге–Хиггинса, полученные решения справедливы при любых (а не только очень больших) числах Рейнольдса. Было показано, что учет убывания волн незначительно влияет на распределение скорости в пограничных слоях, но оказывает заметное влияние на скорость в области потенциального течения. Результаты вполне удовлетворительно согласуются с экспериментом Р. Рассела и Дж. Осорио [84].

В 80-е годы XX-го века в области волнового массопереноса с применением теории пограничного слоя немало поработал А. Крэйк [22]. В своей работе [22] он рассмотрел затухающие со временем волны и решил (исправив неточности), по сути, ту же задачу, что и А.-К. Лиу и С. Г. Дэвис в работе [57]. А. Крэйк рассчитал скорость устойчивого дрейфового течения для пространственно затухающих волн и показал сходство полученного выражения с решением М. С. Лонге–Хиггинса для незатухающих волн. Задача была решена в приближении малой вязкости в криволинейных переменных Эйлера. Рассматривался случай, когда по поверхности распределена нерастяжимая (неупругая)

плёнка. Было показано, что в случае, когда на поверхности распределена нерастяжимая плёнка граничное условие, взятое из работы М. С. Лонге–Хиггинса [63] неприменимо ни для каких длин волн. Было предложено другое граничное условие, учитывающее временное затухание движения. Для чистой свободной поверхности, по которой распространяются затухающие со временем волны, было найдено решение, которое благодаря коррекции граничного условия не содержало сингулярностей, как это было у А.-К. Лиу и С. Г. Дэвиса. Помимо прочего А. Крэйк отметил отсутствие приемлемого эксперимента, позволяющего следить за профилем дрейфа Стокса: *«A truly definitive experiment on drift profiles is still lacking, so long after Stokes's pioneering paper»*.

В 90-ых годах прошлого столетия М. Искандарани и Ф. Л.-Ф. Лиу [48] предложили численную модель, позволяющую рассчитать массоперенос вязкой жидкости в присутствии на дне резервуара объекта, частично отражающего волну. Модель оперирует с переменными Эйлера и справедлива для произвольных значений толщины пограничного слоя. Позднее ими же была предложена трехмерная модель расчета массопереноса [47], в которой, в отличие от двумерной модели, обнаружена сильная зависимость скорости массопереноса от толщины пограничного слоя жидкости.

В своих работах по учету вязкости жидкости исследователи использовали как подход Лагранжа, так и описание Эйлера. В жарких спорах по поводу приоритета одного из двух подходов ни одна из сторон не одержала убедительной победы. Для обоих способов характерны свои преимущества и недостатки. При решении задачи выбор конкретного типа описания движения является делом вкуса, опыта и математической подготовки отдельного исследователя. Нельзя не отметить, что в связи с проблемой правильного учета вязкости жидкости, неоправданно много усилий было потрачено на разработку теории вязкого пограничного слоя вблизи свободной поверхности. Вместо того, чтобы стать инструментом исследования волнового массопереноса в вязкой жидкости эта теория превратилась в самостоятельное исследовательское направление, изучающее закономерности поведения пограничного слоя в различных условиях. Можно предположить, что каких-то качественно новых представлений о поведении волнового массопереноса развитие этой теории не повлечет.

Исследование дрейфа в условиях наличия дополнительных физических механизмов воздействия на волновое движение. В этой части

обзора речь пойдет о работах, которые в существенной степени опираются на методику, предложенную в статье Д. Дж. Эндрюса и М. Е. Макинтайра [1]. Они предложили логически непротиворечивый математический формализм, позволяющий выделять именно дрейфовое течение из общего решения гидродинамической задачи. За отправную точку было принято утверждение о несовпадении усредненных лагранжевых и эйлеровых скоростей в нестационарном течении. Именно начиная этой работы термин «дрейф Стокса» становится общепринятым в смысле величины, равной разности усредненной лагранжевой и эйлеровой скорости. В последующих исследованиях культивируется именно такой подход, даже в случае довольно сложных течений, например, таких как вертикальный дрейф в сжимаемой жидкости (атмосфере) [21].

Большое количество работ, опирающихся на результаты Д. Дж. Эндрюса и М. Е. Макинтайра, выполнил норвежец Я. Э. Вебер. Он изучал явление волнового массопереноса не само по себе, а в контексте влияния на него разного рода дополнительных физических факторов.

В работе [101] Я. Э. Вебер рассмотрел дрейф, вызванный поверхностными волнами в вязком вращающемся бесконечно глубоком океане. Задача решалась в переменных Лагранжа во втором порядке малости по амплитуде волны. Использовалось разложение из работы У. Дж. Пирсона [81]. Уравнения движения пространственно усреднялись по длине волны. Записывались уравнения для средней дрейфовой скорости жидких частиц. Рассматривалось решение в виде волн, затухающих со временем. Было показано, что градиент скорости дрейфа в пограничном слое, сосредоточенном вблизи свободной поверхности, совпадает по значению с величиной, полученной М. С. Лонге–Хиггинсом. Интересно, что автор даже не попытался сравнить полученное решение с экспериментами М. С. Лонге–Хиггинса [62] или Р. Рассела и Дж. Осорио [84]. Он написал, что статья предназначена исключительно для того, чтобы показать, что ни классическая теория Дж. Г. Стокса (даже модифицированная вязкостью) ни существующие на тот момент эксперименты не могут быть использованы для описания дрейфа, возникающего в океане. По его мнению, в геофизических приложениях важно одновременно учитывать и вращение Земли и вязкость жидкости. Полученные Я. Э. Вебером выражения для скорости течения в частном случае сводятся к выражениям, полученным М. С. Лонге–Хиггинсом [64].

В другой работе [102] Я. Э. Вебер исследовал незатухающие поверхностные волны в бесконечно глубоком вязком вращающемся океане. В работе

допускается изменение поверхностного натяжения за счет воздействия ветра и, в связи с этим, присутствие механизма компенсации вязкой диссипации энергии.

Следующая статья [103] Я. Э. Вебера посвящена дрейфу, индуцированному волновым движением в условиях слабовязкого вращающегося океана, поверхность которого покрыта тонким слоем шугового льда. Задача решалась без учета поверхностного натяжения и в приближении тонкого (по сравнению с длиной волны) ледяного покрова. Были рассчитаны средние дрейфовые течения в океане под слоем льда и определено среднее вязкое напряжение, действующее на лед. Показано, что возникающее напряжение сопоставимо по величине с воздействием ветра умеренной силы. Расчеты показали, что подо льдом может возникать струйное течение, приводящее к возникновению восходящих потоков.

В работе [107] рассмотрено влияние поверхностной плёнки на скорость дрейфа, инициированного капиллярно-гравитационным волновым движением. Рассматривалась вязкая бесконечно глубокая несжимаемая жидкость, по поверхности которой распространяются бегущие, затухающие со временем волны (что отличает работу от подхода А. Крэйка, который рассматривал незатухающее волновое движение). Свободная поверхность жидкости считалась покрытой тонкой нерастворимой и нерастяжимой в тангенциальном направлении плёнкой поверхностно-активного вещества (ПАВ). Задача формулировалась и решалась в переменных Лагранжа во втором порядке малости по амплитуде волнового движения. Для затухающих со временем волн было построено выражение для скорости дрейфа. Проводилось сравнение со скоростью дрейфа в отсутствие плёнки и в пренебрежении влияния воздуха. Выяснилось, что разница в скорости дрейфа существенно зависит от длины волны: чем длиннее волны — тем заметнее разница, для капиллярных волн разницы практически нет. По мнению Я. Э. Вебера влияние воздуха должно быть качественно схожим с влиянием плёнки ПАВ, но проявляться, все-таки, слабее.

В работе [100] сфокусировано внимание на исследовании влияния воздуха, заполняющего полупространство над водой, на скорость дрейфа, инициированного волновым движением по поверхности раздела вода-воздух. Задача решалась в переменных Лагранжа. Обе жидкости считались полубесконечными, вязкими и однородными. Считалось, что по границе раздела распространяется бегущая капиллярно-гравитационная волна, затухающая пространственно

или со временем. Вся система полагалась вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. Верхняя среда считалась существенно менее плотной, чем нижняя. Было построено выражение для скорости дрейфа в нижней жидкости, для случаев, когда массоперенос инициирован волнами, затухающими со временем, и ситуации с пространственно затухающим волновым движением на границе раздела.

В 90-ых годах Я. Э. Вебер продолжил исследования двухкомпонентных систем. В [108] была рассмотрена задача с бегущей волной, распространяющейся по границе раздела вода–воздух. Обе среды полагались полубесконечными, однородными, несжимаемыми, а вся система, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. Решалась двумерная задача в переменных Лагранжа. Для решения используется разложение по малому параметру, предложенное У. Дж. Пирсоном [81]. Акцент был сделан на рассмотрении гравитационных волн, генерируемых ветром на границе раздела сред. Было получено выражение для скорости среднего дрейфа. Для прояснения физического смысла авторы раздели его на 4 компоненты: дрейф, обусловленный внешним средним касательным напряжением сдвига; классический дрейф Стокса, модифицированный вязким затуханием; поправка, возникающая в связи с наличием вязкого пограничного вихревого слоя; и, наконец, квази–эйлеровое течение, индуцированное волновым движением в области потенциального течения (дрейф вне пограничного слоя равен суммарному потоку, индуцированному волновым движением минус невязкий дрейф Стокса). Численно были проанализированы некоторые частные случаи: для волн затухающих со временем; для пространственно затухающих волн; и для нарастающих волн (видимо усилия были направлены на неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, но в явном виде это авторы не указали).

В рамках темы двухкомпонентных систем Я. Э. Вебер не обошел вниманием исследование влияния на волновой дрейф плёнки, распределенной по поверхности жидкости [109]. В статье [109] рассматривалась однородная несжимаемая вязкая бесконечно глубокая жидкость, по поверхности которой распределена тонкая нерастворимая плёнка. Считалось, что по поверхности жидкости распространяется двумерная бегущая волна. Модуль поверхностной упругости плёнки определялся в соответствии с известным походом [65]:

$$E = \frac{\partial T}{\partial (\ln A)} = Const.$$

Здесь T — коэффициент поверхностного натяжения, а A — площадь, приходящаяся на молекулу материала плёнки. Поверхностное натяжение T раскладывается в ряд по малому параметру $\Gamma - \Gamma_0$ (отклонение концентрации от своего равновесного значения):

$$T = T(\Gamma_0) - \frac{E}{\Gamma_0} (\Gamma - \Gamma_0) + \frac{E}{2\Gamma_0^2} (\Gamma - \Gamma_0)^2 + \dots$$

В статье были рассмотрены свободно распространяющиеся и затухающие волны. Влиянием верхней среды пренебрегалось. Почему-то пренебрегалось тангенциальными напряжениями на поверхности. Задача была решена в переменных Лагранжа. Для решения снова использовался метод малых возмущений, предложенный У. Дж. Пирсоном [81]. Концентрация плёнки поверхностно-активного вещества (ПАВ) разлагалась по малому отклонению в окрестности значения равновесного распределения. Решение линейной задачи использовалось непосредственно из работы [108]. Во втором порядке малости по амплитуде волны было получено выражение для скорости дрейфа. Был сделан вывод о том, что на небольших интервалах времени влияние упругой плёнки сводится к усилению дрейфа на поверхности. При длительном наблюдении благодаря диссипации происходит уменьшение дрейфовой скорости. Расчеты показали, что только при малых значениях эластичности, расстояние, пройденное жидкой частицей в присутствии плёнки, оказывается больше, чем на чистой поверхности. Сравнение с экспериментом не производилось («*Unfortunately, we can find no experimental evidence for this kind of behavior. It appears that no controlled drift experiment up to now has been conducted with a film-covered area that is large compared to the square of the wavelength, say.*»). Полученное решение справедливо в приближении малой вязкости, что в совокупности с другими ограничениями существенно сужает область применимости результатов.

Нельзя не отметить еще один — отечественный — подход к расчету среднего дрейфового движения, вызванного распространением волн по поверхности жидкости. В начале XXI-го века с помощью аналитической гидродинамики в рамках гамильтонова формализма был разработан весьма изящный метод расчета средней скорости массопереноса в несжимаемых жидкостях, опирающийся на методы на ее гамильтоновых свойствах [155; 165; 203]. Метод позволяет получить лагранжевы свойства двухмерного течения из осредненной за период волнового движения функции тока, которая соотносится с компонентами поля,

также как гамильтониан со своими аргументами. Этот метод был успешно применен к разнообразным задачам о движении частиц вязких и вязкопластичных сред [204], к задачам о перемешивании [145; 205]. Для реализации методики требуется знать функцию тока задачи в эйлеровых координатах. Кроме среднего течения, подход предлагает специальную рекуррентную процедуру последовательного вычисления положений индивидуальной жидкой частицы. Это дает возможность отселить непосредственно траектории жидких частиц.

В целом, можно заключить, что явление дрейфа, вызванного распространением по поверхности жидкости периодических волн, существенно усложняется при возникновении в системе сил инерции, дополнительных напряжений на профиле поверхности, появлении движущейся внешней по отношению к жидкости среды. Вопрос о дрейфе в двухкомпонентной и многокомпонентной систем остается, пожалуй, наиболее слабо исследованным. Даже в простой постановке, речь идет о двух движущихся относительно друг друга контактирующих идеальных жидкостях, модель связанного с распространением волн дрейфового течения и происходящего в системе массопереноса была практически не представлена в научной периодике.

Дрейф Стокса и поверхностно-активные вещества (ПАВ).

М. С. Лонге-Хиггинс и М. Сельвин положили начало изучению дрейфа Стокса применительно к самым разнообразным системам и типам волн. Так, их работа [64] посвящена двойным волнам Кельвина. В исследовании [60] авторы рассмотрели новый механизм генерации волн в океане и предложили концепцию виртуальных волновых напряжений на свободной поверхности.

Нужно сказать, что продолжают периодически появляться работы, в которых авторы пытаются более корректно, чем предшественники учесть вязкость жидкости. Например в 90-ых годах появилось исследование И. Пиедра-Куэва, который рассмотрел влияние вязкости на дрейфовые свойства пространственно затухающих волн в системе двух вязких жидкостей [79; 80]. Но при сравнении с экспериментом [85] выяснилось, что хорошего соответствия теории и эксперимента не наблюдается.

Время от времени возникают работы по анализу приоритета подходов — эйлеров или лагранжев — при решении задачи. Даже в начале текущего столетия появилась работа [105], в которой сравниваются эффективность эйлерова и лагранжева подходов к расчету среднего дрейфа. Задача была рассмотрена

в поставке с вязкой полубесконечной жидкостью со свободной поверхностью, вращающейся вокруг вертикальной оси. Эвристически с помощью слагаемого, дающего касательное напряжение на поверхности, учитывалось влияние ветра. Авторы убедились, что интегрирование уравнения движения в переменных Эйлера от постоянной глубины, на которой исчезает движение, до свободной поверхности дает те же уравнения для переноса жидких частиц, что и полученные в результате анализа той же задачи в переменных Лагранжа во втором порядке малости по крутизне волны.

Нужно сказать, что стремление как можно элегантнее и точнее рассчитать задачу с учетом вязкости или же продемонстрировать преимущества тех или иных разновидностей координат нельзя превращать в самоцель. Нужно четко понимать, что методика учета вязкости необходима для решения задач, в которых без учета вязкости просто не обойтись. Главная перспектива дальнейшего развития представлений о дрейфе Стокса — решение и анализ именно таких задач, а не бесконечное улучшение какого-то частного вычислительного приема. Одной из таких задач является проблема расчета массопереноса при распространении волн по поверхности жидкости, покрытой плёнкой поверхностно-активного вещества. Исследование влияния волнового движения и плёнки ПАВ друг на друга — один из актуальнейших вопросов современности. Эта тема выходит на передний план в связи с вопросами мониторинга и моделирования распространения загрязнения окружающей среды при авариях, связанных с разливом нефтепродуктов. Уже упоминавшийся в предыдущем пункте Я. Э. Вебер активно исследовал волны в присутствии плёнки ПАВ на свободной поверхности жидкости [106], рассчитывая средние скорости течения жидкости. Экспериментаторы также не могли не обратить внимание на анализ влияния ПАВ на волновое движение. Так, в работе [93] затухание волн под действием ПАВ было довольно подробно исследовано экспериментально. Однако, ошибки эксперимента оказались таковы, что можно говорить лишь о качественном согласовании моделей с результатами эксперимента. Другой исследователь — А. Лоу в своей работе [55] исследовал дрейф поверхностной нерастяжимой плёнки аналитически и экспериментально. Аналитический анализ проводился в криволинейных координатах. С точностью до третьего порядка малости по крутизне волны вычислялась функция тока. Предполагалось, что пограничный слой имеет толщину существенно меньшую амплитуды волны. Результаты измерений показали, что аналитические выражения в рабо-

тах О. М. Филиппса [78] и А. Лоу [55] недооценивают реальную интенсивность дрейфа. Исследование А. Лоу нашло свое развитие в работе [14]. В этом исследовании было выполнено сравнение экспериментальных данных, представленных в публикации [55], с теоретическими значениями скорости дрейфа, полученными в работе [103]. Примечательно, что при сравнении результатов авторы столкнулись с некоторыми принципиальными трудностями: «*Because most experimental data, like those reported by Law, are given as time averages, it has not been possible to compare the predicted time development of the drift with observations. Data on the temporal variation of the wave-induced surface drift is desirable, and we strongly recommend that this is taken into account in future laboratory studies...*» Оказалось, что решение Я. Э. Вебера, зависящее от времени предсказывает большие скорости, чем независимые от времени решения, представленные в работах [55; 78], и тем самым лучше согласуется с экспериментальными данными [55].

Имеются работы, которые привлекают для построения аналитических формул, описывающих массоперенос, эмпирические соображения. Именно с этих позиций в работе К. Х. Канг и Ч. М. Ли [50] проанализирована аналитическая модель расчета скорости дрейфа в вязком пограничном слое, предложенная О. М. Филиппсом [78]. На основе этого анализа авторы предложили свою полуэмпирическую формулу для расчета скорости дрейфа. Они утверждают, что модель Дж. Г. Стокса довольно хорошо прогнозирует скорость дрейфа твердых частиц, движущихся по поверхностным волнам. Если поверхностный пограничный слой является нерастяжимым, то формула, предложенная в монографии О. М. Филиппса справедлива, только если протяженность слоя в направлении дрейфа меньше половины длины волны. Для пленок других размеров при расчете скорости дрейфа нужно пользоваться специальной полуэмпирической формулой.

В первом десятилетии текущего столетия в плане исследования влияния ПАВ на дрейфовое движение, вызванное распространением волн, отметился еще один исследователь — К. Х. Кристенсен. В его работах в соавторстве с Я. Э. Вебером [14; 15] рассмотрена вязкая жидкость, покрытая упругой эластичной пленкой ПАВ. Задача расчета волнового движения решалась в переменных Лагранжа с использованием разложения У. Дж. Пирсона [81]. Исследовались пространственно-затухающие капиллярно-гравитационные волны. Показано, что существующая линейная теория хорошо согласуется с экспериментами, однако отсутствуют эксперименты для проверки нелинейной теории.

В следующей работе К. Х. Кристенсен и Террил [13] теоретически исследовали дрейф и деформацию нефтяной плёнки. Они показали, что в моделях смещения нефтяных разливов важно учитывать не только влияние ветра, но и дрейфовые движения, инициированные волновым возмущением свободной поверхности жидкости. На этот раз рассматривалось трехмерное волновое движение и его влияние на форму и круглого нефтяного пятна и среднюю скорость дрейфа.

Наиболее известные исследования влияния на приповерхностное дрейфовое течение плёнки поверхностно-активного вещества были проведены в лагранжевых координатах и оставили без внимания характер распределения по профилю поверхности концентрации вещества в самой упругой плёнке. Во многих работах не учитываются касательные натяжения со стороны упругой плёнки. Довольно мало внимания уделяется волнам Марангони (волнам сжатия и растяжения в упругой плёнке). Все эти вопросы находятся на стадии разработки и требуют дополнительного изучения.

Траектории движения индивидуальных жидких частиц. Работы, описанные в предыдущих пунктах обзора, в конечном счете, оперируют с усредненным течением и усредненным массопереносом. Направления и скорости жидких частиц, форма их траекторий и частоты соответствующих циклических движений долгое время оставались в ранге второстепенных вопросов. Следует отметить, что еще в 1969 году М. С. Лонге–Хиггинс указывал в своих работах на взаимосвязь направления дрейфа и направления циклического движения индивидуальных жидких частиц [64]. Тем не менее, работы связанные с непосредственным расчетом траекторий движения индивидуальных жидких частиц появились значительно позже [58; 59]. М. С. Лонге–Хиггинс обратил внимание на то, что период волнового движения (эйлеров период) и период вращения жидкой частицы вокруг среднего положения (лагранжев период) не совпадают и предложил соображения для расчета взаимосвязи этих периодов. Но это утверждение «проскользнуло» в виде небольшого абзаца и осталось не оформленным в виде четкого вывода. Главное внимание автор уделил совсем другой проблеме — разнице в среднем уровне жидкости, в зависимости от использования эйлерового или лагранжевого описания.

В начале нынешнего столетия среди исследователей появилось понимание того, что для полного описания явления необходимо не только изучать скорость

течения или развивать теорию пограничного слоя, но и выяснить закономерности движения индивидуальных жидких частиц, участвующие в волновом движении и массопереносе.

Для расчета траекторий и скорости движения индивидуальных жидких частиц большинство авторов используют решение задачи в переменных Эйлера с последующим пересчетом в описание Лагранжа. Так, в самом начале века в 2001 году А. Константин рассмотрел волны Герстнера на поверхности полубесконечной жидкости и получил соответствующие им выражения для описания траекторий движения индивидуальных жидких частиц [17]. Позже, в 2006 году он проанализировал движение гравитационных волн Стокса по поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной толщины, расположенной на твердой подложке. Работа выполнена скорее в духе сугубо математической структуры. Автор сформулировал в виде теорем утверждение о том, что траектории движения жидких частиц незамкнуты [18]. А. Константин, М. Эхрнстрём и Г. Виллари [19; 20] пытались найти что-то новое, в смысле отслеживания траекторий жидких частиц, в задаче с линейными по амплитуде волнами, распространяющимися по поверхности воды. Их выводы схожи с результатами, представленными в [18].

В том же духе выполнены работы Д. Генри, в которых доказывается незамкнутость траекторий движения жидких частиц при распространении по свободной поверхности идеальной бесконечно глубокой жидкости волн гравитационных Стокса [42]. Позднее тоже самое было проделано для капиллярных и капиллярно-гравитационных волн [40; 41].

М. Эхрнстрём рассмотрел влияние завихренности на траектории движения индивидуальных жидких частиц в бесконечно глубокой [34] и в жидкости конечной глубины [35]. Им были получены условия существования дрейфа, направленного в сторону распространения волны и незамкнутости траекторий движения жидких частиц. В работе [36] показано, что в устойчивых волнах траектории жидких частиц незамкнуты и присутствует положительно направленный дрейф в случае нулевой или отрицательной завихренности. Помимо этого, авторы уделили определенное внимание солитонам и стоячим волнам.

Некоторые исследователи стали работать в приближении более высокого порядка по амплитуде волны. Так, Х.-Ч. Хсу [44] предложил решение третьего порядка малости по амплитуде волны в переменных Лагранжа для идеальной жидкости, по поверхности которой распространяется гравитационная волна.

Были получены параметрические выражения, описывающие траектории движения индивидуальных частиц жидкости с точностью до слагаемых третьего порядка малости (что принимается за малый параметр — не говорится, видимо в его роли выступает крутизна волны). Выяснилось, что частота циркуляции жидкой частички (лагарнжева частота) не совпадает с частотой волнового движения (эйлерова частота). Частота циркуляции вблизи поверхности ниже, чем на глубине. Направление и интенсивность среднего дрейфа вблизи поверхности зависит от сонаправленности или противонаправленности сдвигового течения с направлением распространения волны.

С развитием компьютерной техники темой волнового массопереноса стали активно заниматься специалисты по численным методам. В 2007 году Х.-К. Чанг, Дж.-Ч. Лиу и М.-Я. Су представили метод численного расчета траекторий движения жидких частиц в жидкости с постоянной глубиной [6] для гравитационных волн конечной амплитуды. В 2009 году Х.-К. Чанг, Я.-И. Чень и Дж.-Ч. Лиу [5] разработали численный метод расчета траекторий движения жидких частиц в бесконечно глубокой жидкости и обратили внимание на несогласование периодов волнового движения и циклического движения индивидуальной жидкой частицы. Годом позже Я.-И. Чень и соавторы предложили эксперимент [12], в котором это различие демонстрируется на практике. А Х. Окамото и М. Шоджи [77], используя численные методы, произвели расчет траекторий движения жидких частиц для капиллярных волн (волн Краппера) и впервые для капиллярно-гравитационных волн, распространяющихся по поверхности жидкости. К сожалению разработанный ими метод справедлив только для идеальной жидкости. Интересно отметить, что именно в этой работе сформулированная Константином [18] теорема о незамкнутости траекторий движения индивидуальных жидких частиц (для случая бесконечно глубокой жидкости), наконец-то была доказана. Было представлено математическое доказательство того, что волновой массоперенос в идеальной жидкости повсюду направлен в сторону распространения волны и максимален на свободной поверхности.

Несмотря на успехи численников, не уходят в прошлое и попытки применения аналитических методов. В недавнем исследовании А. Шнирельман [89] строго доказал, что в случае идеальной несжимаемой жидкости, участвующей в волновом движении со свободной поверхностью, существует точное аналитическое описание траекторий движения индивидуальных жидких частиц. В работе

[74] сделана попытка решить задачу о расчете траекторий движения жидких частиц с использованием алгебры Ли. А Я. Э. Вебер исследовал траектории движения жидких частиц во внутренних волнах имеющих тип волн Герстнера [104]. К сожалению, корректное аналитическое описание траекторий движения индивидуальных жидких частиц даже в самых простейших случаях остается редкостью. Еще деликатнее — вопрос согласования траекторий движения индивидуальных жидких частиц с эволюцией во времени формы профиля волны. Как правило, он остается вне какого-либо рассмотрения.

Интересно отметить, что исследование траекторий движения индивидуальных жидких частиц также не остается без приложений. Например, в работе [91] рассмотрено перемещение взвешенных мелких частиц в бесконечно глубокой вязкой жидкости, вызванное совместным действием оседания и дрейфа Стокса.

Начало XXI-го века знаменуется всплеском интереса к изучению вопроса расчета траекторий движения индивидуальных жидких частиц, формирующих волновой массоперенос. Даже классики, — энтузиасты развития теории дрейфа в XX-ом веке, такие как Я. Э. Вебер — не обошли вниманием эту сторону вопроса. Современные исследования в большинстве своем придерживаются методов, опирающихся на использовании эйлеровых переменных. При проведении расчетов с использованием методов численного анализа переменные Эйлера оказываются удобнее и понятнее для специалистов по прикладной математике. Но в тоже время, не все мастера численных, а порой и аналитических расчетов, делают различие между эйлеровым и лагранжевым периодами циклических движений жидкой частицы. Это упущение может серьезно сказаться на дальнейшем развитии теории, особенно при ее обобщении на случай расчета траекторий частиц в двухслойной системе жидкостей, испытывающей тангенциальный разрыв скорости вдоль границы раздела. Вопрос о расчете массопереноса и траекторий движения жидких частиц в двухслойных и многослойных системах до сих пор остается исследованным недостаточно обстоятельно.

Эксперименты. В плане экспериментального анализа, волновой дрейф не имеет таких активных и убежденных приверженцев теме, как М. С. Лонге-Хиггинс или Я. Э. Вэбер в теоретических разработках. Более того, осмысленные

эксперименты по исследованию явления появились лишь спустя столетие, после появления теории дрейфа Стокса. Ниже перечислены наиболее известные и цитируемые экспериментальные наблюдения и факты.

Д. Л. Харрис [38] сделал предположение, что при распространении волнового движения по границе жидкой и газообразной среды, в последней должен наблюдаться перенос вещества, аналогичный дрейфу Стокса. Была проведена соответствующая экспериментальная проверка. В прямоугольном канале с водой продуцировалось волновое движение. В камеру запускался дым и фотографировался в разные моменты времени. Было обнаружено смещение дыма в сторону распространения волны.

Р. Рассел и Дж. Озорио [84] исследовали скорость дрейфа в прямоугольном канале и следили за его профилем при помощи измерения скорости мелких жидких частиц, взвешенных в воде. Для некоторых длин волн решение М. С. Лонге–Хиггинса достаточно хорошо описывает результат эксперимента, но для глубокой воды наилучшим оказывается классическое описание Дж. Г. Стокса.

В работе [95] исследовались волны в прямоугольном канале, которые авторы называют «перманентные». Профиль волны, амплитуда и скорость распространения волны измерялись при помощи двух емкостных детекторов, а скорость движения жидких частиц измерялась при помощи фотографии на длинной выдержке. Результаты эксперимента лучше согласуются с теорией Дж. Г. Стокса. По утверждению авторов согласование с теорией М. С. Лонге–Хиггинса следовало ожидать на значительно более длительных временах наблюдения, когда вязкость сыграет более значительную роль.

В 2000 году исследователи провели эксперимент по влиянию оказываемого на дрейф, индуцированный волновым движением, неоднородности дна [83]. Измерения проводились в прямоугольном канале при помощи доплеровского радара. Было показано, что, в зависимости от неоднородности дна, придонные течения могут быть как больше, так и меньше тех, заявленных М. С. Лонге–Хиггинсом. Примерно тем же вопросам посвящена работа [67], в которой с помощью доплеровского радара был исследован волновой массоперенос в приповерхностном пограничном слое в зависимости от формы дна. Похоже, что работа просто демонстрирует возможности нового оборудования – доплеровского радара. Из результатов не удастся выудить каких-либо полезных сведений о поведении среднего дрейфового течения.

В 2017 норвежскими исследователями был проведен эксперимент по определению траекторий движения индивидуальных жидких частиц, их скорости и периода вращательного движения в прямоугольном канале с жидкостью, со слежением за жидкими частицами (particle tracking velocimetry) [37]. Было обнаружено, что существует два уровня, на которых скорость дрейфа обращается в нуль, период кругового движения жидкой частицы сравнивается с периодом волнового движения, а траектории становятся замкнутыми.

В работе [97] экспериментально исследована скорость и траектории движения индивидуальных жидких частиц в двухслойной жидкости. Результаты сравнивались с аналитическим расчетом. Сходство теории и эксперимента оказалось удовлетворительным. Во многом несовпадение эксперимента с предлагаемыми теоретическими расчетами связано с отсутствием волногасителя и возникающих из-за этого обратных течений, «смазывающих» картину движения жидких частиц. В 2012 году тем же исследователем [96] была проведена попытка отследить траектории в однослойной жидкости с волногасителем. При этом наблюдается лучшее совпадение предлагаемой теории с экспериментом, чем в работе [97], однако теоретическое описание траекторий движения не учитывает изменение периода циркуляции жидкой частицы, связанного с дрейфом Стокса. Видимо, именно эта оплошность является причиной качественных отличий теоретических расчетов и экспериментально наблюдаемых траекторий.

Экспериментально вопрос волнового массопереноса и связанных с ним траекторий движения индивидуальных частиц жидкости разработан существенно слабее, чем теоретически. Отсутствует какая-то общая, не вызывающая нареканий методика с четкими правилами генерации волн, соответствующих различным начальным условиям. Даже общепринятого метода отслеживания движений индивидуальных жидких частиц не существует. В целом, существующие к настоящему времени экспериментальные данные показывают, что в большом количестве случаев массоперенос, вызванный волновым движением, приемлемо описывается самой простой моделью Стокса. Заметное число экспериментаторов указывают на согласие эксперимента с моделью Лонге–Хиггинса, но только для определенных длин волн. До сих пор редкостью остаются грамотные эксперименты с двухслойными жидкостями и жидкостями, покрытыми плёнками поверхностно-активного вещества. Возможно, появление удобной для приложений теории будет способствовать активизации экспериментальных исследований в этой области.

Заключение. Несмотря на более чем полуторавековую историю вопроса теория дрейфа Стокса до сих пор активно развивается и находит применение в самых разнообразных современных приложениях. К настоящему времени исследователи наконец-то сошлись во мнении, что при решении задач по данной тематике не стоит тратить силы на отстаивание приоритета эйлеровых или лагранжевых координат. Каждый из подходов обладает своими преимуществами и недостатками, и выбор конкретного пути решения нужно определять исходя из характера решаемой задачи, учитывая вычислительный и аналитический потенциал исследовательского коллектива. При аналитическом подходе следует с осторожностью относиться к использованию теории пограничного слоя вблизи свободной поверхности. В аналитическом плане аппарат, который она использует, не намного упрощает громоздкость выкладок. Наиболее слабо исследованными вопросами по заявленной тематике на настоящий момент является проблема расчета дрейфа Стокса и траекторий движения жидких частиц в многокомпонентных системах: таких как двухслойные и многослойные жидкости, жидкости, покрытые плёнкой поверхностно-активного вещества. В случае плёнок поверхностно-активных веществ немалый интерес представляют не только исследования переноса вещества, но и характера его перераспределения по возмущенной волновым движением поверхности.

Глава 2. Метод расчета траекторий движения индивидуальных жидких частичек

2.1 Введение

В середине XIX века Дж. Г. Стокс показал, что при распространении волнового движения с частотой ω волновым числом k и амплитудой ζ по поверхности идеальной жидкости материальные частицы, находящиеся на глубине d испытывают горизонтальный перенос в направлении распространения волны со скоростью [92]:

$$U_{DS} = \zeta^2 \omega k \exp(-2kd) \quad (2.1)$$

Как правило, считают, что при распространении волнового движения жидкие частички движутся по круговым траекториям, радиус которых уменьшается от ζ для частиц на поверхности жидкости до нуля для бесконечно глубоко залегающих частиц [167; 170; 213]. Однако стоит иметь в виду, что из-за затухания движения жидкости с глубиной нижняя часть траектории, описываемой жидкой частичкой, оказывается чуть меньше верхней. Вследствие этого жидкая частичка возвращается не в исходное положение, а в смещенное на небольшую величину (по сравнению с радиусом окружности) в направлении распространения волны [16]. С течением времени это смещение накапливается и формируется дрейф со средней скоростью U_{DS} . Схематически профиль скорости классического дрейфа Стокса представлен на рисунке 2.1.

Несмотря на давнюю историю, это явление активно изучается до сих пор и находит применение в различных приложениях [13; 43; 75; 88; 99].

Отдельный интерес для исследователей представляет волновое движение на границе раздела двух сред. В частности, если среды участвуют в относительном горизонтальном сдвиговом движении, то могут возникнуть условия для реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Классическая постановка задачи возникает в системе двух идеальных полубесконечных несжимаемых жидкостей, в которой менее плотная жидкость с плотностью ρ' движется с постоянной горизонтальной скоростью U_0 относительно покоящейся жидкости с плотностью ρ . Поле тяжести характеризуется ускорением свободного падения

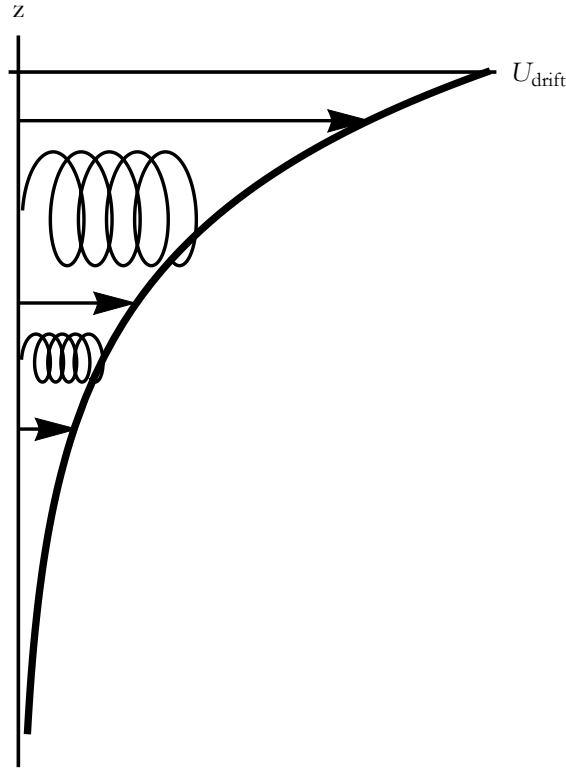


Рисунок 2.1 — Схематическое изображение профиля классического дрейфа Стокса и траекторий движения индивидуальных жидких частиц

g. С учетом коэффициента поверхностного натяжения γ неустойчивость принимает пороговый характер и при достижении скоростью относительного сдвига некоторого критического значения U_{cr} , величина которого определяется из дисперсионного уравнения

$$\omega = \frac{k\rho'U_0 \pm \sqrt{kg(\rho^2 - \rho'^2) + k^3\gamma(\rho + \rho') - k^2\rho\rho'U_0^2}}{\rho + \rho'} \quad (2.2)$$

реализуется неустойчивость. На начальных этапах она проявляется в экспоненциальном росте со временем амплитуды сколь угодно малых возмущений волновой поверхности. При исследовании неустойчивости Кельвина–Гельмгольца обычно внимание уделяется эволюции границы раздела [224], [146].

Еще одним очень интересным аспектом механики сплошных сред является описание траекторий движения индивидуальных частиц, составляющих жидкую среду при распространении волнового движения по ее поверхности. Исследование этого вопроса началось с работы Лонге–Хиггинса [64], в которой было обращено внимание на то, что период волнового движения (Эйлеров период) и период вращения жидкой частицы вокруг среднего положения (Лагранжев период) не совпадают и привел теорию для расчета этих периодов. В дальнейшем было математически показано, что траектория жидкой частицы

должна быть незамкнута [41], [40]. Также были предложены численные методы для расчета траектории движения индивидуальных жидких частиц [6], [5].

Исторически сложилось, что все три выше перечисленных аспекта изучаются независимо друг от друга и, как правило, разными исследователями. Причем для описания дрейфовых движений обычно используется описание Лагранжа, а для описания траекторий и неустойчивости Кельвина–Гельмгольца задачу формулируют и решают в описании Эйлера. В настоящей главе предлагается аналитический асимптотический метод, в котором рассматриваются совместно три этих явления при помощи специально разработанной процедуры перехода между описанием Эйлера и Лагранжа.

2.2 Формулировка задачи

Рассмотрим две идеальные полубесконечные несжимаемые несмешивающиеся жидкости в декартовой системе координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести \mathbf{g} . Нижняя жидкость с плотностью ρ занимает полупространство $z < 0$, а верхняя менее плотная жидкость с плотностью $\rho' < \rho$ занимает полупространство $z > 0$ и движется поступательно с постоянной скоростью U_0 в положительном направлении оси Ox . Считается, что вдоль границы раздела, характеризуемой коэффициентом поверхностного натяжения γ , в том же направлении распространяется периодическое волновое возмущение $z = \xi(x, t)$ с длиной волны λ . Движение жидкостей будем считать потенциальным и для простоты будем полагать его независимым от горизонтальной координаты y . Задача решается в приближении волн малой амплитуды ($\zeta \ll \lambda$).

Существует два варианта описания поля скоростей в жидкости. Можно определять скорость жидких частичек в определенных (фиксированных) точках пространства и смотреть, как она изменяется с течением времени – это так называемое эйлерово описание поля скоростей. Этот метод традиционно используется при описании задач механики жидкостей и он кажется более привычным, но у этого метода есть ряд недостатков. Основной причиной появления другого способа описания поля скоростей является то, что в этом случае невозможно проследить за траекторией и изменением скорости отдельной жидкой

частички с течением времени. Действительно, зная скорость жидкой частички $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, неизвестно, в какой точке пространства она окажется в момент времени $t + \Delta t$, если в момент времени t находилась в точке с радиус-вектором \mathbf{r} . И даже несмотря на то, что известна скорость каждой частички жидкости в новый момент времени, невозможно узнать, где находится та частичка, за которой мы следили из-за того, что в эйлеровом описании частички жидкости нельзя каким либо образом «пометить». Эта проблема решается при представлении поля скоростей в форме Лагранжа. Если в начальный момент времени $t = t_0$ зафиксировать положение в пространстве и скорость индивидуальных жидких частичек и с течением времени следить за их изменениями, то мы сможем определить поле скоростей, «привязанное» не к позиции в пространстве, а к жидким частичкам. Скорость $\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t)$ определяет скорость жидкой частички, которая в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ находилась в точке пространства с радиус вектором \mathbf{r} . Поэтому кажется логичным формулировать и решать задачу в описании Лагранжа. Однако, в переменных Лагранжа возникают проблемы с корректной записью граничных условий на границе раздела двух идеальных жидкостей. Сказанное можно пояснить на примере условия равенства гидродинамических давлений в нижней ($p_L(\mathbf{r}_0, t)$) и в верхней ($p'_L(\mathbf{r}_0, t)$) жидкостях на границе раздела. Представим себе две жидкие частички, которые в начальный момент времени находились на границе раздела с разных ее сторон. Через некоторое произвольное время t в общем случае частицы идеальных жидкостей могут осуществить различный горизонтальный сдвиг и оказаться в разных точках границы раздела. В связи с этим запись условия баланса гидродинамических давлений в виде $p_L(\mathbf{r}_0, t) = p'_L(\mathbf{r}_0, t)$ выглядит некорректной.

Таким образом, записывать математическую формулировку задачи и проводить решение логичнее в описании Эйлера, в котором все переменные описывают свойства жидкости в определенной точке пространства с радиус-вектором \mathbf{r} в момент времени t . При этом через эту точку пространства могут проходить различные жидкие частицы и для определения их скорости необходимо будет осуществлять дополнительные математические операции.

В переменных Эйлера математическая формулировка задачи по определению гидродинамических потенциалов нижней φ и верхней φ' жидкостей имеет

ВИД:

$$z > \xi : \quad \Delta \varphi' = 0; \quad (2.3)$$

$$P' = p_0 - \rho'gz - \rho'\partial_t \varphi' - (\rho'/2) \left[(\partial_x \varphi' + U_0)^2 + (\partial_z \varphi')^2 \right];$$

$$z = \xi : \quad \partial_t \xi + \partial_x \xi \partial_x \varphi = \partial_z \varphi; \quad \partial_t \xi + (\partial_x \varphi' + U_0) \partial_x \xi = \partial_z \varphi'; \quad (2.4)$$

$$P - P' = -\gamma \partial_{xx} \xi \left(1 + (\partial_x \xi)^2 \right)^{-3/2};$$

$$z < \xi : \quad \Delta \varphi = 0; \quad (2.5)$$

$$P = p_0 - \rho gz - \rho \partial_t \varphi - (\rho/2) \left[(\partial_x \varphi)^2 + (\partial_z \varphi)^2 \right];$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \varphi' \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Здесь P и P' — гидродинамическое давление в нижней и верхней средах соответственно, а p_0 — постоянная внешняя составляющая играющая роль атмосферного давления. Будем решать задачу в приближении волн малой амплитуды методом разложения по малому параметру $\varepsilon = \zeta k$, показывающему отношение амплитуды волны ζ к ее длине $\lambda = 2\pi/k$. Дрейф Стокса — явление второго порядка малости по амплитуде волны, поэтому разложение искомых величин будем находить с точностью до второго порядка:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi'_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3). \quad (2.7)$$

Здесь O — символ Ландау, характеризующий порядок остаточных слагаемых по ε .

Наряду с разложением (2.7), применялась известная процедура снесения граничных условий (2.4) на невозмущенную поверхность $z = 0$, обоснование которой представлено в [49], а примеры использования можно посмотреть в [126], [170], [68], [73]. Так, для значений горизонтальной скорости течения $\partial_z \varphi$ со стороны нижней области снесение с поверхности $z = \xi$ на уровень $z = 0$ осуществляется посредством следующих выкладок:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=\xi} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} + \xi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \frac{1}{2} \xi^2 \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \right)_{z=0} + \dots = \\ &= \left(\frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z} \right)_{z=0} + (\xi_1 + \xi_2) \left(\frac{\partial^2 (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots = \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=0} + \xi_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots \end{aligned}$$

Видно, что значение, которое величина принимает на искривленной поверхности $z = \xi(x, t)$, оказалось с необходимой степенью точности выраженным через значение этой же величины и значения ее производных на уровне $z = 0$. С помощью (2.7) и процедуры снесения граничных условий на невозмущенный уровень, несложно перейти от (2.3) — (2.6) к задачам первого и второго порядков малости.

Математическая формулировка задачи первого по ε порядка малости имеет вид:

$$z > 0 : \quad \Delta \varphi'_1 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta \varphi_1 = 0; \quad (2.8)$$

$$z = 0 : \quad \partial_t \xi_1 - \partial_z \varphi_1 = 0; \quad \partial_t \xi_1 + U_0 \partial_x \xi_1 - \partial_z \varphi'_1 = 0; \quad (2.9)$$

$$g \xi_1 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_1 + \rho' \partial_t \varphi'_1 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_1 + \gamma \partial_{xx} \xi_1 = 0; \quad (2.10)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \varphi'_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_1 \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Задача второго по ε порядка малости описывается соотношениями:

$$z > 0 : \quad \Delta \varphi'_2 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta \varphi_2 = 0; \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad & \partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 = \xi_1 \partial_{zz} \varphi_1 - \partial_x \varphi_1 \xi_1; \\ & \partial_t \xi_2 + U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi'_2 = \xi_1 \partial_{zz} \varphi'_1 - \partial_{xx} \varphi'_1 \partial_{xx} \xi_1; \\ & g \xi_2 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi'_2 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 = \\ & = \rho \xi_1 \partial_{zt} \varphi_1 + \frac{\rho}{2} \left((\partial_x \varphi_1)^2 + (\partial_z \varphi_1)^2 \right) - \rho' \xi_1 \partial_{zt} \varphi'_1 - \\ & - \frac{\rho'}{2} \left((\partial_x \varphi'_1)^2 + (\partial_z \varphi'_1)^2 + 2U_0 \xi_1 \partial_{xx} \varphi'_1 \right); \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \varphi'_2 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Последовательное решение сначала (2.8) — (2.11), затем (2.12) — (2.14) приводит к аналитическим выражениям, позволяющим описать эйлерово поле скоростей во втором приближении по ε . При этом начальные условия заменяются условием поиска решения в наиболее простом (в аналитическом плане) виде описывающем периодическую бегущую волну длиной λ .

2.3 Свойства решения

Решение задачи первого порядка малости (2.8) – (2.11) в виде простейшей бегущей волны записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi'_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \zeta \exp(i\omega t - ikx) \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega/k \\ -i(\omega - kU_0)/k \end{pmatrix} + C.C. \quad (2.15)$$

Здесь символ $C.C.$ определяет комплексно сопряженные слагаемые, i — мнимая единица, а круговая частота ω связана с волновым числом и другими параметрами задачи посредством дисперсионного уравнения (2.2).

Анализ дисперсионного уравнения показывает, что при движении верхней жидкости со скоростью меньшей некоторого критического значения

$$U_0 \leq U_{cr}(k) = \sqrt{\frac{k^2 \gamma (\rho + \rho') + g (\rho^2 - \rho'^2)}{k \rho \rho'}}$$

круговая частота принимает действительные значения. Следовательно, все компоненты решения задачи будут периодическими функциями. В случае когда $U_0 > U_{cr}(k)$ частота ω принимает комплексные значения и в решении появляется множитель $\propto \exp(\pm Im(\omega t))$. Таким образом происходит распространение волн с экспоненциально нарастающей амплитудой. Такое движение связывают с начальными этапами развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. На рисунке 2.2 показана кривая нейтральной устойчивости в области параметров величины тангенциального разрыва скоростей на границе раздела и волнового числа бегущей по этой границе синусоидальной волны (U_0, k) . Кривая построена для жидкостей с параметрами воды и воздуха в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, стандартных для этого типа задач гидродинамики. Область ниже этой кривой соответствует устойчивому волновому движению, а область выше кривой — развитию неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Из рисунка 2.2 видно, что существует такое волновое число

$$k_{cr} = \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{\gamma}},$$

которое наиболее восприимчиво к возникновению неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Соответствующая ему критическая скорость реализации

неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

$$U_{cr} = \sqrt{\frac{2(\rho + \rho') \sqrt{\gamma g (\rho - \rho')}}{\rho \rho'}}. \quad (2.16)$$

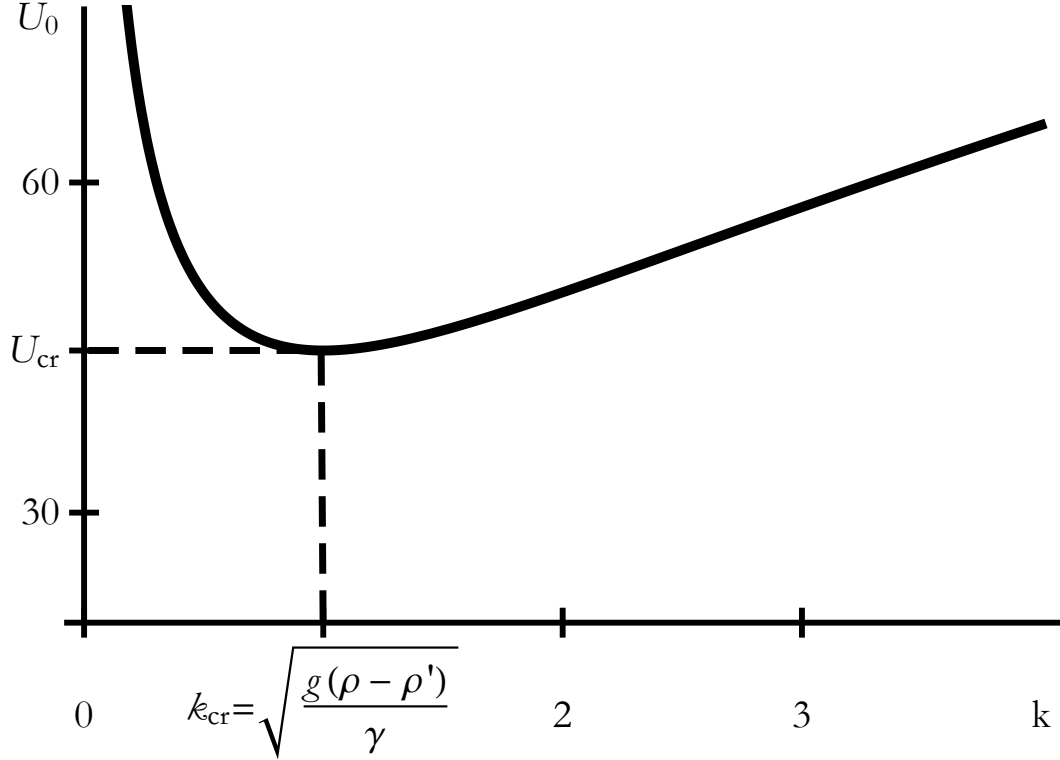


Рисунок 2.2 — Кривая нейтральной устойчивости неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в безразмерных переменных $\rho = g = \gamma = 1$

Из решения задачи для гидродинамических потенциалов несложно получить выражения для горизонтальных и вертикальных составляющих скоростей в линейном приближении по амплитуде волнового движения. В нижней жидкости горизонтальная u_1 и вертикальная v_1 компоненты выражаются следующим образом:

$$u_1 = \frac{1}{2} \zeta \omega \exp(i(\omega t - kx)) \exp(kz) + C.C. \quad (2.17)$$

$$v_1 = -\frac{i}{2} \zeta \omega \exp(i(\omega t - kx)) \exp(kz) + C.C. \quad (2.18)$$

В верхней жидкости горизонтальная u'_1 и вертикальная v'_1 составляющая имеют вид:

$$u'_1 = U_0 - \frac{1}{2} \zeta (\omega - kU_0) \exp(i(\omega t - kx)) \exp(-kz) + C.C. \quad (2.19)$$

$$v'_1 = \frac{i}{2} \zeta (\omega - kU_0) \exp(i(\omega t - kx)) \exp(-kz) + C.C. \quad (2.20)$$

Подставляя решение (2.15) в правые части граничных условий задачи второго порядка малости (2.13) можно заметить, что неоднородности являются периодическими функциями $\Pi(2(\omega t - kx))$, пропорциональные $\propto \sin(2(\omega t - kx))$ или $\propto \cos(2(\omega t - kx))$. Следовательно, решение задачи второго порядка малости содержит в себе в качестве множителя функцию вида $\Pi(2(\omega t - kx))$.

2.4 Принцип перехода к переменным Лагранжа

Для определения дрейфовой скорости и для расчета движения индивидуальной жидкой частицы используется описание поля скоростей в форме Лагранжа $\mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x u_L + \mathbf{e}_z v_L$. Существует процедура перехода от описания поля скоростей в эйлеровой форме к описанию поля скоростей в лагранжевой форме. Приведем вывод асимптотической формулы перехода в предположении малости волнового возмущения. Очевидно, что в нулевой момент времени $t = t_0 = 0$ скорость жидкой частички в форме Эйлера и в форме Лагранжа совпадают: $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, t)$. Рассмотрим перемещение выделенной жидкой частички, через отрезок времени τ (причем время τ не будем считать малым) она окажется в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}$. В приближении волн малой амплитуды можно считать, что перемещение жидкой частички $\Delta\mathbf{r}$ за конечный промежуток времени мало по сравнению с амплитудой волнового движения. Такая ситуация в природе встречается например при распространении капиллярно-гравитационных волн малой амплитуды в струях, по поверхности мирового океана, при малых колебаниях капли, и именно такое движение мы и будем рассматривать. На рисунке 2.3 демонстрируется смещение жидкой частички, участвующей в таком движении, при этом за конечное время смещение составляет величину меньшую чем амплитуда волнового возмущения. В новом положении скорость в форме Лагранжа $\mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, \tau)$ равна скорости в форме Эйлера $\mathbf{V}(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}, \tau)$, значит можно выразить разность:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, \tau) - \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}, \tau) - \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau).$$

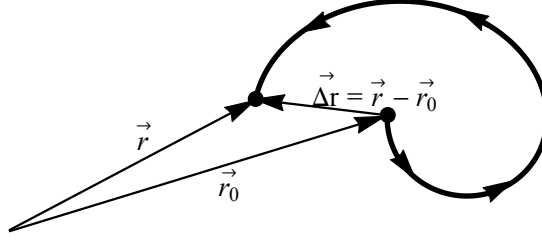


Рисунок 2.3 — Смещение индивидуальной жидкой частички за конечное время t

Разложим правую часть этого выражения в ряд Маклорена и в силу малости перемещения можем аппроксимировать ее только главными членами ряда:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, \tau) - \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) = (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) + \Upsilon \quad (2.21)$$

Здесь Υ — остаточный член, который по порядку не превосходит произведений квадрата вектора $\Delta \mathbf{r}$ на вторые производные по координатам компонент вектора скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau)$.

Лагранжева скорость определяет скорость выделенной частички жидкости, потому ее перемещение $\Delta \mathbf{r}$ за время τ можно определить простым интегрированием:

$$\Delta \mathbf{r} = \int_0^\tau \mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, t) dt \quad (2.22)$$

Подставляя интеграл (2.22) в (2.21) получим выражение для расчета скорости Лагранжа:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, \tau) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) + \left(\left(\int_0^\tau \mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, t) dt \right) \cdot \nabla \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) + \Upsilon \quad (2.23)$$

Если вместо подынтегрального выражения в (2.23) поставить всю правую часть (2.23), предварительно заменив в ней t на t_1 , а τ на t , то соотношение (2.23) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, \tau) = & \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) + \\ & + \left\{ \left[\int_0^\tau \left(\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) + \left(\left(\int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t_1) dt_1 \right) \cdot \nabla \right) \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t) + \Upsilon \right) dt \right] \cdot \nabla \right\} \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) + \Upsilon \quad (2.24) \end{aligned}$$

Поскольку скорость выделенной индивидуальной частички жидкости мала по сравнению с фазовой скоростью волн, в асимптотической формуле (2.24)

правомерно оставить только главный член представления:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, \tau) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) + \left(\left(\int_0^\tau \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t) dt \right) \cdot \nabla_0 \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) \quad (2.25)$$

Нижний индекс «0» при операторе ∇ означает, что частные производные вычисляются в положении, в котором частичка находилась в начальный момент времени. Таким образом, приходим к асимптотическому выражению лагранжевой скорости индивидуальной жидкой частички через эйлерову скорость. Выражение (2.25) по известному полю скоростей в эйлеровом представлении позволяет получить скорость жидкой частички, которая в нулевой момент времени $t = t_0 = 0$ находилась в точке пространства с радиус-вектором \mathbf{r}_0 . Простое интегрирование по времени этого выражения позволит нам построить реальную траекторию движения индивидуальной жидкой частички. Но здесь важно обратить внимание на границы применимости формулы. Во-первых, она применима только для определения лагранжевой скорости не больше чем второго порядка малости по амплитуде волны, поскольку мы при расчете использовали приближение эйлеровой скорости второго порядка малости. Во-вторых, изначально накладывалось ограничение на перемещение индивидуальной жидкой частички $\Delta \mathbf{r}$ — оно должно удовлетворять условию малости по сравнению с амплитудой волны. Поэтому формула неприменима в условиях больших сдвигов жидких частичек. В-третьих, использовать формулу перехода (2.25) возможно лишь для волн малой по сравнению с длиной амплитуды. Все эти ограничения важно учитывать при расчетах в различных приложениях.

2.5 Применение принципа расчета скорости жидких частиц к двухслойной системе

Применяя (2.25) к полю скоростей (2.17) — (2.18) в первом по ε приближении получим, что скорости нижней жидкости в представлении Лагранжа описываются при помощи выражений:

$$u_{L1} = \frac{1}{2} \zeta \omega \exp(i\omega t - ikx_0) \exp(kz_0) + C.C. \quad (2.26)$$

$$v_{L1} = -\frac{i}{2} \zeta \omega \exp(i\omega t - ikx_0) \exp(kz_0) + C.C. \quad (2.27)$$

Здесь x_0 и z_0 играют роль координаты начального положения индивидуальной жидкой частицы. Таким образом, в первом приближении переход от описания Эйлера к описанию Лагранжа сводится к изменению статуса координат. Такое формальное совпадение скоростей в описании Эйлера и Лагранжа в первом приближении давно известно и часто используется для описания движения материальных частиц по круговым траекториям [115; 167; 170; 213]. Так как в неподвижной системе координат $Oxyz$ жидкие частицы верхней жидкости помимо волнового движения участвуют в сдвиговом течении со скоростью U_0 и за время τ смещаются на немалое расстояние $U_0\tau$ по горизонтали, то в силу границ применимости формулы перехода (2.25) невозможно ее простое аналогичное применение к полю скоростей верхней жидкости (2.19) — (2.20). Для корректного применения формулы перехода к полю скоростей (2.19) — (2.20) необходимо перейти в систему координат $O^*x^*y^*z^*$, движущуюся синхронно с верхней жидкостью. Если в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ системы координат $Oxyz$ и $O^*x^*y^*z^*$ совпадают, то новые координаты выражаются через старые следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - U_0t \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

При этом частота волнового движения изменяется из-за эффекта Доплера соответствующим образом:

$$\omega t - kx = \omega t - k(x^* + U_0t) = \Omega t - kx^* \quad (2.28)$$

$$\Omega = \omega - kU_0$$

Тогда периодические функции, содержащие в качестве аргумента круговую частоту преобразуются:

$$\cos(\omega t - kx) \rightarrow \cos(\Omega t - kx^*)$$

$$\sin(\omega t - kx) \rightarrow \sin(\Omega t - kx^*)$$

В новой системе координат эйлерово поле скоростей в первом приближении по амплитуде волны выглядит следующим образом:

$$u_1^* = -\frac{1}{2}\zeta\Omega \exp(i(\Omega t - kx^*)) \exp(-kz^*) + C.C. \quad (2.29)$$

$$v_1^* = \frac{i}{2} \zeta \Omega \exp(i(\Omega t - kx^*)) \exp(-kz^*) + C.C. \quad (2.30)$$

В движущейся системе координат применение формулы перехода (2.25) к полю скоростей (2.29) — (2.30) правомерно и скорость в описании Лагранжа в системе координат $O^*x^*y^*z^*$ имеет вид:

$$u_{L1}^* = -\frac{1}{2} \zeta \Omega \exp(i\Omega t - ikx_0^*) \exp(-kz_0^*) + C.C.$$

$$v_{L1}^* = \frac{i}{2} \zeta \Omega \exp(i\Omega t - ikx_0^*) \exp(-kz_0^*) + C.C.$$

Совершая обратный переход в неподвижную систему координат получим:

$$u'_{L1} = U_0 - \frac{1}{2} \zeta \Omega \exp(i\Omega t - ikx_0) \exp(-kz_0) + C.C. \quad (2.31)$$

$$v'_{L1} = \frac{i}{2} \zeta \Omega \exp(i\Omega t - ikx_0) \exp(-kz_0) + C.C. \quad (2.32)$$

Поскольку в начальный момент времени подвижная и неподвижная системы координат совпадают, то справедливы равенства $x_0 = x_0^*$ и $z_0 = z_0^*$. При обратном переходе не требуются преобразования частоты Ω , обратные преобразования (2.28). В этом случае речь идет не о частоте волнового движения, а о частоте круговых движений выделенной жидкой частицы. Здесь уместна аналогия с частотой колебаний маятника: циклические движения индивидуальной материальной частицы представляют из себя своего рода часовой механизм, а в рамках классической механики период часового механизма не меняется в инерциальных системах отсчета, следовательно неизменной остается частота круговых движений жидких частиц Ω .

2.5.1 Дрейфовые и циклические составляющие скорости

Из формулы перехода (2.25) видно, что горизонтальная скорость выделенной жидкой частички с точностью до второго по ε порядка малости

определяется выражением:

$$\begin{aligned}
u_L(x_0, z_0, t) = & u_1(x_0, z_0, t) + u_2(x_0, z_0, t) + \\
& + \left(\int_0^t u_1(x_0, z_0, \tau) d\tau \right) \left(\frac{\partial u_1(x, z, t)}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} + \\
& + \left(\int_0^t v_1(x_0, z_0, \tau) d\tau \right) \left(\frac{\partial u_1(x, z, t)}{\partial z} \right)_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Выделим из скорости движения материальной частицы слагаемые, отвечающие за дрейф (дрейфовые слагаемые) и слагаемые, отвечающие за круговые движения (циклические слагаемые). Заметим, что первое и второе слагаемое в (2.33) описываются периодическими функциями (см. выражения (2.17) — (2.18) и соображения в заключении раздела 2.3). Таким образом, эти слагаемые отвечают за циклические движения материальных частиц и не вносят вклад в дрейфовые движения. Третье и четвертое слагаемое в (2.33) (интегральные слагаемые) при подстановке (2.17) — (2.18) и вычислении помимо циклических слагаемых вида $\Pi(2\omega t - 2kx)$ включают в себя дрейфовую компоненту скорости:

$$U_{DS} = \zeta^2 \omega k \exp(2kz), \quad (2.34)$$

аналогичную выражению, полученного для классического дрейфа Стокса (2.1).

Расчет скорости горизонтального дрейфа жидких частиц верхней жидкости сопряжен с особенностями, изложенными в предыдущем пункте. Прделав все необходимые математические процедуры, несложно получить дрейфовую компоненту скорости верхней жидкости:

$$U'_{DS} = U_0 + \zeta^2 \Omega k \exp(-2kz), \quad (2.35)$$

Обратим внимание на факт, что через некоторый большой (по сравнению с периодом обращения индивидуальной жидкой частицы) промежуток времени жидкие частицы, увлекаемые даже малым дрейфом (2.34), сместятся на большое (по сравнению с длиной волны) расстояние. И тогда формула перехода (2.25) выходит за границы применимости. Таким образом, для корректного расчета дрейфа даже в нижней жидкости нужно переходить в систему отсчета, дрейфующую вместе с жидкими частицами. Осуществляя математические процедуры, описанные в предыдущем пункте можно найти усовершенствованную форму записи лагранжевых компонент скорости жидких частиц нижней

жидкости:

$$u_{L1} = \frac{1}{2} \zeta \omega \exp(i((\omega - kU_{DS})t - kx_0)) \exp(kz_0) + C.C. \quad (2.36)$$

$$v_{L1} = -\frac{i}{2} \zeta \omega \exp(i((\omega - kU_{DS})t - kx_0)) \exp(kz_0) + C.C. \quad (2.37)$$

Из (2.36) — (2.37) можно заметить, что период $\tau = 2\pi/(\omega - kU_{DS})$ круговых движений индивидуальной жидкой частицы больше периода волнового движения границы раздела $T = 2\pi/\omega$. Этот факт играет важную роль в согласовании движения материальных частиц, находящихся на границе раздела жидких сред и участвующих в циклических и дрейфовых движениях с движениями этой границы.

Рассмотрим это явление на примере одной жидкой частички, в начальный момент времени находящуюся во впадине волны, возмущающей границу раздела (2.15). Через время τ частичка оказывается снова в нижней части своей траектории. При этом она движется по траектории сначала поднимаясь, а потом снова опускаясь в следующую впадину волны. Так как период волнового движения T меньше периода обращения жидкой частицы τ , нижняя точка впадины, в которой окажется жидкая частица, будет иметь горизонтальную координату не x_0 , а $x = x_0 + U_{ph}(\tau - T)$, где $U_{ph} = \omega/k$ — фазовая скорость волнового возмущения границы раздела (2.15). Жидкая частичка за это время по горизонтали смещается в положительном направлении оси Ox на расстояние $\Delta x = \omega(\tau - T)/k$. Скорость смещения жидкой частички в горизонтальном направлении определяется отношением $\Delta x/\tau$. Подставив сюда значения периодов волнового движения и циклического движения индивидуальной жидкой частицы получим:

$$\frac{\Delta x}{\tau} = \frac{(\tau - T)\omega}{k\tau} = \left(\frac{2\pi}{\omega - kU_{DS}} - \frac{2\pi}{\omega} \right) \frac{\omega(\omega - kU_{DS})}{2\pi k} = U_{DS}$$

Действительно получается, что, исходя из таких соображений траектория движения индивидуальной жидкой частицы оказывается согласованной с формой волнового возмущения границы раздела. Если же не брать в расчет разницу в периодах волнового возмущения и кругового движения жидкой частицы, то совершающая витки и дрейфующая частица не будет находиться на границе раздела. Следовательно, материальная частица будет двигаться рассогласованно с волновым возмущением, что не соответствует действительности.

Рассуждая аналогичным образом можно внести поправку к Лагранжевым компонентам скорости движения жидких частиц верхней жидкости:

$$u'_{L1} = U_0 - \frac{1}{2} \zeta \Omega \exp(i((\omega - kU'_{DS})t - kx_0)) \exp(-kz_0) + C.C. \quad (2.38)$$

$$v'_{L1} = \frac{i}{2} \zeta \Omega \exp(i((\omega - kU'_{DS})t - kx_0)) \exp(-kz_0) + C.C. \quad (2.39)$$

Выражения (2.34) — (2.39) определяют дрейфовые и циклические компоненты скорости материальных частиц, составляющих нижнюю и верхнюю жидкости. В круговых движениях лидирующими являются слагаемые первого по амплитуде порядка малости, а в дрейфовых компонентах скорости наиболее значимой оказываются добавки второго порядка малости, пропорциональные квадрату амплитуды ζ^2 . В работе производится учет обоих типов движения, сохраняя только главные члены асимптотического разложения.

Учет дрейфа Стокса в задаче с тангенциальным разрывом скоростей на границе двух идеальных жидкостей позволяет обнаружить интересное явление, на которое до сих пор не обращалось внимание исследователей. Частички жидкости, прилегающие к границе раздела с разных её сторон движутся друг относительно друга. Если волновое движение на границе раздела отсутствует, то скорость относительного движения совпадает со скоростью поступательного движения верхней среды U_0 . При волновом возмущении поверхности на поступательное движение накладывается дрейф Стокса как в нижней, так и в верхней среде. Очевидно, что в этой ситуации относительная скорость индивидуальных жидких частиц, примыкающих к границе раздела с разных сторон изменится и не будет совпадать с U_0 . Однако в научной литературе не встречается ни качественное ни количественное описание этого явления.

Скорость относительного движения жидких частиц на границе раздела двух идеальных сред описывается соотношением $U_{rel} = U'_{DS} - U_{DS}$, подставляя (2.34), (2.35) с учетом (2.28) получим при $z = 0$:

$$U_{rel} = U_0 + \zeta^2 \Omega k - \zeta^2 \omega k = U_0 + \zeta^2 (\omega - kU_0) k - \zeta^2 \omega k = U_0 (1 - \zeta^2 k^2) \quad (2.40)$$

При докритических в смысле реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца скоростях тангенциального разрыва U_0 , скорость относительного движения оказывается меньше U_0 на величину, не зависящую ни от плотностей контактирующих жидкостей ни от поверхностного натяжения на границе сред, пропорциональную отношению квадрата амплитуды волнового движения вдоль границы раздела к квадрату длины волны.

В отсутствии тангенциального скачка скоростей скорость относительного движения индивидуальных частиц принимает нулевое значение, что физически корректно — частицы обеих жидкостей двигаются со скоростью дрейфа Стокса в направлении распространения волны.

Сформулировать общие принципы методики применения формулы пересчета (2.25) для выделения лагранжевых свойств из эйлерова решения в произвольной задаче и, в частности, для расчета скорости массопереноса и траекторий движения индивидуальных частиц жидкости можно следующим образом. Для определения скорости среднего волнового массопереноса необходимо перейти в систему координат, движущуюся со скоростью среднего эйлерова потока V_E . В этой системе координат правомерно применять формулу пересчета между переменными Эйлера и Лагранжа (2.25). Осреднение лагранжевой скорости жидкой частицы даст выражение для скорости дрейфа V_S в этой движущейся системе координат. Обратный переход в исходную систему координат необходимо осуществить, применив преобразования Галилея.

При расчетах траекторий движения индивидуальных жидких частиц необходимо выполнить еще одно действие. В этом случае формулу пересчета (2.25) корректно применять в системе координат, движущейся со скоростью среднего лагранжевого течения $V_L = V_E + V_S$, которая вычисляется, как сумма скорости среднего эйлерова течения и скорости среднего массопереноса, вычисленной на предыдущем этапе. В этой системе координат рассчитываются траектории движения и осуществляется переход в исходную систему координат при помощи преобразований Галилея.

Производя пересчеты в различных системах координат нужно аккуратно обращаться с частотами, возникающими при описании движения. Если движение описывается в переменных Эйлера, то при переходе в движущуюся систему координат частоты, возникающие при описании изменяются вследствие эффекта Доплера. При работе в переменных Лагранжа частоты, описывающие движение не изменяются при переходе между различными инерциальными системами координат.

2.5.2 Примеры расчета траекторий материальных частиц

Для демонстрации работы методики описанной в предыдущих пунктах рассмотрим траектории движения индивидуальных жидких частичек вблизи границы раздела жидкостей со свойствами воды и воздуха. Волновое возмущение свободной поверхности описывается выражением:

$$\xi = \zeta \cos(\omega t - kx)$$

А выражения для построения траекторий можно получить прямым интегрированием компонент скорости жидкой частицы в описании Лагранжа. Так уравнения траектории движения материальных частиц, прилегающих к границе раздела со стороны нижней жидкости, в параметрической форме описываются следующим образом:

$$X = x_0 + \zeta [\sin(kx_0) + \sin(\omega(1 - \zeta^2 k^2)t - kx_0)] + \zeta^2 k \omega t \quad (2.41)$$

$$Z = \zeta \cos(\omega(1 - \zeta^2 k^2)t - kx_0) \quad (2.42)$$

А для частиц, примыкающих к границе раздела со стороны верхней жидкости, уравнения записываются:

$$X' = x'_0 + U_0 t - \zeta [\sin(kx'_0) + \sin(\Omega(1 - \zeta^2 k^2)t - kx'_0)] + \zeta^2 k \Omega t \quad (2.43)$$

$$Z' = \zeta \cos(\Omega(1 - \zeta^2 k^2)t - kx'_0) \quad (2.44)$$

Здесь (X, Z) и (X', Z') описывают текущую координату жидкой частицы нижней и верхней жидкости соответственно, которая в начальный момент времени $t = t_0$ находилась в точке пространства с координатами $(x_0, z_0) \equiv (x_0, \xi(x_0, t_0))$ и $(x'_0, z'_0) \equiv (x'_0, \xi(x'_0, t_0))$ соответственно. При выполнении расчетов амплитудные множители рассматривались с точностью до лидирующих слагаемых по амплитуде волны, например:

$$\zeta \exp(\pm k z_0) = \zeta \exp(\pm k \xi(x_0, t_0)) = \zeta (1 \pm k \zeta \cos(\omega t_0 - k x_0) \pm \dots)$$

Отметим, что отношение скорости дрейфа материальной частички нижней жидкости, находящейся вблизи границы раздела $U_{DS} = \zeta^2 k \omega$ к фазовой скорости волнового движения $U_{ph} = \omega/k$ равно $\zeta^2 k^2$. Заметим также, что период волнового движения можно описать выражением $T = \lambda/U_{ph}$, и тогда

горизонтальное смещение, которое испытывает жидкая частичка за это время $S_T = U_{DS}T = \zeta^2 k^2 \lambda$. И оказываются справедливыми формулы:

$$\frac{U_{DS}}{U_{ph}} = \frac{S_T}{\lambda} = \zeta^2 k^2$$

Для смещения на расстояние, равное длине волны жидкой частичке нужно время $t_\lambda = \lambda/U_{DS} = \lambda/(U_{ph}\zeta^2 k^2) = T/(\zeta^2 k^2)$, что в долях периода волнового движения составляет:

$$\frac{t_\lambda}{T} = \frac{1}{\zeta^2 k^2} \quad (2.45)$$

Аналогично получаются выражения для жидкой частички, дрейфующей в верхней жидкости:

$$\frac{U'_{DS}}{U_{ph}} = \frac{S'_T}{\lambda} = \beta + \zeta^2 k^2 (1 - \beta); \quad \beta = \frac{U_0}{U_{ph}}$$

$$\frac{t'_\lambda}{T} = \frac{1}{\beta + \zeta^2 k^2 (1 - \beta)} \quad (2.46)$$

Рассмотрим траектории движения жидких частиц для выбранных жидкостей ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\rho' = 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $\gamma = 72 \text{ дин/см}$) при распространении по границе раздела синусоидальной волны с волновым числом

$$k = k_{cr} = \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{\gamma}} \simeq 3.69 \text{ см}^{-1}.$$

Это волновое число соответствует длине волны $\lambda_{cr} = 2\pi/k_{cr} \simeq 1.70 \text{ см}$, для которой критическая скорость развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца принимает наименьшее значение $U_{cr} \simeq 730 \text{ см/сек}$. Амплитуда волнового движения принималась равной $\zeta = 0.5 \text{ мм} \simeq 0.03\lambda$. При этом выполняется требование малости амплитуды (поскольку задача решалась в приближении волн малой амплитуды), а с другой стороны остаются заметными наблюдаемые эффекты. На рисунке 2.4 продемонстрировано движение границы раздела и жидких частиц обеих жидкостей, прилегающих к этой поверхности с разных сторон в отсутствии относительного движения сред ($U_0 = 0$). Ромбиком обозначена жидкая частица верхней среды, а кружочком — нижней. Незакрашенная фигура означает начальное положение жидкой частицы, а закрашенная соответствует ее конечному положению. Графики показывают последовательное

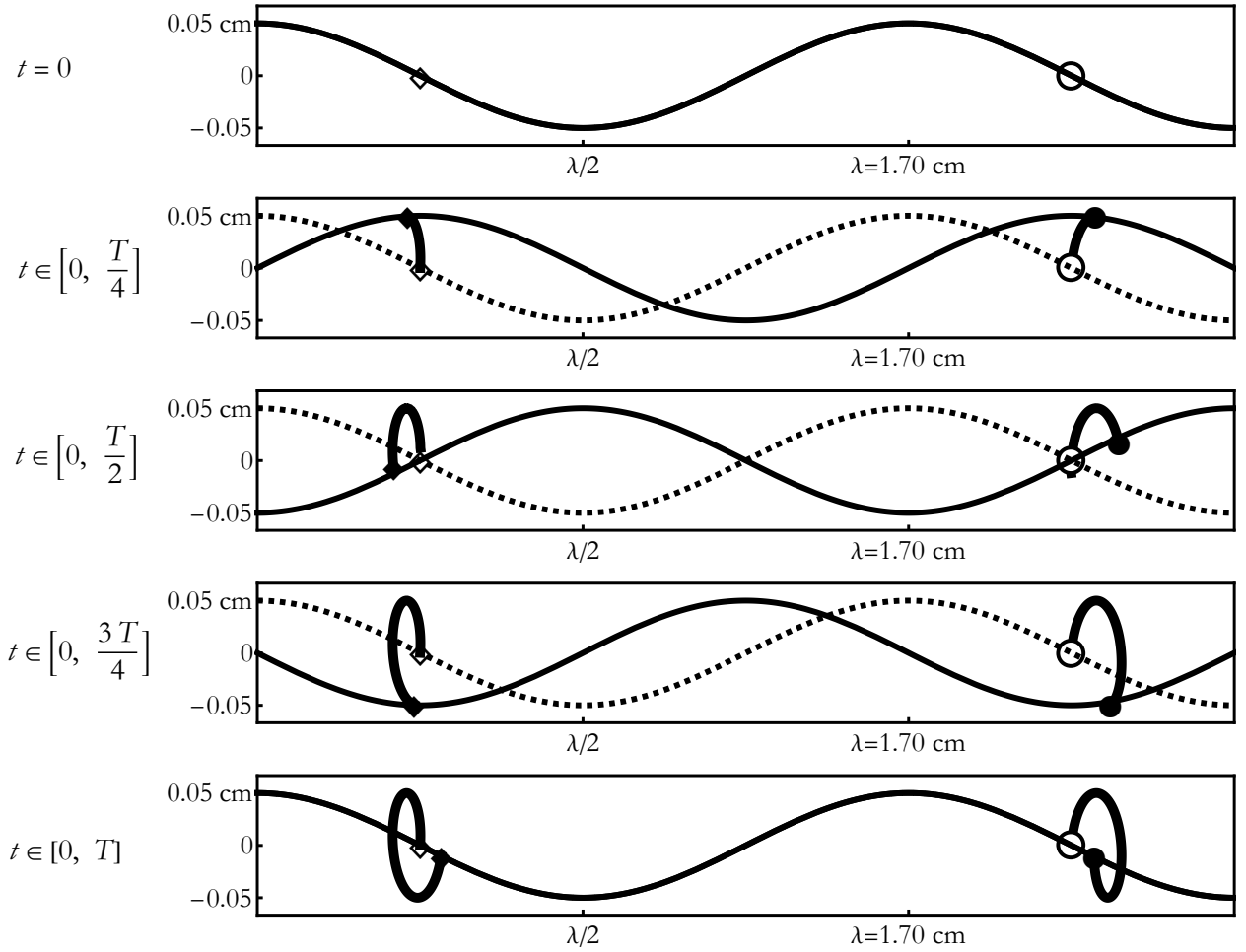


Рисунок 2.4 — Траектории жидких частиц верхней и нижней жидкости при отсутствии поступательного движения верхней среды ($U_0 = 0$)

смещение жидких частиц с временным интервалом $\Delta T = T/4$, соответствующим четверти периода волнового движения. Видно, что в отсутствии относительного движения сред, жидкие частицы совершают петлеобразные движения во встречных направлениях. А обе частицы с течением времени смещаются в направлении распространения волны с одинаковой средней дрейфовой скоростью (см. (2.34) и (2.35)).

На рисунке 2.5 демонстрируется траектория жидкой частицы нижней жидкости за 29 периодов волнового движения. Из (2.45) следует, что $t_\lambda/T = \zeta^{-2}k^{-2} \approx 29.4$ доля в периодах волнового движения, необходимая для дрейфа на расстояние соответствующее длине волны. Рисунок 2.5 останется неизменным при увеличении скорости U_0 до критического значения $U_{cr} \approx 730$ см/сек при измерении времени в долях волнового периода, а не в абсолютных значениях.

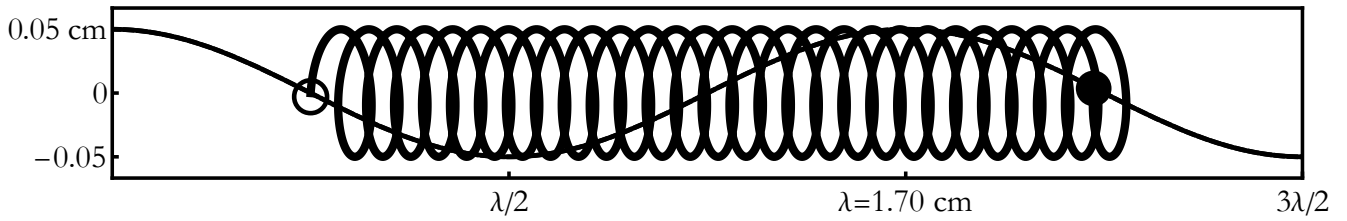


Рисунок 2.5 — Траектория движения частиц нижней жидкости за время, необходимое для дрейфа на расстояние порядка длины волны.

Рисунок 2.6 построен для значения скорости сдвигового движения верхней жидкости $U_0 = 10$ см/сек. Из рисунка 2.6 видно, что даже такая неболь-

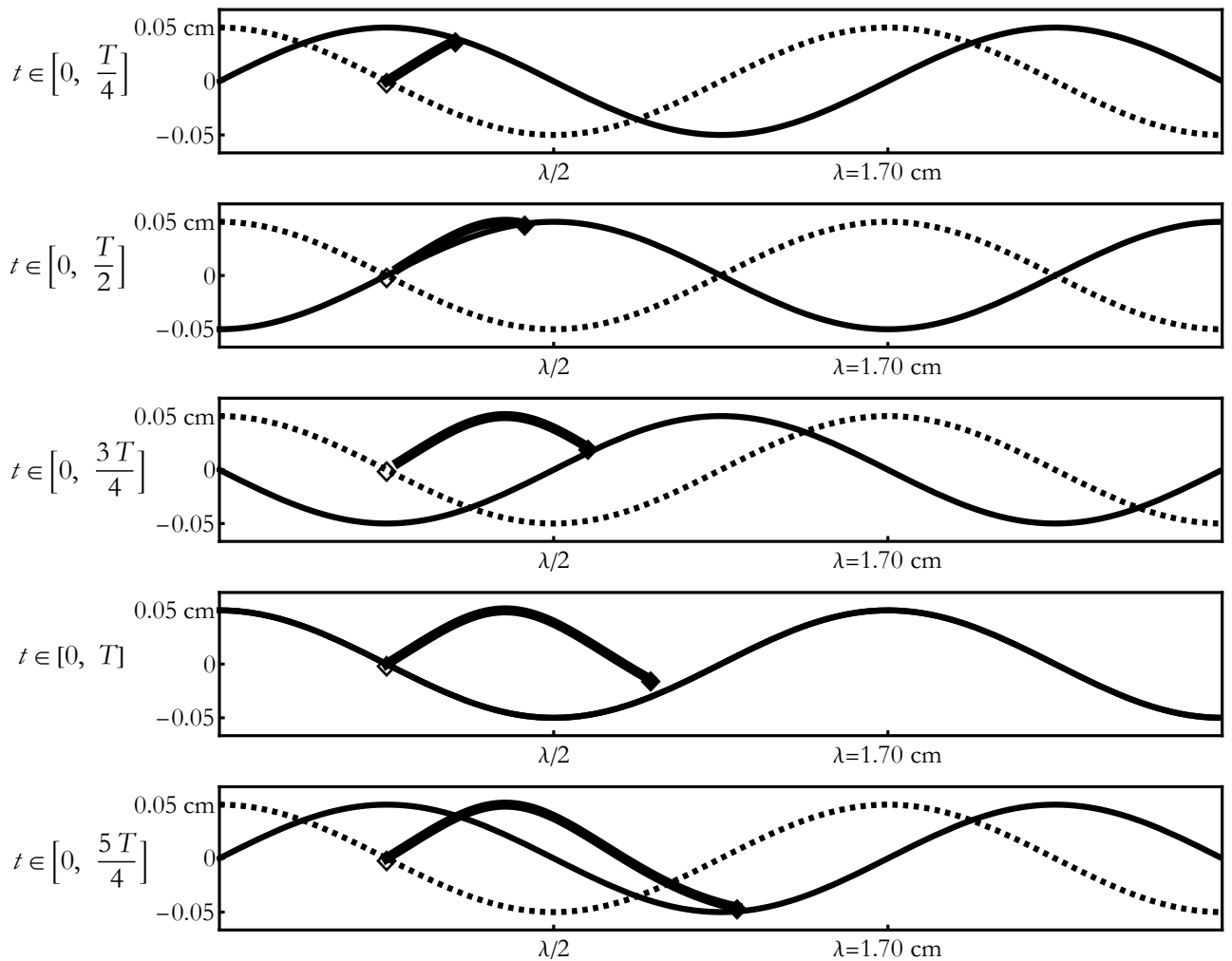


Рисунок 2.6 — Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 10$ см/сек в неподвижной лабораторной системе отсчета.

шая скорость сдвига вносит существенные изменения в форму траекторий движения частичек верхней среды: петлеобразное движение трансформируется в дугообразное с заметным смещением в направлении движения среды. И при выполнении условия $U_0 < U_{ph}$ жидкая частица за период волнового

движения смещается на расстояние меньшее, чем длина волны, а дрейфовая добавка сонаправлена с направлением поступательного движения верхней среды. На рисунке 2.7 представлено как выглядит траектория движения той же самой жидкой частицы, но в системе отсчета, движущейся совместно со всей массой верхней жидкости со скоростью $U_0 = 10$ см/сек. Траектория по-

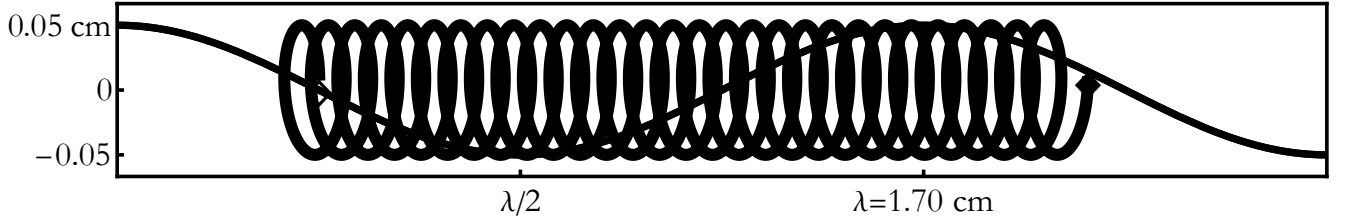


Рисунок 2.7 — Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 10$ см/сек $< U_{ph}$ в системе отсчета, связанной с верхней средой за время, необходимое для дрейфа на расстояние порядка длины волны в этой системе отсчета.

строена за 53 периода волнового движения, поскольку именно такое время необходимо для дрейфа в движущейся вместе с верхней жидкостью системе отсчета. В неподвижной системе отсчета с учетом горизонтального сдвига $U_0 t'$ за время t' из (2.46) следует, что доля, волновых периодов, необходимая для дрейфа жидкой частички на расстояние равное длине волны $t'_\lambda / T = 1 / (\beta + \zeta^2 k^2 (1 - \beta)) \approx 2.2$. Траектории, аналогичные представленным на рисунке 2.6 и рисунке 2.7 будут наблюдаться у жидких частичек верхней жидкости при условии, когда скорость относительного сдвига не достигает фазовой скорости волнового движения $0 < U_0 < U_{ph}$. Дальнейший рост U_0 приводит к уменьшению модуля дрейфовой добавки и при достижении фазовой скорости $U_0 = U_{ph}$ добавка принимает нулевое значение, а период круговых движений жидкой частички стремится к бесконечному значению. Что соответствует равномерному и прямолинейному движению жидких частиц с фазовой скоростью волны $U_0 = U_{ph} \approx 23$ см/сек (рисунок 2.8). В системе отсчета движущейся в том же направлении с фазовой скоростью жидкие частицы верхней жидкости оказываются покоящимися.

На рисунке 2.9 проиллюстрирована траектория движения жидкой частички верхней среды при скорости сдвига $U_0 = 50$ см/сек. Частица движется по сильно вытянутой дугообразной траектории, и за период волнового движения перемещается на расстояние, превышающее длину волны. Дрейфовая добавка при этом направлена в сторону, противоположную поступательному

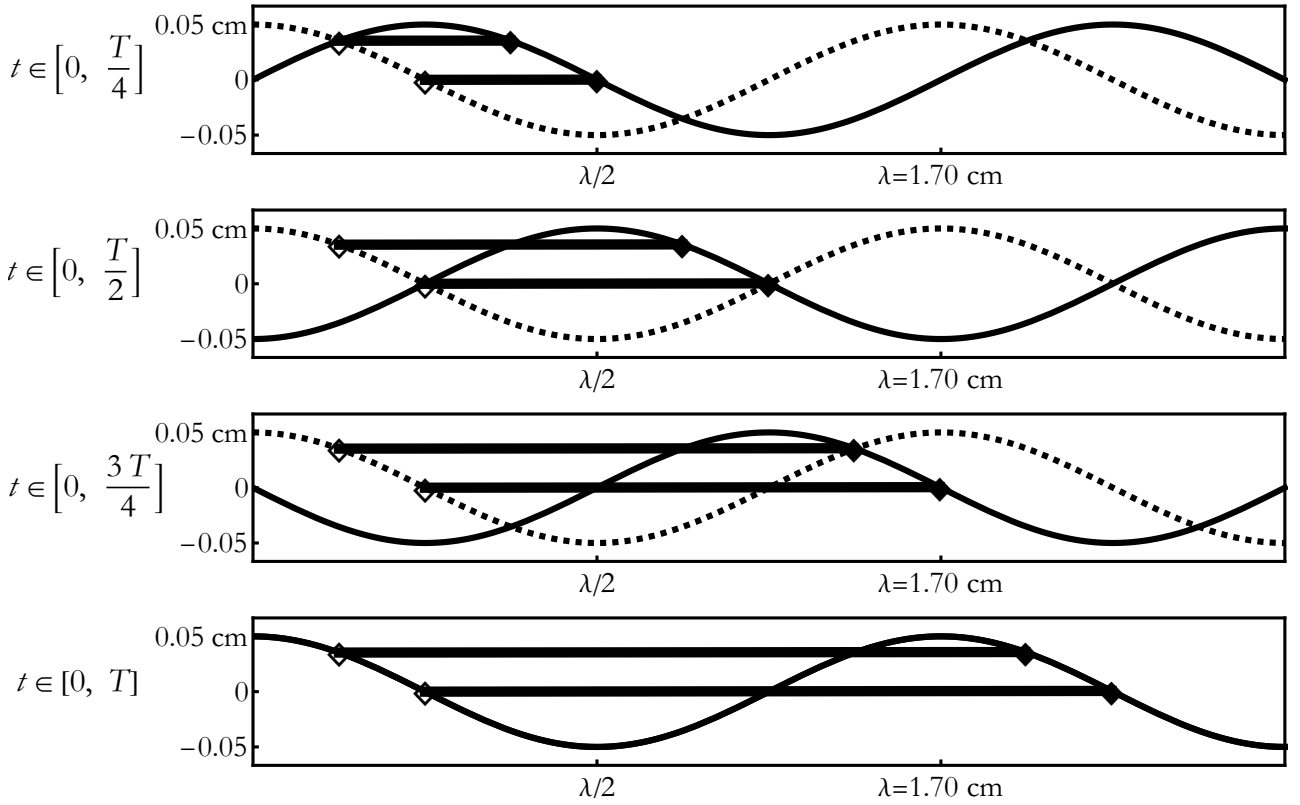


Рисунок 2.8 — Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 23 \text{ см/сек} \simeq U_{ph}$ в неподвижной лабораторной системе отсчета.

движению верхней среды и увеличивается с увеличением U_0 . На рисунке 2.10 показана траектория движения жидкой частички из системы отсчета, движущейся вправо со скоростью относительного сдвига $U_0 = 50 \text{ см/сек}$. При таком значении скорости U_0 с учетом горизонтального сдвига $U_0 t'$ доля периода волнового движения необходимая для дрейфа на расстояние равное длине волны $t'_\lambda/T = 1/(\beta + \zeta^2 k^2 (1 - \beta)) \approx 0.5$ (именно за это время построена траектория движения на рисунке 2.9). В движущейся системе отсчета для дрейфа на расстояние длины волны необходимо около 27 периодов волнового движения. Подобная картина будет наблюдаться для всех значений скорости U_0 при выполнении неравенства $U_{ph} < U_0 < U_{cr}$.

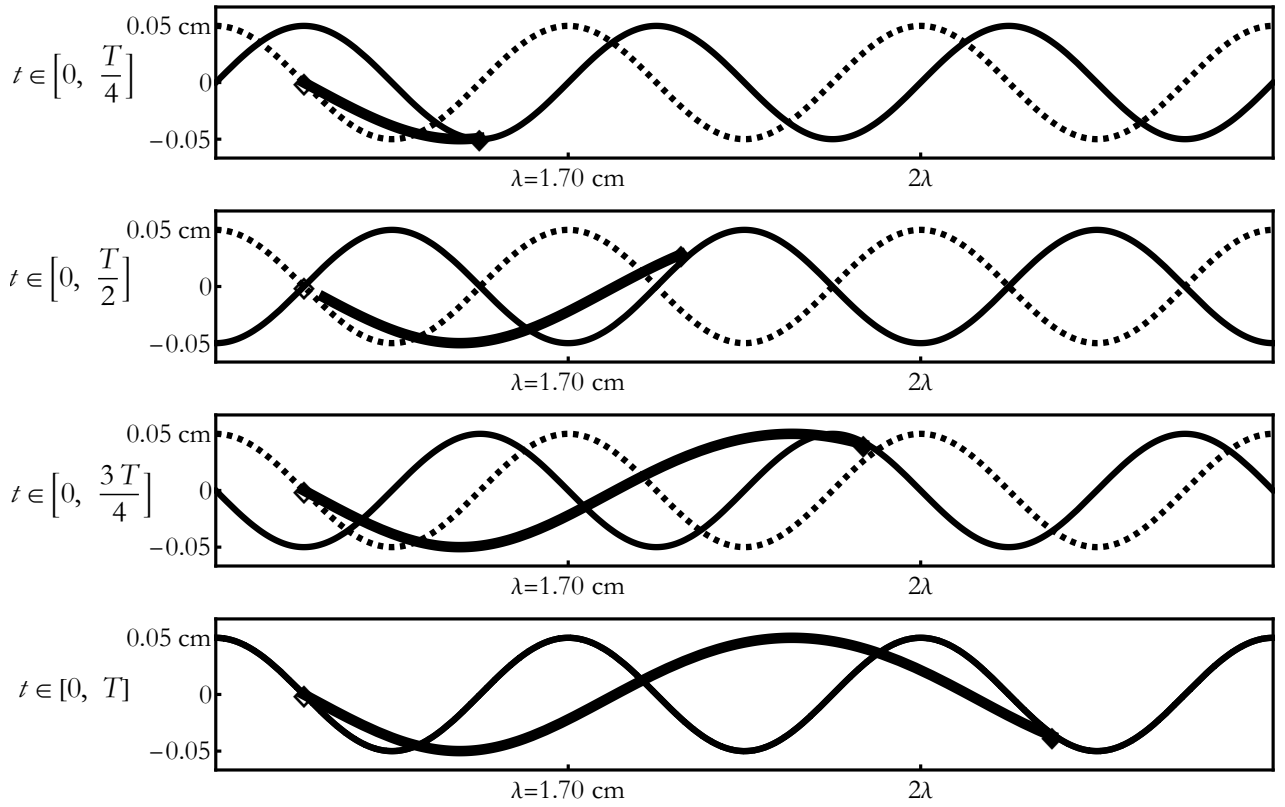


Рисунок 2.9 — Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 50 \text{ см/сек} > U_{ph}$ в неподвижной лабораторной системе отсчета.

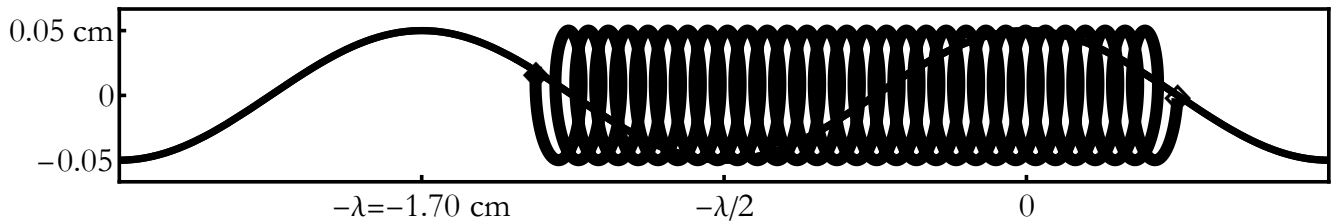


Рисунок 2.10 — Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 50 \text{ см/сек} > U_{ph}$ в системе отсчета, связанной с верхней средой.

2.5.3 Область закритических значений в смысле реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

Если скорость поступательного движения верхней среды превышает критическое значение в смысле реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца ($U_0 > U_{cr}$), то поверхность раздела дестабилизируется. При этом частота волнового движения принимает комплексные значения. Действительная часть круговой частоты при этом описывается выражением:

$$\sigma = \text{Re}(\omega) = \frac{k\rho'U_0}{\rho + \rho'}$$

а мнимая часть записывается:

$$r = \text{Im}(\omega) = \frac{\sqrt{k^2 \rho \rho' U_0^2 - kg(\rho^2 - \rho'^2) - k^3 \gamma (\rho + \rho')}}{\rho + \rho'}.$$

Мнимая составляющая принимает положительные значения для одного из корней дисперсионного уравнения и отрицательные для другого. Значение $r > 0$ характеризует инкремент нарастания неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, связанной с волновым возмущением границы раздела с волновым числом k . Корень с таким значением параметра r представляет интерес для рассмотрения в настоящей работе.

На начальном этапе развития неустойчивости поле скоростей — модифицируется. В нижней жидкости скорости выглядят следующим образом:

$$u_1 = \frac{1}{2} \zeta \sigma \exp(i(\sigma t - kx)) \exp(kz) \exp(rt) + C.C.$$

$$v_1 = -\frac{i}{2} \zeta \sigma \exp(i(\sigma t - kx)) \exp(kz) \exp(rt) + C.C.$$

Поле скоростей в верхней жидкости опишется соотношениями:

$$u'_1 = U_0 - \frac{1}{2} \zeta (\sigma - kU_0) \exp(i(\sigma t - kx)) \exp(-kz) \exp(rt) + C.C.$$

$$v'_1 = \frac{i}{2} \zeta (\sigma - kU_0) \exp(i(\sigma t - kx)) \exp(-kz) \exp(rt) + C.C.$$

Производя преобразования, аналогичные описанным в предыдущих пунктах получаем скорость дрейфового движения в нижней и верхней жидкостях при $U_0 > U_{cr}$:

$$U_{DS} = \zeta^2 \sigma k \exp(2rt) \exp(2kz)$$

$$U'_{DS} = U_0 + \zeta^2 (\sigma - kU_0) k \exp(2rt) \exp(-2kz)$$

Формула для расчета скорости относительного движения контактирующих вдоль границы раздела частиц жидкостей (2.40) изменится следующим образом:

$$U_{rel} = U_0 (1 - \zeta^2 k^2) \exp(2rt) \quad (2.47)$$

На начальных этапах развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца дрейфовые добавки направлены в противоположные стороны и экспоненциально нарастают со временем, что приводит к уменьшению скорости относительного движения индивидуальных частиц жидкостей на границе раздела и, как следствие, к стабилизации поверхности.

2.6 Заключение

Разработана аналитическая асимптотическая для расчета лагранжевой скорости и траекторий движения материальных частиц, участвующих в волновом движении, связанным с возмущением горизонтальной границы раздела двух несмешивающихся идеальных жидкостей. Модель эффективно описывает влияние относительного горизонтального перемещения сред на динамику индивидуального и коллективного движения жидких частиц.

Обнаружено новое свойство неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Даже в модели идеальной жидкости помимо экспоненциального нарастания амплитуды изначально малых возмущений границы раздела существует стабилизирующий механизм. Он проявляется в экспоненциальном росте дрейфовых течений в обеих средах, направленных таким образом, чтобы уменьшить тангенциальный скачок скоростей, инициировавший неустойчивость.

Глава 3. Применение метода расчета траекторий движения индивидуальных жидких частичек

3.1 Введение

В настоящей главе будет рассмотрено применение методики, представленной в предыдущей главе по отношению к более сложным случаям. В частности будут определены скорости дрейфа Стокса и траектории движения индивидуальных жидких частиц в случае, когда волновое возмущение свободной поверхности представляет из себя волновой пакет Стокса, а также будет рассмотрено влияние движущейся верхней среды и рассчитан дрейф и траектории движения жидких частиц в верхней движущейся среде; будет рассмотрено влияние поверхностного электрического заряда на переносные свойства волнового движения; и, наконец, будет рассмотрено совокупное влияние всех перечисленных факторов: будет произведен расчет скорости дрейфа Стокса и траекторий движения индивидуальных жидких частиц в двух контактирующих жидких средах, участвующих в относительном движении при условии, что на границе раздела распределен электрический заряд.

3.2 Волновой пакет Стокса

3.2.1 Введение

В реальности крайне редко встречается распространение отдельной волны определенной длины, чаще формируются условия для возникновения цуга нескольких волн. Наиболее простой с точки зрения аналитического описания и экспериментальной реализации является волновой пакет Стокса. В настоящей главе обсуждается развитие методики, представленной ранее на случай распространения простейшего волнового пакета Стокса, состоящего из двух капиллярно – гравитационных волн одинаковой амплитуды ζ с волновыми чис-

лами $k_{\pm} = k \pm \Delta k$, отличающимися друг от друга на малую величину $2\Delta k \ll k$. Значение k характеризует волновое число несущей волны, а Δk — волновое число огибающей волнового пакета. Будет рассмотрено влияние различных дестабилизирующих факторов на скорость массопереноса и на характер движения индивидуальных жидких частиц, таких как поверхностный электрический заряд и тангенциальный разрыв скоростей на границе раздела двух жидких сред.

3.2.2 Математическая формулировка задачи

Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия поля сил тяжести \mathbf{g} расположен слой идеальной несжимаемой жидкости, занимающий область пространства $-\infty < z < \xi$. А по его свободной поверхности $z = \xi$ распространяется простейший волновой пакет Стокса, состоящий из двух капиллярно-гравитационных волн с одинаковой амплитудой ζ и волновыми числами k_{\pm} . Направление распространения совпадает с положительным направлением оси Ox . В простейшем случае можно считать, что движение жидкости не зависит от горизонтальной координаты y . Будем решать задачу в приближении волн малой амплитуды. Тогда уравнения движения представляют из себя известные уравнения гидродинамики [167]:

$$\begin{aligned} z < \xi : \quad \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}; \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

с граничными условиями на верхней границе:

$$\begin{aligned} z = \xi : \quad \partial_t \xi - v &= -u \partial_x \xi; \\ p &= -\gamma \partial_{xx} \xi \left(1 + (\partial_x \xi)^2\right)^{-3/2}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

и с условием затухания движения на бесконечности:

$$z \rightarrow -\infty : \quad u = 0; \quad v = 0. \quad (3.3)$$

Здесь $\mathbf{U}(x, z, t) = \nabla \varphi = u(x, z, t) \mathbf{e}_x + v(x, z, t) \mathbf{e}_z$ — поле скоростей в обозначениях Эйлера, φ — гидродинамический потенциал, t — время, p — давление, а γ — поверхностное натяжение жидкости. Для определения скорости

дрейфа воспользуемся описанной выше процедурой решения: используем метод разложения по малому параметру, снос граничных условий на равновесную поверхность $z = 0$ и разбиение задачи на порядки малости до второго порядка малости включительно. Представим неизвестные функции в виде разложения в ряд по малому параметру, пропорциональному амплитуде волнового движения $\varepsilon = \zeta k$:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3)$$

Произведем линеаризацию граничных условий (3.2) по методике, описанной в предыдущей главе. Распишем математическую формулировку задачи в первом и во втором по амплитуде волны порядке малости. Задача первого порядка малости записывается в виде:

$$z < 0 : \quad \Delta \varphi_1 = 0; \quad (3.4)$$

$$z = 0 : \quad \partial_t \xi_1 - \partial_z \varphi_1 = 0; \quad (3.5)$$

$$\rho g \xi_1 - \rho \partial_t \varphi_1 + \gamma \partial_{xx} \xi_1 = 0; \quad (3.6)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_1 \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Задача второго порядка малости запишется следующим образом:

$$z < 0 : \quad \Delta \varphi_2 = 0; \quad (3.8)$$

$$z = 0 : \quad \partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 = \xi_1 \partial_{zz} \varphi_1 - \partial_x \varphi_1 \partial_x \xi_1; \quad (3.9)$$

$$\rho g \xi_2 - \rho \partial_t \varphi_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 = \rho \xi_1 \partial_{zt} \varphi_1 + \frac{\rho}{2} (\partial_x \varphi_1)^2 + \frac{\rho}{2} (\partial_z \varphi_1)^2; \quad (3.10)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

3.2.3 Решение задачи

Решение задачи (3.4) — (3.7) в виде совокупности бегущих волн легко находится стандартными методами математической физики и имеет вид:

$$\xi_1 = \zeta \cos(\omega_+ t - k_+ x) + \zeta \cos(\omega_- t - k_- x); \quad (3.12)$$

$$\varphi_1 = -\zeta \frac{\omega_+}{k_+} \exp(k_+ z) \sin(\omega_+ t - k_+ x) - \zeta \frac{\omega_-}{k_-} \exp(k_- z) \sin(\omega_- t - k_- x); \quad (3.13)$$

Здесь ω_{\pm} — частоты волнового движения, волн, составляющих пакет. Они связаны с волновыми числами соответствующих волн несложным образом, определяемым из дисперсионного уравнения:

$$\omega_{\pm} = \omega \pm \Delta\omega = \sqrt{gk_{\pm} (1 + k_{\pm}^2 \alpha^2)} \quad (3.14)$$

Здесь стоит отметить, что в дисперсионное уравнение (3.14) неявным образом (в составе волновых чисел k_{\pm}) входит параметр Δk , считающийся малым, а символ $\alpha = \sqrt{\gamma/\rho g}$ обозначает капиллярную постоянную жидкости.

Выражение для отклонения границы раздела ξ_1 от равновесного положения (3.12) при помощи тригонометрических преобразований легко сводится к виду [178]:

$$\xi_1 = 2\zeta \cos(\omega t - kx) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) \quad (3.15)$$

Из соотношения (3.15) естественным образом выделяется два временных масштаба $T = 2\pi/\omega$ — период несущей волнового пакета, характеризующий быстрые изменения во времени и $\tau = 2\pi/\Delta\omega$ — период огибающей, характеризующий медленно меняющиеся процессы. Задача второго порядка малости (3.8) — (3.11) представляет из себя однородное уравнение с неоднородными граничными условиями на верхней границе. Явный вид неоднородностей получим, подставив найденное решение задачи первого порядка малости — в правые части граничных условий (3.5) — (3.6).

Как и в предыдущих разобранных случаях в неоднородностях есть составляющие, быстро меняющиеся со временем. Эти слагаемые отвечают за циклические движения жидких частичек и не представляют интереса для нашего рассмотрения, поскольку в круговых движениях жидких частиц лидирующими являются слагаемые первого порядка малости по амплитуде волнового движения. В предыдущих случаях неоднородность представляла из себя только такие слагаемые, и поэтому на этом этапе заканчивалось решение задачи второго порядка малости и дрейфовая скорость определялась только интегральными слагаемыми в формуле (2.25). Однако в случае распространения волнового пакета расчет первого слагаемого в правой части не столь тривиален. Дело в том, что во втором порядке малости возникают дополнительные добавки к Эйлеровой скорости, которые медленно меняются со временем (по сравнению с периодом волнового движения) и отвечают за медленно изменяющееся дрейфовое течение. Ограничимся определением только таких составляющих скорости

второго порядка малости в переменных Эйлера. В явном виде правые части граничных условий выглядят следующим образом:

$$\xi_1 \partial_{zz} \varphi_1 - \partial_x \varphi_1 \partial_x \xi_1 = -2\zeta^2 \Delta k \omega \sin(2t\Delta\omega - 2x\Delta k) + \Pi(t); \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \rho \xi_1 \partial_{zt} \varphi_1 + \frac{\rho}{2} (\partial_x \varphi_1)^2 + \frac{\rho}{2} (\partial_z \varphi_1)^2 = \\ = -2\zeta^2 \rho \Delta \omega^2 \cos(2t\Delta\omega - 2x\Delta k) + \Pi(t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь для краткости записи принято, что слагаемые $\Pi(t)$ представляют из себя совокупность функций синуса и косинуса, в аргументе которых содержится произведение ωt и которые, соответственно, быстро меняются со временем, отвечая за циклические движения жидких частичек.

Из вида неоднородностей (3.16) — (3.17) следует, что решение задачи (3.8) — (3.11) следует искать в виде бегущей волны с аргументом $\theta = 2t\Delta\omega - 2x\Delta k$. А зависимость от вертикальной координаты z ищется такой, чтобы удовлетворять уравнению Лапласа и условию прекращения движения на дне. Такое решение несложно найти. Приведем только горизонтальную составляющую скорости, поскольку для вычисления горизонтальной скорости дрейфа по формуле другие переменные нам не понадобятся:

$$u_2 = 2\zeta^2 \omega \Delta k \cos(2tV_g \Delta k - 2x\Delta k) \exp(2z\Delta k)$$

Здесь надо понимать, что приведена только интересующая нас часть решения задачи второго порядка малости, в нашем рассмотрении нет необходимости решать задачу второго порядка малости целиком. Также стоит пояснить смысл произведенной замены $\Delta\omega \rightarrow V_g \Delta k$. В дисперсионное уравнение входит небольшая добавка к волновому числу Δk , считая ее малой и разлагая частоту волнового движения в ряд Маклорена, в линейном приближении получим:

$$\omega_{\pm} = \omega \pm \Delta\omega = \omega \pm \partial_k \omega \Delta k.$$

Причем частная производная $\partial_k \omega = V_g$ играет роль групповой скорости волнового пакета. Для нашего рассмотрения неинтересно производить расчет вертикальной составляющей в связи с отсутствием движения всей жидкости как целого в вертикальных направлениях.

Выпишем в явном виде компоненты лагранжевой скорости индивидуальной жидкой частички с точностью до слагаемых первого порядка малости.

В линейном приближении скорость в описании Эйлера и в описании Лагранжа формально совпадают [167], но при этом координаты, входящие в уравнения, меняют свой смысл на лагранжевы координаты (в нашем рассмотрении это начальные координаты жидкой частицы):

$$u_{L1} = \zeta\omega_- \exp(k_- z_0) \cos(\omega_- t - k_- x_0) + \zeta\omega_+ \exp(k_+ z_0) \cos(\omega_+ t - k_+ x_0) \quad (3.18)$$

$$v_{L1} = -\zeta\omega_- \exp(k_- z_0) \sin(\omega_- t - k_- x_0) - \zeta\omega_+ \exp(k_+ z_0) \sin(\omega_+ t - k_+ x_0) \quad (3.19)$$

Далее, следуя методу определения лагранжевой скорости, необходимо произвести вычисление интегральных слагаемых в формуле (2.25). Заинтересованный читатель легко произведет эти вычисления при помощи любого математического пакета программ. Чтобы избежать загромождение изложения, здесь приведено уже готовое выражение для горизонтальной составляющей лагранжевой скорости:

$$u_L = D + \Pi,$$

где Π — быстроменяющиеся (по сравнению с периодом огибающей волнового пакета) слагаемые, отвечающие за колебательные движения жидкой частички около некоторого среднего положения, а символом D обозначены слагаемые, соответствующие медленному дрейфовому движению этого среднего положения. В явном виде дрейфовая скорость выглядит следующим образом:

$$D = \zeta^2 [(k\omega + \Delta k(kV_g + \omega)) \exp(2k_+ z) + (k\omega - \Delta k(kV_g + \omega)) \exp(2k_- z) + 2k\omega \cos(2tV_g \Delta k - 2x\Delta k) \exp(2kz) + 2\omega \Delta k \cos(2tV_g \Delta k - 2x\Delta k) \exp(2\Delta k z)] \quad (3.20)$$

Важно отметить, что расчет дрейфовой скорости произведен в линейном приближении по отклонению волновых чисел волн в пакете друг от друга Δk . Слагаемые, пропорциональные Δk в более высоких степенях отбрасывались в силу малости и громоздкости. Такое приближение должно удовлетворить большинство расчетных задач, однако при помощи представленной методики можно воспроизвести дрейфовую скорость целиком. Полная дрейфовая скорость не приведена здесь в силу неинформативности отброшенных слагаемых.

Сравним скорость дрейфового движения (3.20) со скоростью классического дрейфа Стокса (2.1). Первое отличие, бросающееся в глаза — зависимость скорости дрейфа от времени, которое должно наблюдаться на небольших интервалах времени в эксперименте (время наблюдения t_{obs} должно быть сравнимо с периодом несущей волнового пакета T). Если же время наблюдения велико (по сравнению с периодом огибающей волнового пакета $t_{obs} \gg T$), то имеет смысл говорить об усредненной скорости дрейфового движения за период огибающей волнового пакета $\langle D \rangle$:

$$\langle D \rangle = \zeta^2 [(k\omega + \Delta k (kV_g + \omega)) \exp(2k_+z) + (k\omega - \Delta k (kV_g + \omega)) \exp(2k_-z)] \quad (3.21)$$

На рисунке 3.1 изображены скорости классического дрейфа Стокса (2.1), а также скорости дрейфа, определяемые соотношениями (3.20) и (3.21) в безразмерных переменных $\rho = g = \gamma = 1$ и параметрами волнового движения $k = k_{cr}$, $\Delta k = 0.01k_{cr}$, $\zeta = 0.05\lambda_{cr}$. Периодическое изменение скорости дрейфа

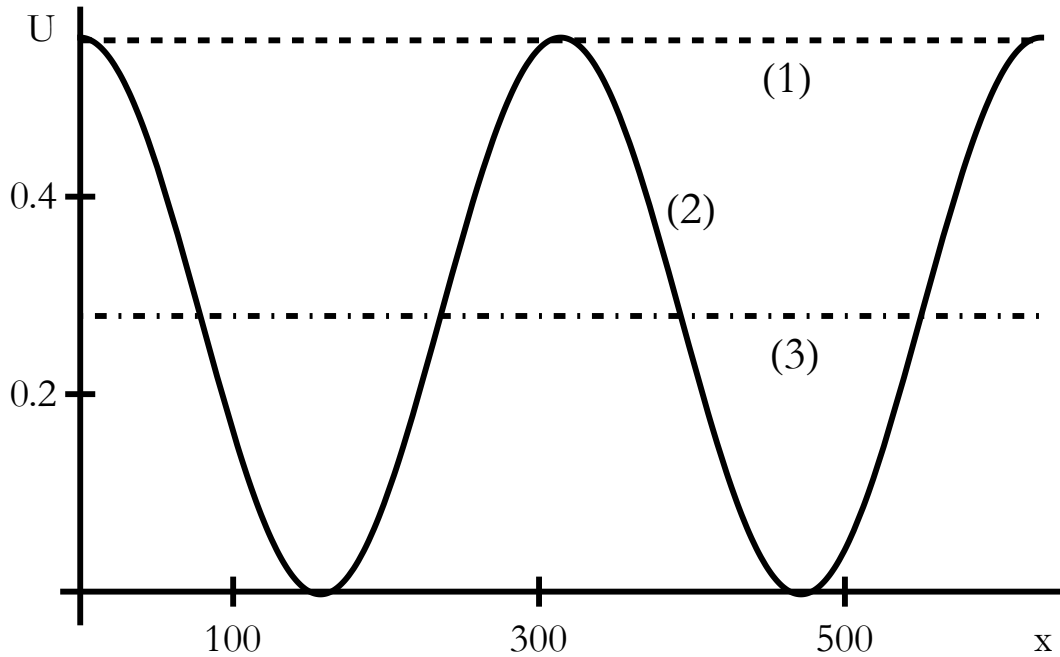


Рисунок 3.1 — Скорость классического дрейфа Стокса (кривая 1), дрейфа Стокса, инициированного волновым пакетом Стокса (кривая 2) и среднего значения дрейфа Стокса, инициированного волновым пакетом Стокса (кривая 3)

связано с тем, что скорость дрейфа пропорциональна амплитуде волнового движения, а в случае, когда возмущение свободной поверхности представляет из себя волновой пакет Стокса амплитуда модулирована. Именно эта модуляция и

вызывает временную зависимость скорости дрейфа. Расчеты показывают, что усредненная за период огибающей волнового пакета скорость дрейфа принимает значения примерно в два раза меньшие, чем скорость классического дрейфа Стокса. Расчеты проводились для волнового возмущения, с полной амплитудной модуляцией (глубина (коэффициент) модуляции для такого возмущения принимает значение 1). Немодулированной волне соответствует значение глубины модуляции 0. При промежуточных значениях коэффициента модуляции усредненное за период огибающей значение дрейфовых добавок будут принимать промежуточные значения между классической скоростью дрейфа и вдвое меньшей. Такая же тенденция должна сохраняться для произвольного цуга волн. Таким образом в эксперименте дрейф Стокса нужно ожидать в разы меньшим, чем это предсказывает классическая теория Стокса.

Произведем поправку лагранжевой скорости жидкой частички (3.18) — (3.19) на скорость дрейфового движения в соответствии с разработанной методикой. С учетом этой поправки усовершенствованный вид лагранжевых компонент скорости жидкой частицы с точностью до лидирующих слагаемых запишется следующим образом:

$$u_L(x_0, z_0, t) = \zeta\omega_- \exp(k_- z_0) \cos((\omega_- - k_- D)t - k_- x_0) + \zeta\omega_+ \exp(k_+ z_0) \cos((\omega_+ - k_+ D)t - k_+ x_0) + D \quad (3.22)$$

$$v_L(x_0, z_0, t) = -\zeta\omega_- \exp(k_- z_0) \sin((\omega_- - k_- D)t - k_- x_0) - \zeta\omega_+ \exp(k_+ z_0) \sin((\omega_+ - k_+ D)t - k_+ x_0) \quad (3.23)$$

Прямое интегрирование выражений (3.22) — (3.23) позволяет получить выражения для параметрической формы записи траекторий движения индивидуальных жидких частиц.

$$X = x_0 + \int_0^t u_L(x_0, z_0, \tau) d\tau \quad (3.24)$$

$$Z = z_0 + \int_0^t v_L(x_0, z_0, \tau) d\tau \quad (3.25)$$

В явном аналитическом виде не удастся получить простые выражения, удобные для анализа. При необходимости выражения для траекторий движения индивидуальных жидких частиц можно получить, высчитывая интегралы (3.24) — (3.25) численно.

Однако, несмотря на отсутствие выражений для траекторий в явном виде можно сделать некоторые выводы о характере движения. Можно заметить, что частота кругового движения индивидуальной жидкой частички окажется меньше, чем частота волновой моды, инициировавшей это движение. Это связано с необходимостью согласования движения индивидуальных жидких частиц и волнового движения свободной поверхности.

3.2.4 Результаты

В случае инициации дрейфового движения волновым пакетом Стокса результаты наблюдения за скоростью дрейфа существенно будут зависеть от времени наблюдения. На малых временах наблюдения (сравнимых с периодом несущей волнового пакета и много меньших периода огибающей) будет наблюдаться зависимость скорости дрейфа (3.20) от времени и ее периодический характер. На временах, заметно превышающих период огибающей волнового пакета, имеет смысл говорить об усредненной скорости дрейфового движения (3.21). Ее величина для простейшего волнового пакета Стокса с полной амплитудной модуляцией оказывается примерно вдвое меньшей, чем скорость классического дрейфа Стокса. При произвольных значениях коэффициента модуляции величина дрейфовой добавки будет принимать значение от классической скорости дрейфа Стокса до вдвое меньшего значения. По-видимому, подобная тенденция сохранится и для произвольного волнового пакета: в эксперименте стоит ожидать скорость дрейфа в разы меньшую, чем это предсказывает классическая теория.

3.3 Влияние тангенциального разрыва скоростей на скорости индивидуальных жидких частиц и скорости дрейфа Стокса, вызванного распространением волнового пакета Стокса по границе раздела жидких сред

В настоящем разделе рассмотрено совокупное действие факторов, отдельное действие которых обсуждалось в предыдущей главе и в предыдущем разделе. Рассчитывается дрейф и траектории движения индивидуальных жидких частиц в двух контактирующих жидких средах в зависимости от скорости относительного движения этих сред также, как и в главе 2. При этом граница раздела считается возмущенной простейшим волновым пакетом Стокса, как в предыдущем разделе 3.2.

Математическая формулировка задачи формально совпадает с выражениями (2.3) — (2.6). Используя разложение по малому параметру и производя снос граничных условий с возмущенной поверхности на уровень равновесной границы раздела $z = 0$ получим задачи первого и второго порядка малости по амплитуде волнового движения. Их математическая запись окажется аналогичной (2.8) — (2.11) и (2.12) — (2.14) соответственно. Решение задачи первого порядка малости в виде совокупности двух бегущих волн находится стандартными методами математической физики и выглядит следующим образом:

$$\xi_1 = \zeta \cos(\omega_+ t - k_+ x) + \zeta \cos(\omega_- t - k_- x) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -\zeta \exp(k_+ z) \frac{\omega_+}{k_+} \sin(\omega_+ t - k_+ x) - \\ & -\zeta \exp(k_- z) \frac{\omega_-}{k_-} \sin(\omega_- t - k_- x) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_1 = & -\zeta \exp(-k_+ z) \frac{k_+ U_0 - \omega_+}{k_+} \sin(\omega_+ t - k_+ x) - \\ & -\zeta \exp(k_- z) \frac{k_- U_0 - \omega_-}{k_-} \sin(\omega_- t - k_- x) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Здесь в качестве $\omega_{\pm} = \omega \pm \Delta\omega = \omega \pm \partial_k \omega \Delta k$ как и в предыдущем пункте приняты круговые частоты волновых движений, составляющих пакет Стокса. Однако дисперсионное уравнение, обеспечивающее связь между частотой и волновым числом совпадает с дисперсионным уравнением (2.2).

В этой задаче аналогично задаче из предыдущего пункта 3.2 возникают естественные временные масштабы: быстрый $T = 2\pi/\omega$ и медленный

$\tau = 2\pi/\Delta\omega$. Подставляя решение (3.26) — (3.28) в правые части граничных условий (2.13), получим граничные условия задачи второго порядка малости по амплитуде волны в явном виде. При этом слагаемые, быстроменяющиеся со временем и не оказывающие влияния на скорость дрейфового движения обозначим $\Pi(t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 &= -2\zeta^2 \Delta k \omega \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + \zeta^2 \Pi(t) \\ \partial_t \xi_2 + U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi_2' &= \\ &= 2\zeta^2 (U_0^2 \Delta k^2 \rho' - 2U_0 \Delta k \Delta \omega \rho' + \Delta \omega^2 \rho' - \Delta \omega^2 \rho) \times \\ &\quad \times \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + \zeta^2 \Pi(t) \\ g \xi_2 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi_2' + \rho' U_0 \partial_x \varphi_2' + \gamma \partial_{xx} \xi_2 &= \\ &= 2\zeta^2 (k U_0 \Delta k - \Delta k \omega) \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + \zeta^2 \Pi(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Как и в предыдущих пунктах для рассмотрения настоящей задачи нет необходимости решать задачу второго порядка малости полностью. Поскольку быстроменяющиеся со временем слагаемые не вносят вклада в дрейфовые движения, а лидирующими слагаемыми в круговом движении являются слагаемые первого порядка малости, достаточно решить «усеченную» задачу второго порядка малости с отброшенными слагаемыми вида $\Pi(t)$. Соответствующее решение для компонент поля скоростей в нижней u_d и в верхней u_d' жидкостях имеют вид:

$$u_d = -2\zeta^2 \Delta k \omega e^{2z\Delta k} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) \quad (3.30)$$

$$u_d' = 2\zeta^2 \Delta k (k U_0 - \omega) e^{-2z\Delta k} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) \quad (3.31)$$

Соотношения (3.27) — (3.28), (3.30) — (3.31) представляют части эйлеровой компоненты скорости течения, через которые вычисляется лагранжевая скорость жидкой частицы с точностью до лидирующих слагаемых (первого порядка малости для кругового и второго порядка малости для дрейфового движения). Подставляя (3.27) — (3.28), (3.30) — (3.31) в (2.25) и выделяя медленно меняющиеся слагаемые аналогично тому, как это делалось в разделе 3.2 получим выражения для скорости дрейфа в нижней U_{drift} и в верхней среде U'_{drift} :

$$\begin{aligned} U_{drift} &= \zeta^2 e^{2k+z} (k\omega + \Delta k \omega + k\Delta\omega) + \zeta^2 e^{2k-z} (k\omega - \Delta k \omega - k\Delta\omega) + \\ &\quad + 2\zeta^2 k \omega e^{2kz} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + u_d \\ U'_{drift} &= \zeta^2 e^{-2k+z} (k\Omega + \Delta k \Omega + k\Delta\omega) + \zeta^2 e^{-2k-z} (k\Omega - \Delta k \Omega - k\Delta\omega) + \\ &\quad + 2\zeta^2 k \Omega e^{-2kz} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + u_d' + U_0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Используя описанную методику запишем скорость индивидуальной жидкой частички в описании Лагранжа с точностью до лидирующих слагаемых каждого типа движения в нижней жидкости:

$$\begin{aligned} u_L(x_0, z_0, t) &= \zeta \omega_- \exp(k_- z_0) \cos((\omega_- - k_- U_{drift}) t - k_- x_0) + \\ &+ \zeta \omega_+ \exp(k_+ z_0) \cos((\omega_+ - k_+ U_{drift}) t - k_+ x_0) + U_{drift} \\ v_L(x_0, z_0, t) &= -\zeta \omega_- \exp(k_- z_0) \sin((\omega_- - k_- U_{drift}) t - k_- x_0) - \\ &- \zeta \omega_+ \exp(k_+ z_0) \sin((\omega_+ - k_+ U_{drift}) t - k_+ x_0) \end{aligned} \quad (3.33)$$

В верхней жидкости лагранжевая скорость жидких частичек выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u'_L(x_0, z_0, t) &= U_{drift} + \zeta(k_- U_0 - \omega_-) \exp(k_- z_0) \times \\ &\times \cos((\omega_- - k_- U'_{drift}) t - k_- x_0) + \\ &+ \zeta(k_+ U_0 - \omega_+) \exp(k_+ z_0) \cos((\omega_+ - k_+ U'_{drift}) t - k_+ x_0) \\ v'_L(x_0, z_0, t) &= -\zeta(k_- U_0 - \omega_-) \exp(k_- z_0) \times \\ &\times \sin((\omega_- - k_- U'_{drift}) t - k_- x_0) - \\ &- \zeta(k_+ U_0 - \omega_+) \exp(k_+ z_0) \sin((\omega_+ - k_+ U'_{drift}) t - k_+ x_0) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Интегрирование выражений (3.33) — (3.34) по времени позволит получить выражения для траекторий движения индивидуальных жидких частичек в параметрическом виде. Для нижней жидкости выражения запишутся, формально совпадающие с выражениями (3.24) — (3.25) :

$$X = x_0 + \int_0^t u_L(x_0, z_0, \tau) d\tau \quad (3.35)$$

$$Z = z_0 + \int_0^t v_L(x_0, z_0, \tau) d\tau \quad (3.36)$$

Аналогично получим интегралы, описывающие движение жидких частиц верхней среды:

$$X' = x_0 + \int_0^t u'_L(x_0, z_0, \tau) d\tau \quad (3.37)$$

$$Z' = z_0 + \int_0^t v'_L(x_0, z_0, \tau) d\tau \quad (3.38)$$

В явном аналитическом виде получить выражения для траекторий оказывается проблематичным. Однако численное интегрирование выражений (3.35) — (3.38) позволяет рассчитать траектории движения индивидуальных жидких частичек.

Основные выводы о характере движения индивидуальных частиц жидкости можно сделать анализируя выражения (3.33) — (3.34). Во-первых, как и в предыдущих пунктах, частота, с которой жидкие частички совершают циклические колебания меньше чем частота волновой моды, вызвавшей эти колебания. Во-вторых, анализ выражений (3.33) — (3.34) показывает, что в общем случае не существует такой скорости, при которой прекращается циклическое движение индивидуальных жидких частичек, как это происходило в случае распространения простейшей синусоидальной волны.

Анализируя выражения (3.32) можно заметить, что скорость дрейфового движения как в верхней, так и в нижней среде периодична по времени с периодом, равным периоду огибающей волнового пакета $\tau = 2\pi/\Delta\omega$. Если время наблюдения значительно превышает период огибающей $t_{obs} \gg \tau$, то по аналогии с предыдущим пунктом 3.2 разумно рассмотреть усредненную скорость дрейфового движения:

$$\begin{aligned} \langle U_{drift} \rangle &= \zeta^2 e^{2k+z} (k\omega + \Delta k\omega + k\Delta\omega) + \\ &\quad + \zeta^2 e^{2k-z} (k\omega - \Delta k\omega - k\Delta\omega) \\ \langle U'_{drift} \rangle &= \zeta^2 e^{-2k+z} (k\Omega + \Delta k\Omega + k\Delta\omega) + \\ &\quad + \zeta^2 e^{-2k-z} (k\Omega - \Delta k\Omega - k\Delta\omega) + U_0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

В нижней жидкости дрейф ведет себя так же, как и в более простом случае, разобранным в пункте 3.2 за исключением количественного влияния, оказываемого скоростью движения верхней среды на частоту волнового движения ω . В движущейся верхней жидкости дрейфовая добавка к скорости поступательного движения U_0 так же как и в простейшем случае может принимать разные направления. При малых скоростях U_0 дрейфовая добавка сонаправлена с направлением распространения волны, а при больших - противоположно направлена. На границе раздела смена направления дрейфовой добавки происходит при значении U_0 совпадающим с фазовой скоростью волнового пакета $U_{ph} = \omega/k$.

Все вышесказанное справедливо для разных значений скоростей тангенциального разрыва, не превышающих критического значения, после которого начинается развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца ($U_0 < U_{cr}$). Если скорость превышает критическое значение U_{cr} , то мнимая часть частоты ω , определяемой из уравнения (2.2) принимает ненулевое значение. Что на

начальном этапе соответствует экспоненциальному росту амплитуды волновых возмущений со временем. При этом значения скорости жидких частиц также экспоненциально увеличиваются со временем, пропорционально множителю $\exp(rt)$. И аналогично случаю простейшей синусоидальной волны на начальных этапах развития неустойчивости возникают дрейфовые течения, направленные таким образом, чтобы уменьшить тангенциальный разрыв скоростей, инициировавший развитие неустойчивости.

Таким образом в случае, когда дрейфовые движения вызываются волновым пакетом Стокса качественно наблюдаемые явления не отличаются от случая дрейфа, инициированного простейшей синусоидальной волной. Единственным качественным отличием является то, что не существует такого значения скорости тангенциального разрыва, при котором жидкие частицы верхней жидкости не совершают круговых движений. Это можно объяснить существованием медленного периодического движения, связанного с модуляцией амплитуды волны. В основном отличия количественные: все наблюдаемые эффекты в случае амплитудной модуляции волнового движения принимают значения в промежутке от классических значений до вдвое меньших. Такая же тенденция должна сохраняться и для произвольного цуга волн.

3.4 Влияние поверхностного электрического заряда на дрейф Стокса

3.4.1 Введение

Теоретически исследовать влияние поверхностного электрического заряда, оказываемое на волновое возмущение поверхности жидкости, начали еще в 30-х годах XX-го века. Основоположниками этого исследования стали Л. Тонкс [94] и Я. И. Френкель [225]. Они изучали условия устойчивости поверхности жидкости по отношению к электрическому заряду, распределенному на ее поверхности. При достижении поверхностным электрическим зарядом некоторого критического значения поверхность жидкости дестабилизируется и волновое возмущение принимает аperiodический характер. На поверхности

при этом образуются конусообразные выступы, называемые «конусы Тейлора», с вершин которых сбрасывается излишек электрического заряда в виде маленьких сильнозаряженных капель жидкости. Явление неустойчивости поверхности жидкости по отношению к избытку поверхностного электрического заряда получило название «неустойчивость Тонкса–Френкеля». Это явление используется при электродиспергировании различных жидкостей, например, лакокрасочных материалов; получении жидкометаллических ионов; а также связано с теорией атмосферного электричества. В основном интерес для исследователей представляло поведение жидкости при закритических значениях электрического заряда. Закономерности поведения волнового возмущения жидкости при докритических значениях плотности поверхностного электрического заряда в настоящий момент изучены слабо, однако докритический поверхностный электрический заряд может играть роль регулятора скорости дрейфа Стокса. Это связано с тем, что электрический заряд в качестве параметра входит в дисперсионное уравнение, определяющее связь волнового числа с круговой частотой и, как следствие, оказывает влияние на фазовую скорость волнового движения, инициирующего дрейф Стокса. Настоящий раздел посвящен построению аналитической модели, позволяющей количественно оценить величину этого влияния в простейшей формулировке.

3.4.2 Математическая формулировка задачи

Рассмотрим идеальную бесконечно глубокую несжимаемую жидкость с плотностью ρ , занимающую полупространство $z < 0$ в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести \mathbf{g} . Вдоль равномерно заряженной свободной поверхности с поверхностной плотностью электрического заряда κ_0 , характеризуемой коэффициентом поверхностного натяжения γ , распространяется простейшая синусоидальная волна с волновым числом k , частотой волнового движения ω и амплитудой ζ . Для простоты вычислений движение считается независимым от горизонтальной координаты y . Математическая формулировка задачи по определению электрического Φ и гидродинамического

потенциала φ в этом случае примет вид:

$$z > \xi : \quad \Delta\Phi = 0; \quad z < \xi : \quad \Delta\varphi = 0; \quad (3.40)$$

$$z = \xi : \quad \Phi = 0; \quad \partial_t \xi + \partial_x \xi \partial_x \varphi = \partial_z \varphi; \quad (3.41)$$

$$p - p_a + \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \partial_{xx} \xi \left(1 + (\partial_x \xi)^2\right)^{-3/2};$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla\Phi \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla\varphi \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Функция $z = \xi(x, t)$ описывает форму отклонения свободной поверхности от равновесного положения $z = 0$, а p_a соответствует атмосферному давлению.

Задача решалась с использованием методики, предложенной в предыдущей главе методом разложения по малому параметру $\varepsilon = \zeta k$ с точностью до слагаемых второго порядка малости. Разложение неизвестных величин выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \varphi_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \varphi_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3) \quad (3.43)$$

Несложно получить соотношения для величин нулевого порядка малости:

$$\Phi_0 = -E_0 z = -4\pi\kappa_0 z; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi} + p_a - \rho g z. \quad (3.44)$$

Здесь E_0 обозначает напряженность электрического поля над невозмущенной равномерно заряженной поверхностью жидкости.

Производя линеаризацию задачи (3.40) — (3.42) аналогично тому, как это делалось в предыдущих пунктах и подставляя разложение (3.43) разобьем задачу по порядкам малости. Для величин первого порядка малости математическая формулировка имеет вид:

$$z > 0 : \quad \Delta\Phi_1 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta\varphi_1 = 0; \quad (3.45)$$

$$z = 0 : \quad \Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0; \quad \partial_t \xi_1 - \partial_z \varphi_1 = 0; \quad (3.46)$$

$$-\rho g \xi_1 - \rho \partial_t \varphi_1 - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_1 + \gamma \partial_{xx} \xi_1 = 0;$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla\Phi_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla\varphi_1 \rightarrow 0. \quad (3.47)$$

Для величин второго порядка малости математическая формулировка задачи следующая:

$$z > 0 : \quad \Delta\Phi_2 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta\varphi_2 = 0; \quad (3.48)$$

$$z = 0 : \quad \Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \partial_z \Phi_1; \quad (3.49)$$

$$\partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 = \xi_1 \partial_{zz} \varphi_1 - \partial_x \varphi_1 \partial_x \xi_1; \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} -\rho g \xi_2 - \rho \partial_t \varphi_2 - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 = \\ = \frac{\rho}{2} \left((\partial_x \varphi_1)^2 + (\partial_z \varphi_1)^2 \right) + \rho \xi_1 \partial_{zt} \varphi_1 - \\ - \frac{1}{8\pi} \left((\partial_x \Phi_1)^2 + (\partial_z \Phi_1)^2 \right) + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \partial_{zz} \Phi_1; \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \Phi_2 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (3.52)$$

Аналогично рассмотренным выше задачам решение ищется с точностью до лидирующих слагаемых (слагаемые первого порядка малости по амплитуде волны для кругового движения и слагаемые второго порядка малости для дрейфового движения).

3.4.3 Решение задачи

Решение задачи первого порядка малости (3.45) — (3.47) находится классическими методами математической физики и имеет вид:

$$\xi_1 = \zeta \cos(\omega t - kx); \quad (3.53)$$

$$\varphi_1 = -\frac{\zeta \omega}{k} \sin(\omega t - kx) \exp(kz); \quad (3.54)$$

$$\Phi_1 = \zeta E_0 \cos(\omega t - kx) \exp(kz); \quad (3.55)$$

Дисперсионное уравнение, связывающее волновое число с частотой и другими параметрами задачи также легко находится из задачи первого порядка малости по амплитуде волны:

$$\omega = \sqrt{gk(1 + k^2 \alpha^2 - k\alpha W)}; \quad (3.56)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}; \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\rho g \gamma}} = \frac{4\pi\kappa_0^2}{\sqrt{\rho g \gamma}}$$

Здесь символ α обозначает капиллярную постоянную жидкости, а W — безразмерный параметр, характеризующий отношение электрических и лапласовских сил на поверхности жидкости, имеющий название параметр Тонкса–Френкеля.

Подставляя решение (3.53) — (3.55) в правые части граничных условий задачи второго порядка малости (3.49) — (3.51) получим граничные условия задачи второго порядка малости в явном виде:

$$z = 0 : \quad \partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 = -\zeta^2 k \omega \sin(2\omega t - 2kx); \quad (3.57)$$

$$\Phi_2 - E_0 \xi_2 = \zeta^2 k E_0 \cos(\omega t - kx)^2; \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} -\rho g \xi_2 - \rho \partial_t \varphi_2 - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 = \\ = -\frac{\zeta^2}{2} (\rho \omega^2 - k^2 W \sqrt{\rho g \gamma}) \cos(2\omega t - 2kx). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Из вида выражений (3.57) — (3.59) можно сделать вывод о том, что для решения задачи с требуемой точностью нет необходимости решать задачу второго порядка малости, поскольку не появится медленно меняющихся со временем решений.

Используя методику, предложенную в предыдущей главе, получим выражение для скорости дрейфа Стокса. Формально выражение для скорости дрейфа совпадает с выражением (2.1). Отличие заключается в частоте волнового движения ω . Здесь круговая частота волнового движения определяется дисперсионным уравнением (3.56).

Для формирования дрейфового движения необходимо, чтобы частички жидкости совершали круговые движения. В случае заряженной свободной поверхности жидкости ее возмущение может носить и апериодический характер. Анализ дисперсионного уравнения показывает, что для каждой волновой моды существует некоторое критическое значение параметра Тонкса–Френкеля W_{cr} , при котором действительная часть частоты волнового движения ω принимает нулевое значение. Эти критические значения определяются выражением

$$W_{cr} = \alpha k + \frac{1}{\alpha k}. \quad (3.60)$$

Совокупность всех критических значений определяют кривую нейтральной устойчивости. На рисунке 3.2 изображена кривая нейтральной устойчивости на плоскости параметров (W, k) в безразмерных переменных $\rho = g = \gamma = 1$. Эта кривая разделяет плоскость параметров на устойчивую и неустойчивую области. Область под кривой (обозначена цифрой 2) соответствует ситуации, когда капиллярные силы на вершинах волн преобладают над электрическими и возмущение свободной поверхности жидкости представляет из себя

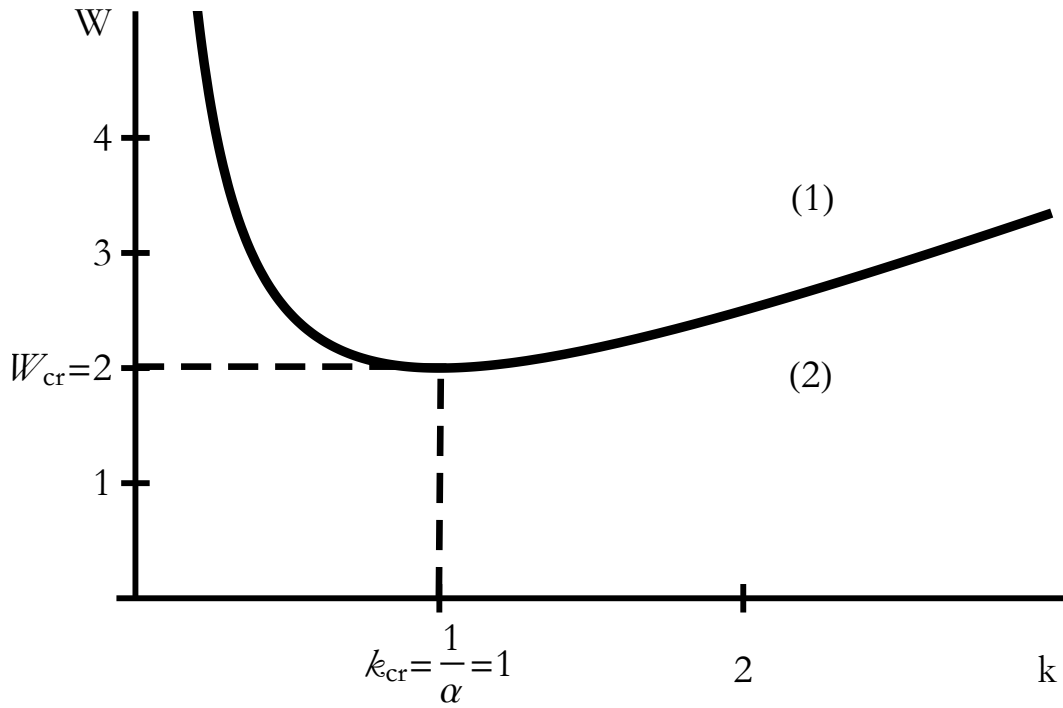


Рисунок 3.2 — Кривая нейтральной устойчивости неустойчивости Тонкса–Френкеля

бегущую волну. Область над кривой нейтральной устойчивости (обозначена цифрой 1) определяет ситуацию, в которой электрические силы преобладают. Это соответствует апериодическому движению с развитием неустойчивости Тонкса–Френкеля и прекращением дрейфа. Для настоящей задачи интерес представляет только область устойчивого движения. Из рисунка 3.2 видно, что существует некоторое волновое число k_{cr} , наиболее восприимчивое к поверхностному электрическому заряду. Величину k_{cr} можно определить из условия:

$$\partial_{\alpha k} W_{cr} = 0.$$

В безразмерных переменных $\rho = g = \gamma = 1$ волновое число примет значение $k_{cr} = 1/\alpha = 1$. Критическое значение параметра Тонкса–Френкеля при этом $W_{cr} = 2$. В дальнейшем мы будем анализировать динамику движения при распространении вдоль поверхности волны с волновым числом k_{cr} , поскольку именно эта волна наиболее восприимчива к неустойчивости Тонкса–Френкеля.

Интересно посмотреть, как при этом будут двигаться индивидуальные жидкие частицы. Выражения для описания траекторий движения получим, используя предложенную выше методику. Для этого необходимо записать скорость в описании Лагранжа перейдя при этом в систему координат,

дрейфующую со скоростью дрейфа. С точностью до обозначений это выражение совпадет с лагранжевой скоростью, полученной при описании методики (2.36) — (2.37). Отличие заключается в круговой частоте, определяемой уравнением (3.56) и зависящей от поверхностной плотности электрического заряда. Отметим, что в предельном случае $W \rightarrow 0$ осуществляется переход к классической модели Стокса. Выражения для траекторий движения индивидуальных частиц жидкости аналогичны выражениям (2.41) — (2.42) с такими же оговорками.

Электрический заряд уменьшает круговую частоту волнового движения и соответствующим образом влияет на период движения индивидуальных частиц жидкости по круговым траекториям. Таким образом, вид траекторий при значении электрического заряда меньше критического, при котором начинает развиваться неустойчивость Тонкса–Френкеля, остается таким же как и без заряда. Циклическое движение жидких частиц при этом замедляется и при достижении электрическим зарядом критического значения прекращается полностью, что соответствует переходу к аperiodическому движению поверхности жидкости.

3.4.4 Заключение

В присутствии поверхностного электрического заряда возмущение свободной поверхности жидкости может принять аperiodический характер при превышении поверхностной плотности электрического заряда критического значения, определяемого зависимостью (3.60). Существует волновое число наиболее восприимчивое к зарядовой неустойчивости. При докритических значениях поверхностной плотности электрического заряда его влияние на скорость дрейфа нелинейно.

3.5 Совокупное действие поверхностного электрического заряда и тангенциального разрыва скоростей на скорость дрейфа, связанного с распространением волнового пакета Стокса по границе раздела жидких сред

В качестве последнего примера использования разработанной методики кажется логичным рассмотреть задачу, в которой рассматривается совокупное влияние всех рассмотренных факторов. А именно задача по расчету дрейфа и характера движения индивидуальных жидких частиц, связанного с распространением волнового пакета Стокса по границе раздела двух сред, испытывающих тангенциальный разрыв скоростей, в присутствии поверхностного электрического заряда.

Математическая формулировка задачи в этом случае будет объединять выражения (2.3) – (2.6) и (3.40) – (3.42) и записывается следующим образом:

$$z > \xi : \quad \Delta \varphi' = 0; \quad \Delta \Phi = 0; \quad (3.61)$$

$$P' = p_0 - \rho'gz - \rho' \partial_t \varphi' - (\rho'/2) \left[(\partial_x \varphi' + U_0)^2 + (\partial_z \varphi')^2 \right];$$

$$z = \xi : \quad \partial_t \xi + \partial_x \xi \partial_x \varphi = \partial_z \varphi; \quad \partial_t \xi + (\partial_x \varphi' + U_0) \partial_x \xi = \partial_z \varphi'; \quad (3.62)$$

$$\Phi = 0; \quad P - P' + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \partial_{xx} \xi \left(1 + (\partial_x \xi)^2 \right)^{-3/2};$$

$$z < \xi : \quad \Delta \varphi = 0; \quad (3.63)$$

$$P = p_0 - \rho gz - \rho \partial_t \varphi - (\rho/2) \left[(\partial_x \varphi)^2 + (\partial_z \varphi)^2 \right];$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \Phi \rightarrow 0; \quad \nabla \varphi' \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi \rightarrow 0. \quad (3.64)$$

Задача решается аналогично предыдущим методом разложения по малому безразмерному параметру $\varepsilon = \zeta k$ с точностью до лидирующих слагаемых для каждого типа движения.

В нулевом порядке малости выражение для электрического потенциала записывается в точности также, как и в задаче предыдущего пункта 3.4. Далее, производя снос граничных условий на уровень равновесной поверхности $z = 0$ по известной процедуре и разбивая задачу по порядкам малости можно записать математическую формулировку задачи первого и второго порядков малости по амплитуде волнового возмущения. Задача в линейном приближе-

нии по малому параметру запишется следующим образом:

$$z > 0 : \quad \Delta \Phi_1 = 0; \quad \Delta \varphi'_1 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta \varphi_1 = 0; \quad (3.65)$$

$$z = 0 : \quad \partial_t \xi_1 - \partial_z \varphi_1 = 0; \quad \partial_t \xi_1 + U_0 \partial_x \xi_1 - \partial_z \varphi'_1 = 0; \quad (3.66)$$

$$g \xi_1 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_1 + \rho' \partial_t \varphi'_1 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_1 - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_1 + \gamma \partial_{xx} \xi_1 = 0; \quad (3.67)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \Phi_1 \rightarrow 0; \quad \nabla \varphi'_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_1 \rightarrow 0. \quad (3.68)$$

Задача второго порядка малости по амплитуде волны выглядит:

$$z > 0 : \quad \Delta \Phi_2 = 0; \quad \Delta \varphi'_2 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta \varphi_2 = 0; \quad (3.69)$$

$$z = 0 : \quad \Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \partial_z \Phi_1; \quad \partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 = \xi_1 \partial_{zz} \varphi_1 - \partial_x \varphi_1 \xi_1;$$

$$\partial_t \xi_2 + U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi'_2 = \xi_1 \partial_{zz} \varphi'_1 - \partial_{xx} \varphi'_1 \partial_{xx} \xi_1;$$

$$\begin{aligned} g \xi_2 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi'_2 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_2 - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 = \\ = \rho \xi_1 \partial_{zt} \varphi_1 + \frac{\rho}{2} \left((\partial_x \varphi_1)^2 + (\partial_z \varphi_1)^2 \right) - \rho' \xi_1 \partial_{zt} \varphi'_1 + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \partial_{zz} \Phi_1 - \\ - \frac{\rho'}{2} \left((\partial_x \varphi'_1)^2 + (\partial_z \varphi'_1)^2 + 2U_0 \xi_1 \partial_{xx} \varphi'_1 \right) - \frac{1}{8\pi} \left((\partial_x \Phi_1)^2 + (\partial_z \Phi_1)^2 \right); \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \Phi_2 \rightarrow 0; \quad \nabla \varphi'_2 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (3.71)$$

Решение задачи первого порядка малости находится стандартными методами и в виде суперпозиции двух синусоидальных волн выглядит:

$$\xi_1 = \zeta \cos(\omega_+ t - k_+ x) + \zeta \cos(\omega_- t - k_- x); \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = -\zeta \exp(k_+ z) \frac{\omega_+}{k_+} \sin(\omega_+ t - k_+ x) - \\ - \zeta \exp(k_- z) \frac{\omega_-}{k_-} \sin(\omega_- t - k_- x); \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_1 = -\zeta \exp(-k_+ z) \frac{k_+ U_0 - \omega_+}{k_+} \sin(\omega_+ t - k_+ x) - \\ - \zeta \exp(-k_- z) \frac{k_- U_0 - \omega_-}{k_-} \sin(\omega_- t - k_- x); \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 = E_0 \zeta \cos(\omega_+ t - k_+ x) \exp(-k_+ z) + \\ + E_0 \zeta \cos(\omega_- t - k_- x) \exp(-k_- z). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Дисперсионное уравнение определяется соотношением:

$$\omega = \frac{k \rho' U_0 \pm \sqrt{kg(\rho^2 - \rho'^2) - k^2 \rho \rho' U_0^2 + k(\rho + \rho')(k\gamma - W\sqrt{\rho g \gamma})}}{\rho + \rho'} \quad (3.76)$$

Можно заметить, что в предельном случае $W \rightarrow 0$ незаряженной поверхности выражения (3.72) – (3.76) сводятся к выражениям (3.26) – (3.28) и (2.2), полученным ранее. Также в случае перехода к одной заряженной жидкости $U_0 \rightarrow 0$, $\rho' \rightarrow 0$ решение задачи (3.72) – (3.76) преобразуется к виду (3.53) – (3.55), (3.56). На рисунке 3.3 изображено семейство кривых нейтральной устойчивости в плоскости параметров (U_0, k) в безразмерных переменных $\rho = g = \gamma = 1$ для разных значений параметра Тонкса–Френкеля. Кривой (1) соответствует значение параметра Тонкса–Френкеля $W = 0$, кривой (2) – $W = 1$, кривой (3) – $W = 2$, кривой (4) – $W = 3$. Из графиков видно, что

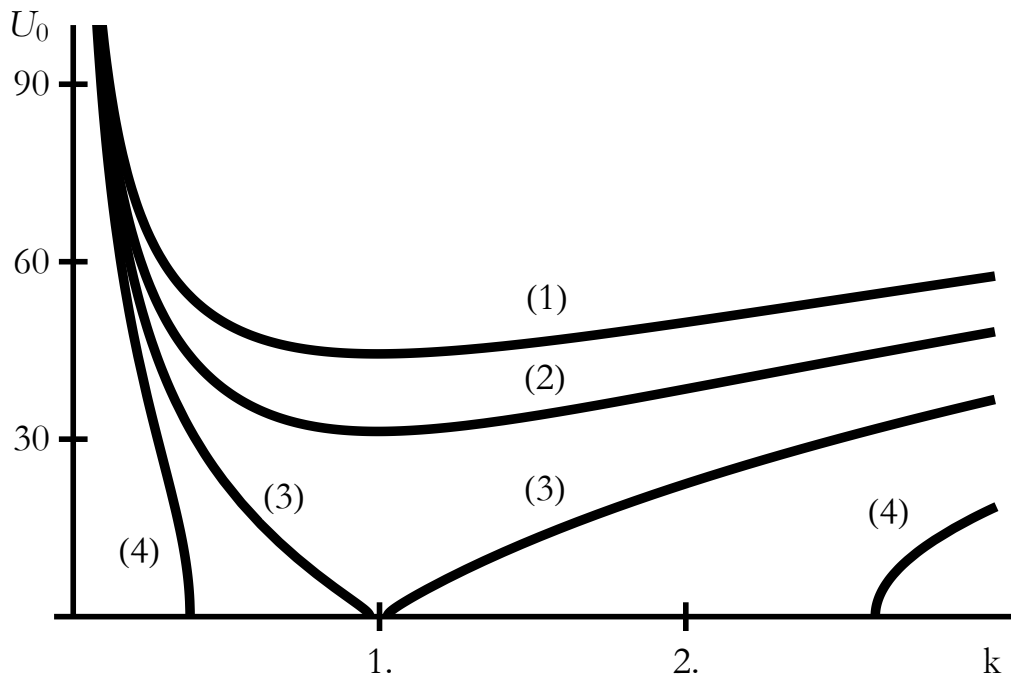


Рисунок 3.3 — Кривая нейтральной устойчивости в области параметров (U_0, k) для разных значений параметра Тонкса–Френкеля

в присутствии поверхностного электрического заряда неустойчивость развивается при меньших значениях тангенциального разрыва скоростей. Аналогично можно построить семейство кривых нейтральной устойчивости в области параметров (W, k) для разных значений скорости U_0 (рисунок 3.4). Кривой (1) соответствует значение тангенциального разрыва скоростей $U_0 = 0$, кривой (2) – $U_0 = 30$, кривой (3) – $U_0 = 44.7$, кривой (4) – $U_0 = 50$. Относительное движение жидких сред снижает величину поверхностного электрического заряда, необходимого для развития неустойчивости. Таким образом дестабилизирующие факторы усиливают действие друг друга. Также можно заметить, что существует волновое число, наиболее восприимчивое к совместному действию

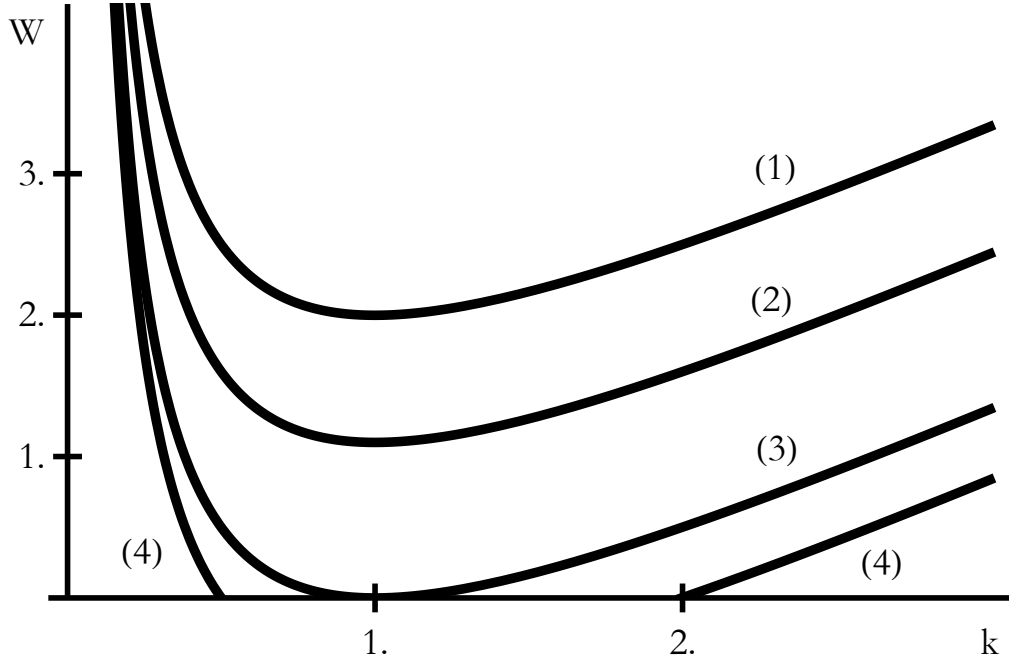


Рисунок 3.4 — Кривая нейтральной устойчивости в области параметров (W, k) для разных значений тангенциального разрыва скоростей

этих дестабилизирующих факторов. В безразмерных переменных оно принимает значение $k_{cr} = 1$.

По аналогии с предыдущими пунктами подставим решение в правые части граничных условий задачи второго порядка малости и запишем их в явном виде:

$$\partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 = -2\zeta^2 \Delta k \omega \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + \Pi(t) + O(\Delta k^2); \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \xi_2 + U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi_2' &= -2\zeta^2 \Delta k (kU_0 - \omega) \times \\ &\times \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + \Pi(t) + O(\Delta k^2); \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\Phi_2 - E_0 \xi_2 = 2k\zeta^2 \sqrt{\pi W \sqrt{\rho g \gamma}} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + \Pi(t) + O(\Delta k^2); \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} g\xi_2 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi_2' + \rho' U_0 \partial_x \varphi_2' - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 &= \\ = -\zeta^2 k (1 + k) W \sqrt{\rho g \gamma} (\cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + 1) + \Pi(t) + O(\Delta k^2). \end{aligned} \quad (3.80)$$

В выражениях (3.77) — (3.80) по аналогии с предыдущими задачами символ $\Pi(t)$ означает быстро меняющиеся со временем слагаемые. Стоит также отметить, что в правых частях оставлены только линейные слагаемые по Δk . Выделяя медленно меняющиеся со временем слагаемые и решая «усеченную» задачу второго порядка малости найдем дрейфовые компоненты решения задачи второго порядка малости:

$$u_d = -2\zeta^2 \Delta k \omega \exp(2z\Delta k) \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) \quad (3.81)$$

$$u'_d = 2\zeta^2 \Delta k (kU_0 - \omega) \exp(2z\Delta k) \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) \quad (3.82)$$

Выражения (3.81) — (3.82) получены с точностью до линейных слагаемых по Δk и формально совпадают с выражениями (3.30) — (3.31). Отличие заключается в частоте волнового движения ω , в нее входит поверхностный электрический заряд (3.76).

Используя формулу перехода и методику, описанную в предыдущей главе легко найти выражения для скорости дрейфа Стокса в нижней и верхней жидкости. Они также формально совпадают с выражениями (3.32) с точностью до круговой частоты волнового движения ω и частоты, измененной в соответствии с эффектом Доплера Ω :

С учетом смещения со скоростью дрейфа можно уточнить лагранжевые компоненты скорости индивидуальных жидких частиц и получить выражения с точностью до лидирующих слагаемых, аналогичных (3.33) — (3.34).

Выражения для траекторий движения индивидуальных жидких частиц в параметрическом виде можно получить путем численного интегрирования скоростей (3.33) для нижней жидкости и скоростей (3.34) для верхней, подставляя вместо частоты волнового движения ω корректное значение (3.76). Видно, что движение индивидуальных жидких частиц носит циклический характер, который в верхней жидкости не сменяется поступательным ни при каких значениях тангенциального разрыва скоростей из-за существования быстрых и медленных циклических движений. При этом частота круговых вращений жидкой частицы меньше чем частота волновой моды, вызвавшей это циклическое движение, причем чем больше скорость дрейфового движения, тем больше эта разница.

3.6 Заключение

Разработанная методика позволяет рассчитать скорость дрейфового движения в случае сложных движений. Как показывает анализ, основные закономерности решений остаются такими же, как и в простейшем случае, но на скорость дрейфа влияют факторы, связанные с модуляцией движений и факторы, влияющие на частоту простейших волновых мод, возмущающих свободную поверхность.

В качестве примеров рассмотрено влияние тангенциального разрыва скоростей, поверхностного электрического заряда, возмущение границы раздела волновым пакетом Стокса. Показано, что поверхностный электрический заряд и тангенциальный разрыв скоростей на границе раздела усиливают дестабилизирующие свойства друг друга. На начальных этапах развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца возникают дрейфовые течения, инициированные распространением волнового пакета по границе раздела. Дрейфовые течения направлены таким образом, чтобы уменьшить тангенциальный разрыв скоростей, вызвавший развитие неустойчивости. Однако величина дрейфовых течений оказывается в разы меньшей, чем в случае, когда дрейф инициирован простейшей синусоидальной волной.

Глава 4. О влиянии плёнки поверхностно-активного вещества на дрейфовое течение, вызванное волновым возмущением поверхности вязкой жидкости

4.1 Введение

Как было показано в предыдущих главах, распространение периодических волн по поверхности жидкости вызывает довольно сложное движение жидких частичек: петлеобразное движение в вертикальной плоскости, и медленное по сравнению с групповой и фазовой скоростью волны дрейфовое движение вдоль направления распространения волны.

До сих пор наше рассмотрение опиралось на теорию идеальной жидкости и не учитывало влияние вязкости, которая существенно усложняет явление. В работах [121; 122] в дрейфовом течении в вязкой жидкости, по которой распространяются периодические волны, были выделены две различающиеся по свойствам составляющих.

Одна компонента дрейфового течения — «модифицированный дрейф Стокса», имеющий ту же природу, и такой же экспоненциальный характер уменьшения скорости с глубиной, что и классический дрейф Стокса. Главное отличие модифицированного дрейфа от классического — экспоненциальное уменьшение скорости с течением времени (причина — вязкая диссипация).

Вторая компонента — «добавочный дрейф» — движение, в которое жидкость вовлекается горизонтальными вязкими напряжениями, которые возникают благодаря тому, что горизонтальные слои жидкости, участвующие в среднем дрейфе, инициированном вышеописанным механизмом, двигаются с различными скоростями. Скорость добавочного дрейфа не экспоненциальным, а более сложным образом зависит от глубины и времени и рассчитывается с помощью специальной процедуры, предложенной в работах [121; 122].

С другой стороны, известно [65; 151; 168—170], что упругая плёнка ПАВ подавляет капиллярно-гравитационное волновое движение. При этом вещество плёнки в процессе распространения волн перераспределяется нетривиальным образом [124].

В настоящей главе будет предложена аналитическая асимптотическая модель, которая позволит оценивать влияние плёнки поверхностно-активного вещества (ПАВ) на скорость дрейфового течения, инициируемого распространением периодических капиллярно-гравитационных волн по горизонтальной поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости. Также ставится задача о расчете перераспределения ПАВ вдоль поверхности жидкости, связанного с её волновым возмущением. Дополнительно будет решена задача о расчете влияния движения среды над поверхностью плёнки ПАВ на эффект гашения капиллярно-гравитационных волн поверхностно-активными веществами и на характер перераспределения ПАВ в результате волнового движения. Для правильного учета поверхностных вязких напряжений, посредством которых плёнка ПАВ взаимодействует с поверхностью жидкости, используется аналитический подход, развитый в работах [121; 122].

4.2 Постановка задачи

Рассмотрим несжимаемую ньютоновскую жидкость с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν , заполняющей нижнее полупространство $z < 0$ в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, с осью Oz , направленной вертикально вверх против направления действия силы тяжести \mathbf{g} . По поверхности жидкости равномерно с поверхностной плотностью Γ_0 распределено ПАВ, образующее нерастворимую плёнку. Рассматривается задача определения скорости среднего дрейфового течения, возникающего в результате распространения по такой поверхности периодической капиллярно-гравитационной волны с известной длиной λ и амплитудой ζ , а также изменения концентрации ПАВ, связанного с этим течением. Движение жидкости для простоты расчетов считается независимым от координаты y , а направление распространения волны полагается совпадающим с направлением горизонтальной оси Ox .

Необходимо учесть, что в процессе распространения волны на деформированной волновым движением поверхности жидкости будет происходить перераспределение ПАВ, и следовательно поверхностную плотность ПАВ следует считать функцией времени и горизонтальной координаты $\Gamma = \Gamma(t, x)$. Локальные изменения поверхностной плотности ПАВ вызывают локальные из-

менения величины коэффициента поверхностного натяжения γ . Принималось, что плёнка ПАВ и верхний слой жидкости находятся в термодинамическом равновесии, поэтому изменение локального значения поверхностной плотности ПАВ вызывает мгновенное изменение локального значения коэффициента поверхностного натяжения в соответствии с изотермой $\gamma = \gamma(\Gamma)$, считающейся известной [170], [65].

Математическая формулировка задачи расчета возникающего в жидкости поля скоростей имеет вид [120]:

$$z < \xi : \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}; \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \quad (4.1)$$

$$z = \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = v \quad (4.2)$$

$$p - 2\rho\nu (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}) = -\frac{\gamma}{\left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

$$-\rho\nu ((\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + (\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U})) + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2} \left(\frac{\partial (\Gamma u)}{\partial x} + \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial (v\Gamma)}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.5)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \right) \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1/2}; \quad \boldsymbol{\tau} = \left(\mathbf{e}_x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \mathbf{e}_z \right) \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

Здесь $\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(t, x, z) = u(t, x, z) \mathbf{e}_x + v(t, x, z) \mathbf{e}_z$ — эйлерово поле скоростей в жидкости, символы $\mathbf{e}_{x,z}$ описывают орты осей x и z соответственно; давление в жидкости описывается функцией $p \equiv p(t, x, z)$; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ определяют соответственно внешние орты нормали и касательной к поверхности жидкости, искаженной волновым движением её поверхности $\xi = \xi(t, x)$.

При решении задачи (4.1) — (4.6) использовался стандартный подход, при котором вместо записи начальных условий, определяющих спектр мод волнового движения в начальный момент времени, решение ищется в наиболее простом с точки зрения спектрального состава виде. Такой подход позволяет получить решение наименее громоздкое в плане аналитического описания и дальнейшего качественного анализа виде.

Задача (4.1) — (4.6) решалась методом разложения по малому параметру, пропорциональному амплитуде волнового движения $\varepsilon = \zeta k$. С точностью до

квадратичных слагаемых искомые функции выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3); & \xi_j &= \xi_j(x, t) \\
u &= u_1 + u_2 + O(\varepsilon^3); & u_j &= u_j(x, z, t) \\
v &= v_1 + v_2 + O(\varepsilon^3); & v_j &= v_j(x, z, t) \\
p &= -\rho g z + p_1 + p_2 + O(\varepsilon^3); & p_j &= p_j(x, z, t) \\
\Gamma &= \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + O(\varepsilon^3); & \Gamma_j &= \Gamma_j(x, z, t) \\
\Gamma_0 &= \text{const}; & j &= 1; 2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь как и ранее « O » — символ порядка величины. Во всех окончательных выражениях будем раскрывать определение параметра ε : $\varepsilon = \zeta k$, $\varepsilon^2 = \zeta^2 k^2$ и придерживаясь традиционной терминологии, применяющейся в теории волн малой, но конечной амплитуды [73; 176], называть переменные u_n , v_n , ξ_n , p_n величинами n -го порядка малости по амплитуде волны, имея в виду что фактическим малым параметром является все же отношение амплитуды волны к её длине, которое пропорционально безразмерному параметру $\varepsilon = \zeta k$.

Подстановка разложений (4.7) в соотношения (4.1) — (4.6) и отнесение граничных условий на невозмущенную поверхность $z = 0$ аналогично тому, как это делалось в предыдущих пунктах и описывалось в пункте 2.2 приводят к выделению задач первого и второго порядков малости по амплитуде волны.

Математическая формулировка задачи первого по амплитуде волны порядка малости имеет вид:

$$z < 0 : \quad \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p_1 - \nu \Delta \mathbf{U}_1 = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_1 = 0; \tag{4.8}$$

$$z = 0 : \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - v_1 = 0; \quad -\rho g \xi_1 + p_1 - 2\rho \nu \frac{\partial v_1}{\partial z} + \gamma_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = 0; \tag{4.9}$$

$$-\rho \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \gamma_\Gamma \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} + \Gamma_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0; \tag{4.10}$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad u_1 \rightarrow 0; \quad v_1 \rightarrow 0 \tag{4.11}$$

Формулировка задачи второго по амплитуде волны порядка малости состоит из выражений:

$$z < 0 : \quad \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p_2 - \nu \Delta \mathbf{U}_2 = -(\mathbf{U}_1 \cdot \nabla) \mathbf{U}_1; \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_2 = 0; \tag{4.12}$$

$$z = 0 : \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - v_2 = \xi_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x}; \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho g \xi_2 + p_2 - 2\rho v \frac{\partial v_2}{\partial z} + \gamma_0 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = \\
& = 2\rho v \xi_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \xi_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} - \gamma_\Gamma \Gamma_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} - \gamma_\Gamma \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}; \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho v \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \gamma_\Gamma \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} = \\
& = \rho v \left(4 \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right) - \gamma_{\Gamma\Gamma} \Gamma_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}; \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial t} + \Gamma_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -u_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} - \Gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \Gamma_0 \left(\xi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right); \quad (4.16)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad u_2 \rightarrow 0; \quad v_2 \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

В список исходных данных задачи необходимо включить параметры:

$$\gamma_0 \equiv \gamma(\Gamma_0); \quad \gamma_\Gamma \equiv \left(\frac{d\gamma}{d\Gamma} \right)_0; \quad \gamma_{\Gamma\Gamma} \equiv \left(\frac{d^2\gamma}{d\Gamma^2} \right)_0;$$

Они возникают в результате разложения величины коэффициента поверхностного натяжения $\gamma \equiv \gamma(\Gamma)$ в окрестности равновесного значения $\gamma_0 \equiv \gamma(\Gamma_0)$. Значения γ_Γ и $\gamma_{\Gamma\Gamma}$ характеризуют наклон касательной и кривизну кривой, изображающей зависимость $\gamma = \gamma(\Gamma)$ соответственно. Для обычных ПАВ, уменьшающих поверхностное натяжение, параметр γ_Γ принимает отрицательные значения $\gamma_\Gamma < 0$ [65; 170; 226].

4.3 Решение

Решение задачи (4.8) — (4.11) первого по амплитуде волны порядка малости хорошо известно [120; 138] и может быть описано выражениями типа бегущей волны:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\zeta}{2} \exp(\theta) + C.C.; \\
u_1 &= \frac{\zeta}{2} (A \exp(kz) + B \exp(qz)) \exp(\theta) + C.C.; \\
v_1 &= \frac{i\zeta}{2} \left(A \exp(kz) + \frac{Bk}{q} \exp(qz) \right) \exp(\theta) + C.C.; \\
\Gamma_1 &= \frac{i\zeta}{2} k \Gamma_0 \frac{A+B}{S} \exp(\theta) + C.C.;
\end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\theta = St - ikx; \quad q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}}$$

или суперпозицией таких волн с различными значениями волновых чисел k . Набор величин $(\xi_1, u_1, v_1, \Gamma_1)$, определенный выражениями (4.18), при фиксированном значении волнового числа k образует отдельную моду волнового движения. Символ «*C.C.*» как и в предыдущих пунктах означает комплексно сопряженные слагаемые, а значения вспомогательных величин A и B определяются соотношениями:

$$A = iS \left(\frac{q}{k - q} + \frac{\rho\nu kS}{\rho\nu(k + q)S - k^2\Pi} \right); \quad B = \frac{ikqS(2\rho\nu S - k\Pi)}{(q - k)(\rho\nu(k + q)S - k^2\Pi)};$$

$$\Pi = \gamma_\Gamma \Gamma_0.$$

Параметр Π называют упругостью плёнки. Он имеет размерность силы на единицу длины и характеризует упругие свойства плёнки ПАВ [65; 170; 226] и также как γ_Γ для обычных ПАВ, принимает отрицательные значения [65; 170; 226]. Изменение модуля Π для определенного ПАВ можно осуществить изменяя среднее значение концентрации Γ_0 : при нулевой средней концентрации $\Pi = 0$ и $|\Pi|$ растет с ростом средней концентрации Γ_0 .

Комплексная частота S связана с волновым числом и другими параметрами задачи дисперсионным соотношением [120]:

$$\left((\Omega + 2N)^2 + 1 - \frac{L}{\Omega^2} \right) \left(1 - L \frac{1 + \Omega^2}{4\Omega^2 N^2} \right)^{-1} = 4N^{3/2} \sqrt{\Omega + N}; \quad (4.19)$$

$$\Omega \equiv \frac{S}{\omega_0}; \quad N \equiv \frac{\nu k^2}{\omega_0}; \quad L \equiv \frac{\Pi k^3}{\rho \omega_0^2}; \quad \omega_0^2 = kg \left(1 + \frac{\gamma_0}{\rho g} k^2 \right).$$

В дальнейшем для действительной и мнимой части комплексной частоты используются обозначения:

$$r = \text{Re}(S); \quad \omega = \text{Im}(S).$$

Использованный здесь вспомогательный параметр ω_0 имеет смысл круговой частоты волнового движения на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости с капиллярной постоянной, равной $\sqrt{\gamma_0/(\rho g)}$. Безразмерный параметр N характеризует роль вязкости при волновом движении. Если $N \ll 1$, то жидкость принято считать маловязкой.

Анализ дисперсионного уравнения показывает, что в отсутствие плёнки ПАВ уравнение (4.19) сводится к известному дисперсионному уравнению для капиллярно–гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости [170]:

$$(S + 2\nu k^2)^2 + \omega_0^2 = 4\nu^2 k^3 \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}} \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) имеет четыре корня, однако, физический смысл имеют не все значения комплексной частоты S , разрешающие дисперсионное уравнение, а только те, для которых выполняется соотношение:

$$\operatorname{Re} \left((S + 2\nu k^2)^2 + \omega_0^2 \right) > 0$$

Это условие обеспечивает положительность действительной части величины q , отвечающей за затухание с глубиной (при $z \rightarrow -\infty$) вихревой части поля скоростей — слагаемых, которые пропорциональны $\propto \exp(qz)$. Другая пара корней оказывается физически нереализуемой. Физически реализуемые корни являются комплексно сопряженными и определяют две простейшие синусоидальные капиллярно–гравитационные волны, бегущие в противоположных направлениях: вдоль положительного направления оси Ox и против него.

С учетом слагаемых, отвечающих за присутствие плёнки ПАВ на поверхности жидкости дисперсионное уравнение (4.19) имеет уже восемь корней, однако физический смысл имеют корни, удовлетворяющие соотношению:

$$\operatorname{Re} \left(\left((\Omega + 2N^2)^2 + 1 - \frac{L}{\Omega^2} \right) \left(1 - L \frac{1 + \Omega^2}{4\Omega^2 N^4} \right)^{-1} \right) > 0,$$

обеспечивающему положительность действительной части величины q . Таких корней оказывается четыре. Два из них при отсутствии ПАВ ($\Pi \rightarrow 0$) переходят в пару физически реализуемых корней уравнения (4.20). И отвечают за распространение капиллярно–гравитационных волн. Вторая пара корней принимает ненулевые значения только в присутствии плёнки ПАВ ($\Pi \neq 0$). Эти корни определяют частоты волновых движений Марангони [120], инициируемых касательными натяжениями, возникающими в упругой плёнке при распространении волн сжатий и растяжений. Стоит отметить, что капиллярно–гравитационные волны при распространении также вызывают волны сжатий и растяжений в упругой плёнке, но такой волновой режим не принято считать волнами Марангони.

4.4 Перераспределение ПАВ, связанное с волновым возмущением поверхности жидкости

Изобразим зависимости частоты волнового движения ω от модуля упругости плёнки ПАВ $|\Pi|$, полученные при решении уравнения (4.19) для обоих типов волнового движения для различных волновых чисел. Здесь и далее в этой главе расчеты и построения выполнены в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma_0 = 1$ при значении безразмерной вязкости $\nu = 0.002$, что соответствует вязкости воды при нормальных условиях. Линии, соответствующие капиллярно-гравитационному волновому движению помечены символом «C – G», а линии, соответствующие волнам Марангони — символом «M». Анализ решения показывает, что частота капиллярно-гравитационных волн практически не зависит от модуля упругости плёнки ПАВ, а частота волн Марангони быстро возрастает с увеличением $|\Pi|$. Из рисунка 4.1 видно, что

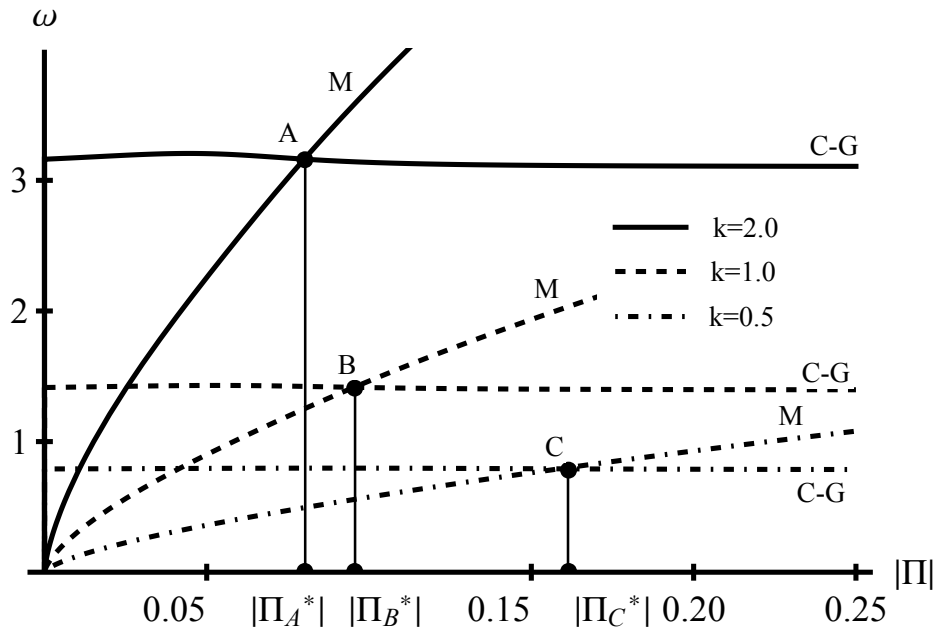


Рисунок 4.1 — Зависимость циклической частоты волнового движения Марангони и капиллярно-гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных длин волн.

при некотором значении модуля упругости плёнки $|\Pi| = |\Pi^*| (k)$ частоты волн Марангони сравниваются с частотой капиллярно-гравитационного волнового движения. Примечательно, что при значении модуля упругости можно заметить еще одну особенность волнового движения. Она хорошо иллюстрируется

на рисунке 4.2, на котором построены зависимости декремента затухания капиллярно–гравитационных волн от модуля упругости плёнки ПАВ. На рисунке 4.2

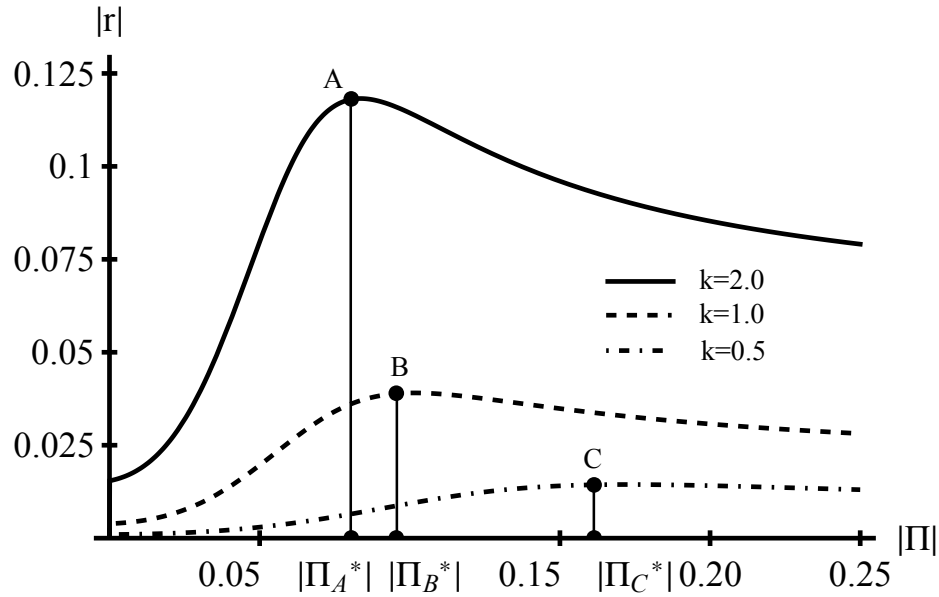


Рисунок 4.2 — Зависимость декремента затухания капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных длин волн.

не изображены декременты затухания волн Марангони, так как эти зависимости очень быстро растут с увеличением упругости плёнки и в масштабе рисунка 4.2 сливаются с вертикальной осью. Из рисунка 4.2 видно, что при достижении упругостью плёнки характерного значения $|\Pi| = |\Pi^*|(k)$ декремент затухания капиллярно–гравитационных волн достигает максимума $|r| = |r^*|$, что соответствует наиболее эффективному гашению волн плёнкой ПАВ. Дальнейшее увеличение упругости приводит к уменьшению декремента затухания и при $|\Pi| \rightarrow \infty$ модуль декремента затухания стремится к своему асимптотическому значению, составляющему примерно половину от максимального $|r| \rightarrow |r_{ass}| \approx 0.5|r^*|$. На практике оказывается, что при ненулевых значениях модуля упругости плёнки ПАВ декременты затухания волн Марангони во много раз превосходят декременты капиллярно–гравитационных волн. В связи с этим на практике наблюдение волнового движения Марангони затруднено и возможно только при постоянном притоке энергии. В [151] было приведено аналитическое объяснение эффекта наиболее эффективного гашения капиллярно–гравитационных волн. Оно заключается в том, что волны Марангони, которые обладают большими декрементами затухания являются чисто вихревой модой, тогда как капиллярно–гравитационные волны включают в

себя потенциальную и вихревую компоненты. Последняя осуществляет передачу энергии волнам Марангони, которая наиболее эффективно происходит при выравнии частот различных мод колебаний. Этот эффект заметно проявляется в области капиллярных волн и несущественен в области гравитационного волнового движения (с волновым числом $k < 1$). Ранее и экспериментально и теоретически исследовалось затухание капиллярно–гравитационных волн, связанное с присутствием ПАВ на поверхности жидкости, но оставалась без внимания интересная взаимосвязь между положением максимального декремента и распределения поверхностной концентрации ПАВ.

Интересно понаблюдать за соотношением между фазами волнового возмущения поверхности жидкости и положения максимального значения концентрации ПАВ. На рисунке 4.3 изображены зависимости разности фаз Φ между капиллярно–гравитационной волной, возмущающей поверхность жидкости и связанной с ней волной перераспределения концентрации ПАВ (4.18) от модуля упругости плёнки ПАВ $|\Pi|$ для разных волновых чисел. Из рисунка 4.3 видно, что при достижении максимального эффекта гашения волн (достижения модулем упругости плёнки ПАВ соответствующего значения $|\Pi^*|$) разность фаз Φ для всех длин волн оказывается примерно равной $\pi/2$. Это соответствует положению максимума концентрации ПАВ на середине склона волны, следующего за горбом. С уменьшением упругости плёнки разность фаз уменьшается и максимум оказывается ближе к вершине горба волнового возмущения поверхности жидкости. Увеличение упругости приводит к росту разности фаз и соответственно смещению максимума концентрации ближе ко впадине волнового возмущения.

4.5 Траектории движения индивидуальных жидких частиц в линейном приближении

Из решения задачи первого порядка малости по амплитуде волны (4.18) можно оценить влияние поверхностно-активного вещества на траектории движения индивидуальных частиц жидкости. Как было показано ранее в линейном приближении можно перейти от поля скоростей в описании Эйлера к полю скоростей в описании Лагранжа при помощи формальной замены простран-

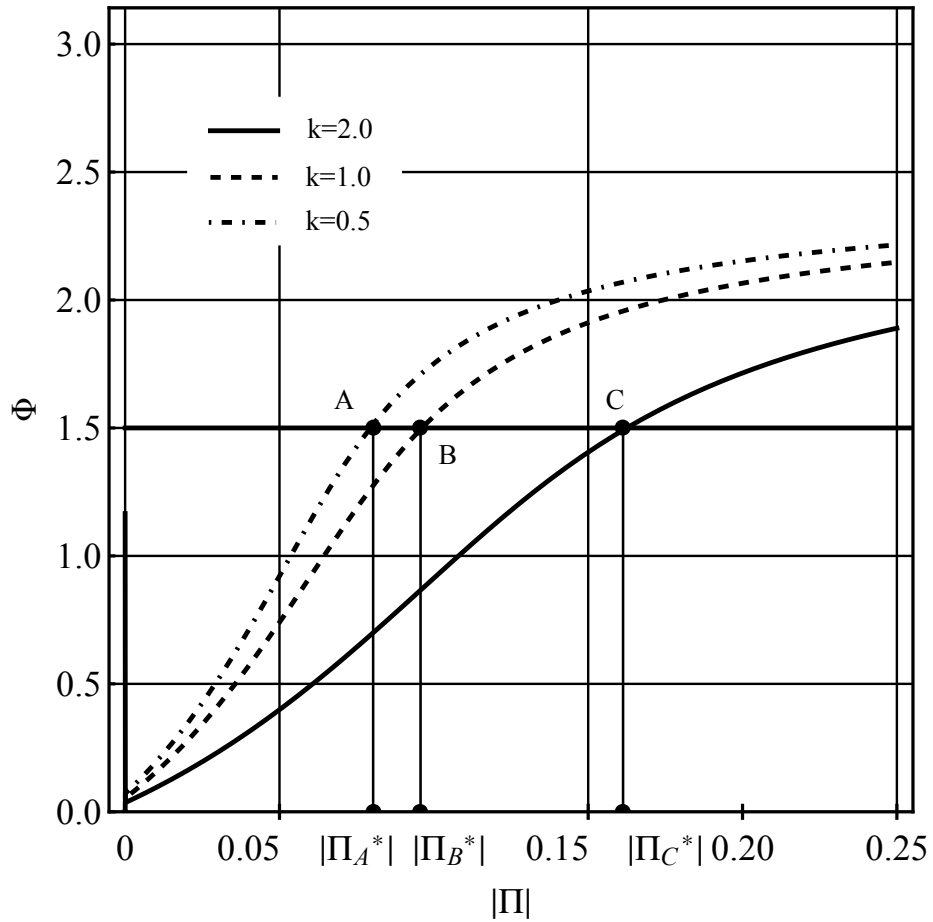


Рисунок 4.3 — Зависимость разности фаз между положением максимума концентрации ПАВ и гребнем волны для капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных длин волн. ственных эйлеровых координат на лагранжевы: $x \rightarrow x_0$ и $z \rightarrow z_0$. Тогда поле скоростей в описании Лагранжа можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u_{L1} &= \frac{\zeta}{2} (A \exp(kz_0) + B \exp(qz_0)) \exp(St - ikx_0) + C.C.; \\ v_{L1} &= \frac{i\zeta}{2} \left(A \exp(kz_0) + \frac{Bk}{q} \exp(qz_0) \right) \exp(St - ikx_0) + C.C. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Прямое интегрирование выражений (4.21) по времени позволяет получить параметрическое описание траектории движения индивидуальной частицы жидкости в первом приближении по амплитуде волны.

Рассмотрим в качестве примера траектории движения индивидуальной жидкой частицы, находящейся в начальный момент времени на середине переднего склона волны с безразмерным волновым числом $k = 1$. На рисунке 4.4 изображены траектории движения индивидуальной жидкой частицы при различных значениях упругости плёнки ПАВ с указанием направления движения. Для того, чтобы оценить влияние ПАВ на траектории достаточно построить

путь, описываемый частицей за время одного периода волнового движения. Видно, что при отсутствии ПАВ частицы совершают движение по окружностям уменьшающегося за счет вязкости радиуса (сплошная линия на рисунке). С увеличением модуля упругости плёнки траектории «сплюсциваются» в эллипсы (длинная пунктирная и штрихпунктирная линия на рисунке) и при достижении упругостью характерного для этой длины волны значения $|\Pi_B^*|$ вырождаются в отрезки прямых (штриховая линия на рисунке), наклоненных к горизонтальной оси под углом примерно $\pi/4$.

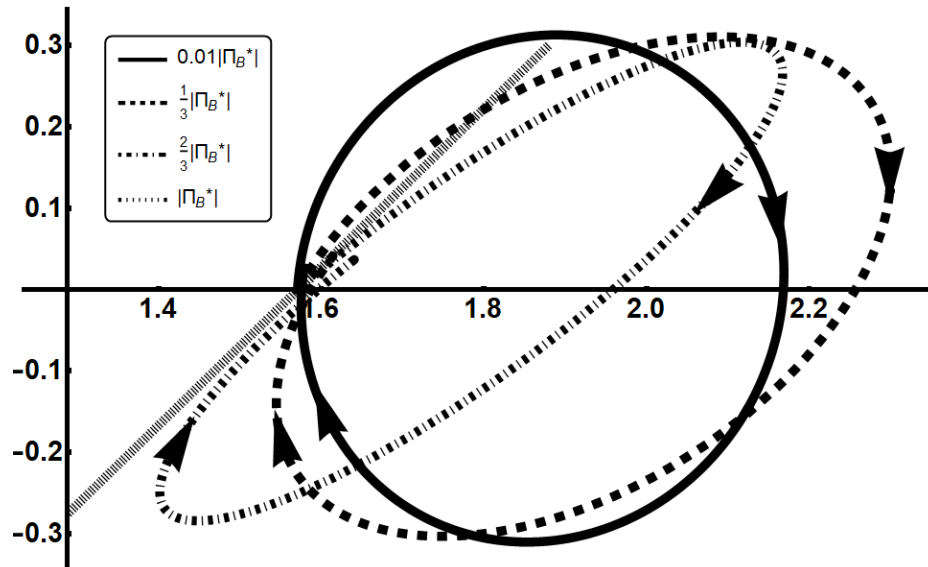


Рисунок 4.4 — Траектории движения индивидуальной жидкой частицы в присутствии ПАВ с упругостью меньше характерного значения $|\Pi^*|$

Дальнейшее увеличение упругости плёнки ПАВ приводит к тому, что траектории снова «разворачиваются» в эллипсы (см. рисунок 4.5). При этом направление движения жидких частиц сменяется на противоположное. Можно заметить, что при устремлении упругости к бесконечности траектории также вырождаются в отрезки прямых, но при этом движение жидкие частицы совершают вдоль вертикальной оси.

Такое влияние ПАВ на траектории можно объяснить следующим образом: в отсутствие плёнки ПАВ на поверхности на жидкую частицу действуют капиллярно-гравитационные силы, заставляющие её совершать вращательные движения по часовой стрелке (если волна распространяется вправо). С появлением ПАВ возникают тангенциальные упругие силы Марангони, которые направлены таким образом, что момент этих сил направлен в противоположную сторону. Это искажает круговые траектории. При достижении характерного значения $|\Pi^*|$ эти силы сравниваются и прекращается круговое движение. С

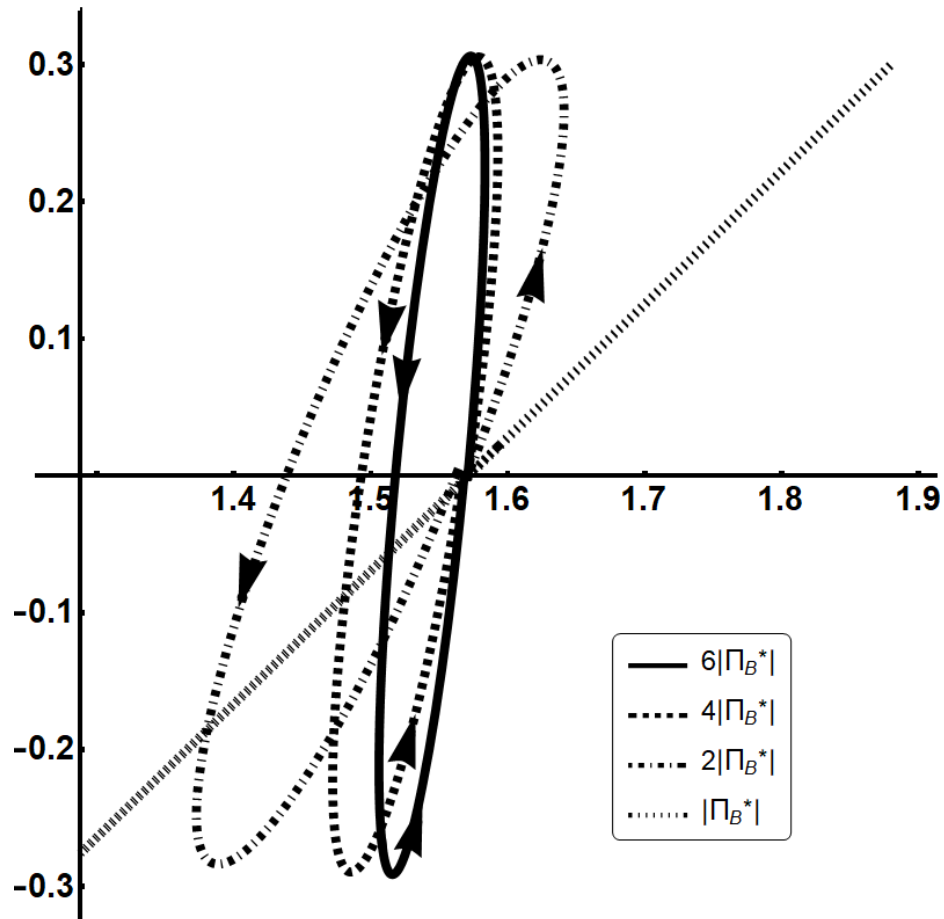


Рисунок 4.5 — Траектории движения индивидуальной жидкой частицы в присутствии ПАВ с упругостью больше характерного значения $|\Pi^*|$

превышением характерного значения упругие силы Марангони начинают преобладать, поэтому наблюдается вращение в противоположную сторону.

4.6 Учет влияния скорости движения верхней среды

Если над вязкой жидкостью, покрытой упругой плёнкой ПАВ располагается идеальная жидкость с плотностью $\rho' < \rho$, поступательно движущаяся относительно нижней жидкости в положительном направлении оси Ox с постоянной скоростью U_0 , то математическая формулировка задачи (4.1) — (4.6) дополняется уравнениями для гидродинамического потенциала верхней среды, а граничные условия на границе раздела сред модифицируются аналогично выражениям (2.3) — (2.4).

Анализ решения проводился при значениях скорости движения верхней среды меньших критического значения в смысле реализации неустойчивости по отношению к тангенциальному разрыву скоростей $U_0 < U_{cr}$ для жидкостей с выбранными параметрами в безразмерных переменных критическая скорость принимает значение $U_{cr} \simeq 45$, что в размерных переменных соответствует скорости около 730см/сек.

На рисунке 4.6 показана зависимость, аналогичная рисунку 4.1 для жидкостей с параметрами воды и воздуха в тех же безразмерных переменных для волны с безразмерным волновым числом $k = 1$ и разных значений безразмерного значения тангенциального разрыва скоростей. Из рисунка 4.6 видно, что с

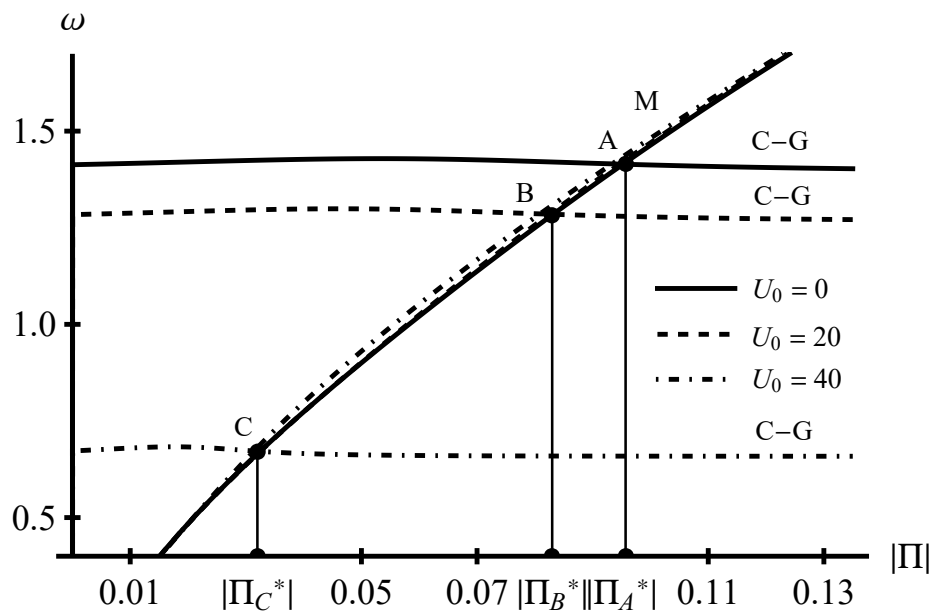


Рисунок 4.6 — Зависимость циклической частоты волнового движения Марангони и капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных значений безразмерного тангенциального разрыва скоростей.

увеличением скорости движения верхней среды круговая частота волн Марангони незначительно возрастает, а круговая частота капиллярно–гравитационных волн заметно уменьшается. Из–за этого характерное значение упругости плёнки ПАВ $|\Pi^*|$, при котором сравниваются круговые частоты уменьшается в разы. Интересно заметить, что декремент затухания капиллярно–гравитационных волн по–прежнему достигает своего максимального значения при характерном значении упругости плёнки $|\Pi^*|$ (см. рисунок 4.7). Однако, само значение декремента затухания несколько меньше значения в отсутствии ветра. Таким образом, при движении верхней среды над нижней, покрытой плёнкой ПАВ

для достижения максимального эффекта гашения капиллярно–гравитационных волн необходимы в разы меньшие концентрации ПАВ, но и сам эффект будет немного слабее. На рисунке 4.8 изображена зависимость, аналогичная

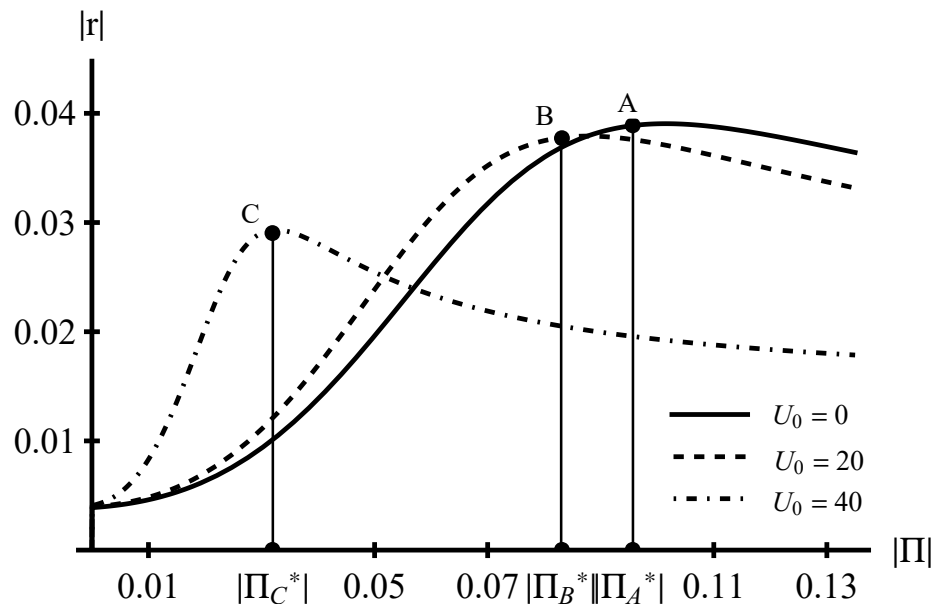


Рисунок 4.7 — Зависимость декрементов затухания капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных значений безразмерного тангенциального разрыва скоростей.

рисунку 4.3 для жидкостей с параметрами системы вода–воздух в тех же безразмерных переменных для волны с безразмерным волновым числом $k = 1$ и разных значений безразмерного значения скорости движения верхней среды U_0 .

4.7 Дрейфовые компоненты поля скоростей

Решение задачи второго по амплитуде волны порядка малости, в отличие от задачи первого порядка малости, имеет составляющую, описывающую явный дрейф жидкости вдоль оси Ox . В рамках концепции поиска решений с точностью до лидирующих слагаемых для каждого типа движения ограничимся установлением вида именно этой части решения. Примем, что решение исходной задачи (4.1) — (4.6) в первом по амплитуде волны приближении описывается только одной модой волнового движения — набором соотношений вида (4.18) с заданным значением волнового числа k .

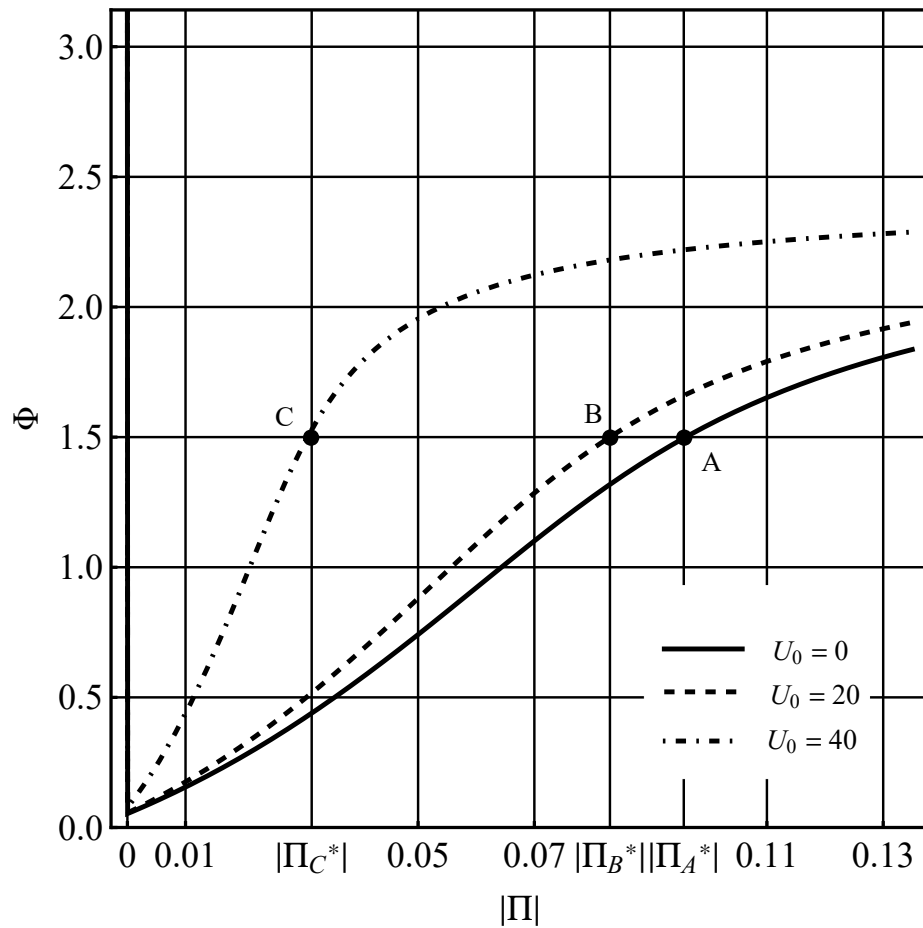


Рисунок 4.8 — Зависимость разности фаз между положением максимума концентрации ПАВ и гребнем волны для капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных значений безразмерного тангенциального разрыва скоростей.

Подставляя (4.18) в правую часть (4.12) — (4.16) даже без подробных расчетов несложно установить характер их строения. Правая часть каждого соотношения представляет собой сумму двух различных по характеру слагаемых. Одно слагаемое не зависит от горизонтальной координаты x и пропорционально $\propto \exp(2rt)$, а второе является суммой компонент, пропорциональных выражениям:

$$\propto \exp(2rt) \cos(\omega t - kx); \quad \propto \exp(2rt) \sin(\omega t - kx).$$

Слагаемые первого типа далее будем называть «нециклические» или «непериодические», а второго — «циклические», поскольку их величины при фиксированных координатах циклически изменяются со временем около нулевого среднего значения.

Характер строения правых частей соотношений (4.12) — (4.16) позволяет заключить, что неизвестные u_2 , v_2 , p_2 следует искать в виде выражений сле-

дующего общего строения:

$$u_2 = u_a + \Theta; \quad v_2 = \Theta; \quad p_2 = p_a + \Theta; \quad (4.22)$$

$$u_a \equiv u_a(t, z); \quad p_a \equiv p_a(t, z).$$

Здесь символ Θ использован для общего обозначения слагаемых циклического типа вне зависимости от их конкретного вида. Вертикальная компонента скорости v_2 имеет только циклическую составляющую из-за того, что должен отсутствовать поток жидкости в вертикальном направлении.

В результате подстановки выражений общего строения для величин второго порядка малости по амплитуде волны (4.22) в соотношение, представляющее собой проекцию уравнения (4.12) на ось Ox ; в граничное условие (4.15) и в условие (4.16), выделяется самостоятельная задача для определения u_a :

$$z < 0: \quad \frac{\partial u_a}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} = \zeta^2 F(z) \exp(2rt) \quad (4.23)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial u_a}{\partial t} - \nu \frac{\partial u_a}{\partial z} = \zeta^2 G \exp(2rt) \quad (4.24)$$

$$F(z) \equiv ik \frac{|B|^2 (q^2 - q^{*2})}{4|q|^2 (2r - \nu (q + q^*)^2)} \exp((q + q^*)z) + \\ + \left(\frac{iA^*B (q^2 - k^2)}{4q (2r - \nu (q + k)^2)} \exp((q + k)z) + C.C. \right)$$

$$G \equiv \frac{1}{4} (k^2 (2A + 3B) - Bq^2 + C.C.).$$

По явному виду правой части (4.23) — (4.24) методом неопределенных коэффициентов несложно найти подстановку:

$$u_a = u_b + u_c \quad (4.25)$$

$$u_b \equiv u_b(z, t) = \zeta^2 ik \frac{|B|^2 (q^2 - q^{*2})}{4|q|^2 (2r - \nu (q + q^*)^2)} \exp(2rt + (q + q^*)z) + \\ + \zeta^2 \left(\frac{iA^*B (q^2 - k^2)}{4q (2r - \nu (q + k)^2)} \exp(2rt + (q + k)z) + C.C. \right), \quad (4.26)$$

редуцирующую задачу (4.23) — (4.24) в задачу с однородным уравнением:

$$z < 0 : \quad \frac{\partial u_c}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2} = 0; \quad z = 0 : \quad \frac{\partial u_c}{\partial z} = \zeta^2 \Lambda \exp(2rt). \quad (4.27)$$

$$\Lambda \equiv -ik \frac{|B|^2 (q^2 - q^{*2}) (q + q^*)}{4|q|^2 (2r - \nu (q + q^*)^2)} + \\ + \left(\frac{1}{4} (k^2 (2A + 3B) - q^2 B) - i \frac{A^* B (q^2 - k) (q + k)}{q (2r - \nu (q + k)^2)} + C.C. \right)$$

Таким образом, нециклическая часть решения задачи второго порядка малости (см. (4.25)) состоит из компоненты $u_b \equiv u_b(t, z)$, определенной выражением (4.26), и компоненты $u_c \equiv u_c(t, z)$, являющейся решением задачи (4.27). Решение будет однозначным, если задачу (4.27) дополнить начальным условием, задающим вид функции $u_c(t, z)$ в начальный момент времени.

Для определения средней скорости дрейфового движения воспользуемся формулой (2.25) и методикой пересчета известного эйлерова поля скоростей в лагранжево. описанной в пункте 2.4. Окончательное выражение для скорости дрейфа складывается из нециклических слагаемых w_d , полученных при вычислении интегралов в (2.25), а также из u_b и u_c :

$$U_{drift} = w_d + u_b + u_c; \quad (4.28)$$

$$w_d = \zeta^2 \frac{\exp(2rt)}{2|S|^2} (2|A|^2 k \omega \exp(2kz) + M_0 \exp(2\beta z) + \\ + (M_1 \cos(\eta z) + M_2 \sin(\eta z)) \exp((k + \beta)z)) \quad (4.29)$$

$$M_0 = k|B|^2 \text{Im} \left(\left(\frac{q}{q^*} + 1 \right) S \right); \\ M_1 = \text{Im} \left(A^* B \left(qS - \frac{k^2}{q} S^* \right) \right) + 2\text{Re}(AB^*) k \text{Im}(S); \\ M_2 = \text{Re} \left(A^* B \left(qS - \frac{k^2}{q} S^* \right) \right) + 2\text{Im}(AB^*) k \text{Im}(S).$$

Компонента u_b вычисляется по формуле (4.26), а слагаемое u_c , являясь решением задачи (4.27) определяется формулой:

$$u_c \equiv u_c(z, t) = \zeta^2 \Lambda \left(\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\eta)}\right) \frac{\exp(2r\eta)}{\sqrt{t-\eta}} d\eta + \sqrt{\frac{1}{\pi\nu t}} \int_0^\infty \left(\exp\left(-\frac{(z-\sigma)^2}{4\nu t}\right) + \exp\left(-\frac{(z+\sigma)^2}{4\nu t}\right) \right) \Psi(\sigma) d\sigma \right); \quad (4.30)$$

$$\Psi(z) \equiv u_c(0, z)$$

В пределе, когда отсутствует плёнка ПАВ ($\Pi = 0$) с помощью известных асимптотических соотношений [140]

$$\frac{r}{\omega_0} = -2N + O(N^{3/2}); \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + O(N^{3/2});$$

$$\frac{q}{k} = \frac{1+i}{\sqrt{2N}} - \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \sqrt{N} - iN + O(N^{3/2})$$

несложно найти приближенные выражения для первых двух слагаемых w_d и u_b суммы (4.28), справедливые в приближении малой вязкости ($N \ll 1$):

$$w_d \approx \zeta^2 k \omega_0 \exp(-4\nu k^2 t) - \zeta^2 k \omega_0 \cos\left(z \sqrt{\frac{\omega_0}{2\nu}}\right) \exp\left(\left(k + \sqrt{\frac{\omega_0}{2\nu}}\right) z\right) \exp(-4\nu k^2 t);$$

$$u_b \approx \zeta^2 k \omega_0 \cos\left(z \sqrt{\frac{\omega_0}{2\nu}}\right) \exp\left(\left(k + \sqrt{\frac{\omega_0}{2\nu}}\right) z\right) \exp(-4\nu k^2 t).$$

Из этих приближенных равенств следует, что при малой вязкости:

$$w_d + u_b \approx \zeta^2 k \omega_0 \exp(kz) \exp(-4\nu k^2 t).$$

Получившееся справа выражение с точностью до множителя $\exp(-4\nu k^2 t)$, учитывающего вязкую диссипацию, совпадает с классической формулой для скорости дрейфа Стокса и переходит в эту формулу при $\nu = 0$. Принципиально, что не отдельные слагаемые, а именно их сумма $w_d + u_b$ реализует асимптотическое соответствие между моделями дрейфа в вязкой и в идеальной жидкости. При произвольной вязкости скорость суммарного течения $w_d + u_b$ сохраняет экспоненциальный характер зависимости от своих аргументов. Чтобы подчеркнуть преемственность свойств течения $w_d + u_b$ по отношению к классической модели, его предложено назвать «Модифицированный дрейф Стокса» [121].

Компонента u_c среднего течения (4.28) не экспоненциальным, а более сложным образом зависит от своих аргументов (4.30). В отсутствие плёнки ПАВ свойства этой части дрейфа подробно обсуждались в [121], где было показано, что u_c отвечает за «добавочное течение», возникающее благодаря средним горизонтальным вязким напряжениям, действующим между горизонтальными слоями жидкости,двигающимися в среднем с разными скоростями. Интересно отметить, что при достижении упругости плёнки ПАВ своего характерного значения Π^* помимо эффекта максимального гашения достигается еще и максимум амплитудного множителя Λ в выражении для компоненты u_c дрейфовой скорости (4.30). Это логично, при этом значении упругости значение касательных напряжений такое, что наиболее эффективно энергия переходит от капиллярно-гравитационного волнового движения к движению Марангони, с которым и связано слагаемое u_c .

Рассмотрим влияние упругости плёнки ПАВ на динамику дрейфового движения. На рисунках 4.9 – 4.11 изображены зависимости скорости дрейфа (4.28) от глубины в различные моменты времени.

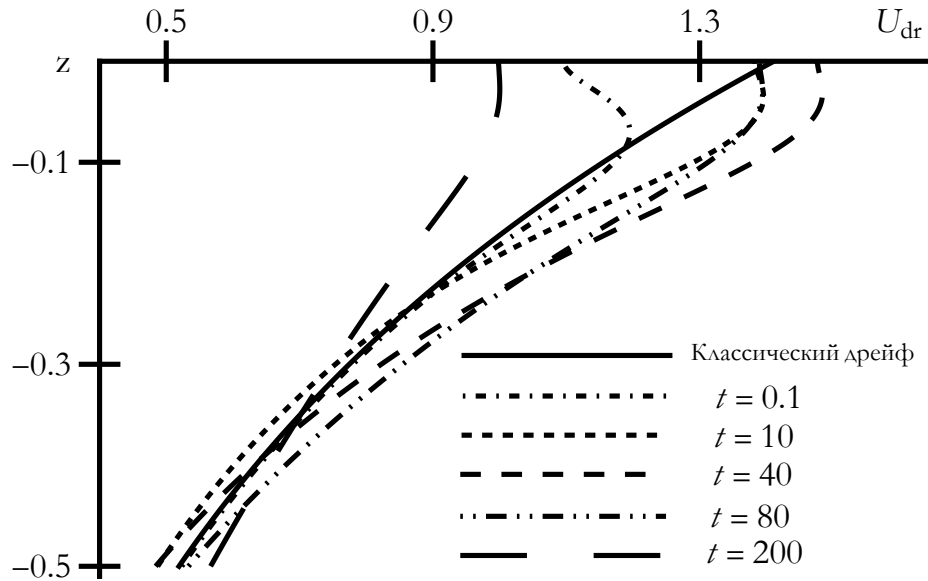


Рисунок 4.9 — Скорость дрейфа в вязкой жидкости в разные моменты времени, покрытой плёнкой ПАВ со значением безразмерной упругости

$$\Pi \simeq 0.1\Pi_B^* = -0.01.$$

Все построения выполнены в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma_0 = 1$ для жидкости с параметрами воды (безразмерная кинематическая вязкость $\nu = 0.002$), по поверхности которой распространяется волна с безразмерным волновым числом $k = 1$. Построения на рисунке 4.9 выполнены

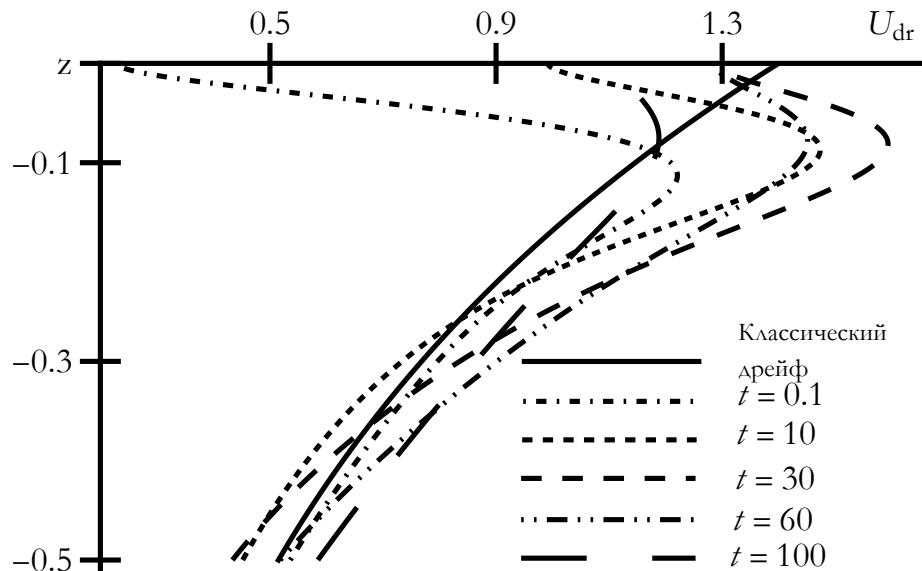


Рисунок 4.10 — Скорость дрейфа в вязкой жидкости в разные моменты времени, покрытой плёнкой ПАВ со значением безразмерной упругости

$$\Pi \simeq \Pi_B^* = -0.102.$$

для плёнки ПАВ с малой безразмерной упругостью составляющей одну десятую часть от характерной упругости, при которой сравниваются круговые частоты капиллярно-гравитационных волн и волн Марангони и достигается максимальный эффект гашения для этой длины волны $0.1\Pi_B^*$. Зависимости на рисунках 4.10 и 4.11 построены при характерном значении упругости Π_B^* и в 10 раз её превышающей $10\Pi_B^*$ соответственно. Для сравнения на каждом графике сплошной линией построен профиль классической скорости дрейфа Стокса в идеальной жидкости.

Поскольку целью ставилась демонстрация работы метода расчета скорости дрейфа, все построения выполнены в наиболее простом случае при нулевых начальных условиях для компоненты скорости дрейфа u_c (4.30). При необходимости несложно провести расчеты при произвольных начальных условиях, но при этом будет сложнее определить физический смысл полученных зависимостей.

Из рисунков 4.9 – 4.11 видно, что с увеличением упругости плёнки ПАВ возрастает влияние компоненты, отвечающей за «добавочное течение» вблизи поверхности жидкости. Однако с ростом упругости также увеличивается декремент затухания волнового движения, что приводит к более быстрым темпам затухания скорости дрейфа. Вдали от поверхности жидкости упругие натяжения не играют заметной роли и скорость дрейфа практически совпадает

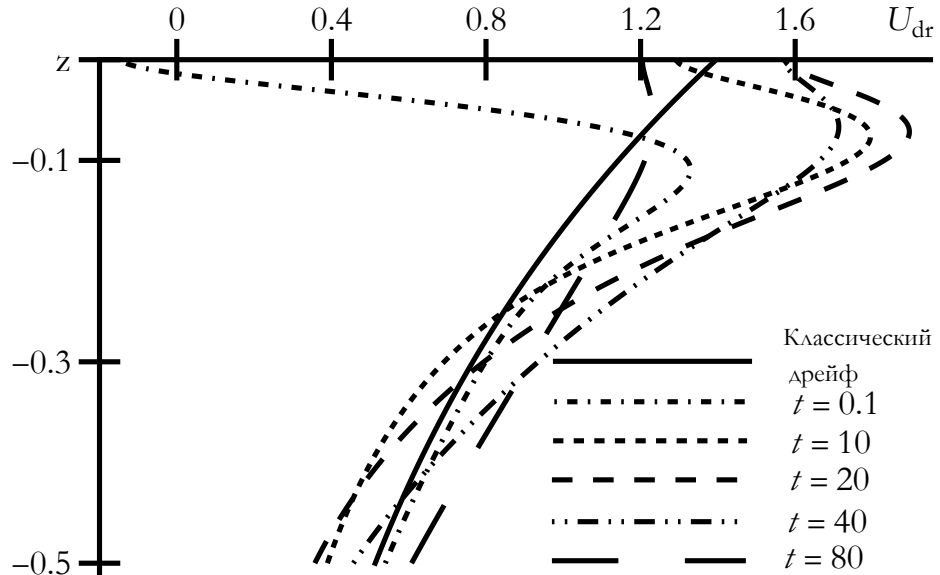


Рисунок 4.11 — Скорость дрейфа в вязкой жидкости в разные моменты времени, покрытой плёнкой ПАВ со значением безразмерной упругости $\Pi \simeq 10\Pi_B^* = -1.02$.

экспоненциально затухающей скоростью дрейфа Стокса за счет сил вязкого трения.

4.8 Траектории движения жидких частиц в присутствии плёнки ПАВ

Следуя концепции определения траекторий движения индивидуальных частиц жидкости с точностью до лидирующих слагаемых каждого типа движения применим методику, описанную в главе 2 по отношению к вязкой жидкости, покрытой ПАВ. Для этого необходимо определить скорость индивидуальной частицы жидкости в описании Лагранжа. С учетом влияния дрейфа (4.28) на круговую частоту волнового движения выражения для горизонтальной и вертикальной компонент лагранжевых скоростей запишутся следующим образом:

$$u_L(x_0, z_0, t) = \frac{\zeta}{2} (Ae^{kz_0} + Be^{qz_0}) e^{(S-ik(w_d+u_b+u_c))t-ikx} + C.C.; \quad (4.31)$$

$$v_L(x_0, z_0, t) = \frac{i\zeta}{2} \left(Ae^{kz_0} + \frac{Bk}{q} e^{qz_0} \right) e^{(S-ik(w_d+u_b+u_c))t-ikx} + C.C. \quad (4.32)$$

Интегрируя выражения (4.31) и (4.32) по времени и учитывая поправку на горизонтальный дрейф можно получить выражения, описывающие траектории

движения индивидуальных частиц жидкости, аналогичные выражениям (3.35) и (3.36):

$$X = x_0 + \int_0^t u_L(x_0, z_0, \tau) d\tau + (w_d + u_b + u_c) t \quad (4.33)$$

$$Z = z_0 + \int_0^t v_L(x_0, z_0, \tau) d\tau \quad (4.34)$$

Построить аналитическую параметрическую кривую по выражениям (4.33), (4.34) не представляется возможным из-за того, что скорость дрейфового движения (4.28) явным образом зависит от времени. Однако качественное описание картины движения жидких частиц можно выполнить и без аналитического выражения для траектории.

4.9 Заключение

При распространении капиллярно–гравитационной волны по поверхности жидкости, покрытой плёнкой ПАВ, вместе с волновым возмущением поверхности наблюдается периодическое изменение поверхностной концентрации плёнки. Максимум концентрации ПАВ в этом движении опережает волновое возмущение поверхности по фазе на угол, примерно равный $\pi/2$, что соответствует положению примерно на уровне середины склона волны, спускающемуся в направлении её распространения (срез волны). По положению максимума концентрации ПАВ можно судить о возможном увеличении эффективности применения ПАВ для гашения волнового движения. Если максимум концентрации ПАВ находится вблизи вершины горба, то увеличение концентрации приведет к усилению эффекта ослабления волн. При нахождении максимума концентрации ПАВ вблизи впадины волнового возмущения для усиления гашения волн необходимо уменьшить среднюю концентрацию ПАВ. Если же максимум концентрации находится вблизи середины среза волны, то максимальный эффект достигнут и ни уменьшение, ни увеличение поверхностной концентрации его не усилят. В этом случае эффективным способом будет только сменить род ПАВ.

Условия при которых экстремальна быстрота затухания капиллярно–гравитационного движения совпадают с условиями максимальной одной из

дрейфовых компонент. Увеличение вязкости уменьшит отчетливость обнаружения этого эффекта.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработана аналитическая асимптотическая методика перехода от описания поля скоростей в переменных Эйлера к описанию в переменных Лагранжа. Методика позволяет единообразно совершать аналитический асимптотический переход для многослойных систем с волновым движением и тангенциальным разрывом поля скоростей на границах слоёв.
2. Обнаружено новое свойство неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, заключающееся в формировании дрейфовых течений в контактирующих жидкостях, направленных таким образом, чтобы скомпенсировать тангенциальный разрыв скоростей, инициировавший неустойчивость. Найдена, связанная с наличием обнаруженного эффекта, поправка к скорости относительного движения жидких слоёв.
3. Аналитически описано влияние поверхностного электрического заряда на траектории движения индивидуальных частиц жидкости и на скорость дрейфа, связанного с распространением по поверхности жидкости капиллярно–гравитационных волн. Поверхностный электрический заряд уменьшает скорость дрейфовых движений, за счет уменьшения угловой частоты волнового движения (увеличения эйлерова периода) и увеличивает лагранжев период волнового движения (уменьшает частоту обращения индивидуальной частицы жидкости вокруг среднего положения).
4. Аналитически описано влияние амплитудной модуляции капиллярно–гравитационного волнового возмущения поверхности жидкости, на скорость инициируемого дрейфа и траектории движения индивидуальных частиц жидкости. При распространении волнового пакета Стокса вдоль поверхности жидкости средние дрейфовые течения оказываются примерно вдвое меньшими по сравнению с течениями, связанными с распространением простейшей синусоидальной волны.
5. Аналитически определены скорости дрейфового течения, инициируемого волновым движением вдоль поверхности вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, покрытой плёнкой поверхностно–активного

- вещества. Выделены составляющие дрейфового движения, затухание которых с глубиной носит экспоненциальный характер и являющиеся преемственными классическому дрейфу Стокса и составляющие, связанные с наличием упругих напряжений между слоями вязкой жидкости. Определено влияние ПАВ на эти компоненты скорости дрейфа.
6. Разработано аналитическое представление о перераспределении поверхностно-активного вещества, обусловленного распространением капиллярно-гравитационной волны по поверхности несжимаемой ньютоновской жидкости произвольной вязкости. Показано, что в условиях наиболее сильного гашения капиллярно-гравитационных волн плёнкой ПАВ максимумы концентрации вещества плёнки располагаются на среднем уровне искаженной волновой поверхности.
 7. Проанализировано влияние скорости движения идеальной среды над поверхностью вязкой ньютоновской жидкости на гашение волн упругой плёнкой ПАВ. Рассматривались докритические в смысле реализации неустойчивости тангенциального разрыва, значения скоростей. Показано, что увеличение скорости относительного движения сред существенно уменьшает значение модуля упругости плёнки ПАВ, при котором гашение капиллярно-гравитационных волн наиболее эффективно.

Список литературы

1. *Andrews, D. G.* An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian-mean flow / D. G. Andrews, M. E. McIntyre // Journal of fluid Mechanics. — 1978. — Vol. 89, no. 4. — P. 609—645.
2. *Belonozhko, D. F.* Mass transfer – advanced aspects / D. F. Belonozhko, A. A. Ochirov // / ed. by H. Nakajima. — InTech, 2011. — Chap. 3 On a Role of Viscosity in Phenomena of Mass Transfer Caused by Nonlinear Periodic Waves Propagating Over the Liquid Surface. P. 39—58.
3. *Belonozhko, D. F.* On the drift properties of a wave packet propagating along a charged surface of a liquid / D. F. Belonozhko, A. A. Ochirov // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. — 2014. — Vol. 50, no. 4. — P. 317—322.
4. *Belonozhko, D. F.* On wave mass transfer along charged surface blown by dielectric medium / D. F. Belonozhko, A. A. Ochirov // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. — 2016. — Vol. 52, no. 1. — P. 92—98.
5. *Chang, H.-K.* Particle trajectories of nonlinear gravity waves in deep water / H.-K. Chang, Y.-Y. Chen, J.-C. Liou // Ocean Engineering. — 2009. — Vol. 36, no. 5. — P. 324—329.
6. *Chang, H.-K.* Particle trajectory and mass transport of finite-amplitude waves in water of uniform depth / H.-K. Chang, J.-C. Liou, M.-Y. Su // European journal of mechanics-B/Fluids. — 2007. — Vol. 26, no. 3. — P. 385—403.
7. *Chang, M.-S.* Mass transport in deep-water long-crested random gravity waves / M.-S. Chang // Journal of Geophysical Research. — 1969. — Vol. 74, no. 6. — P. 1515—1536.
8. *Chang, M.-S.* Reply [to “Discussion of paper by Ming-Shun Chang, ‘The mass transport in deep-water long-crested random gravity waves’”] / M.-S. Chang // Journal of Geophysical Research. — 1970. — Vol. 75, no. 12. — P. 2213—2213.

9. *Chashechkin, Y. D.* Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves / Y. D. Chashechkin // Mathematical modelling of natural phenomena. — 2018. — Vol. 13, no. 2. — P. 1–29.
10. *Chashechkin, Y. D.* Waves, Vortices and Ligaments in Fluid Flows of Different Scales / Y. D. Chashechkin // Physics & Astronomy International Journal. — 2018. — Vol. 2, no. 2. — P. 105–108.
11. *Chashechkin, Y. D.* Formation of waves, vortices and ligaments in 2D stratified flows around obstacles / Y. D. Chashechkin, I. V. Zagumennyi // Physica Scripta. — 2019. — Vol. 94, no. 5. — P. 054003.
12. *Chen, Y.-Y.* Lagrangian experiment and solution for irrotational finite-amplitude progressive gravity waves at uniform depth / Y.-Y. Chen, H.-C. Hsu, G.-Y. Chen // Fluid dynamics research. — 2010. — Vol. 42, no. 4. — P. 045511.
13. *Christensen, K. H.* Drift and deformation of oil slicks due to surface waves / K. H. Christensen, E. Terrile // Journal of Fluid Mechanics. — 2009. — Vol. 620. — P. 313–332.
14. *Christensen, K. H.* Drift of an inextensible sheet caused by surface waves / K. H. Christensen, J. E. H. Weber // Environmental Fluid Mechanics. — 2005. — Vol. 5, no. 5. — P. 495–505.
15. *Christensen, K. H.* Wave-induced drift of large floating sheets / K. H. Christensen, J. E. H. Weber // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. — 2005. — Vol. 99, no. 6. — P. 433–443.
16. *Clamond, D.* On the Lagrangian description of steady surface gravity waves / D. Clamond // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Vol. 589. — P. 433–454.
17. *Constantin, A.* On the deep water wave motion / A. Constantin // Journal of Physics A: Mathematical and general. — 2001. — Vol. 34, no. 7. — P. 1405.
18. *Constantin, A.* The trajectories of particles in Stokes waves / A. Constantin // Inventiones mathematicae. — 2006. — Vol. 166, no. 3. — P. 523–535.
19. *Constantin, A.* Particle trajectories in linear deep-water waves / A. Constantin, M. Ehrnström, G. Villari // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2008. — Vol. 9, no. 4. — P. 1336–1344.

20. *Constantin, A.* Particle trajectories in linear water waves / A. Constantin, G. Villari // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. — 2008. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–18.
21. *Coy, L.* The Stokes drift due to vertically propagating internal gravity waves in a compressible atmosphere / L. Coy, D. C. Fritts, J. Weinstock // Journal of the atmospheric sciences. — 1986. — Vol. 43, no. 22. — P. 2636–2643.
22. *Craik, A. D. D.* The drift velocity of water waves / A. D. D. Craik // Journal of Fluid Mechanics. — 1982. — Vol. 116. — P. 187–205.
23. *Curcic, M.* Hurricane-induced ocean waves and stokes drift and their impacts on surface transport and dispersion in the Gulf of Mexico / M. Curcic, S. S. Chen, T. M. Özgökmen // Geophysical Research Letters. — 2016. — Vol. 43, no. 6. — P. 2773–2781.
24. *Darwin, C.* Note on hydrodynamics / C. Darwin // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 49. — Cambridge University Press. 1953. — P. 342–354.
25. *Dore, B. D.* A double boundary-layer model of mass transport in progressive interfacial waves / B. D. Dore // Journal of Engineering Mathematics. — 1978. — Vol. 12, no. 4. — P. 289–301.
26. *Dore, B. D.* Double boundary layers in standing interfacial waves / B. D. Dore // Journal of Fluid Mechanics. — 1976. — Vol. 76, no. 4. — P. 819–828.
27. *Dore, B. D.* Double boundary layers in standing surface waves / B. D. Dore // pure and applied geophysics. — 1976. — Vol. 114, no. 4. — P. 629–637.
28. *Dore, B. D.* Mass transport in layered fluid systems / B. D. Dore // Journal of Fluid Mechanics. — 1970. — Vol. 40, no. 1. — P. 113–126.
29. *Dore, B. D.* On mass transport induced by interfacial oscillations at a single frequency / B. D. Dore // Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society. Vol. 74. — Cambridge University Press. 1973. — P. 333–347.
30. *Dore, B. D.* On mass transport velocity due to progressive waves / B. D. Dore // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1977. — Vol. 30, no. 2. — P. 157–173.

31. *Dore, B. D.* Some effects of the air-water interface on gravity waves / B. D. Dore // *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*. — 1978. — Vol. 10, no. 1. — P. 215–230.
32. *Dore, B. D.* The mass transport velocity due to interacting wave trains / B. D. Dore // *Meccanica*. — 1974. — Vol. 9, no. 3. — P. 172–178.
33. *Eames, I.* On the connection between Stokes drift and Darwin drift / I. Eames, M. E. McIntyre // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 126. — Cambridge University Press. 1999. — P. 171–174.
34. *Ehrnström, M.* Deep-water waves with vorticity: symmetry and rotational behaviour / M. Ehrnström // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. — 2007. — Vol. 19, no. 3. — P. 483.
35. *Ehrnström, M.* On the streamlines and particle paths of gravitational water waves / M. Ehrnström // *Nonlinearity*. — 2008. — Vol. 21, no. 5. — P. 1141.
36. *Ehrnström, M.* Recent progress on particle trajectories in steady water waves / M. Ehrnström, G. Villari // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*. — 2009. — Vol. 12, no. 3. — P. 539–559.
37. *Grue, J.* Experimental particle paths and drift velocity in steep waves at finite water depth / J. Grue, J. Kolaas // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2017. — Vol. 810.
38. *Harris, D. L.* The wave-driven wind / D. L. Harris // *Journal of the Atmospheric Sciences*. — 1966. — Vol. 23, no. 6. — P. 688–693.
39. *Harrison, W. J.* The influence of viscosity and capillarity on waves of finite amplitude / W. J. Harrison // *Proceedings of the London Mathematical Society*. — 1909. — Vol. 2, no. 1. — P. 107–121.
40. *Henry, D.* Particle trajectories in linear periodic capillary and capillary-gravity water waves / D. Henry // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2007. — Vol. 365, no. 1858. — P. 2241–2251.
41. *Henry, D.* Particle trajectories in linear periodic capillary and capillary-gravity deep-water waves / D. Henry // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. — 2007. — Vol. 14, no. 1. — P. 1–7.

42. *Henry, D.* The trajectories of particles in deep-water Stokes waves / D. Henry // International Mathematics Research Notices. — 2006. — Vol. 2006.
43. *Herreman, W.* Stokes drift dynamos / W. Herreman, P. Lesaffre // Journal of Fluid Mechanics. — 2011. — Vol. 679. — P. 32–57.
44. *Hsu, H.-C.* Particle trajectories for waves on a linear shear current / H.-C. Hsu // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2013. — Vol. 14, no. 5.
45. *Huang, N. E.* Discussion of paper by Ming-Shun Chang, “The mass transport in deep-water long-crested random gravity waves” / N. E. Huang // Journal of Geophysical Research. — 1970. — Vol. 75, no. 12. — P. 2211–2212.
46. *Huang, N. E.* Mass transport induced by wave motion. / N. E. Huang // J Mar Res. — 1970. — Vol. 28. — P. 35–50.
47. *Iskandarani, M.* Mass transport in three-dimensional water waves / M. Iskandarani, P. L.-F. Liu // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — Vol. 231. — P. 417–437.
48. *Iskandarani, M.* Mass transport in two-dimensional water waves / M. Iskandarani, P. L.-F. Liu // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — Vol. 231. — P. 395–415.
49. *Joseph, D. D.* Domain perturbations: the higher order theory of infinitesimal water waves / D. D. Joseph // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1973. — Vol. 51, no. 4. — P. 295–303.
50. *Kang, K. H.* Prediction of drift in a free surface / K. H. Kang, C. M. Lee // Ocean engineering. — 1996. — Vol. 23, no. 3. — P. 243–255.
51. *Kistovich, A. V.* Propagating Stationary Surface Potential Waves in a Deep Ideal Fluids / A. V. Kistovich, Y. D. Chashechkin // Water Resources. — 2018. — Vol. 45, no. 5. — P. 719–727.
52. *Kumar, N.* The effect of Stokes drift and transient rip currents on the inner shelf. Part I: No stratification / N. Kumar, F. Feddersen // Journal of Physical Oceanography. — 2017. — Vol. 47, no. 1. — P. 227–241.

53. *Kumar, N.* The effect of Stokes drift and transient rip currents on the inner shelf. Part II: With stratification / N. Kumar, F. Feddersen // *Journal of Physical Oceanography*. — 2017. — Vol. 47, no. 1. — P. 243–260.
54. *Lamb, H.* *Hydrodynamics* / H. Lamb. — University Press, 1932.
55. *Law, A. W. K.* Wave-induced surface drift of an inextensible thin film / A. W. K. Law // *Ocean engineering*. — 1999. — Vol. 26, no. 11. — P. 1145–1168.
56. *Liapidevskii, V. Y.* On the velocity of turbidity currents over moderate slopes / V. Y. Liapidevskii, D. Dutykh // *Fluid Dynamics Research*. — 2019. — Vol. 51, no. 3. — P. 035501.
57. *Liu, A.-K.* Viscous attenuation of mean drift in water waves / A.-K. Liu, S. H. Davis // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1977. — Vol. 81, no. 1. — P. 63–84.
58. *Longuet-Higgins, M. S.* The trajectories of particles in steep, symmetric gravity waves / M. S. Longuet-Higgins // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1979. — Vol. 94, no. 3. — P. 497–517.
59. *Longuet-Higgins, M. S.* Eulerian and Lagrangian aspects of surface waves / M. S. Longuet-Higgins // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1986. — Vol. 173. — P. 683–707.
60. *Longuet-Higgins, M. S.* A nonlinear mechanism for the generation of sea waves / M. S. Longuet-Higgins // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. — 1969. — Vol. 311, no. 1506. — P. 371–389.
61. *Longuet-Higgins, M. S.* Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface / M. S. Longuet-Higgins // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1960. — Vol. 8, no. 2. — P. 293–306.
62. *Longuet-Higgins, M. S.* Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface / M. S. Longuet-Higgins // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1960. — Vol. 8, no. 2. — P. 293–306.
63. *Longuet-Higgins, M. S.* Mass transport in water waves / M. S. Longuet-Higgins // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. — 1953. — Vol. 245, no. 903. — P. 535–581.

64. *Longuet-Higgins, M. S.* On the transport of mass by time-varying ocean currents / M. S. Longuet-Higgins // Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts. Vol. 16. — Elsevier. 1969. — P. 431—447.
65. *Lucassen-Reynders, E. H.* / E. H. Lucassen-Reynders, J. Lucassen // Adv. Colloid Interface Sci. — 1969. — Vol. 2. — P. 347.
66. *Madsen, O. S.* Mass transport in deep-water waves / O. S. Madsen // Journal of Physical Oceanography. — 1978. — Vol. 8, no. 6. — P. 1009—1015.
67. *Marin, F.* Eddy viscosity and Eulerian drift over rippled beds in waves / F. Marin // Coastal Engineering. — 2004. — Vol. 50, no. 3. — P. 139—159.
68. *McGoldrick, L. F.* On the rippling of small waves: a harmonic nonlinear nearly resonant interaction / L. F. McGoldrick // Journal of Fluid Mechanics. — 1972. — Vol. 52, no. 4. — P. 725—751.
69. Microplastic and mesoplastic contamination in canned sardines and sprats / A. Karami [et al.] // Science of the Total Environment. — 2018. — Vol. 612. — P. 1380—1386.
70. *Mizev, A. I.* Influence of an adsorption layer on the structure and stability of surface tension driven flows / A. I. Mizev // Physics of Fluids. — 2005. — Vol. 17, no. 12. — P. 122107.
71. *Mizev, A. I.* Interaction between buoyant and solutocapillary convections induced by a surface-active source placed under the free surface / A. I. Mizev, R. V. Birikh // The European Physical Journal Special Topics. — 2011. — Vol. 192, no. 1. — P. 145—153.
72. *Monismith, S. G.* Hydrodynamics of coral reefs / S. G. Monismith // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2007. — Vol. 39. — P. 37—55.
73. *Nayfeh, A. H.* The method of multiple scales and non-linear dispersive waves / A. H. Nayfeh, S. D. Hassan // Journal of Fluid Mechanics. — 1971. — Vol. 48, no. 3. — P. 463—475.
74. New solutions for solving problem of particle trajectories in linear deep-water waves via Lie-group method / M. B. Abd-el-Malek [et al.] // Applied Mathematics and Computation. — 2013. — Vol. 219, no. 24. — P. 11365—11375.

75. Ocean circulation, Stokes drift, and connectivity of western rock lobster (*Panulirus cygnus*) population / M. Feng [et al.] // Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences. — 2010. — Vol. 68, no. 7. — P. 1182–1196.
76. *Ochirov, A. A.* About liquid particle motion near charged interface between conductive and dielectric liquids / A. A. **Ochirov**, D. F. Belonozhko // Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики. Сборник докладов XI Международной конференции 29 июня – 3 июля 2015 года. Санкт-Петербург. — СПб : ИД «Петроградский», 2015. — С. 281–283.
77. *Okamoto, H.* Trajectories of fluid particles in a periodic water wave / H. Okamoto, M. Shōji // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2012. — Vol. 370, no. 1964. — P. 1661–1676.
78. *Phillips, O. M.* The dynamics of the upper ocean / O. M. Phillips. — Cambridge university press, 1966.
79. *Piedra-Cueva, I.* Drift velocity of spatially decaying waves in a two-layer viscous system / I. Piedra-Cueva // Journal of Fluid Mechanics. — 1995. — Vol. 299. — P. 217–239.
80. *Piedra-Cueva, I.* Drift velocity of spatially decaying waves in a two-layer viscous system / I. Piedra-Cueva // Oceanographic Literature Review. — 1996. — Vol. 4, no. 43. — P. 331.
81. *Pierson Jr., W. J.* Perturbation analysis of the Navier-Stokes equations in Lagrangian form with selected linear solutions / W. J. Pierson Jr. // Journal of Geophysical Research. — 1962. — Vol. 67, no. 8. — P. 3151–3160.
82. Rayleigh–Benard–Marangoni convection in a weakly non-Boussinesq fluid layer with a deformable surface / D. V. Lyubimov [et al.] // Physics of Fluids. — 2018. — Vol. 30, no. 2. — P. 024103.
83. *Ridler, E. L.* Effect of bed roughness on time-mean drift induced by waves / E. L. Ridler, J. F. A. Sleath // Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering. — 2000. — Vol. 126, no. 1. — P. 23–29.
84. *Russell, R. C. H.* An experimental investigation of drift profiles in a closed channel / R. C. H. Russell, J. D. C. Osorio // Coastal Engineering Proceedings. — 1957. — Vol. 1, no. 6. — P. 10.

85. *Sakakiyama, T.* Mass transport velocity in mud layer owing to progressive waves. Report of Coastal Engineering Group / T. Sakakiyama, E. W. Bijker // Coastal Engineering Division, Delft University of Technology. — 1989. — P. 104.
86. Sedimentation of particles in shear flows of fluids with fibers / A. V. Bazilevsky [et al.] // Rheologica Acta. — 2016. — Vol. 55, no. 1. — P. 11–22.
87. Sedimentation of particles in shear flows of viscoelastic fluids with fibers / A. V. Bazilevsky [et al.] // Rheologica Acta. — 2017. — Vol. 56, no. 10. — P. 787–799.
88. Selective transport of microplastics and mesoplastics by drifting in coastal waters / A. Isobe [et al.] // Marine pollution bulletin. — 2014. — Vol. 89, no. 1/2. — P. 324–330.
89. *Shnirelman, A.* On the analyticity of particle trajectories in the ideal incompressible fluid / A. Shnirelman // arXiv preprint arXiv:1205.5837. — 2012.
90. *Soboleva, E. B.* Density-driven convection in an inhomogeneous geothermal reservoir / E. B. Soboleva // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2018. — Vol. 127. — P. 784–798.
91. Stokes drift for inertial particles transported by water waves / F. Santamaria [et al.] // EPL (Europhysics Letters). — 2013. — Vol. 102, no. 1. — P. 14003.
92. *Stokes, G.* On the theory of oscillatory waves / G. Stokes // Trans. Camb. — 1847. — P. 314–326.
93. The damping of ocean surface waves by a monomolecular film measured by wave staffs and microwave radars / H. Hühnerfuss [et al.] // Journal of Geophysical Research: Oceans. — 1981. — Vol. 86, no. C1. — P. 429–438.
94. *Tonks, L.* A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field / L. Tonks // Physical Review. — 1935. — Vol. 48, no. 6. — P. 562.
95. *Tsuchiya, Y.* Mass transport in progressive waves of permanent type / Y. Tsuchiya, T. Yasuda, T. Yamashita // Coastal Engineering 1980. — 1980. — P. 70–81.

96. *Umeyama, M.* Eulerian–Lagrangian analysis for particle velocities and trajectories in a pure wave motion using particle image velocimetry / M. Umeyama // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2012. — Vol. 370, no. 1964. — P. 1687–1702.
97. *Umeyama, M.* Measurements of velocity and trajectory of water particle for internal waves in two density layers / M. Umeyama, S. Matsuki // Geophysical Research Letters. — 2011. — Vol. 38, no. 3.
98. *Ünlüata, Ü.* Mass transport in water waves / Ü. Ünlüata, C. C. Mei // Journal of Geophysical Research. — 1970. — Vol. 75, no. 36. — P. 7611–7618.
99. Wave-induced transport and vertical mixing of pelagic eggs and larvae / J. Röhrs [et al.] // Limnology and Oceanography. — 2014. — Vol. 59, no. 4. — P. 1213–1227.
104. *Weber, J. E. H.* An interfacial Gerstner-type trapped wave / J. E. H. Weber // Wave Motion. — 2018. — Vol. 77. — P. 186–194.
101. *Weber, J. E. H.* Attenuated wave-induced drift in a viscous rotating ocean / J. E. H. Weber // Journal of Fluid Mechanics. — 1983. — Vol. 137. — P. 115–129.
102. *Weber, J. E. H.* Steady wind-and wave-induced currents in the open ocean / J. E. H. Weber // Journal of Physical Oceanography. — 1983. — Vol. 13, no. 3. — P. 524–530.
103. *Weber, J. E. H.* Wave attenuation and wave drift in the marginal ice zone / J. E. H. Weber // Journal of physical oceanography. — 1987. — Vol. 17, no. 12. — P. 2351–2361.
105. *Weber, J. E. H.* Eulerian versus Lagrangian approaches to the wave-induced transport in the upper ocean / J. E. H. Weber, G. Broström, Ø. Saetra // Journal of Physical oceanography. — 2006. — Vol. 36, no. 11. — P. 2106–2118.
106. *Weber, J. E. H.* Mean drift induced by free and forced dilational waves / J. E. H. Weber, K. H. Christensen // Physics of Fluids. — 2003. — Vol. 15, no. 12. — P. 3703–3709.
107. *Weber, J. E. H.* Effect of an Insoluble Surface Film on the Drift Velocity of Capillary–Gravity Waves / J. E. H. Weber, E. Førland // Journal of physical oceanography. — 1989. — Vol. 19, no. 7. — P. 952–961.

100. *Weber, J. E. H.* Effect of the air on the drift velocity of water waves / J. E. H. Weber, E. Førland // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1990. — Vol. 218. — P. 619–640.
108. *Weber, J. E. H.* Transient ocean currents induced by wind and growing waves / J. E. H. Weber, A. Melsom // *Journal of physical oceanography*. — 1993. — Vol. 23, no. 2. — P. 193–206.
109. *Weber, J. E. H.* Effect of film elasticity on the drift velocity of capillary–gravity waves / J. E. H. Weber, O. Saetra // *Physics of Fluids*. — 1995. — Vol. 7, no. 2. — P. 307–314.
110. *Xu, Z.* Wave-and wind-driven flow in water of finite depth / Z. Xu, A. J. Bowen // *Journal of Physical Oceanography*. — 1994. — Vol. 24, no. 9. — P. 1850–1866.
111. *Абрашкин, А. А.* О связи дрейфа Стокса и волны Герстнера / А. А. Абрашкин, Е. Н. Пелиновский // *Успехи физических наук*. — 2018. — Т. 188, № 3. — С. 329–334.
112. *Абрашкин, А. А.* Вихревая динамика в лагранжевом описании / А. А. Абрашкин, Е. И. Якубович. — Litres, 2018.
113. *Абрашкин, А. А.* О плоских вихревых течениях идеальной жидкости / А. А. Абрашкин, Е. И. Якубович // *Доклады Академии наук*. Т. 276. — Российская академия наук. 1984. — С. 76–78.
114. Алгоритм построения точных решений плоской нестационарной задачи о движении жидкости со свободной границей / Е. Н. Журавлева [и др.] // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2019. — Т. 110, № 7. — С. 443–448.
115. *Алешкевич, В. А.* Курс общей физики. Механика / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. — Litres, 2018.
116. *Базилевский, А. В.* Всплески воды с добавками высокомолекулярного полимера / А. В. Базилевский, А. Н. Рожков // *Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018)*. — 2018. — С. 167–170.

117. *Базилевский, А. В.* Всплески воды с добавками поверхностно-активных веществ / А. В. Базилевский, А. Н. Рожков // *Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС'2017)*. — 2017. — С. 374—377.
118. *Базилевский, А. В.* Всплески растворов поверхностно-активных веществ / А. В. Базилевский, А. Н. Рожков // *Материалы 29 Симпозиума по реологии*, г. Тверь, 2018. ISBN 978-5-9905815-7-9. — Институт нефтехимического синтеза им. А.В. Топчиева РАН Москва, 2018. — С. 17—18.
119. *Базилевский, А. В.* Движение сферы по наклонной плоскости в потоке вязкой жидкости / А. В. Базилевский, А. Н. Рожков // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. — 2009. — № 4. — С. 100—112.
120. *Белоножко, Д. Ф.* О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред / Д. Ф. Белоножко, А. И. Григорьев // *Журнал технической физики*. — 2004. — Т. 74, № 11. — С. 22—28.
121. *Белоножко, Д. Ф.* О расчете скорости переноса вещества периодическими волнами, распространяющимися по поверхности вязкой жидкости / Д. Ф. Белоножко, А. В. Козин // *Журнал технической физики*. — 2010. — Т. 80, № 4. — С. 32—40.
122. *Белоножко, Д. Ф.* О расчете скорости переноса вещества периодическими волнами, распространяющимися по поверхности вязкой жидкости / Д. Ф. Белоножко, А. В. Козин // *Журнал технической физики*. — 2010. — Т. 80, № 4.
123. *Белоножко, Д. Ф.* Дрейф в идеальной жидкости, вызванный распространением волнового пакета по ее заряженной свободной поверхности / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров** // *Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере. Материалы X Международной конференции. Ярославль. 4-8 июля 2013 г.* / под ред. А. И. Григорьева. — Ярослав. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. Ярославль : ЯрГУ, 2013. — С. 166—171.

124. *Белоножко, Д. Ф.* О взаимном влиянии волнового движения и характера распределения поверхностно-активного вещества / Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2018. — Т. 82, № 1. — С. 47—51.
125. *Белоножко, Д. Ф.* О дрейфовом течении вблизи горизонтальной поверхности раздела двух жидкостей в условиях реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца / Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров // Динамические системы. — 2015. — Т. 5(33), № 3/4. — С. 215—223.
126. *Белоножко, Д. Ф.* О массопереносе, порожденном волновым возмущением поверхности тангенциального разрыва поля скоростей / Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров // Журнал технической физики. — 2018. — Т. 88, № 5. — С. 675—683.
127. *Белоножко, Д. Ф.* О переносе вещества вдоль границы жидких сред при совместной реализации неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Тонкса-Френкеля / Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров // Дисперсные системы: материалы XXVI международной научной конференции, 22 – 26 сентября 2014 г. — «Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова». Одесса : «Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова», 2014. — С. 148—150.
128. *Белоножко, Д. Ф.* О перераспределении поверхностно-активного вещества при волновом возмущении заряженной поверхности жидкости / Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров // Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики. Сборник докладов XI Международной конференции 29 июня – 3 июля 2015 года. Санкт-Петербург. — СПб : ИД «Петроградский», 2015. — С. 241—243.
129. *Белоножко, Д. Ф.* О поведении жидких частиц, участвующих в волновом движении границы раздела двух движущихся несмешивающихся жидкостей / Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров // Труды школы-семинара «Волны – 2016». Гидродинамические волны и течения. — 2016. — С. 30—33.
130. *Белоножко, Д. Ф.* О поведении жидких частиц, участвующих в волновом движении границы раздела двух движущихся несмешивающихся жидко-

- стей / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров** // Ученые записки физического факультета. — 2016. — № 6. — 166804-1 – 166804—4.
131. *Белоножко, Д. Ф.* О распределении поверхностно-активного вещества вдоль профиля капиллярно-гравитационной волны / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров** // Труды школы-семинара «Волны – 2017». Волновые процессы в неоднородных средах. — 2017. — С. 25—27.
132. *Белоножко, Д. Ф.* О характере движения частичек жидкости около заряженной границы раздела двух сред / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров** // Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере: материалы XI Международной научной конференции (4 – 7 июля 2015 г., Ярославль). — Яросл. гос. университет им. П.Г. Демидова. Ярославль, 2015. — С. 90—93.
133. *Белоножко, Д. Ф.* Об одном механизме генерации поверхностного электрического тока на заряженной поверхности жидкости / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров** // Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере. Материалы VIII Международной конференции. Ярославль. 4-8 июня 2009 г. / под ред. А. И. Григорьева. — Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. Ярославль : ЯргУ, 2009. — С. 146—150.
134. *Белоножко, Д. Ф.* Об одном свойстве неустойчивости Кельвина-Гельмгольца / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров** // Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические процессы. Тезисы докладов XXI Всероссийской школы-конференции молодых ученых. — Геофизическая обсерватория «Борок» – филиал Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта. Ярославль : Филигрань, 2017. — С. 77—78.
135. *Белоножко, Д. Ф.* О движении материальных частиц на возмущенной границе раздела двух вязких жидкостей / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров**, С. Е. Кокин // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. — Ярославль : Издат. дом ЯГТУ, 2017. — С. 8—13.

136. *Белоножко, Д. Ф.* О методике привлечения эффекта Доплера для объяснения разницы в Лагранжевом и Эйлеровом подходах к описанию движения жидкости / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров**, С. Е. Кокин // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. — Ярославль : Издат. дом ЯГТУ, 2016. — С. 179—183.
137. *Белоножко, Д. Ф.* О совместном влиянии ветра и поверхностного электрического заряда на перенос вещества в идеальной жидкости / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров**, И. А. Плевин // Шестьдесят седьмая региональная научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием. 23 апреля 2014г., Ярославль: Ч.1 : тез. Докл. [электронный ресурс]. — ЯГТУ. Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2014. — С. 376.
138. *Белоножко, Д. Ф.* **О закономерностях переноса частиц поверхностно-активного вещества капиллярно-гравитационными волнами** / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров**, О. В. Посудников // **Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского**. — 2011. — Т. 4, № 5. — С. 2010—2012.
139. *Белоножко, Д. Ф.* Об оценке значения поверхностного электрического тока на возмущенной волновым движением заряженной поверхности жидкости. / Д. Ф. Белоножко, А. А. **Очиров**, О. В. Посудников // Современные проблемы электрофизики и электродинамики жидкостей. Сб. докл. IX Междунар. конф. 22-26 июня 2009 г. Санкт-Петербург. — СПб. : СОЛО, 2009. — С. 15—17.
140. *Белоножко, Д. Ф.* О приповерхностном вихревом течении, формирующемся в результате распротранения периодической волны по горизонтальной заряженной поверхности вязкой жидкости / Д. Ф. Белоножко, А. В. Козин // Вестник Ярославского государственного университета им. ПГ Демидова. Серия Естественные и технические науки. — 2009. — № 1. — С. 11—18.
141. *Большакова, Я. Ю.* Личинки светящегося анчоуса *Lampanyctus intricarius* (Mystophidae) из юго-западной части Тихого океана / Я. Ю. Большакова, С. А. Евсеенко // Вопросы ихтиологии. — 2015. — Т. 55, № 4. — С. 482—482.

142. *Букреев, В. И.* Волны на поверхности воды в горизонтально колеблющемся лотке / В. И. Букреев // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Т. 57, № 2. — С. 46—52.
143. Взвешенное органическое вещество по трассе Северного морского пути / А. А. Ветров [и др.] // Океанология. — 2015. — Т. 55, № 3. — С. 387—387.
144. Волны на границе раздела двухслойной системы невязких жидкостей в поле горизонтальных вибраций / Д. С. Голдобин [и др.] // Неравновесные процессы в сплошных средах. — 2017. — С. 122—124.
145. *Георгиевский, Д. В.* Задачи о безынерционном течении слабонеоднородных вязкопластических сред / Д. В. Георгиевский, Д. М. Климов, А. Г. Петров // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2003. — № 3. — С. 17—25.
146. *Дразин, Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости / Ф. Дразин. — Физматлит, 2005.
147. *Дубовик, А. Н.* О форме вершины предельных гравитационных волн / А. Н. Дубовик // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2006. — Т. 42, № 3. — С. 403—406.
148. *Дубовик, А. Н.* Об одномодовом приближении для периодических волн на глубокой воде / А. Н. Дубовик // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2004. — Т. 40, № 2. — С. 271—276.
149. *Дубовик, А. Н.* Одномодовые солитонные решения для гравитационно-капиллярных волн на глубокой воде / А. Н. Дубовик // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2004. — Т. 40, № 3. — С. 410—417.
150. *Евтушенко, Н. В.* Нефтепроявления в юго-восточной части Черного моря по данным космической радиолокации / Н. В. Евтушенко, А. Ю. Иванов // Исследование Земли из космоса. — 2012. — № 3. — С. 24—24.
151. *Ермаков, С. А.* О резонансном затухании гравитационно-капиллярных волн на воде, покрытой поверхностно-активной пленкой / С. А. Ермаков // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. — 2003. — Т. 39, № 5. — С. 691—696.

152. *Ермаков, С. А.* Лабораторное исследование радиолкационного рассеяния сильно нелинейными волнами на поверхности воды / С. А. Ермаков, И. А. Капустин, И. А. Сергиевская // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2010. — Т. 74, № 12. — С. 1765—1768.
153. *Ермаков, С. А.* О влиянии пленок поверхностно-активных веществ на изменения спектров ветрового волнения под действием внутренних волн / С. А. Ермаков, Е. Н. Пелиновский, Т. Г. Талипова // Известия АН СССР. ФАО. — 1980. — Т. 16, № 10. — С. 1068—1076.
154. *Ермаков, С. А.* Пленочный механизм воздействия внутренних волн на ветровую рябь / С. А. Ермаков, Е. Н. Пелиновский, Т. Г. Талипова // В сб. Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: ИПФ. — 1982. — С. 31—51.
155. *Журавлев, В. Ф.* Избранные задачи гамильтоновой механики / В. Ф. Журавлев, А. Г. Петров, М. М. Шундерюк. — М.: ЛЕНАНД, 2015.
156. *Журавлева, Е. Н.* Численное исследование точного решения уравнений Навье-Стокса, описывающего движение жидкости со свободной границей / Е. Н. Журавлева // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Т. 57, № 3. — С. 9—15.
157. *Зубарев, Н. М.* Построение точных решений для равновесных конфигураций границы проводящей жидкости, деформированной внешним электрическим полем / Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева // Теоретическая и математическая физика. — 2018. — Т. 196, № 3. — С. 503—516.
158. *Зубарев, Н. М.* Точные локальные решения для формирования особенностей на свободной поверхности идеальной жидкости / Н. М. Зубарев, Е. А. Карabut // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2018. — Т. 107, № 7. — С. 434—439.
159. *Зубарев, Н. М.* О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости / Н. М. Зубарев, Е. Ю. Просвиряков // Прикладная механика и техническая физика. — 2019. — Т. 60, № 6. — С. 65—71.

160. *Иванов, А. Ю.* О распознавании океанских внутренних волн и атмосферных гравитационных волн на радиолокационных изображениях морской поверхности / А. Ю. Иванов // Исследование Земли из космоса. — 2011. — № 1. — С. 70—85.
161. *Иванов, А. Ю.* Стики и пленочные образования на космических радиолокационных изображениях / А. Ю. Иванов // Исследование Земли из космоса. — 2007. — № 3. — С. 73—96.
162. *Иванов, А. Ю.* Естественные нефтепроявления в юго-восточной части Черного моря по данным космической радиолокации / А. Ю. Иванов, Н. В. Евтушенко // Земля из Космоса. — 2012. — № 12. — С. 64—71.
163. *Карабут, Е. А.* Размножение решений в плоской задаче о движении жидкости со свободной границей / Е. А. Карабут, Е. Н. Журавлева // Доклады Академии наук. Т. 469. — Федеральное государственное унитарное предприятие Академический научно . . . 2016. — С. 295—298.
164. *Кистович, А. В.* Поверхностные колебания свободно падающей капли идеальной жидкости / А. В. Кистович, Ю. Д. Чашечкин // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 206—212.
165. *Климов, Д. М.* Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание / Д. М. Климов, А. Г. Петров, Д. В. Георгиевский. — Наука, 2005.
166. Концентрационная конвекция, инициируемая затопленным источником ПАВ / Р. В. Бирих [и др.] // Конвективные течения. — 2009. — № 4.
167. *Ландау, Л. Д.* Теоретическая физика. том VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М: Наука, 1986.
168. *Левич, В. Г.* Гашение волн поверхностно-активными веществами. I / В. Г. Левич // ЖЭТФ. — 1940. — Т. 10, № 11. — С. 1296—1304.
169. *Левич, В. Г.* Гашение волн поверхностно-активными веществами. II / В. Г. Левич // ЖЭТФ. — 1941. — Т. 11, № 2/3. — С. 340—345.
170. *Левич, В. Г.* Физико-химическая гидродинамика / В. Г. Левич. — Гос изд-во физико-математической лит-ры, 1959.

171. *Любимов, Д. В.* О движении твердого тела в вибрирующей жидкости / Д. В. Любимов, Т. П. Любимова, А. А. Черепанов // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т. — 1987. — С. 61—71.
172. *Макарихин, И. Ю.* О дрейфе шаров во вращающейся жидкости / И. Ю. Макарихин, Б. Л. Смородин, Е. Ф. Шатрова // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2008. — № 4. — С. 6—15.
173. *Мизев, А. И.* Экспериментальное исследование термокапиллярной конвекции, индуцированной локальной температурной неоднородностью вблизи поверхности жидкости. 1. Твердотельный источник тепла / А. И. Мизев // Прикладная механика и техническая физика. — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 36—49.
174. Модуляция радиолокационных сигналов длинными волнами при рассеянии на морской поверхности, покрытой пленками поверхностно-активных веществ / С. А. Ермаков [и др.] // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2004. — Т. 40, № 1. — С. 102—111.
175. *Мызникова, Б. И.* Волновые режимы конвекции бинарной смеси при модуляции поля тяжести / Б. И. Мызникова, Б. Л. Смородин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2011. — Т. 139, № 3. — С. 597—604.
176. *Найфэ, А. Х.* Методы возмущений. Т. 456 / А. Х. Найфэ. — М.: Мир, 1976.
177. Нелинейные внутренние волны в многослойной мелкой воде / В. Ю. Ляпидевский [и др.] // Прикладная механика и техническая физика. — 2020. — Т. 61, № 1. — С. 53—62.
178. *Островский, Л. А.* Введение в теорию модулированных волн / Л. А. Островский, А. И. Потапов. — Физматлит М., 2003.
179. *Очиров, А. А.* Движение материальных жидких частиц при распространении волнового пакета / А. А. **Очиров** // ПУТЬ В НАУКУ. ФИЗИКА. Материалы международной научно-практической конференции. / под ред. С. П. Зими́на, А. С. Гвоздарёва. — Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова. Ярославль, 2018. — С. 43—44.

180. **Очиров, А. А.** О влиянии дрейфовых движений на перераспределение ПАВ вдоль поверхности жидкости / **А. А. Очиров** // ФИЗИКА, ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ. Тезисы докладов Всероссийской с международным участием молодежной научно-практической конференции / под ред. С. П. Зими́на, А. С. Гвоздарёва. — Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова. Ярославль : Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2019. — С. 43—44.
181. **Очиров, А. А.** О влиянии электрического заряда на развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца / **А. А. Очиров** // Путь в науку. Математика: Материалы молодежной конференции / под ред. Д. А. Куликова. — Ярославль : ЯрГУ, 2019. — С. 8—10.
182. **Очиров, А. А.** О движении жидких частиц при распространении волнового пакета по свободной поверхности жидкости / **А. А. Очиров** // Труды школы-семинара «Волны – 2018». Гидродинамические волны и течения. — 2018. — С. 14—17.
183. **Очиров, А. А.** О массопереносе, вызванном распространением волнового пакета по границе раздела жидких сред / **А. А. Очиров** // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. — 2018. — № 6.
184. **Очиров, А. А.** О методике расчета траекторий индивидуальных жидких частиц вблизи возмущенной волновым движением поверхности раздела двух жидкостей / **А. А. Очиров** // Путь в науку. Физика: Международная молодежная науч.-практ. конференция, 22-29 апреля 2016 г. / под ред. С. П. Зими́на. — Ярославль : ЯрГУ, 2016. — С. 35.
185. **Очиров, А. А.** О расчете возмущения магнитного поля волновым движением проводящей жидкости / **А. А. Очиров** // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. — Ярославль : Издат. дом ЯГТУ, 2017. — С. 66—69.
186. **Очиров, А. А.** О совместном влиянии ветра и поверхностного электрического заряда на перенос вещества нелинейными волнами / **А. А. Очиров** // Путь в науку. Физика: Материалы II Международной молодежной научно-практической конференции / под ред. С. П. Зими́на. — ЯрГУ. Ярославль : ЯрГУ, 2014. — С. 42.

187. *Очиров, А. А.* Об особенностях движения индивидуальных частиц по границе раздела двух жидкостей / *А. А. Очиров* // Путь в науку. Физика. Материалы III Международной молодежной научно-практической конференции / под ред. С. П. Зимина. — Ярославль : ЯрГУ, 2015. — С. 43.
188. *Очиров, А. А.* Влияние вязкости на форму нелинейных волн, распространяющихся по свободной поверхности жидкости / *А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко* // Вестник ЯрГУ. Серия Естественные и технические науки. — 2013. — № 4. — С. 30—34.
189. *Очиров, А. А.* Нелинейные волны на границе раздела несмешивающихся жидкостей и траектории жидких частиц / *А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко* // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — 2015. — С. 2879—2881.
190. *Очиров, А. А.* О взаимном влиянии дрейфа Стокса и неустойчивости Кельвина-Гельмгольца / *А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко* // Динамические системы. — 2018. — Т. 8 (36), № 2. — С. 149—157.
191. *Очиров, А. А.* О влиянии ветра на дрейфовый волновой перенос на границе вода-воздух / *А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко* // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Серия Естественные и технические науки. — 2015. — № 2. — С. 10—15.
192. *Очиров, А. А.* О влиянии плёнки поверхностно-активного вещества на дрейфовое течение и формы траекторий индивидуальных жидких частиц, вовлечённых в поверхностное волновое движение / *А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко* // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Материалы VI международной конференции 01—06 октября 2019, Дилижан, Армения. — Ер. : НУАСА, 2019. — С. 268—272.
193. *Очиров, А. А.* О влиянии поверхностного электрического заряда и скорости относительного движения жидких сред на дрейф Стокса / *А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко* // Математика и естественные науки. Теория и практика Межвузовский сборник научных трудов. — Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2019. — С. 43—45.

194. **Очиров, А. А.** О динамике индивидуальных жидких частиц на начальных этапах развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца / **А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко** // Международная конференция «Динамические системы в науке и технологиях» (DSST-2018): тез. Докл.; Алушта, 17-21 сентября 2018 г. / под ред. О. В. Анашкина. — Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского. Симферополь : ИП Корниенко А.А., 2018. — С. 75—76.
195. **Очиров, А. А.** О дрейфовом течении, вызванном волновым возмущением поверхности тангенциального разрыва поля скоростей / **А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко** // ВОЛНЫ И ВИХРИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ. 9-ая международная конференция — школа молодых ученых. Сборник материалов школы. — Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук. Москва : ООО "Премиум-принт", 2018. — С. 133—135.
196. **Очиров, А. А.** О дрейфовых свойствах волнового пакета Стокса, распространяющегося по электрически заряженной границе раздела жидких сред / **А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко** // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. — 2019. — № 5.
197. **Очиров, А. А.** О дрейфовых свойствах волнового пакета Стокса, распространяющегося по электрически заряженной границе раздела жидких сред / **А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко** // Труды школы-семинара «Волны – 2019». Волновые процессы в неоднородных средах. — 2019. — С. 39—40.
198. **Очиров, А. А.** О любопытном взаимоотношении понятий «дрейф Стокса» и «волновой пакет Стокса» / **А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко** // Вестник ЯрГУ. Серия Естественные и технические науки. — 2012. — № 4. — С. 19—23.
199. **Очиров, А. А.** О методике расчета волнового дрейфа, возникающего на поверхности раздела двух жидкостей / **А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко** // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. — Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2014. — С. 238—244.

200. **Очиров, А. А.** О перераспределении поверхностно-активного вещества, вызванного распространением нелинейной волны вдоль поверхности вязкой жидкости / А. А. **Очиров**, Д. Ф. Белоножко // Волны и вихри в сложных средах: 10-ая международная конференция — школа молодых ученых; 03 — 05 декабря 2019 г., Москва: Сборник материалов школы. — Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук. М. : ООО "Премиум-принт", 2019. — С. 248—250.
201. **Очиров, А. А.** Сравнение методик расчета жидких частиц в нелинейных волнах Стокса / А. А. **Очиров**, Д. Ф. Белоножко // Математика и естественные науки. Теория и практика. — Изд-во ЯГТУ, 2015. — С. 67—72.
202. **Очиров, А. А.** О способах оценки среднего дрейфового волнового течения / А. А. **Очиров**, С. Е. Кокин // Путь в науку. Физика: материалы конференции / под ред. С. П. Зими́на, А. С. Гвоздарёва. — Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова. Ярославль : Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2017. — С. 30.
203. *Петров, А. Г.* Аналитическая гидродинамика: Идеальная несжимаемая жидкость Ч.1. Изд. 2, суц. перераб. / А. Г. Петров. — URSS, 2017.
204. *Петров, А. Г.* О движении частиц несжимаемой среды в области с периодически изменяющейся границей / А. Г. Петров // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 2000. — № 4. — С. 12—17.
205. *Петров, А. Г.* Перенос массы вращающимся в жидкости цилиндром / А. Г. Петров // Прикладная математика и механика. — 2015. — Т. 79, № 4. — С. 521—529.
206. Пространственно-временное распределение пленочных загрязнений в Черном и Каспийском морях по данным космической радиолокации: сравнительный анализ / А. Ю. Иванов [и др.] // Исследование Земли из космоса. — 2017. — № 2. — С. 13—25.
207. *Пятигорская, О. С.* Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара / О. С. Пятигорская, В. Л. Сенницкий // Прикладная механика и техническая физика. — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 102—106.

208. *Пятигорская, О. С.* О движении твердых частиц в колеблющейся жидкости / О. С. Пятигорская, В. Л. Сенницкий // Прикладная механика и техническая физика. — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 74—78.
209. Седиментация частиц в сдвиговых потоках вязкоупругих жидкостей / А. В. Базилевский [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2010. — № 4. — С. 128—141.
210. *Сенницкий, В. Л.* Движение включений в колеблющейся жидкости / В. Л. Сенницкий // Сиб. физ. журн. — 1995. — № 4. — С. 18—26.
211. *Сенницкий, В. Л.* Движение вязкой жидкости и стенки в присутствии покоящейся стенки / В. Л. Сенницкий // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Т. 57, № 2. — С. 76—82.
212. *Сенницкий, В. Л.* Движение вязкой жидкости и стенки в присутствии покоящейся стенки / В. Л. Сенницкий // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Т. 57, № 2. — С. 76—82.
213. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики: учебное пособие для вузов: в кн. Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика—3-е изд., испр. и доп / Д. В. Сивухин. — 1990.
214. *Смородин, Б. Л.* Параметрическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле / Б. Л. Смородин, А. В. Тараут // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2010. — № 1. — С. 3—11.
215. *Соболева, Е. Б.* Режимы концентрационной конвекции при испарении грунтовых вод, содержащих растворенную примесь / Е. Б. Соболева, Г. Г. Цыпкин // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2016. — № 3. — С. 70—78.
216. *Соболева, Е. Б.* Метод численного моделирования концентрационно-конвективных течений в пористых средах в приложении к задачам геологии / Е. Б. Соболева // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 11. — С. 1961—1972.
217. *Стурова, И. В.* Действие периодического поверхностного давления на ледяной покров в окрестности вертикальной стенки / И. В. Стурова // Прикладная механика и техническая физика. — 2017. — Т. 58, № 1. — С. 92—101.

218. *Стурова, И. В.* Колебания ограниченного ледяного покрова при локальном динамическом воздействии / И. В. Стурова, Л. А. Ткачева // Полярная механика. — 2016. — № 3. — С. 997—1007.
219. *Тараут, А. В.* Электроконвективные бегущие волны в модулированном электрическом поле / А. В. Тараут, Б. Л. Смородин // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. — 2012. — № 2. — С. 30—37.
220. *Ткачева, Л. А.* Воздействие локальной периодической по времени нагрузки на ледяной покров с трещиной / Л. А. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. — 2017. — Т. 58, № 6. — С. 133—148.
221. *Ткачева, Л. А.* Воздействие периодической нагрузки на плавающую упругую пластину / Л. А. Ткачева // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2005. — № 2. — С. 132—146.
222. *Ткачева, Л. А.* Колебания ледяного покрова с трещиной при воздействии периодической по времени нагрузки / Л. А. Ткачева // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2017. — № 2. — С. 54—64.
223. Трехмерные волны на границе раздела двухслойной системы невязких жидкостей в поле горизонтальных вибраций / Д. С. Голдобин [и др.] // XX Зимняя школа по механике сплошных сред. — 2017. — С. 106—106.
224. *Фабер, Т. Е.* Гидроаэродинамика / Т. Е. Фабер. — Постмаркет М., 2001.
225. *Френкель, Я. И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме / Я. И. Френкель // ЖЭТФ. — 1936. — Т. 6, № 4. — С. 348—350.
226. *Щукин, Е. Д.* Коллоидная химия / Е. Д. Щукин, А. В. Перцов, Е. А. Амелина. — Высш. шк.(ВШ), 2006.
227. Экспериментальное исследование трансформации гравитационно-капиллярных волн на течении, индуцированном пузырьковой пленкой / С. А. Ермаков [и др.] // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. — 2013. — Т. 10, № 4. — С. 298—307.

Список рисунков

2.1	Схематическое изображение профиля классического дрейфа Стокса и траекторий движения индивидуальных жидких частиц	39
2.2	Кривая нейтральной устойчивости неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в безразмерных переменных $\rho = g = \gamma = 1$.	45
2.3	Смещение индивидуальной жидкой частички за конечное время t . .	47
2.4	Траектории жидких частиц верхней и нижней жидкости при отсутствии поступательного движения верхней среды ($U_0 = 0$)	57
2.5	Траектория движения частиц нижней жидкости за время, необходимое для дрейфа на расстояние порядка длины волны.	58
2.6	Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 10$ см/сек в неподвижной лабораторной системе отсчета.	58
2.7	Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 10$ см/сек $< U_{ph}$ в системе отсчета, связанной с верхней средой за время, необходимое для дрейфа на расстояние порядка длины волны в этой системе отсчета.	59
2.8	Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 23$ см/сек $\simeq U_{ph}$ в неподвижной лабораторной системе отсчета.	60
2.9	Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 50$ см/сек $> U_{ph}$ в неподвижной лабораторной системе отсчета.	61
2.10	Траектории движения частиц верхней среды при значении $U_0 = 50$ см/сек $> U_{ph}$ в системе отсчета, связанной с верхней средой.	61
3.1	Скорость классического дрейфа Стокса (кривая 1), дрейфа Стокса, инициированного волновым пакетом Стокса (кривая 2) и среднего значения дрейфа Стокса, инициированного волновым пакетом Стокса (кривая 3)	70
3.2	Кривая нейтральной устойчивости неустойчивости Тонкса–Френкеля	82
3.3	Кривая нейтральной устойчивости в области параметров (U_0, k) для разных значений параметра Тонкса–Френкеля	86
3.4	Кривая нейтральной устойчивости в области параметров (W, k) для разных значений тангенциального разрыва скоростей	87

- 4.1 Зависимость циклической частоты волнового движения Марангони и капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных длин волн. 97
- 4.2 Зависимость декремента затухания капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных длин волн. 98
- 4.3 Зависимость разности фаз между положением максимума концентрации ПАВ и гребнем волны для капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных длин волн. 100
- 4.4 Траектории движения индивидуальной жидкой частицы в присутствии ПАВ с упругостью меньше характерного значения $|\Pi^*|$ 101
- 4.5 Траектории движения индивидуальной жидкой частицы в присутствии ПАВ с упругостью больше характерного значения $|\Pi^*|$ 102
- 4.6 Зависимость циклической частоты волнового движения Марангони и капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных значений безразмерного тангенциального разрыва скоростей. 103
- 4.7 Зависимость декрементов затухания капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных значений безразмерного тангенциального разрыва скоростей. 104
- 4.8 Зависимость разности фаз между положением максимума концентрации ПАВ и гребнем волны для капиллярно–гравитационного волнового движения от модуля упругости плёнки ПАВ для разных значений безразмерного тангенциального разрыва скоростей. 105
- 4.9 Скорость дрейфа в вязкой жидкости в разные моменты времени, покрытой плёнкой ПАВ со значением безразмерной упругости $\Pi \simeq 0.1\Pi_B^* = -0.01$ 109
- 4.10 Скорость дрейфа в вязкой жидкости в разные моменты времени, покрытой плёнкой ПАВ со значением безразмерной упругости $\Pi \simeq \Pi_B^* = -0.102$ 110
- 4.11 Скорость дрейфа в вязкой жидкости в разные моменты времени, покрытой плёнкой ПАВ со значением безразмерной упругости $\Pi \simeq 10\Pi_B^* = -1.02$ 111