

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Шумилова Владлена Валерьевна

**Эффективные динамические характеристики
микронеоднородных сред с диссипацией**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2019

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Усреднение уравнений акустики для сред, состоящих из твердых материалов	22
1.1. Геометрические модели двухфазных сред с периодической структурой	22
1.2. Определяющие соотношения для сред, состоящих из двух твердых материалов	23
1.3. Исходные уравнения акустики для сред, состоящих из двух твердых материалов	31
1.4. Построение усредненных уравнений акустики	40
1.4.1. Основные свойства двухмасштабной сходимости	40
1.4.2. Усредненные уравнения в образах преобразования Лапласа	43
1.4.3. Усредненные уравнения в первоначальных переменных	47
1.4.4. Сильная сходимость решений	61
Глава 2. Усреднение уравнений акустики для сред, состоящих из твердого материала и жидкости	65
2.1. Исходные уравнения акустики для сред, состоящих из твердого материала и жидкости	65
2.2. Построение усредненных уравнений акустики для среды, состоящей из твердого материала и вязкой жидкости	68
2.3. Построение усредненных уравнений акустики для среды, состоящей из твердого материала и слабовязкой жидкости	72
2.3.1. Усредненные уравнения в образах преобразования Лапласа	73

2.3.2.	Усредненные уравнения в первоначальных переменных	81
2.4.	Сильная двухмасштабная сходимость	86
2.5.	Построение усредненных уравнений для сред, состоящих из частично пористого твердого материала и жидкости	91
2.5.1.	Случай вязкой жидкости	92
2.5.2.	Случай слабовязкой жидкости	98

Глава 3.	Усредненные тензоры ядер релаксации двухфазных слоистых сред с диссипацией	103
3.1.	Исходные модели слоистых сред	103
3.2.	Решения периодических задач для слоистых сред	106
3.2.1.	Стационарные периодические задачи	107
3.2.2.	Эволюционные периодические задачи	111
3.3.	Тензоры модулей упругости	136
3.4.	Тензоры коэффициентов вязкости	140
3.5.	Тензоры регулярных частей ядер релаксации	142
Глава 4.	Спектральный анализ одномерных собственных колебаний двухфазных слоистых сред с диссипацией	162
4.1.	Спектр одномерных собственных колебаний изотропного вязкоупругого материала	162
4.2.	Спектры одномерных собственных колебаний усредненных моделей слоистых сред	181
4.3.	Спектры собственных колебаний слоистых сред, распространяющихся перпендикулярно слоям	200
4.4.	Сравнение спектров одномерных собственных колебаний слоистых и усредненных сред	209
Глава 5.	Распространение плоских звуковых волн в слоистых средах с диссипацией	225

5.1.	Приближенные значения комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн	225
5.1.1.	Случай слоистой среды, занимающей полупространство $x_1 > 0$	225
5.1.2.	Случай слоистой среды, занимающей полосу $0 < x_1 < L$	235
5.2.	Точные значения комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн для конечного числа слоев	242
	Заключение	254
	Список литературы	258

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Определение динамических характеристик микронеоднородных сред, состоящих из твердых материалов или из твердых материалов и жидкости, является одной из наиболее актуальных задач механики гетерогенных сред. Её практическая значимость обусловлена широким распространением таких сред в природе (горные породы, водонасыщенные грунты, коллекторы нефти и т.д.), а также запросами современной промышленности (производство композиционных материалов с заданными физико-механическими свойствами, фильтров и т.д.).

При изучении поведения микронеоднородных сред, состоящих из двух или более фаз с разными реологическими свойствами, большой интерес вызывает тот факт, что их динамические характеристики могут качественно отличаться от динамических характеристик одной из их фаз даже в том случае, когда доля всех остальных фаз очень мала. Так, например, в работе Л.Д. Акуленко и С.В. Нестерова [3] экспериментально было обнаружено явление исчезновения собственных частот колебаний при попадании в поры мраморного стержня очень малого количества вазелинового масла. Очевидно, что для теоретического обоснования такого рода явлений требуется привлечение строгого математического аппарата.

Математическое моделирование динамического поведения микронеоднородных сред часто основано на предположении о наличии у них периодической структуры. При этом предположении оно обычно осуществляется с помощью дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, коэффициенты и ядра которых — периодические, быстросциллирующие по пространственным переменным функции. Непосредственное численное решение таких уравнений (например, методом сеток или конечных элементов) при заданных начальных и граничных усло-

виях для сред, состоящих из тысяч или миллионов ячеек периодичности, довольно затруднительно даже при использовании современных компьютеров. В связи с этим возникает задача о поиске однородных (гомогенных) сред, характеризующихся тем, что их поведение близко к поведению первоначальных гетерогенных сред и описывается дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными, коэффициенты и ядра которых не зависят от пространственных переменных. Эти однородные среды принято называть усредненными (эффективными) средами, их характеристики — эффективными характеристиками исходных сред, а новые уравнения — усредненными уравнениями. Если обозначить через ε величину, характеризующую масштаб неоднородности среды, то, как известно, основным требованием, которому должны удовлетворять усредненные уравнения, является близость их решений к решениям исходных уравнений при малых ε и соответствующих начальных и граничных условиях.

Интенсивное развитие математической теории усреднения дифференциальных уравнений в частных производных началось с опубликованных в конце 60-х и первой половине 70-х годов XX-го века работ Н.С. Бахвалова, В.А. Марченко, Е.Я. Хруслова, S. Spagnolo и E. De Giorgi (см. [9, 48, 122, 153, 154]). В 70-80-е годы XX-го века основным инструментом построения усредненных моделей сильно неоднородных сред с периодической микроструктурой являлся метод асимптотических разложений Н.С. Бахвалова [9, 10]. Развитию этого метода и его применению к различным задачам механики гетерогенных сред посвящено огромное количество работ, в частности, монографии Д.И. Бардзокаса и А.И. Зобнина [7], Н.С. Бахвалова и Г.П. Панасенко [11], В.В. Жикова, С.М. Козлова и О.А. Олейник [36], О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяна и А.С. Шамаева [56], Б.Е. Победри [57], Э. Санчес-Паленсии [64], A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolau [107].

В 1989 г. G. Nguetseng [140] выдвинул интересную концепцию двухмасштабного предела, впоследствии развитую G. Allaire [102] и открывшую новый подход к построению усредненных моделей сильно неоднородных сред. В настоящее время метод двухмасштабной сходимости, наряду с указанными выше методами, является одним из основных инструментов теории усреднения дифференциальных уравнений в частных производных. Этот метод оказался, в частности, чрезвычайно полезным при усреднении задач, для которых последовательности их решений ограничены, но не компактны в пространстве L^2 . Такие задачи обычно возникают при описании колебаний гетерогенных сред, состоящих из упругого материала и слабовязкой жидкости [64, 141], а также при описании процессов в двухфазных средах, фазы которых являются высококонтрастными по отношению к какой-либо физической величине, например, коэффициенту диффузии или проницаемости [102, 105].

Исследованию и обобщению свойств двухмасштабной сходимости, широко используемых при построении усредненных моделей гетерогенных сред, посвящены работы В.В. Жикова, Г.А. Иосифьяна, G. Allaire, M. Braine, J. Casado-Diaz, A. Damlamian, I. Gayte, U. Hornung, D. Lukassen, M. Neuss Radu, A. Visintin, P. Wall и др. (см., например, [30, 31, 35, 103, 104, 115, 116, 135, 139, 158, 159]).

С точки зрения практических приложений большой интерес вызывает исследование динамических процессов, протекающих в двухфазных гетерогенных средах, у которых одна фаза состоит из твердого (упругого или вязкоупругого) материала, а другая фаза — либо из другого твердого материала, либо из жидкости (сжимаемой или несжимаемой).

Гетерогенные среды, состоящие из двух твердых фаз (компонентов), являются самыми распространенными моделями, изучаемыми в механике композиционных материалов. Простейший пример такой среды — двухфазный упругий композит, состоящий из двух разных изотропных упругих

материалов и являющийся частным случаем микронеоднородных упругих композитов. Математически обоснованные алгоритмы построения усредненных моделей упругих композитов разработаны достаточно давно и могут быть найдены, например, в упомянутых выше монографиях [11] и [56].

Примером двухфазной твердой среды с диссипацией служит вязкоупругий композит, состоящий из двух изотропных вязкоупругих материалов. Если вязкоупругие материалы характеризуются определяющими соотношениями одного типа, то указанный композит — частный случай микронеоднородного вязкоупругого материала. Усредненная модель микронеоднородного вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта была выведена Э. Санчес-Паленсией [64]. Особого внимания заслуживает тот факт, что колебания микронеоднородного материала Кельвина-Фойгта описываются системой дифференциальных уравнений, в то время как колебания предельного материала — системой интегро-дифференциальных уравнений. Более точно, усредненная модель описывает поведение однородного вязкоупругого материала, обладающего как вязкостью, так и “долговременной” памятью [29]. Таким образом, предельный материал представляет собой вязкоупругий материал иного типа, чем исходный.

Усредненная модель микронеоднородного материала Кельвина-Фойгта, механические характеристики которого зависят не только от пространственных координат, но и от времени, выведена в работе Z. Abdessamad, I. Kostin, G. Panasenko [100]. Как и в рассмотренном Э. Санчес-Паленсией случае независимости характеристик от времени, полученная этими авторами усредненная модель также описывает вязкоупругую среду, обладающую вязкостью и долговременной памятью.

Один из методов определения эффективных ядер релаксации и ползучести микронеоднородных вязкоупругих композитов изложен в монографии Б.Е. Победри [57]. Следует, однако, отметить, что в этой монографии построение усредненных моделей не сопровождается последующим исследова-

дованием ключевого вопроса о близости решений исходных и усредненных задач по норме какого-либо функционального пространства.

Двухфазные среды, состоящие из твердого материала и жидкости, являются одним из основных объектов исследования механики насыщенных пористых сред. Выводу усредненных моделей двухфазных сред, состоящих из упругого материала и жидкости, посвящено большое число работ как физиков, так и математиков. Началом активного изучения динамического поведения двухфазных флюидонасыщенных пористых сред следует считать работу Я.И. Френкеля [69]. В 50-60-е годы XX-го века М.А. Biot [108, 111], исходя из физических соображений, развил общую теорию волновых процессов, протекающих в пористых упругих материалах, поры которых заполнены жидкостью. Интересно отметить одно из фундаментальных свойств эффективной среды Био, соответствующей пористому материалу с жидкостью, которое заключается в том, что в ней могут распространяться не одна, а две продольные волны — первого и второго рода, часто называемые соответственно быстрой и медленной продольными волнами (см., например, [39]). Экспериментальное подтверждение существования медленной продольной волны, свойственной именно флюидонасыщенным пористым средам, было впервые получено Т. Plona в 1980-м году [143]. Исследованию волновых процессов в среде Био посвящены работы А.А. Ковтуна, Л.А. Молоткова, J.M. Carcione, O. Kelder, D.M.J. Smeulders (см., например, [39, 53–55, 113, 131]) и многих других исследователей.

Эффективная модель Био в целом согласуется с эффективными моделями пористых упругих сред со слабовязкой жидкостью, построенными с помощью метода асимптотических разложений в работах Э. Санчес-Паленсии, J.-L. Auriault, R. Burridge, J.V. Keller, T. Levy и др. (см., например, [64, 106, 112, 134]). Вместе с тем необходимо отметить, что в этих работах остался открытым основной в теории усреднения вопрос о какой-либо приемлемой сходимости последовательностей решений исходных задач к

решениям соответствующих усредненных задач. Этот вопрос впервые был решен G. Nguetseng [141] с помощью введенного им метода двухмасштабной сходимости. Строгому выводу усредненных моделей пористых упругих сред со слабовязкой жидкостью с помощью метода двухмасштабной сходимости и исследованию вопросов сходимости посвящены работы Д.А. Космодемьянского, А.М. Мейрманова, А.С. Шамаева, Th. Clopeau, R.P. Gilbert, J.L. Ferrin, A. Mikelić и др. (см., например, [41, 50, 51, 64, 118, 125, 136, 137]).

Усредненные модели для сред, состоящих из упругого материала и вязкой жидкости, были построены в работах Э. Санчес-Паленсии [64] и J. Sanchez-Hubert [144] с помощью метода асимптотических разложений и теории полугрупп, а в работе R.P. Gilbert и A. Mikelić [127] — с помощью метода двухмасштабной сходимости. Как было установлено в этих работах, для указанных сред, как и для микронеоднородных материалов Кельвина-Фойгта, предельными однородными средами являются вязкоупругие материалы как с вязкостью, так и с памятью. Таким образом, предельные среды приобретают такое свойство, которым не обладают ни упругий материал, ни вязкая жидкость по отдельности. Эффект появления долговременной памяти при исследовании макроскопического поведения суспензии, состоящей из упругих сферических частиц в ньютоновской вязкой среде, был также обнаружен Р. Кристенсеном [43].

Среди множества моделей двухфазных гетерогенных сред особый интерес вызывают слоистые среды, представляющие собой периодически чередующиеся плоские слои двух изотропных компонент. При подходящем выборе декартовой системы координат динамические свойства таких сред зависят только от одной пространственной переменной и времени. В том случае, когда число слоев велико, исследование поведения слоистой среды целесообразно осуществлять с помощью соответствующей ей усредненной среды. Особая ценность слоистых сред заключается в том, что во многих случаях удается в явном виде найти формулы для расчета их эффектив-

ных характеристик по известным ширине и характеристикам слоев. Для двухфазных слоистых упругих композитов такие формулы приведены, например, в монографии Б.Е. Победри [57]. Очевидно, что явные формулы для расчета эффективных характеристик позволяют всесторонне анализировать влияние параметров слоев на поведение слоистых сред, а это, в свою очередь, открывает широкие возможности для конструирования новых двухфазных композитов с заданными или оптимальными (по тем или иным параметрам) свойствами.

При исследовании распространения звука в слоистых средах, состоящих из большого числа периодически чередующихся слоев, применяются два основных подхода (см., например, [7, 11, 14–16, 43, 52, 57, 62, 88, 126, 132, 155–157]). Первый подход основан на непосредственном исследовании процессов отражения и преломления звуковых волн на каждой внутренней границе, разделяющей слои друг от друга. При этом для нахождения звукового поля внутри слоев обычно используется либо один из вариантов матричного метода, либо метод, который состоит в решении системы линейных алгебраических уравнений, связывающих амплитуды волн в соседних слоях. Однако следует иметь в виду, что увеличение числа слоев сопровождается одновременным увеличением числа волн, распространяющихся в слоистой среде. Это приводит к тому, что в случае большого числа слоев указанные методы приводят к чрезвычайно громоздким формулам для частотных зависимостей отраженных и прошедших волн, малоприспособленным для всестороннего изучения влияния параметров слоев на акустические свойства многослойной среды.

В основе второго подхода лежит идея замены исходной неоднородной среды на эквивалентную ей однородную (гомогенную) среду, описываемую усредненной моделью. Очевидно, что благодаря такой замене устраняется необходимость в явном виде учитывать многочисленные отражения и преломления волн на границах раздела слоев. Вместе с тем необходимо отме-

титель, что указанный переход к однородной среде математически обоснован только в том случае, когда толщина каждого слоя очень мала не только по сравнению с толщиной образца среды, но и по сравнению с длиной звуковой волны. Несомненным достоинством второго подхода является повышение точности усредненной модели при увеличении числа слоев среды. Иными словами, при увеличении числа слоев динамические характеристики слоистой среды все точнее описываются с помощью соответствующей ей усредненной среды. Это обстоятельство оказывается очень полезным для верификации численных методов, применяемых для расчета точного звукового поля для многослойных сред, поскольку формулы, выведенные для усредненных сред, часто можно записать в компактном и удобном для анализа виде.

При изучении динамического поведения гетерогенных сред важной задачей является исследование их спектральных свойств. Интересным фактом здесь является то, что спектральные свойства некоторых двухфазных сред качественно отличаются от спектральных свойств одной из их фаз. Согласно приведенным выше результатам работы [3], примером указанной двухфазной среды может служить упругий материал с каналами, заполненными вязкой жидкостью.

Математически исследование спектра собственных колебаний гетерогенной среды с ε -периодической микроструктурой может быть сведено к спектральному анализу краевой задачи для однородной системы дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, коэффициенты и ядра которых зависят от ε . Таким образом, в случае дискретного спектра для численного нахождения его точек требуется, прежде всего, выбрать достаточно хорошие начальные приближения к собственным значениям краевой задачи. В качестве начальных приближений можно брать собственные значения предельных краевых задач, построенных при $\varepsilon \rightarrow 0$ и описывающих спектр собственных колебаний соответствующих усредненных сред.

Здесь возникает естественный вопрос: насколько точно и полно они приближают собственные значения допредельных задач? Для ответа на этот вопрос необходимо располагать фактом существования какой-то сходимости спектров допредельных задач к спектру предельной задачи. Оптимальной в этом плане является сходимость по Хаусдорфу спектров операторов, возникающих при операторной форме записи краевых задач [30, 33]. Подробнее это означает следующее. Если обозначить через S_ε и S множество точек спектра допредельных и предельных операторов, то S_ε сходится по Хаусдорфу к S , если: 1) для любого $s \in S$ найдется последовательность $s_\varepsilon \in S_\varepsilon$ такая, что $s_\varepsilon \rightarrow s$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; 2) все конечные предельные точки последовательностей $s_\varepsilon \in S_\varepsilon$ принадлежат S .

Для самосопряженных операторов теории упругости, возникающих при исследовании упругих сред с ε -периодической структурой, сходимость по Хаусдорфу их спектров к спектру предельного оператора с постоянными коэффициентами была доказана О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяном и А.С. Шамаевым (см., например, [56]).

Сходимость спектров дифференциальных операторов дивергентного типа с ε -периодическими коэффициентами в случае, когда матрица коэффициентов двухфазна и высококонтрастна с коэффициентом контрастности $1 : \varepsilon^2$ между жесткой и мягкой фазами (это соответствует т.н. модели двойной пористости), исследовалась В.В. Жиковым [30, 33]. С помощью метода двухмасштабной сходимости им было доказано, что если мягкая фаза дисперсна, то спектры допредельных операторов сходятся по Хаусдорфу к спектру предельного двухмасштабного оператора, который определен в пространстве функций от удвоенного количества независимых переменных. Примечательно, что спектр предельного оператора имеет бесконечное число лакун (интервалов, свободных от точек спектра), в то время как у допредельного оператора число лакун конечно, но их число неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В приведенных выше работах при доказательстве сходимости спектров по Хаусдорфу существенно использовалась самосопряженность рассматриваемых операторов. В работе Д.А. Космодемьянского и А.С. Шамаева [41] в связи с различными задачами механики гетерогенных сред, в которых имеет место диссипация механической энергии, рассматривались несамосопряженные операторы с быстроосциллирующими периодически коэффициентами и исследовался спектр предельного двухмасштабного оператора. Как было установлено, структура предельного оператора является более сложной, чем в самосопряженном случае, так как кроме вещественного спектра, имеющего по-прежнему лакуны, появляются серии комплексных собственных значений. Существование или отсутствие сходимости спектров по Хаусдорфу в данной работе не доказана, поскольку здесь не работают известные теоремы о сходимости собственных значений самосопряженных операторов, а для несамосопряженных операторов аналоги подобных теорем не имеют места или не доказаны.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, функционального анализа, теории функций комплексного переменного, а также метод двухмасштабной сходимости Нгуэтсенга-Аллера и численные методы.

Целью диссертационной работы является построение с помощью современных методов асимптотического анализа и исследование динамических свойств усредненных моделей микронеоднородных сред с периодической микроструктурой при наличии диссипации, обусловленной вязкостью и/или последствием.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическую значимость представляют разработанные в работе методы исследования асимптотического поведения решений широкого класса начально-краевых задач для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих колебания двухфазных микронеод-

нородных сред с диссипацией. Разработанные методы могут быть применены при исследовании асимптотического поведения решений начально-краевых задач для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамические процессы в многофазных средах с диссипацией, в том числе многофазных сильно контрастных средах с диссипацией.

Практическая значимость результатов работы обусловлена возможностью их применения при разработке новых композиционных материалов с заданными механическими свойствами и при акустическом исследовании гетерогенных сред естественного происхождения (горные породы, флюидонасыщенные коллекторы). Использование построенных в работе усредненных моделей позволяет кардинально уменьшить объем вычислений без существенной потери точности при расчете полей напряжений и динамических характеристик двухфазных гетерогенных сред с диссипацией. Полученные в работе явные формулы для расчета эффективных характеристик двухфазных слоистых сред дают возможность всесторонне исследовать влияние параметров фаз на динамические свойства слоистых сред. Эти формулы можно также применять для верификации численных методов, применяемых для точного расчета поля напряжений, звукового поля и собственных частот колебаний двухфазных слоистых сред.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Наиболее значимыми из них являются следующие результаты.

1. Предложен единый подход к выводу усредненных уравнений акустики для твердых сред с периодической микроструктурой, состоящих либо из вязкоупругих материалов, либо из упругого и вязкоупругого материалов.

2. Выведены усредненные уравнения акустики для смешанных сред с периодической микроструктурой, состоящих из вязкоупругого материала и сжимаемой вязкой или слабовязкой жидкости.

3. Исследован вопрос о сильной сходимости в пространстве L^2 последо-

вательностей решений начально-краевых задач, описывающих колебания микронеоднородных твердых и смешанных сред с диссипацией из пп. 1 и 2, к решениям начально-краевых задач, описывающих колебания соответствующих усредненных сред.

4. Выведены усредненные уравнения акустики для микронеоднородных сред с периодической микроструктурой, состоящих из частично пористых твердых материалов и сжимаемой вязкой или слабовязкой жидкости, заполняющей поры.

5. Для двухфазных слоистых сред с диссипацией, одна фаза которых состоит из упругого или вязкоупругого материала, а другая фаза — из вязкоупругого материала или вязкой сжимаемой жидкости, выведены явные формулы для расчета всех компонентов тензоров ядер релаксации соответствующих им усредненных сред.

6. Исследована структура спектров одномерных собственных колебаний усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с диссипацией из п. 5.

7. Для двухфазных слоистых сред с диссипацией из п. 5 исследованы спектры одномерных собственных колебаний, распространяющихся перпендикулярно их слоям. Доказано, что при неограниченном уменьшении величины периода эти спектры сходятся по Хаусдорфу к объединению спектров одномерных собственных колебаний соответствующих усредненных сред и множеств, состоящих из конечного числа вещественных точек. Численно исследовано влияние числа слоев на степень близости точек спектров одномерных собственных колебаний слоистого композита и соответствующего ему усредненного материала.

8. Для плоских звуковых волн, нормально падающих на границы двухфазных слоистых сред с диссипацией из п. 5, занимающих полупространство или неограниченную полосу, выведены формулы для расчета приближенных значений комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн.

Получена также система линейных уравнений для расчета точных значений указанных амплитуд для случая, когда слоистые среды состоят из конечного числа слоев, параллельных фронту волны. Численно исследовано влияние числа слоев на границы применимости приближенных формул.

Обоснованность и достоверность результатов. Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами и сравнением с результатами проведенных в работе численных расчетов.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались на следующих конференциях: международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной 110-ой годовщине И.Г. Петровского (Москва, 2011 г.); международных конференциях по математической теории управления и механике (Суздаль, 2011, 2013 гг.); X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011 г.); международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2012 г.); международной конференции «Spectral Theory and Differential Equations», посвященной 90-летию со дня рождения академика В.А. Марченко (Харьков, Украина, 2012 г.) Крымской международной математической конференции (Судак, 2013 г.); международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященной памяти академика А.А. Самарского к 95-летию со дня рождения (Москва, 2014 г.); международной конференции «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященной 100-летию Б.М. Левитана (Москва, 2014 г.); VI Белорусском конгрессе по теоретической и прикладной механике (Минск, Беларусь, 2013 г.); 57-й, 58-й и 60-й научных конференциях МФТИ (Долгопрудный, 2014, 2015, 2017 гг.); 9th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (Vienna,

2018 г.).

Результаты диссертационной работы также докладывались и обсуждались на семинарах по теории управления и динамике систем ИПМех РАН под руководством академика РАН Ф.Л. Черноусько (Москва, 2014, 2018 гг.); на семинаре по проблемам механики сплошной среды ИПМех РАН под руководством профессоров С.В. Нестерова и Д.В. Георгиевского (Москва, 2012, 2018 гг.); на семинаре по механике деформирования и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН под руководством чл.-корр. РАН Р.В. Гольдштейна (Москва, 2013 г.); на семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина ИПМех РАН под руководством профессора С.А. Манжирова (Москва, 2018 г.); на семинаре по механике деформируемого твердого тела НИИ Механики МГУ под руководством академика РАН И.Г. Горячевой (Москва, 2018 г.).

На разных этапах работа поддерживалась грантами Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-01-12115-офи-м-2011, 13-01-00384, 16-01-00412) и Российского научного фонда (коды проектов 14-50-00005, 16-11-10343).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 35 научных работах [71–87, 89–99, 145–151], из них: 18 статей в российских рецензируемых научных журналах, входящих в Перечень ВАК РФ; 4 статьи в журналах, индексируемых международными базами данных и системами цитирования Web of Science или Scopus; 2 статьи в рецензируемых научных журналах не из перечня ВАК; 11 работ в сборниках тезисов докладов на научных конференциях.

Все основные результаты, выносимые на защиту и опубликованные в указанных работах, получены автором диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Глава 1 посвящена усреднению уравнений акустики для микронеод-

нородных твердых сред с ε -периодической структурой, состоящих из вязкоупругих материалов или из упругого и вязкоупругого материалов. В п. 1.1 рассмотрены различные геометрические модели двухфазных сред с периодической структурой. В п. 1.2 введены тензоры ядер релаксации и определяющие соотношения для двухфазных твердых сред с диссипацией, а также дана классификация трех типов вязкоупругих материалов. В п. 1.3 сформулирована начально-краевая задача, описывающая колебания двухфазной твердой среды с ε -периодической структурой. В п. 1.4 с помощью преобразования Лапласа и метода двухмасштабной сходимости при $\varepsilon \rightarrow 0$ выведена соответствующая усредненная начально-краевая задача, описывающая колебания однородного вязкоупругого материала с памятью. Установлено, что для нахождения компонентов тензора ядер релаксации усредненного вязкоупругого материала требуется решить ряд вспомогательных стационарных и эволюционных периодических задач. Доказана также сильная сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательности решений допредельных задач к решению усредненной задачи в пространстве L^2 .

Глава 2 посвящена усреднению уравнений акустики для микронеоднородных смешанных сред с ε -периодической структурой, состоящих из твердого (упругого или вязкоупругого) материала и вязкой или слабовязкой сжимаемой жидкости. В п. 2.1 сформулирована начально-краевая задача, описывающая колебания смешанной среды. В п. 2.2 для случая вязкой жидкой фазы с помощью результатов Главы 1 получена усредненная начально-краевая задача, описывающая колебания однородной вязкоупругой среды, обладающей как вязкостью, так и памятью. В п. 2.3 для случая слабовязкой жидкой фазы с помощью преобразования Лапласа и метода двухмасштабной сходимости построена усредненная начально-краевая задача, описывающая колебания модифицированной среды Био. В п. 2.4 приведены усредненные уравнения акустики для микронеоднородных сред, состоящих из частично пористых твердых материалов и сжимаемой вязкой или

слабовязкой жидкости, заполняющей поры. В частности, получены граничные условия, связывающие эти уравнения на границах раздела сплошных твердых материалов и пористых твердых материалов с жидкостью.

В **Главе 3** выписаны формулы для расчета компонентов тензоров ядер релаксации усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с ε -периодической структурой. В качестве одной фазы этих сред берется изотропный упругий или вязкоупругий материал, а в качестве другой фазы — изотропный вязкоупругий материал или вязкая сжимаемая жидкость. Исходные модели таких сред и определяющие соотношения приведены в п. 3.1. В п. 3.2 в явном виде выписаны решения стационарных и эволюционных периодических задач, используемых для вычисления компонентов тензоров ядер релаксации усредненных сред. В п. 3.3 с помощью этих решений и формул, приведенных в Главах 1 и 2, вычислены компоненты тензоров модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации усредненных сред.

В **Главе 4** исследованы спектры одномерных собственных колебаний двухфазных слоистых сред с диссипацией и усредненных сред, рассмотренных в Главе 3. В п. 4.1 изучена структура точек спектров одномерных собственных колебаний изотропных вязкоупругих материалов трех типов. На основе полученных результатов в п. 4.2 исследованы спектры одномерных собственных колебаний усредненных сред. Показано, что поиск точек этих спектров сводится к нахождению корней дробно-рациональных уравнений. Проведено также сравнение указанных спектров для усредненных сред и отдельных фаз слоистой среды. В п. 4.3 изучены спектры одномерных собственных колебаний слоистых сред при условии, что собственные колебания распространяются перпендикулярно слоям. Показано, что поиск точек указанных спектров сводится к поиску корней трансцендентных уравнений. В п. 4.4 исследована связь конечных пределов при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательностей корней этих уравнений с корнями упомянутых вы-

ше дробно-рациональных уравнений. На примере двухфазного слоистого композита с заданными характеристиками проведено численное сравнение корней трансцендентных и дробно-рациональных уравнений, а также численно исследовано влияние числа слоев на степень близости спектральных характеристик композита и усредненного материала.

Глава 5 посвящена исследованию процессов отражения и прохождения плоских звуковых волн на границах однородных сжимаемых сред и двухфазных слоистых сред с диссипацией, рассмотренных в Главе 3. В пп. 5.1 и 5.2 для волны, нормально падающей на границу $x_1 = 0$ слоистой среды, занимающей соответственно полупространство $x_1 > 0$ и полосу $0 < x_1 < L$, выведены приближенные формулы для расчета комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн. При выводе этих формул были использованы усредненные модели слоистых сред. Определен диапазон частот волн, для которого допустимо применение полученных приближенных формул. В п. 5.3 для волны, нормально падающей на границу $x_1 = 0$ слоистой среды, занимающей полосу $0 < x_1 < L$ и состоящей из слоев, параллельных фронту волны, выведена система уравнений для расчета точных комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн. С помощью этой системы на примере двухфазного слоистого композита проведено численное сравнение точного и приближенного значений комплексной амплитуды прошедшей волны, а также численно исследовано влияние числа слоев на границы применимости приближенных формул.

В заключении кратко перечислены основные результаты диссертации.

Количество страниц в диссертации — 272, в том числе таблиц — 11, иллюстраций — 13.

Автор выражает глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору Шамаеву Алексею Станиславовичу за внимание, ценные идеи, полезные советы и постоянную поддержку, благодаря которым была написана данная работа.

Глава 1

Усреднение уравнений акустики для сред, состоящих из твердых материалов

1.1. Геометрические модели двухфазных сред с периодической структурой

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, заполненную двухфазной микронеоднородной средой с периодической структурой. Предполагается, что на общей границе фаз происходит скачкообразное изменение свойств среды, в то время как внутри них среда является либо однородной, либо ее свойства непрерывно меняются от точки к точке. Возьмем в качестве ячейки периодичности куб εY , где $Y = (0, 1)^3$ — единичный куб, а величина ε много меньше линейных размеров области Ω . В дальнейшем среду с такой ячейкой периодичности мы будем называть средой с ε -периодической структурой.

Обозначим через $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ подмножества области Ω , занятые соответственно первой и второй фазой среды с ε -периодической структурой. Каждое из этих подмножеств имеет εY -периодическую структуру. Более точно, мы определим $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ следующим образом.

Разобьем куб Y на два открытых непересекающихся множества Y_1 и Y_2 с общей гладкой границей $\Gamma = \partial Y_1 \cap \partial Y_2$, удовлетворяющих условиям: 1) $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Gamma$; 2) на ячейке периодичности εY s -я фаза среды занимает множество εY_s , $s = 1, 2$. Введем множество

$$E_s = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^3} (Y_s \cup (\partial Y_s \cap \partial Y) + k), \quad (1.1)$$

полученное Y -периодическим продолжением множества Y_s на всё пространство \mathbb{R}^3 . Без ограничения общности можно считать, что E_s — открытое

множество. Теперь разобьем область Ω на две непересекающиеся части: $\Omega_{1\varepsilon} = \Omega \cap \varepsilon E_1$ и $\Omega_{2\varepsilon} = \Omega \cap \varepsilon E_2$. В дальнейшем множества $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ так же часто будут называться соответственно первой и второй фазой среды, наряду с заполняющими их фазами.

Перечислим возможные варианты геометрической структуры фаз $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$: 1) обе фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ несвязны в Ω ; 2) обе фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ связны в Ω ; 3) только одна фаза $\Omega_{1\varepsilon}$ или $\Omega_{2\varepsilon}$ связна в Ω . К первому варианту относится, например, слоистая среда, образованная периодически повторяющимися плоскими слоями двух разных материалов (рис. 1.1). Ко второму варианту относится среда, составленная из двух разных материалов, один из которых заполняет периодическую связную систему каналов, а другой — пространство между ними (рис. 1.1). Ко третьему варианту относятся, например, дисперсная и волокнистая среды, составленные из периодической системы включений соответственно зерен и однонаправленных волокон (не обязательно правильной формы) одного материала и матрицы другого материала, заполняющего пространство между ними (рис. 1.2) [11].

1.2. Определяющие соотношения для сред, состоящих из двух твердых материалов

Введем следующие обозначения: $u^\varepsilon(x, t)$ — вектор перемещений, σ_{ij}^ε ($1 \leq i, j \leq 3$) — компоненты тензора напряжений, $e_{kh}(u^\varepsilon)$ — компоненты тензора малых деформаций, определяемые через компоненты вектора перемещений соотношениями Коши:

$$e_{kh}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^\varepsilon}{\partial x_k} \right), \quad 1 \leq k, h \leq 3.$$

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и деформаций в области Ω , имеют вид

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, t) * e_{kh}(u^\varepsilon), \quad 1 \leq i, j, k, h \leq 3. \quad (1.2)$$

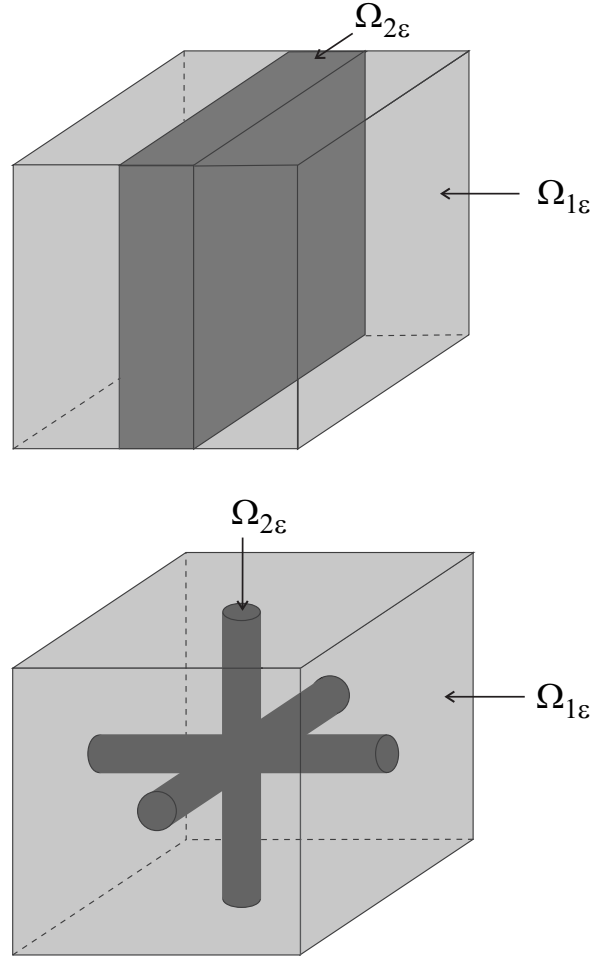


Рис. 1.1. Ячейка периодичности εY для слоистой среды и среды с двумя связными фазами

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3, символ $*$ обозначает операцию свертки по переменной t :

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_0^t g_1(t - \tau) g_2(\tau) d\tau,$$

а $\Gamma^\varepsilon(x, t) = \Gamma(\varepsilon^{-1}x, t)$ — тензор ядер релаксации, имеющий в общем случае две сингулярные и одну регулярную аддитивные составляющие:

$$\Gamma(y, t) = \delta(t)a(y) + \delta'(t)b(y) - d(y, t), \quad y = \varepsilon^{-1}x.$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $a(y)$ — тензор модулей упругости, $b(y)$ — тензор коэффициентов вязкости, $d(y, t)$ — тензор регулярных частей ядер релаксации. Следует отметить, что компоненты тензора $\Gamma(y, t)$ являются Y -периодическими по y .

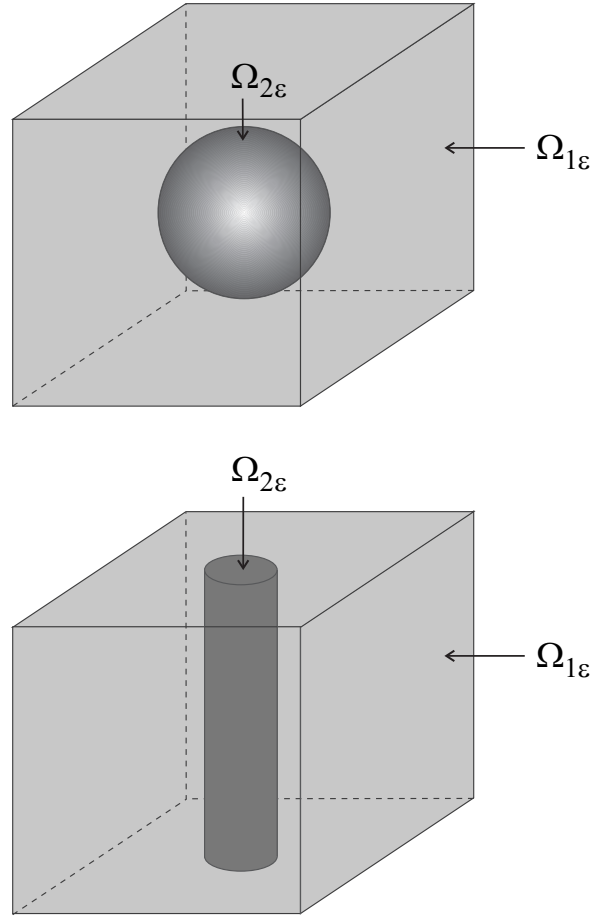


Рис. 1.2. Ячейка периодичности εY для дисперсной и волокнистой сред

В развернутой форме определяющие соотношения (1.2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^\varepsilon = & a_{ijkh}(\varepsilon^{-1}x)e_{kh}(u^\varepsilon) + b_{ijkh}(\varepsilon^{-1}x)e_{kh}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - \\ & - d_{ijkh}(\varepsilon^{-1}x, t) * e_{kh}(u^\varepsilon), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для двухфазной среды, заполняющей область Ω , компоненты тензоров $a(y)$, $b(y)$, $d(y, t)$ записываются в виде

$$a(y) = \begin{cases} a^{(1)}(y) & \text{при } y \in Y_1, \\ a^{(2)}(y) & \text{при } y \in Y_2, \end{cases} \quad b(y) = \begin{cases} b^{(1)}(y) & \text{при } y \in Y_1, \\ b^{(2)}(y) & \text{при } y \in Y_2, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$d(y, t) = \begin{cases} d^{(1)}(y, t) & \text{при } y \in Y_1, \\ d^{(2)}(y, t) & \text{при } y \in Y_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

В этой главе мы предполагаем, что $a_{ijkh}^{(s)}(y)$ — Y -периодические гладкие функции и выполнены условия симметрии

$$a_{ijkh}^{(s)}(y) = a_{jikh}^{(s)}(y) = a_{khij}^{(s)}(y), \quad s = 1, 2$$

и положительной определенности

$$a_{ijkh}^{(s)}(y)\xi_{kh}\xi_{ij} \geq \alpha_1^{(s)}\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad (1.6)$$

$$\alpha_1^{(s)} > 0, \quad s = 1, 2.$$

В частности, если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена изотропным материалом, то компоненты тензора $a^{(s)}(y)$ не зависят от y и выражаются через параметры Ламе λ_s и μ_s следующим образом:

$$a_{ijkh}^{(s)} = \lambda_s \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu_s (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \quad (1.7)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ занята упругим материалом (УМ), то тензоры $b^{(s)}(y)$ и $d^{(s)}(y, t)$ — нулевые. Если хотя бы один из этих двух тензоров — ненулевой, то $\Omega_{s\varepsilon}$ занята вязкоупругим материалом. Мы предполагаем, что по крайней мере один из четырех тензоров $b^{(1)}(y)$, $b^{(2)}(y)$, $d^{(1)}(y, t)$ и $d^{(2)}(y, t)$ является ненулевым. Это означает, что фазами гетерогенной среды являются либо упругий и вязкоупругий материалы, либо два разных вязкоупругих материала. Таким образом, среды, фазами которых являются только упругие материалы, не входят в тему последующего исследования.

В дальнейшем мы будем различать вязкоупругие материалы трех типов: ВУМ-I, ВУМ-II и ВУМ-III.

1) Для вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта (ВУМ-I) тензор коэффициентов вязкости — ненулевой, в то время как тензор регулярных частей ядер релаксации — нулевой. Таким образом, если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена материалом Кельвина-Фойгта, то $b^{(s)}(y) \neq 0$, $d^{(s)}(y, t) \equiv 0$ и определяющие

соотношения в $\Omega_{s\varepsilon}$ принимают вид

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh}^{(s)}(\varepsilon^{-1}x)e_{kh}(u^\varepsilon) + b_{ijkh}^{(s)}(\varepsilon^{-1}x)e_{kh}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right).$$

В дальнейшем мы предполагаем, что если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена ВУМ-I, то $b_{ijkh}^{(s)}(y)$ — Y -периодические гладкие функции и выполнены условия симметрии и положительной определенности:

$$b_{ijkh}^{(s)}(y) = b_{jikh}^{(s)}(y) = b_{khij}^{(s)}(y),$$

$$b_{ijkh}^{(s)}\xi_{kh}\xi_{ij} \geq \alpha_2^{(s)}\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad \alpha_2^{(s)} > 0. \quad (1.8)$$

В частности, если материал Кельвина-Фойгта в $\Omega_{s\varepsilon}$ изотропен, то компоненты тензора $b^{(s)}(y)$ не зависят от y и

$$b_{ijkh}^{(s)} = \zeta_s \delta_{ij} \delta_{kh} + \eta_s (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \quad \zeta_s = \kappa_s - \frac{2}{3}\eta_s, \quad (1.9)$$

где $\eta_s > 0$ и $\kappa_s > 0$ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно [37].

2) Для вязкоупругого материала с долговременной памятью (ВУМ-II) тензор регулярных частей ядер релаксации — ненулевой, а тензор коэффициентов вязкости — нулевой. Это значит, что если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена материалом с долговременной памятью, то $b^{(s)}(y) = 0$, $d^{(s)}(y, t) \neq 0$ и определяющие соотношения в $\Omega_{s\varepsilon}$ принимают вид

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh}^{(s)}(\varepsilon^{-1}x)e_{kh}(u^\varepsilon) - d_{ijkh}^{(s)}(\varepsilon^{-1}x, t) * e_{kh}(u^\varepsilon).$$

Отметим, что для вязкоупругого материала с долговременной памятью состояние напряжения в момент времени t зависит от значений тензора деформаций для всех предыдущих моментов времени $0 < s < t$ (см. [29], [64], [120]).

В дальнейшем предполагается, что если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена ВУМ-II, то тензор $d^{(s)}(y, t)$ представим в виде произведения

$$d^{(s)}(y, t) = V_s(t)w^{(s)}(y), \quad (1.10)$$

где $V_s(t)$ — убывающая функция следующего вида:

$$V_s(t) = \sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} \exp\left(-\gamma_n^{(s)} t\right),$$

$$1 \leq N_s < \infty, \quad v_n^{(s)}, \gamma_n^{(s)} \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma_i^{(s)} < \gamma_j^{(s)} \quad \text{при } i < j, \quad (1.11)$$

а $w^{(s)}(y)$ — тензор, компоненты которого являются Y -периодическими гладкими функциями и удовлетворяют условиям симметрии

$$w_{ijkh}^{(s)}(y) = w_{jikh}^{(s)}(y) = w_{khij}^{(s)}(y).$$

Обозначим через $R^{(s)}(\varepsilon^{-1}x, t)$ тензор функций релаксации в $\Omega_{s\varepsilon}$ [38]. По определению, для компонент тензора $R^{(s)}(y, t)$ имеют место следующие соотношения:

$$d_{ijkh}^{(s)}(y, t) = -\frac{\partial R_{ijkh}^{(s)}(y, t)}{\partial t}, \quad R_{ijkh}^{(s)}(y, 0) = a_{ijkh}^{(s)}(y).$$

Отсюда находим

$$R^{(s)}(y, t) = a^{(s)}(y) - \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \right) w^{(s)}(y) +$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \exp\left(-\gamma_n^{(s)} t\right) \right) w^{(s)}(y).$$

Как известно, тензоры функций релаксации вязкоупругих материалов должны удовлетворять ограничениям, обеспечивающим выполнение условий неотрицательности свободной энергии и работы, затраченной на деформацию материала из начального состояния [1], [42]. Для приведенного выше тензора $R^{(s)}(y, t)$ эти ограничения будут выполнены, если

$$w_{ijkh}^{(s)}(y) \xi_{kh} \xi_{ij} \geq 0, \quad (1.12)$$

$$\left(a_{ijkh}^{(s)}(y) - \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \right) w_{ijkh}^{(s)}(y) \right) \xi_{kh} \xi_{ij} \geq \alpha_3^{(s)} \xi_{ij} \xi_{ij} \quad (1.13)$$

$$\forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad \alpha_3^{(s)} > 0.$$

Отметим, что для выполнения упомянутых ограничений достаточно выполнения условия (1.12) и условия неотрицательности тензора $a^{(s)}(y) - \left(\sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} / \gamma_n^{(s)} \right) w^{(s)}(y)$. Тем не менее, мы берем более сильное ограничение (1.13), так как оно потребуется в дальнейшем для доказательства существования и единственности исследуемых задач акустики.

В частности, если вязкоупругий материал с долговременной памятью изотропен в $\Omega_{s\varepsilon}$, то тензор $d^{(s)}(y, t)$ не зависит от переменной y и

$$d_{ijkh}^{(s)}(t) = - \left(G_{1s}(t) - \frac{1}{3}G_s(t) \right) \delta_{ij}\delta_{kh} - \frac{1}{2}G_s(t)(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) \quad (1.14)$$

где $G_{1s}(t)$ и $G_s(t)$ — регулярные части ядер объемной и сдвиговой релаксации соответственно [38]. Для того, чтобы тензор $d^{(s)}(t)$ можно было записать в виде (1.10), наложим на функции $G_{1s}(t)$ и $G_s(t)$ следующие ограничения:

$$G_s(t) = \sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} \exp \left(-\gamma_n^{(s)} t \right), \quad (1.15)$$

$$G_{1s}(t) = k_s G_s(t), \quad k_s = \text{const} \geq 0,$$

где N_s , $v_n^{(s)}$ и $\gamma_n^{(s)}$ удовлетворяют условиям (1.11). Тогда тензор $d^{(s)}(t)$ представим в виде (1.10) при

$$V_s(t) = G_s(t),$$

$$w_{ijkh}^{(s)} = \left(k_s - \frac{1}{3} \right) \delta_{ij}\delta_{kh} + \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}).$$

Нетрудно проверить, что тензор $w^{(s)}$ удовлетворяет условию неотрицательности (1.12). Для выполнения условия (1.13) нужно дополнительно потребовать, чтобы

$$\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \leq \begin{cases} \min \left\{ 2\mu_s, \frac{3\lambda_s + 2\mu_s}{3k_s} \right\}, & \text{если } k_s > 0, \\ 2\mu_s, & \text{если } k_s = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

3) Для ВУМ-III тензоры коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации — ненулевые. Следовательно, если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена таким вязкоупругим материалом, то $b^{(s)}(y) \neq 0$ и $d^{(s)}(y, t) \neq 0$. В

дальнейшем мы будем предполагать, что компоненты тензоров $b^{(s)}(y)$ и $d^{(s)}(y, t)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в случае рассмотренных выше ВУМ-I и ВУМ-II.

Отметим, что если фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ заполнены изотропными материалами, то определяющие соотношения (1.2) можно записать, используя разложения тензоров напряжений и деформаций на девиаторы и шаровые тензоры. А именно, пусть s_{ij}^ε и $\tau_{ij}(u^\varepsilon)$ — компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций соответственно, т.е.

$$s_{ij}^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon - \delta_{ij}\sigma^\varepsilon, \quad \tau_{ij}(u^\varepsilon) = e_{ij}(u^\varepsilon) - \frac{\delta_{ij}}{3}\theta(u^\varepsilon),$$

где σ^ε — среднее гидростатическое напряжение, а $\theta(u^\varepsilon)$ — дилатация (объемная деформация):

$$\theta(u^\varepsilon) = e_{ii}(u^\varepsilon) = \operatorname{div} u^\varepsilon, \quad \sigma^\varepsilon = \frac{1}{3}\sigma_{ii}^\varepsilon.$$

Тогда определяющие соотношения (1.2) в $\Omega_{s\varepsilon}$ ($s = 1, 2$) можно переписать в виде

$$s_{ij}^\varepsilon = \Gamma_s(t) * \tau_{ij}(u^\varepsilon), \quad \sigma^\varepsilon = \Gamma_{1s}(t) * \theta(u^\varepsilon), \quad (1.17)$$

где $\Gamma_s(t)$ и $\Gamma_{1s}(t)$ — ядра сдвиговой и объемной релаксации соответственно,

$$\Gamma_s(t) = 2\mu_s\delta(t) + 2\eta_s\delta'(t) - G_s(t),$$

$$\Gamma_{1s}(t) = K_s\delta(t) + \kappa_s\delta'(t) - G_{1s}(t),$$

а $K_s = \lambda_s + (2/3)\mu_s$ — модуль объемного сжатия. Отметим, что здесь следует брать $\eta_s = \kappa_s = 0$, если $\Omega_{s\varepsilon}$ состоит из ВУМ-II, и $G_s(t) = G_{1s}(t) = 0$, если $\Omega_{s\varepsilon}$ состоит из ВУМ-I.

В развернутом виде соотношения (1.17) принимают вид

$$s_{ij}^\varepsilon = 2\mu_s\tau_{ij}(u^\varepsilon) + 2\eta_s\tau_{ij}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - G_s(t) * \tau_{ij}(u^\varepsilon),$$

$$\sigma^\varepsilon = K_s\theta(u^\varepsilon) + \kappa_s\theta\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - G_{1s}(t) * \theta(u^\varepsilon).$$

С помощью четырех тензоров $b^{(1)}(y)$, $b^{(2)}(y)$, $d^{(1)}(y, t)$, $d^{(2)}(y, t)$, мы можем задать суммарно 15 моделей гетерогенных сред с диссипацией, состоящих из двух твердых материалов. При этом без потери общности мы можем ограничиться рассмотрением только 9 моделей, отмеченных в таблице 1.1.

	Вторая фаза $\Omega_{2\varepsilon}$		
Первая фаза $\Omega_{1\varepsilon}$	ВУМ-I	ВУМ-II	ВУМ-III
УМ	+	+	+
ВУМ-I	+	+	+
ВУМ-II		+	+
ВУМ-III			+

Таблица 1.1. 9 моделей двухфазных твердых сред с диссипацией

1.3. Исходные уравнения акустики для сред, состоящих из двух твердых материалов

Математическая модель, описывающая малые колебания в области Ω гетерогенной среды с определяющими соотношениями (1.3), включает в себя:

1) систему дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений:

$$\rho_s^\varepsilon(x) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i(x, t) \quad \text{в } \Omega_{s\varepsilon} \times (0, T), \quad s = 1, 2, \quad (1.18)$$

где $\rho_s^\varepsilon(x) = \rho_s(\varepsilon^{-1}x)$ — плотность среды в $\Omega_{s\varepsilon}$, $\rho_s(y)$ — Y -периодические гладкие функции, $\rho_s(y) > 1$ для всех $y \in Y_s$, а $f(x, t)$ — вектор объемной силы;

2) условия идеального контакта на границе фаз $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$:

$$[u^\varepsilon]|_{S_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{ij}^\varepsilon n_j]|_{S_\varepsilon} = 0, \quad (1.19)$$

где n — единичный вектор нормали к поверхности S_ε , а квадратные скобки $[\cdot]|_{S_\varepsilon}$ обозначают скачок заключенной в них величины при переходе через поверхность S_ε .

3) однородные начальные и граничные условия:

$$u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (1.20)$$

Отметим, что если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена УМ или ВУМ-I, то система уравнений акустики (1.18) является дифференциальной в $\Omega_{s\varepsilon} \times (0, T)$, а если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена ВУМ-II или ВУМ-III, то она — интегро-дифференциальная в $\Omega_{s\varepsilon} \times (0, T)$.

Введем функцию плотности $\rho^\varepsilon(x)$, равную $\rho_s^\varepsilon(x)$ при $x \in \Omega_{s\varepsilon}$, и обозначим

$$a^\varepsilon(x) = a(\varepsilon^{-1}x), \quad b^\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x), \quad d^\varepsilon(x, t) = V_s(t)w(\varepsilon^{-1}x),$$

$$a^{s\varepsilon}(x) = a^{(s)}(\varepsilon^{-1}x), \quad b^{s\varepsilon}(x) = b^{(s)}(\varepsilon^{-1}x), \quad w^{s\varepsilon}(x) = w^{(s)}(\varepsilon^{-1}x).$$

Согласно вышеприведенному предположению, среди четырех тензоров $b^{(s)}(y)$ и $d^{(s)}(y, t)$ имеется хотя бы один ненулевой, следовательно, из двух тензоров $b^\varepsilon(y)$ и $d^\varepsilon(x, t)$ хотя бы один — ненулевой.

Вариационная формулировка задачи (1.18)-(1.20) имеет следующий вид: найти вектор-функцию $u^\varepsilon(t)$ со значениями в $(H_0^1(\Omega))^3$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot v dx + \int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) e_{ij}(v) dx - \\ & - \int_{\Omega} (d_{ijkh}^\varepsilon * e_{kh}(u^\varepsilon)) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3 \end{aligned} \quad (1.21)$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и начальным условиям

$$u^\varepsilon(0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = 0. \quad (1.22)$$

При формулировке вариационной задачи (1.21), (1.22) предполагалось, что $f(x, y) \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$. В дальнейшем будет предполагаться, что вектор-функция $f(x, y)$ удовлетворяет более сильному ограничению: $f(x, y) \in H^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$.

Для того, чтобы доказать существование и единственность решения задачи (1.21), (1.22) имеет единственное решение $u^\varepsilon(t)$, обозначим через $\{w^l\}_{l \in \mathbb{N}}$ ортогональный базис в пространстве $(H_0^1(\Omega))^3$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ будем искать по методу Галеркина приближенное решение $u_m^\varepsilon(t)$ задачи (1.21), (1.22) в виде

$$u_m^\varepsilon(t) = \sum_{l=1}^m g_{lm}(t) w^l, \quad (1.23)$$

где функции $g_{lm}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^m \left(\int_{\Omega} \rho^\varepsilon w^l \cdot w^r dx \right) g_{lm}'' + \sum_{l=1}^m \left(\int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) dx \right) g_{lm} + \\ & + \sum_{l=1}^m \left(\int_{\Omega} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) dx \right) g_{lm}' - \\ & - \sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^m \left(\int_{\Omega_{s\varepsilon}} w_{ijkh}^{s\varepsilon} e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) dx \right) (V_s(t) * g_{lm}) = \int_{\Omega} f \cdot w^r dx, \quad (1.24) \\ & r = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

и однородным начальным условиям

$$g_{rm}(0) = g_{rm}'(0) = 0, \quad r = 1, \dots, m. \quad (1.25)$$

Введем обозначения

$$F_r(t) = \int_{\Omega} f \cdot w^r dx, \quad R_{rl}^\varepsilon = \int_{\Omega} \rho^\varepsilon w^l \cdot w^r dx,$$

$$A_{rl}^\varepsilon = \int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) dx, \quad B_{rl}^\varepsilon = \int_{\Omega} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) dx,$$

$$W_{rl}^{s\varepsilon} = \int_{\Omega_{s\varepsilon}} w_{ijkh}^{s\varepsilon} e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) dx, \quad s = 1, 2$$

и перепишем систему уравнений (1.24) в виде

$$\sum_{l=1}^m R_{rl}^\varepsilon g_{lm}'' + \sum_{l=1}^m B_{rl}^\varepsilon g_{lm}' + \sum_{l=1}^m A_{rl}^\varepsilon g_{lm} - \sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^m W_{rl}^{s\varepsilon} (V_s(t) * g_{lm}) = F_r, \quad r = 1, \dots, m. \quad (1.26)$$

Продолжим вектор-функцию $f(x, t)$ нулем при $t < 0$ и $t > T$ и применим преобразование Лапласа $g(t) \rightarrow g(\lambda)$ к системе уравнений (1.26). Учитывая (1.25), получаем

$$\sum_{l=1}^m \left(\lambda^2 R_{rl}^\varepsilon + \lambda B_{rl}^\varepsilon + A_{rl}^\varepsilon - \sum_{s=1}^2 V_s(\lambda) W_{rl}^{s\varepsilon} \right) g_{lm}(\lambda) = F_r(\lambda), \quad (1.27)$$

$$r = 1, \dots, m,$$

где $g_{lm}(\lambda)$ и $F_r(\lambda)$ есть изображения Лапласа функций $g_{lm}(t)$ и $F_r(t)$ соответственно; $V_s(\lambda) = 0$, если $d^{(s)}(y, t) = 0$ (фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ состоит из УМ или ВУМ-I), и

$$V_s(\lambda) = \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\lambda + \gamma_n^{(s)}},$$

если $d^{(s)}(y, t) \neq 0$ (фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ состоит из ВУМ-II или ВУМ-III).

В случае, когда $d^{(1)}(y, t) \neq 0$ и $d^{(2)}(y, t) \neq 0$, обозначим через $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ элементы множества

$$\gamma = \gamma_1 \cup (\gamma_2 \setminus \gamma_1),$$

где $\gamma_s = \{\gamma_n^{(s)}\}_{n=1}^{N_s}$, $s = 1, 2$. Очевидно, что если множества γ_1 и γ_2 не имеют общих элементов, то $N = N_1 + N_2$; в противном случае $N < N_1 + N_2$.

Далее, систему уравнений (1.27) запишем в виде

$$\sum_{l=1}^m Z_{rl}^\varepsilon(\lambda) q_{lm}(\lambda) = F_r(\lambda), \quad r = 1, \dots, m, \quad (1.28)$$

где $Z_{rl}^\varepsilon(\lambda)$ — многочлены степени $N_0 + 2$,

$$q_{lm}(\lambda) = \frac{g_{lm}(\lambda)}{S(\lambda)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} N_0 = 0, \quad S(\lambda) = 1, \quad & \text{если } d^{(1)}(y, t) = 0, \quad d^{(2)}(y, t) = 0, \\ N_0 = N, \quad S(\lambda) = \prod_{n=1}^N (\lambda + \gamma_n), \quad & \text{если } d^{(1)}(y, t) \neq 0, \quad d^{(2)}(y, t) \neq 0, \\ N_0 = N_1, \quad S(\lambda) = \prod_{n=1}^{N_1} (\lambda + \gamma_n^{(1)}), \quad & \text{если } d^{(1)}(y, t) \neq 0, \quad d^{(2)}(y, t) = 0, \\ N_0 = N_2, \quad S(\lambda) = \prod_{n=1}^{N_2} (\lambda + \gamma_n^{(2)}), \quad & \text{если } d^{(1)}(y, t) = 0, \quad d^{(2)}(y, t) \neq 0. \end{aligned}$$

Система (1.28) есть система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $q_{lm}(\lambda)$. В силу невырожденности матрицы $R^\varepsilon = \{R_{rl}^\varepsilon\}$ определитель $D^\varepsilon(\lambda)$ матрицы системы (1.28) есть многочлен степени $(N_0 + 2)m$ [24]. Решая систему (1.28), например, методом Крамера, при $D^\varepsilon(\lambda) \neq 0$ получаем

$$q_{rm}(\lambda) = \frac{1}{D^\varepsilon(\lambda)} \sum_{l=1}^m P_{rl}^\varepsilon(\lambda) F_l(\lambda), \quad r = 1, \dots, m,$$

где $P_{rl}^\varepsilon(\lambda)$ — многочлены самой большой степени $(N_0 + 2)(m - 1)$.

Таким образом, решение системы (1.27) имеет вид

$$g_{rm}(\lambda) = \sum_{l=1}^m Q_{rl}^\varepsilon(\lambda) F_l(\lambda), \quad r = 1, \dots, m,$$

где

$$Q_{rl}^\varepsilon(\lambda) = \frac{S(\lambda)}{D^\varepsilon(\lambda)} P_{rl}^\varepsilon(\lambda)$$

есть рациональные дроби, причем степень числителя не менее, чем на 2, меньше степени знаменателя. Следовательно, функции $Q_{rl}^\varepsilon(\lambda)$ обладают оригиналами $Q_{rl}^\varepsilon(t)$, которые можно вычислить посредством их разложения на простейшие дроби (см. [27], [28]). Отсюда следует, что существует единственное решение

$$g_{rm}(t) = \sum_{l=1}^m Q_{rl}^\varepsilon(t) * F_l(t), \quad r = 1, \dots, m$$

системы уравнений (1.26) с начальными условиями (1.25).

Таким образом, для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует единственная вектор-функция u_m^ε вида (1.23), удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot w^r dx + \int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij}(w^r) dx + \int_{\Omega} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) e_{ij}(w^r) dx - \\ - \int_{\Omega} (d_{ijkh}^\varepsilon * e_{kh}(u_m^\varepsilon)) e_{ij}(w^r) dx = \int_{\Omega} f \cdot w^r dx, \quad r = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1.29)$$

и начальным условиям

$$u_m^\varepsilon(0) = \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}(0) = 0.$$

В дальнейшем нам потребуются некоторые априорные оценки для u_m^ε и $\partial u_m^\varepsilon / \partial t$. С этой целью умножим (1.29) на $g'_{rm}(t)$ и просуммируем по $r = 1, \dots, m$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} dx + \int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) dx + \\ + \int_{\Omega} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) dx - \\ - \int_{\Omega} (d_{ijkh}^\varepsilon * e_{kh}(u_m^\varepsilon)) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) dx = \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} dx, \end{aligned} \quad (1.30)$$

откуда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} dx + \int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) dx - \\ & - \int_{\Omega} (d_{ijkh}^\varepsilon * e_{kh}(u_m^\varepsilon)) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) dx \leq \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} dx. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Для оценки третьего интеграла в левой части (1.31) воспользуемся следующими формулами:

$$\begin{aligned} e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{kh}(u_m^\varepsilon) &= \frac{1}{\gamma_n^{(s)}} \left(e_{kh}(u_m^\varepsilon) - e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{kh} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right), \\ e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) + \gamma_n^{(s)} e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} w_{ijkh}^{s\varepsilon} (e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{kh}(u_m^\varepsilon)) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) &= \frac{1}{\gamma_n^{(s)}} w_{ijkh}^{s\varepsilon} e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) - \\ &- \frac{1}{\gamma_n^{(s)}} w_{ijkh}^{s\varepsilon} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{kh} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) - \\ &- w_{ijkh}^{s\varepsilon} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{kh} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma_n^{(s)}} w_{ijkh}^{s\varepsilon} e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) - \\ &- \frac{1}{\gamma_n^{(s)}} w_{ijkh}^{s\varepsilon} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{kh} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right), \\ &n = 1, \dots, N_s; \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} (d_{ijkh}^{s\varepsilon} * e_{kh}(u_m^\varepsilon)) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) &\leq \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \right) w_{ijkh}^{s\varepsilon} e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) - \\ &- \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} w_{ijkh}^{s\varepsilon} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{kh} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right). \end{aligned}$$

Но тогда из (1.31) следует, что

$$\frac{1}{2} \frac{dz_m^\varepsilon}{dt} \leq \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} dx, \quad \frac{dz_m^\varepsilon}{dt} \leq \int_{\Omega} |f|^2 dx + z_m^\varepsilon,$$

где

$$\begin{aligned} z_m^\varepsilon(t) &= \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \left| \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \int_{\Omega_{s\varepsilon}} \left(\left(a_{ijkh}^{s\varepsilon} - \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \right) w_{ijkh}^{s\varepsilon} \right) e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij}(u_m^\varepsilon) \right) dx + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \int_{\Omega_{s\varepsilon}} w_{ijkh}^{s\varepsilon} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{kh} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{ij} \left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

Используя условия (1.12), (1.13) и неравенства Гронуолла и Корна, из последнего неравенства получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|u_m^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)} &\leq C \|f\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}, \\ \left\| \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)} &\leq C \|f\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где C обозначает различные положительные константы, не зависящие от ε и m .

Аналогично доказываются оценки

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^k u_m^\varepsilon}{\partial t^k} \right\|_{L^\infty(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)} &\leq C \|f\|_{H^k(0,T;(L^2(\Omega))^3)}, \quad k = 1, 2, \\ \left\| \frac{\partial^3 u_m^\varepsilon}{\partial t^3} \right\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)} &\leq C \|f\|_{H^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (1.21), (1.22) имеет единственное решение u^ε и выполнены оценки

$$\left\| \frac{\partial^k u^\varepsilon}{\partial t^k} \right\|_{L^\infty(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)} \leq C \|f\|_{H^k(0,T;(L^2(\Omega))^3)}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (1.34)$$

$$\left\| \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial t^3} \right\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)} \leq C \|f\|_{H^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}, \quad (1.35)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценок (1.32), (1.33) следует, что последовательности $\partial^k u_m^\varepsilon / \partial t^k$ ($k = 0, 1, 2$) и $\partial^3 u_m^\varepsilon / \partial t^3$ равномерно ограничены по m (и ε) в $L^\infty(0, T; (H_0^1(\Omega))^3)$ и $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ соответственно. Следовательно, можно выделить подпоследовательность $u_{m'}^\varepsilon$ такую, что при $m' \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k u_{m'}^\varepsilon}{\partial t^k} &\rightharpoonup \frac{\partial^k u^\varepsilon}{\partial t^k} \quad * \text{-слабо в } L^\infty(0, T; (H_0^1(\Omega))^3), \quad k = 0, 1, 2, \\ \frac{\partial^3 u_{m'}^\varepsilon}{\partial t^3} &\rightharpoonup \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial t^3} \quad * \text{-слабо в } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3). \end{aligned}$$

Отсюда следует, в частности, что $u^\varepsilon(0) = \partial u^\varepsilon / \partial t(0) = 0$ [46, 47]. Кроме того, переходя в (1.32) и (1.33) к пределу при $m' \rightarrow \infty$, сразу получаем оценки (1.34), (1.35).

Чтобы доказать, что предельная функция u^ε удовлетворяет интегральному тождеству (1.21) для п.в. $t \in (0, T)$, умножим (1.29) на произвольную функцию $\psi(t) \in C^1[0, T]$, а затем проинтегрируем по $t \in [0, T]$ и перейдем к пределу при $m' \rightarrow \infty$. В результате заключаем, что u^ε удовлетворяет интегральному тождеству (1.21) для п.в. $t \in (0, T)$.

Для доказательства единственности решения u^ε задачи (1.21), (1.22) при фиксированном $\varepsilon > 0$ нам достаточно показать, что $u^\varepsilon \equiv 0$ при $f \equiv 0$. С этой целью подставим в (1.21) пробную вектор-функцию $v = \partial u^\varepsilon / \partial t$. Используя те же рассуждения, что и выше, мы приходим к неравенству

$$\frac{dz^\varepsilon}{dt} \leq 0, \quad (1.36)$$

в котором

$$\begin{aligned} z^\varepsilon(t) &= \sum_{s=1}^2 \int_{\Omega_{s\varepsilon}} \left(\rho_s^\varepsilon \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + \left(a_{ijkh}^{s\varepsilon} - \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \right) w_{ijkh}^{s\varepsilon} \right) e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(u^\varepsilon) \right) dx + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \int_{\Omega_{s\varepsilon}} w_{ijkh}^{s\varepsilon} \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{kh} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) \left(e^{-\gamma_n^{(s)} t} * e_{ij} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

Так как $z^\varepsilon(0) = 0$ и выполнены условия (1.12), (1.13), то, применяя неравенства Корна и Фридрихса, из (1.36) получаем $u^\varepsilon \equiv 0$ и теорема полностью доказана.

1.4. Построение усредненных уравнений акустики

Нашей следующей целью будет исследование асимптотического поведения решений u^ε задач (1.21), (1.22) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это исследование мы будем осуществлять с помощью метода двухмасштабной сходимости, введенного Г. Нгуэтсенгом в 1989 г. и являющегося в настоящее время одним из основных методов теории усреднения.

1.4.1. Основные свойства двухмасштабной сходимости

Для формулировки основных результатов теории двухмасштабной сходимости, которые в дальнейшем нам потребуются при построении усредненных моделей двухфазных гетерогенных сред, рассмотрим последовательность функций $u^\varepsilon(x)$, ограниченную в $L^2(\Omega)$:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon|^2 dx < \infty.$$

Определение 1. Последовательность $u^\varepsilon(x)$ слабо двухмасштабно сходится к функции $u(x) \in L^2(\Omega \times Y, dx \times dy) = L^2(\Omega \times Y)$, $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi(x) \psi(\varepsilon^{-1}x) dx = \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \varphi(x) \psi(y) dx dy \quad (1.37)$$

для любых пробных функций $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\psi(y) \in C_{per}^\infty(Y)$.

Здесь через $C_{per}^\infty(Y)$ обозначено пространство бесконечно дифференцируемых Y -периодических функций.

Отметим, что понятие слабой двухмасштабной сходимости — обобщение понятия слабой сходимости: обычный слабый предел получается

из слабого двухмасштабного предела усреднением по периоду, т.е. если $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, то

$$u^\varepsilon(x) \rightharpoonup \int_Y u(x, y) dy \quad \text{в } L^2(\Omega).$$

Определение 2. Последовательность $u^\varepsilon(x)$ сильно двухмасштабно сходится к функции $u(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$, $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) v^\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) v(x, y) dx dy$$

как только $v^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$.

Имеют место следующие свойства двухмасштабной сходимости, доказательства которых можно найти в [30], [102].

- (i) Если последовательность $u^\varepsilon(x)$ ограничена в $L^2(\Omega)$, то она компактна в смысле слабой двухмасштабной сходимости.
- (ii) Если $a(y) \in L_{per}^\infty(Y)$ и $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, то

$$a(\varepsilon^{-1}x) u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} a(y) u(x, y).$$

- (iii) Если $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x)|^2 dx \geq \int_{\Omega} \int_Y |u(x, y)|^2 dx dy.$$

- (iv) Если $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y |u(x, y)|^2 dx dy,$$

то $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$.

(v) Если $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ и предельная функция $u(x, y)$ является достаточно гладкой, например, $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}, L^2_{per}(Y))$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 dx = 0.$$

Наряду с перечисленными свойствами двухмасштабной сходимости приведем еще два наиболее важных свойства двухмасштабной сходимости, которые обнаруживаются при совместном рассмотрении последовательности функций u^ε и последовательности их градиентов ∇u^ε (см. [30], [102], [140]).

Теорема 2. Пусть $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} (|u^\varepsilon(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x)|^2) dx < C,$$

где постоянная C не зависит от ε . Тогда существуют функции

$$u(x) \in H^1(\Omega), \quad u_1(x, y) \in L^2(\Omega, H^1_{per}(Y)/\mathbb{R})$$

такие, что (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x), \quad \nabla u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y).$$

Кроме того, если с самого начала $u^\varepsilon(x) \in H^1_0(\Omega)$, то $u(x) \in H^1_0(\Omega)$.

Здесь $H^1_{per}(Y)$ обозначает соболевское пространство Y -периодических функций.

Теперь разобьем область Ω на две части $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ так, как это было описано в п. 1.1. Дополнительно считаем, что множество E_1 связно в \mathbb{R}^3 .

Для формулировки второй теоремы о двухмасштабной сходимости последовательностей функций и их градиентов, обозначим через $\chi(D)$ характеристическую функцию множества D :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in D; \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} |u^\varepsilon(x)|^2 dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} |\nabla u^\varepsilon(x)|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |\nabla u^\varepsilon(x)|^2 dx < C,$$

где постоянная C не зависит от ε . Тогда существуют функции

$$u(x) \in H^1(\Omega), \quad u_1(x, y) \in L^2(\Omega, H_{per}^1(Y_1)/\mathbb{R}),$$

$$w(x, y) \in L^2(\Omega, H_{per}^1(Y)) : w(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in Y_1 \cup \partial Y_1$$

такие, что (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x) + w(x, y),$$

$$\chi(\Omega_{1\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_1) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)),$$

$$\varepsilon \chi(\Omega_{2\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_2) \nabla_y w(x, y).$$

Кроме того, если с самого начала $u^\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$, то $u(x) \in H_0^1(\Omega)$.

1.4.2. Усредненные уравнения в образах преобразования Лапласа

Применим преобразование Лапласа $g(t) \rightarrow g(\lambda) = g_\lambda$ к тождеству (1.21). В результате приходим к следующей задаче в образах преобразования Лапласа: для фиксированного λ такого, что $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_0 > 0$, где λ_0 достаточно велико, найти вектор-функцию $u_\lambda^\varepsilon \in (H_0^1(\Omega))^3$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\lambda^2 \int_{\Omega} \rho^\varepsilon u_\lambda^\varepsilon \cdot v dx + \int_{\Omega} \Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f_\lambda \cdot v dx \quad (1.38)$$

$$\forall v \in (H_0^1(\Omega))^3,$$

где

$$\Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda) = \Gamma_{ijkh}(\varepsilon^{-1}x, \lambda),$$

$$\Gamma_{ijkh}(y, \lambda) = a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y) - d_{ijkh}(y, \lambda).$$

Используя приведенные выше свойства двухмасштабной сходимости, исследуем асимптотическое поведение решения u_λ^ε задачи (1.38) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Прежде всего, полагая в (1.38) $v = u_\lambda^\varepsilon$, имеем

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int_{\Omega} \rho^\varepsilon |u_\lambda^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} q_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) e_{ij}(u_\lambda^\varepsilon) dx &= \int_{\Omega} f_\lambda \cdot u_\lambda^\varepsilon dx \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f_\lambda|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_\lambda^\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_{\Omega} |u_\lambda^\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Используя условия (1.6), (1.8), (1.12), (1.13) и применяя неравенство Корна, отсюда получаем следующие оценки, равномерные по ε :

$$\int_{\Omega} |u_\lambda^\varepsilon|^2 dx \leq C, \quad \int_{\Omega} |\nabla u_\lambda^\varepsilon|^2 dx \leq C, \quad (1.39)$$

где под $\nabla u_\lambda^\varepsilon$ понимается матрица 3×3 с элементами $\partial u_\lambda^\varepsilon / \partial x_j$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $u_\lambda^\varepsilon(x)$ — решение задачи (1.38). Тогда, с точностью до выделения подпоследовательности,

$$u_\lambda^\varepsilon \xrightarrow{2} u_\lambda(x), \quad u_\lambda(x) \in (H_0^1(\Omega))^3, \quad (1.40)$$

$$\nabla u_\lambda^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_\lambda(x) + \nabla_y u_{1\lambda}(x, y), \quad (1.41)$$

где

$$u_{1\lambda}(x, y) = Q_\lambda^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}(x), \quad (1.42)$$

а вектор-функции $Q_\lambda^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ есть решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh})) = 0, & y \in Y, \\ [\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) n_j] |_\Gamma = 0, & \int_Y Q_\lambda^{kh} dy = 0, \end{cases} \quad (1.43)$$

где n_j , $j = 1, 2, 3$, — компоненты единичного вектора нормали к поверхности Γ ,

$$\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) = \Gamma_{ijkh}(y, \lambda) + \Gamma_{ijlm}(y, \lambda) e_{lm}^y(Q_\lambda^{kh}). \quad (1.44)$$

Кроме того, имеет место слабая сходимость

$$\Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda)e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) \rightharpoonup \Gamma_{ijkh}^0(\lambda)e_{kh}(u_\lambda) \quad \text{в } L^2(\Omega), \quad (1.45)$$

где

$$\Gamma_{ijkh}^0(\lambda) = \int_Y \sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) dy. \quad (1.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (1.40) и (1.41) сразу следуют из оценок (1.39) и Теоремы 2.

Для доказательства разложения (1.42) вектор-функции $u_{1\lambda}(x, y)$ поставим в интегральное тождество (1.38) пробную вектор-функцию

$$v = \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x)\varphi(x), \quad w(y) \in (C_{per}^\infty(Y))^3, \quad \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

и перейдем к двухмасштабному пределу согласно соотношениям (1.40) и (1.41). В результате получаем

$$\int_{\Omega} \int_Y \varphi(x) \Gamma_{ijkh}(y, \lambda) (e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})) e_{ij}^y(w) dx dy = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, приходим к следующей периодической задаче для $u_{1\lambda}(x, y)$:

$$\int_Y \Gamma_{ijkh}(y, \lambda) (e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})) e_{ij}^y(w) dy = 0. \quad (1.47)$$

После подстановки (1.42) в (1.38) получаем

$$\int_Y (\Gamma_{ijkh}(y, \lambda) + \Gamma_{ijlm}(y, \lambda) e_{lm}^y(Q_\lambda^{kh})) e_{ij}^y(w) dy = 0.$$

Интегрируя по частям последний интеграл, приходим к выводу, что вектор-функции $Q_\lambda^{kh}(y)$ есть решения задач (1.43).

Далее, из свойств двухмасштабной сходимости имеем

$$\Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda)e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) \xrightarrow{2} \Gamma_{ijkh}(y, \lambda)(e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})),$$

а значит,

$$\Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) \rightharpoonup \int_Y \Gamma_{ijkh}(y, \lambda) (e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})) dy \quad \text{в } L^2(\Omega).$$

С другой стороны, из (1.42) и (1.46) получаем

$$\int_Y \Gamma_{ijkh}(y, \lambda) (e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})) dy = \Gamma_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda),$$

откуда следует слабая сходимость в (1.45). Лемма доказана.

Теперь, используя результаты леммы 1, мы можем выписать усредненную задачу в образах Лапласа, решением которой является вектор-функция $u_\lambda(x)$. С этой целью подставим в (1.38) пробную функцию $v(x) \in (H_0^1(\Omega))^3$, не зависящую от ε . Тогда, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и используя соотношения (1.40), (1.41) и (1.45), получим

$$\lambda^2 \rho_0 \int_\Omega u_\lambda \cdot v dx + \int_\Omega \Gamma_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) e_{ij}(v) dx = \int_\Omega f_\lambda \cdot v dx, \quad (1.48)$$

где

$$\rho_0 = \int_Y \rho(y) dy.$$

Интегрируя по частям второй интеграл в левой части интегрального тождества (1.48), заключаем, что усредненная задача в образах Лапласа записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \rho_0 u_{\lambda i} &= \frac{\partial \sigma_{ij}^{0\lambda}}{\partial x_j} + f_{\lambda i}, \quad x \in \Omega, \\ u_\lambda(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где

$$\sigma_{ij}^{0\lambda} = \Gamma_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda). \quad (1.50)$$

Записывая функции $\Gamma_{ijkh}(y, \lambda)$ при $y \in Y_s$ в виде

$$\Gamma_{ijkh}^{(s)}(y, \lambda) = a_{ijkh}^{(s)}(y) - \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \right) w_{ijkh}^{(s)}(y) +$$

$$+\lambda b_{ijkh}^{(s)}(y) + \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)} \lambda}{\gamma_n^{(s)} (\lambda + \gamma_n^{(s)})} \right) w_{ijkh}^{(s)}(y), \quad s = 1, 2,$$

нетрудно видеть, что для любого $\lambda > 1$ в силу условий (1.8), (1.12) и (1.13) выполнено условие положительной определенности

$$\Gamma_{ijkh}(y, \lambda) \xi_{kh} \xi_{ij} \geq \alpha_4 \xi_{ij} \xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji},$$

$$\alpha_4 = \min\{\alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)}, \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)}\}.$$

Но тогда из формулы

$$\Gamma_{ijkh}^0(\lambda) \xi_{ij} \xi_{kh} = \inf_{w \in (C_{per}^\infty(Y))^3} \int_Y \Gamma_{ijkh}(y, \lambda) (\xi_{ij} + e_{ij}(w)) (\xi_{kh} + e_{kh}(w)) dy$$

(см. [31]) следует, что при $\lambda > 1$ коэффициенты $\Gamma_{ijkh}^0(\lambda)$ удовлетворяют классическим условиям симметрии и положительной определенности, поэтому существует единственное решение $u_\lambda(x)$ усредненной задачи (1.49).

Отметим, что $\sigma_{ij}^{0\lambda}$ представляют собой компоненты тензора напряжений усредненной среды, записанные в образах преобразования Лапласа. Наша следующая цель — вывод определяющих соотношений усредненной среды в первоначальных переменных x и t .

1.4.3. Усредненные уравнения в первоначальных переменных

Чтобы выписать определяющие соотношения в переменных x и t , применим обратное преобразование Лапласа к (1.50). Имеем

$$\sigma_{ij}^0 = \Gamma_{ijkh}^0(t) * e_{kh}(u). \quad (1.51)$$

Здесь $\Gamma^0(t)$ — тензор ядер релаксации усредненной среды, компоненты которого находятся по формулам

$$\Gamma_{ijkh}^0(t) = \int_Y \sigma_{ij}(Q^{kh}) dy$$

при

$$\sigma_{ij}(Q^{kh}) = \Gamma_{ijkh}(y, t) + \Gamma_{ijlm}(y, t) * e_{lm}^y(Q^{kh}),$$

где вектор-функции $Q^{kh}(y, t)$ есть решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}(Q^{kh})) = 0 \text{ в } Y \times (0, T), \\ [Q^{kh}]|_{\Gamma} = 0, \quad [\sigma_{ij}(Q^{kh})n_j]|_{\Gamma} = 0, \quad \int_Y Q^{kh} dy = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $Q^{kh}(y, t)$ зависят от функции Дирака $\delta(t)$. Представим $Q^{kh}(y, t)$ в следующем виде

$$Q^{kh}(y, t) = Z^{kh}(y)\delta(t) + W^{kh}(y, t) \quad (1.52)$$

и покажем, что вектор-функции $Z^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$ не зависят от $\delta(t)$. Для этого вернемся к образам Лапласа и выразим $Q_{\lambda}^{kh}(y)$ через $Z^{kh}(y)$ и $W_{\lambda}^{kh}(y)$:

$$Q_{\lambda}^{kh}(y) = Z^{kh}(y) + W_{\lambda}^{kh}(y).$$

Подставляя это выражение в (2.5.1), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(Q_{\lambda}^{kh}) &= \Gamma_{ijkh}(y, \lambda) + \Gamma_{ijlm}(y, \lambda)e_{lm}^y(Z^{kh}) + \Gamma_{ijlm}(y, \lambda)e_{lm}^y(W_{\lambda}^{kh}) = \\ &= a_{ijkh}(y) + a_{ijlm}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}) + a_{ijlm}(y)e_{lm}^y(W_{\lambda}^{kh}) + \\ &+ \lambda (b_{ijkh}(y) + b_{ijlm}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}(y)e_{lm}^y(W_{\lambda}^{kh})) - \\ &- d_{ijkh}(y, \lambda) - d_{ijlm}(y, \lambda)e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijlm}(y, \lambda)e_{lm}^y(W_{\lambda}^{kh}). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим по отдельности три случая:

- 1) обе фазы имеют ненулевые тензоры коэффициентов вязкости, т.е. $b^{(1)}(y) \neq 0$ и $b^{(2)}(y) \neq 0$;
- 2) только одна фаза имеет ненулевой тензор коэффициентов вязкости, т.е. либо $b^{(1)}(y) \neq 0$ и $b^{(2)}(y) = 0$, либо $b^{(1)}(y) = 0$ и $b^{(2)}(y) \neq 0$;
- 3) обе фазы имеют нулевые тензоры коэффициентов вязкости, т.е. $b^{(1)}(y) = 0$ и $b^{(2)}(y) = 0$.

1) Случай $b^{(1)}(y) \neq 0$ и $b^{(2)}(y) \neq 0$. Этому случаю соответствуют 3 модели двухфазных сред с диссипацией: среда, состоящая из двух разных ВУМ-I; среда, состоящая из двух разных ВУМ-III; среда, состоящая из ВУМ-I и ВУМ-III (см. табл. 1.2).

	ВУМ-I	ВУМ-III
ВУМ-I	+	+
ВУМ-III		+

Таблица 1.2. 3 модели двухфазных твердых сред, для которых $b^{(1)}(y) \neq 0$ и $b^{(2)}(y) \neq 0$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) &= b_{ijkh}^{(s)}(y) + b_{ijlm}^{(s)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}), \quad y \in Y_s, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(D^{kh}) &= a_{ijkh}^{(s)}(y) + a_{ijlm}^{(s)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}^{(s)}(y)e_{lm}^y(D^{kh}), \quad y \in Y_s, \\ \sigma_{ij}^{(3)}(W_\lambda^{kh}) &= a_{ijkh}^{(s)}(y)e_{lm}^y(W_\lambda^{kh}) + b_{ijlm}^{(s)}(y)e_{lm}^y(\lambda W_\lambda^{kh} - D^{kh}) - \\ &- d_{ijkh}^{(s)}(y, \lambda) - d_{ijlm}^{(s)}(y, \lambda)e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijlm}^{(s)}(y, \lambda)e_{lm}^y(W_\lambda^{kh}), \quad y \in Y_s.\end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) = \sigma_{ij}^{(2)}(D^{kh}) + \lambda \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) + \sigma_{ij}^{(3)}(W_\lambda^{kh}). \quad (1.53)$$

Определим вначале вектор-функции $Z^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ как решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh})) = 0 & \text{в } Y, \\ \left[\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) n_j \right] \Big|_\Gamma = 0, \quad \int_Y Z^{kh} dy = 0. \end{cases} \quad (1.54)$$

Затем определим вектор-функции $D^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ как решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(2)}(D^{kh})) = 0 & \text{в } Y, \\ \left[\sigma_{ij}^{(2)}(D^{kh}) n_j \right] \Big|_\Gamma = 0, \quad \int_Y D^{kh} dy = 0. \end{cases} \quad (1.55)$$

Теперь из (1.43) следует, что вектор-функции $W_\lambda^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ есть решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(3)}(W_\lambda^{kh}) \right) = 0 & \text{в } Y, \\ \left[\sigma_{ij}^{(3)}(W_\lambda^{kh}) n_j \right] \Big|_\Gamma = 0, \quad \int_Y W_\lambda^{kh} dy = 0. \end{cases}$$

Выполняя здесь обратное преобразование Лапласа, заключаем, что $W^{kh}(y, t)$ есть решения следующих эволюционных периодических задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}) \right) = 0 & \text{в } Y \times (0, T), \\ \left[\sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}) n_j \right] \Big|_\Gamma = 0, \quad \int_Y W^{kh} dy = 0, \\ W^{kh}(y, 0) = D^{kh}(y) & \text{в } Y \end{cases} \quad (1.56)$$

при

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}) &= a_{ijkh}^{(s)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) + \\ &- d_{ijlm}^{(s)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(s)}(y, t) e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(s)}(y, t), \\ &y \in Y_s, \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Отметим, что система уравнений из (1.56) является дифференциальной (интегро-дифференциальной) в Y_s , если $d^{(s)}(y, t) = 0$ (соответственно $d^{(s)}(y, t) \neq 0$). В частности, если обе фазы $\Omega_{1\epsilon}$ и $\Omega_{2\epsilon}$ заняты вязкоупругими материалами Кельвина-Фойгта (ВУМ-I), то эта система — дифференциальная в Y_1 и Y_2 .

Таким образом, мы убедились, что вектор-функции $Z^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$, входящие в разложение (1.52), не зависят от $\delta(t)$.

Далее, из (1.53) имеем

$$\sigma_{ij}(Q^{kh}) = \delta(t) \sigma_{ij}^{(2)}(D^{kh}) + \delta'(t) \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) + \sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}),$$

ПОЭТОМУ

$$\Gamma_{ijkh}^0(t) = \delta(t) \int_Y \sigma_{ij}^{(2)}(D^{kh}) dy + \delta'(t) \int_Y \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) dy + \int_Y \sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}) dy.$$

Введем тензоры α , β и $g(t)$, компоненты которых определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_{ijkh} &= \int_Y \sigma_{ij}^{(2)}(D^{kh}) dy = \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{ijkh}^{(s)}(y) dy + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(a_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y(D^{kh}) \right) dy, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\beta_{ijkh} = \int_Y \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) dy = \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(b_{ijkh}^{(s)}(y) + b_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) dy, \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} g_{ijkh}(t) &= - \int_Y \sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}) dy = \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{ijkh}^{(s)}(y, t) dy + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{ijlm}^{(s)}(y, t) e_{lm}^y(Z^{kh}) + d_{ijlm}^{(s)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) dy - \\ &- \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(a_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) \right) dy. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Тогда тензор ядер релаксации усредненной среды записывается в виде

$$\Gamma^0(t) = \delta(t)\alpha + \delta'(t)\beta - g(t). \quad (1.60)$$

Очевидно, что тензоры α , β и $g(t)$ представляют собой не что иное, как тензор модулей упругости, тензор коэффициентов вязкости и тензор регулярных частей ядер релаксации усредненной среды. Согласно вышеизложенному, компоненты тензоров α и β находятся с помощью решений стационарных периодических задач (1.54) и (1.55), а компоненты тензора $g(t)$ — с помощью решений эволюционных периодических задач (1.56). Используя условия симметрии компонентов тензоров $a^{(s)}(y)$, $b^{(s)}(y)$ и $d^{(s)}(y, t)$, нетрудно показать, что решения задач (1.54)-(1.56) и компоненты тензоров α , β и $g(t)$ удовлетворяют следующим условиям симметрии:

$$Z^{kh}(y) = Z^{hk}(y), \quad D^{kh}(y) = D^{hk}(y), \quad W^{kh}(y, t) = W^{hk}(y, t), \quad (1.61)$$

$$\alpha_{ijkh} = \alpha_{jikh} = \alpha_{khij}, \quad \beta_{ijkh} = \beta_{jikh} = \beta_{khij}, \quad (1.62)$$

$$g_{ijkh}(t) = g_{jikh}(t) = g_{khij}(t).$$

Отметим, что в некоторых отдельных случаях тензор ядер релаксации $\Gamma^0(t)$ усредненного материала может иметь “укороченный” вид. Например, если обе фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ заняты двумя разными материалами Кельвина-Фойгта, для которых тензоры модулей упругости пропорциональны тензорам коэффициентов вязкости с одним и тем же коэффициентом пропорциональности (т.е. если $a^{(1)}(y) = kb^{(s)}(y)$ и $a^{(2)}(y) = kb^{(2)}(y)$ при $k = \text{const}$), то $D^{kh}(y) = 0$ и $W^{kh}(y, t) = 0$ для всех $k, h = 1, 2, 3$. Но тогда $g(t) = 0$, а значит, $\Gamma^0(t) = \delta(t)\alpha + \delta'(t)\beta$. Следовательно, усредненный материал является однородным вязкоупругим материалом Кельвина-Фойгта, для которого, как нетрудно проверить, $\alpha = k\beta$.

Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что, за исключением отдельных случаев, для всех трех указанных выше моделей сред, для которых обе фазы имеют ненулевые тензоры коэффициентов вязкости, тензоры ядер релаксации $\Gamma^0(t)$ соответствующих им усредненных сред имеют “полный” вид, т.е. усредненными средами являются однородные вязкоупругие материалы наиболее общего вида — ВУМ-III.

2) Случай $b^{(1)}(y) = 0$, $b^{(2)}(y) \neq 0$ **или** $b^{(1)}(y) \neq 0$, $b^{(2)}(y) = 0$. Этому случаю соответствуют 4 модели двухфазных сред с диссипацией: среда, состоящая из упругого материала и ВУМ-I; среда, состоящая из упругого материала и ВУМ-III; среда, состоящая из ВУМ-I и ВУМ-II; среда, состоящая из ВУМ-II и ВУМ-III.

Меняя обозначения фаз, если это необходимо, мы без ограничения общности будем считать, что для второго случая всегда $b^{(1)}(y) = 0$, а $b^{(2)}(y) \neq 0$ (см. табл. 1.3).

Введем обозначения

$$\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) = a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}), \quad y \in Y_1,$$

	<i>Вторая фаза $\Omega_{2\varepsilon}$</i>	
<i>Первая фаза $\Omega_{1\varepsilon}$</i>	ВУМ-I	ВУМ-III
УМ	+	+
ВУМ-II	+	+

Таблица 1.3. 4 модели двухфазных твердых сред, для которых $b^{(1)}(y) = 0$, $b^{(2)}(y) \neq 0$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}) &= b_{ijkh}^{(2)}(y) + b_{ijlm}^{(2)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}), \quad y \in Y_2, \\ \sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh}) &= a_{ijkh}^{(2)}(y) + a_{ijlm}^{(2)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}^{(2)}(y)e_{lm}^y(D^{kh}), \quad y \in Y_2, \\ \sigma_{ij}^{(4)}(W_\lambda^{kh}) &= a_{ijkh}^{(1)}(y)e_{lm}^y(W_\lambda^{kh}) - d_{ijlm}^{(1)}(y, \lambda)e_{lm}^y(W_\lambda^{kh}) - \\ &\quad - d_{ijlm}^{(1)}(y, \lambda)e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda), \quad y \in Y_1, \\ \sigma_{ij}^{(4)}(W_\lambda^{kh}) &= a_{ijkh}^{(2)}(y)e_{lm}^y(W_\lambda^{kh}) + b_{ijlm}^{(2)}(y)e_{lm}^y(\lambda W_\lambda^{kh} - D^{kh}) - \\ &\quad - d_{ijlm}^{(2)}(y, \lambda)e_{lm}^y(W_\lambda^{kh}) - d_{ijlm}^{(2)}(y, \lambda)e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(2)}(y, \lambda), \quad y \in Y_2.\end{aligned}$$

Имеем

$$\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) = \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) + \sigma_{ij}^{(4)}(W_\lambda^{kh}), \quad y \in Y_1, \quad (1.63)$$

$$\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) = \sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh}) + \lambda \sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}) + \sigma_{ij}^{(4)}(W_\lambda^{kh}), \quad y \in Y_2. \quad (1.64)$$

Определим вектор-функции $Z^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ как решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(s)}(Z^{kh}) \right) = 0 & \text{в } Y_s, \quad s = 1, 2, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh})n_j = 0 & \text{на } \Gamma, \quad \int_Y Z^{kh} dy = 0. \end{cases} \quad (1.65)$$

Затем определим вектор-функции $D^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y_2))^3$ как решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh}) \right) = 0 & \text{в } Y_2, \\ \sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh})n_j = \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh})n_j & \text{на } \Gamma, \quad \int_{Y_2} D^{kh} dy = 0. \end{cases} \quad (1.66)$$

Теперь из (1.43) следует, что вектор-функции $W_\lambda^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ есть решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(4)}(W_\lambda^{kh}) \right) = 0 & \text{в } Y, \\ \left[\sigma_{ij}^{(4)}(W_\lambda^{kh}) n_j \right] \Big|_\Gamma = 0, \quad \int_Y W_\lambda^{kh} dy = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $W^{kh}(y, t)$ есть решения эволюционных периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(4)}(W^{kh}) \right) = 0 & \text{в } Y \times (0, T), \\ \left[\sigma_{ij}^{(4)}(W^{kh}) n_j \right] \Big|_\Gamma = 0, \quad \int_Y W^{kh} dy = 0, \\ W^{kh}(y, 0) = D^{kh}(y) & \text{в } Y_2 \end{cases} \quad (1.67)$$

при

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(4)}(W^{kh}) &= a_{ijkh}^{(1)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(1)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - \\ &\quad - d_{ijlm}^{(1)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(1)}(t), \quad y \in Y_1, \\ \sigma_{ij}^{(4)}(W^{kh}) &= a_{ijkh}^{(2)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}^{(2)}(y) e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - \\ &\quad - d_{ijlm}^{(2)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(2)}(y, t) e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(2)}(y, t), \quad y \in Y_2. \end{aligned}$$

Тем самым мы убедились, что и во втором случае вектор-функции $Z^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$, входящие в разложение (1.52), не зависят от $\delta(t)$.

Далее, из (1.63), (1.64) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(Q^{kh}) &= \delta(t) \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) + \sigma_{ij}^{(4)}(W^{kh}), \quad y \in Y_1, \\ \sigma_{ij}(Q^{kh}) &= \delta(t) \sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh}) + \delta'(t) \sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}) + \sigma_{ij}^{(4)}(W^{kh}), \quad y \in Y_2, \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} q_{ijkh}^0(t) &= \delta(t) \left(\int_{Y_1} \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) dy + \int_{Y_2} \sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh}) dy \right) + \\ &\quad + \delta'(t) \int_{Y_2} \sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}) dy + \int_Y \sigma_{ij}^{(4)}(W^{kh}) dy. \end{aligned}$$

Если ввести тензоры α , β и $g(t)$, компоненты которых определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_{ijkh} &= \int_{Y_1} \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) dy + \int_{Y_2} \sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh}) dy = \\ &= \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(a_{ijkh}^{(s)}(y) + a_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) dy + \int_{Y_2} b_{ijlm}^{(2)}(y) e_{lm}^y(D^{kh}) dy, \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$\beta_{ijkh} = \int_{Y_2} \sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}) dy = \int_{Y_2} \left(b_{ijkh}^{(2)}(y) + b_{ijlm}^{(2)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) dy, \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} g_{ijkh}(t) &= - \int_Y \sigma_{ij}^{(4)}(W^{kh}) dy = \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{ijkh}^{(s)}(y, t) dy + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{ijlm}^{(s)}(y, t) e_{lm}^y(Z^{kh}) + d_{ijlm}^{(s)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) dy - \\ &- \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) dy - \int_{Y_2} b_{ijlm}^{(2)}(y) e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) dy, \end{aligned} \quad (1.70)$$

то тензор ядер релаксации $\Gamma^0(t)$ усредненной среды имеет тот же самый вид (1.60), что и в первом случае. Из (1.68)-(1.70) видно, что для нахождения компонентов тензора модулей упругости α и тензора коэффициентов вязкости β требуется решить стационарные периодические задачи (1.65)-(1.66), а для нахождения компонентов тензора регулярных частей ядер релаксации $g(t)$ — эволюционные периодические задачи (1.67). Нетрудно убедиться, что решения этих периодических задач и компоненты тензоров α , β и $g(t)$ удовлетворяют условиям симметрии (1.61), (1.62).

Отметим, что, за исключением отдельных случаев, для всех четырех рассмотренных моделей сред, для которых только одна фаза имеет ненулевой тензор коэффициентов вязкости, соответствующими им усредненными средами являются однородные вязкоупругие материалы наиболее общего вида — ВУМ-III. В качестве примера упомянутого исключения возьмем

среду, у которой первая фаза — упругий материал, а вторая — вязкоупругий материал Кельвина-Фойгта, причем тензоры модулей упругости обеих фаз пропорциональны тензору коэффициентов вязкости второй фазы, т.е. $a^{(1)}(y) = k_1 b^{(2)}(y)$ и $a^{(2)}(y) = k_2 b^{(2)}(y)$, где $k_1, k_2 = \text{const}$. Тогда $D^{kh}(y) = 0$ и $W^{kh}(y, t) = 0$ для всех $k, h = 1, 2, 3$. Это значит, что $g(t) = 0$ и $\Gamma^0(t) = \delta(t)\alpha + \delta'(t)\beta$, т.е. усредненной средой является не ВУМ-III, а ВУМ-I.

3) Случай $b^{(1)}(y) = 0$ и $b^{(2)}(y) = 0$. Этому случаю соответствуют 2 модели двухфазных твердых сред с диссипацией: среда, состоящая из УМ и ВУМ-II, и среда, состоящая из двух разных ВУМ-II (см. табл. 1.4).

	ВУМ-II
УМ	+
ВУМ-II	+

Таблица 1.4. 2 модели двухфазных твердых сред, для которых $b^{(1)}(y) = b^{(2)}(y) = 0$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) &= a_{ijkh}^{(s)}(y) + a_{ijlm}^{(s)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}), \quad y \in Y_s, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(W_\lambda^{kh}) &= a_{ijkh}^{(s)}(y)e_{lm}^y(W_\lambda^{kh}) - d_{ijlm}^{(s)}(y, \lambda)e_{lm}^y(W_\lambda^{kh}) - \\ &\quad - d_{ijlm}^{(s)}(y, \lambda)e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(s)}(y, \lambda), \quad y \in Y_s.\end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) = \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) + \sigma_{ij}^{(2)}(W_\lambda^{kh}). \quad (1.71)$$

Определим вектор-функции $Z^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ как решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh})) = 0 & \text{в } Y, \\ \left[\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) n_j \right] \Big|_\Gamma = 0, \quad \int_Y Z^{kh} dy = 0. \end{cases} \quad (1.72)$$

Из (1.43) следует, что вектор-функции $W_\lambda^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ есть решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(2)}(W_\lambda^{kh}) \right) = 0 & \text{в } Y, \\ \left[\sigma_{ij}^{(2)}(W_\lambda^{kh}) n_j \right] \Big|_\Gamma = 0, & \int_Y W_\lambda^{kh} dy = 0. \end{cases}$$

Переходя к оригиналам преобразования Лапласа, заключаем, что $W^{kh}(y, t)$ есть решения эволюционных периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh}) \right) = 0 & \text{в } Y \times (0, T), \\ \left[\sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh}) n_j \right] \Big|_\Gamma = 0, & \int_Y W^{kh} dy = 0 \end{cases} \quad (1.73)$$

при

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh}) &= a_{ijkh}^{(s)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(s)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - \\ &- d_{ijlm}^{(s)}(y, t) e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(s)}(y, t), \quad y \in Y_s. \end{aligned}$$

Таким образом, как и в предыдущих двух случаях, вектор-функции $Z^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$, входящие в разложение (1.52), не зависят от $\delta(t)$.

Далее, из (1.71) имеем

$$\sigma_{ij}(Q^{kh}) = \delta(t) \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) + \sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh}),$$

поэтому

$$\Gamma_{ijkh}^0(t) = \delta(t) \int_Y \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) dy + \int_Y \sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh}) dy.$$

Введем два тензора α и $g(t)$, компоненты которых зададим следующим образом:

$$\alpha_{ijkh} = \int_Y \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) dy = \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(a_{ijkh}^{(s)}(y) + a_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) dy, \quad (1.74)$$

$$g_{ijkh}(t) = \int_Y \sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh}) dy = \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{ijkh}^{(s)}(y, t) + d_{ijlm}^{(s)}(y, t) e_{im}^y(Z^{kh}) \right) dy +$$

$$+ \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{ijlm}^{(s)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - a_{ijlm}^{(s)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) \right) dy. \quad (1.75)$$

Тогда тензор ядер релаксации $\Gamma^0(t)$ принимает вид

$$\Gamma^0(t) = \delta(t)\alpha - g(t). \quad (1.76)$$

Таким образом, если обе фазы гетерогенной среды имеют нулевые тензоры коэффициентов вязкости, то усредненная среда также имеет нулевой тензор коэффициентов вязкости и является однородной вязкоупругой средой с долговременной памятью, т.е. ВУМ-II. Из (1.74), (1.75) видно, что для нахождения компонентов тензора модулей упругости α требуется решить стационарные периодические задачи (1.72), а для нахождения компонентов тензора регулярных частей ядер релаксации $g(t)$ усредненной среды — эволюционные периодические задачи (1.73). Отметим, что решения этих периодических задач и компоненты тензоров α и $g(t)$ удовлетворяют условиям симметрии (1.61), (1.62).

Перейдем к анализу полученных формул для компонентов тензоров α , β и $g(t)$ для всех девяти моделей двухфазных твердых сред с диссипацией, рассматриваемых в этой главе. Сравнивая (1.57)-(1.59), (1.68)-(1.70), (1.74), (1.75), мы видим, что во всех случаях компоненты указанных тензоров можно записать в виде

$$\alpha_{ijkh} = \int_Y \left(a_{ijkh}(y) + a_{ijlm}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}(y) e_{lm}^y(D^{kh}) \right) dy, \quad (1.77)$$

$$\beta_{ijkh} = \int_Y \left(b_{ijkh}(y) + b_{ijlm}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) dy, \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} g_{ijkh}(t) = & \int_Y \left(d_{ijkh}(y, t) + d_{ijlm}(y, t) e_{lm}^y(Z^{kh}) + d_{ijlm}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) dy - \\ & - \int_Y \left(a_{ijlm}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}(y) e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) \right) dy, \end{aligned} \quad (1.79)$$

где $a(y)$, $b(y)$, $d(y, t)$ — тензоры модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации исходной двухфазной среды, определяемые формулами (1.4) и (1.5). Вектор-функции $Z^{kh}(y)$, $D^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$, входящие в окончательные формулы (1.77)-(1.79), определяются как решения стационарных и эволюционных периодических задач, вид которых зависит от числа ненулевых тензоров коэффициентов вязкости $b^{(1)}(y)$ и $b^{(2)}(y)$ отдельных фаз среды. Более подробно: если $b^{(1)}(y) \neq 0$ и $b^{(2)}(y) \neq 0$, то эти задачи записываются в виде (1.54)-(1.56); если $b^{(1)}(y) = 0$, а $b^{(2)}(y) \neq 0$, то — в виде (1.65)-(1.67); если $b^{(1)}(y) = b^{(2)}(y) = 0$, то — в виде (1.72), (1.73). Заметим при этом, что в последнем случае находить вектор-функции $D^{kh}(y)$ не требуется и за счет этого число периодических меньше, чем в двух предыдущих случаях. Следует также отметить, что в силу выполнения условий симметрии (1.61) для вычисления всех компонентов тензоров α , β и $g(t)$ достаточно найти решения $Z^{kh}(y)$, $D^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$ периодических задач только при $k \leq h$.

Для всех усредненных сред, соответствующих двухфазным средам, представленным в табл. 1.1, тензор ядер релаксации $\Gamma^0(t)$ можно записать в виде (1.60). При этом необходимо отметить, что если для исходной гетерогенной среды хотя бы один из тензоров $b^{(1)}(y)$ и $b^{(2)}(y)$ — ненулевой, то

$$\alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0, \quad g(t) \neq 0$$

(за исключением отдельных частных случаев), а если оба эти тензора — нулевые, то

$$\alpha \neq 0, \quad \beta = 0, \quad g(t) \neq 0.$$

Таким образом, усредненными средами являются однородные вязкоупругие материалы с памятью: ВУМ-II или ВУМ-III (см. табл. 1.5).

Чтобы выписать усредненную задачу в первоначальных переменных x и t , перейдем к оригиналам преобразования Лапласа в (1.49). Обозна-

	Вторая фаза $\Omega_{2\varepsilon}$		
Первая фаза $\Omega_{1\varepsilon}$	ВУМ-I	ВУМ-II	ВУМ-III
УМ	ВУМ-III	ВУМ-II	ВУМ-III
ВУМ-I	ВУМ-III	ВУМ-III	ВУМ-III
ВУМ-II		ВУМ-II	ВУМ-III
ВУМ-III			ВУМ-III

Таблица 1.5. Усредненные среды для 9 моделей двухфазных твердых сред с диссипацией

чим через $u(x, t)$ оригинал вектор-функции $u_\lambda(x)$. Тогда математическая модель, описывающая колебания усредненного материала, имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + f_i(x, t) \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (1.80)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0,$$

где σ^0 — тензор напряжений усредненного материала,

$$\sigma_{ij}^0 = \alpha_{ijkh} e_{kh}(u) + \beta_{ijkh} e_{kh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - g_{ijkh}(t) * e_{kh}(u). \quad (1.81)$$

Система уравнений, входящая в задачу (1.80), есть система интегродифференциальных уравнений в частных производных: второго порядка, если обе фазы обладают нулевыми тензорами коэффициентов вязкости, и третьего порядка, если хотя бы одна фаза обладает ненулевым тензором коэффициентов вязкости.

Заметим, что если фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ твердой среды состоят из разных вязкоупругих материалов Кельвина-Фойгта (ВУМ-I), то такая среда — частный случай микронеоднородного вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта. Усредненная модель для микронеоднородного вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта была построена в работе [64] с помощью метода асимптотических разложений и теории полугрупп. В этой работе было

установлено, в частности, что усредненной средой является однородный вязкоупругий материал, обладающий как вязкостью, так и долговременной памятью. Вместе с тем необходимо указать, что в ней не были приведены явные формулы для расчета компонентов тензоров модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации усредненного материала, как это было сделано в данной главе.

Необходимо отметить, что усредненную модель (1.80) можно вывести, не прибегая к преобразованию Лапласа. Однако предложенный в данной главе подход, основанный на построении сначала усредненной модели в изображениях Лапласа, а затем выводу усредненной модели в оригиналах, позволяет не только избежать чрезвычайно запутанных и громоздких выкладок, но и построить усредненные модели сразу для широкого класса двухфазных твердых сред с диссипацией.

1.4.4. Сильная сходимость решений

Перейдем к исследованию вопроса о сходимости последовательности решений исходных задач к решениям соответствующих усредненных задач. Для этого сначала докажем следующую теорему

Теорема 4. Пусть $u_\lambda^\varepsilon(x)$ — решение задачи (1.38). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$u_\lambda^\varepsilon(x) \rightarrow u_\lambda(x) \text{ в } (L^2(\Omega))^3, \quad (1.82)$$

$$e(u_\lambda^\varepsilon(x)) \xrightarrow{2} e(u_\lambda(x)) + e_y(u_{1\lambda}(x, y)), \quad (1.83)$$

где $u_\lambda(x)$ — решение усредненной задачи (1.49),

$$u_{1\lambda}(x, y) = Q_\lambda^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}(x),$$

а $Q_\lambda^{kh}(y)$ — решения периодических задач (1.43).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (1.38) в качестве пробной функцию $v(x) = u_\lambda^\varepsilon(x)$ и перейдем к нижнему пределу при

$\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lambda^2 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon |u_\lambda^\varepsilon|^2 dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) e_{ij}(u_\lambda^\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f_\lambda \cdot u_\lambda dx. \quad (1.84)$$

Теперь возьмем в интегральном тождестве (1.48) пробную функцию $v(x) = u_\lambda(x)$. Имеем

$$\lambda^2 \rho_0 \int_{\Omega} |u_\lambda|^2 dx + \int_{\Omega} \Gamma_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) e_{ij}(u_\lambda) dx = \int_{\Omega} f_\lambda \cdot u_\lambda dx. \quad (1.85)$$

С другой стороны, по свойствам (i), (ii) двухмасштабной сходимости

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon |u_\lambda^\varepsilon|^2 dx \geq \rho_0 \int_{\Omega} |u_\lambda|^2 dx,$$

а также (см. [31])

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) e_{ij}(u_\lambda^\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} \Gamma_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) e_{ij}(u_\lambda) dx.$$

Поскольку правые части (1.84) и (1.85) равны, то в каждом неравенстве должно выполняться равенство. Следовательно, с учетом того, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Gamma_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) e_{ij}(u_\lambda) dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \int_Y \Gamma_{ijkh}(y, \lambda) (e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})) (e_{ij}(u_\lambda) + e_{ij}^y(u_{1\lambda})) dx dy \end{aligned}$$

(см. [31]), утверждение теоремы следует из свойств (i) и (iii) двухмасштабной сходимости.

Возвращаясь к первоначальным переменным x и t , из теоремы 4 получаем следующий результат о сходимости решений допредельных задач (1.18)-(1.20) к решению усредненной задачи (1.80).

Теорема 5. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (1.18)-(1.20). Тогда для всех $t \in [0, T]$

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{в} \quad (L^2(\Omega))^3, \quad (1.86)$$

$$e(u^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{2} e(u(x, t)) + e_y(u_1(x, y, t)). \quad (1.87)$$

Здесь $u(x, t)$ — решение усредненной задачи (1.80),

$$u_1(x, y, t) = Z^{kh}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t) + W^{kh}(y, t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t),$$

а вектор-функции $Z^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$ есть решения периодических задач (1.54), (1.56) при $b^{(1)}(y) \neq 0$, $b^{(2)}(y) \neq 0$, задач (1.65), (1.67) при $b^{(1)}(y) = 0$, $b^{(2)}(y) \neq 0$ и задач (1.72), (1.73) при $b^{(1)}(y) = 0$, $b^{(2)}(y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что сходимость в (1.82) влечет за собой сходимость в (1.86). Для этого введем обозначения

$$w^\varepsilon(t) = \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x, t)|^2 dx, \quad w(t) = \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx,$$

$$w^\varepsilon(\lambda) = \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x, \lambda)|^2 dx, \quad w(\lambda) = \int_{\Omega} |u(x, \lambda)|^2 dx.$$

Используя (1.82), имеем

$$w^\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} w^\varepsilon(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} w(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = w(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

что сразу дает соотношения (1.86). Аналогично, с помощью (1.83) и свойства (iv) двухмасштабной сходимости доказывается соотношение (1.87).

Теорема доказана.

Таким образом, согласно теореме 5 для всех $t \in [0, T]$ решения $u(x, t)$ начально-краевых задач (1.80), описывающих колебания усредненных сред, есть сильные L^2 -пределы последовательностей решений $u^\varepsilon(x, t)$ начально-краевых задач (1.18)-(1.20), описывающих колебания соответствующих исходных двухфазных твердых сред, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^2 dx = 0.$$

Более того, если $u(x, t) \in (C^1(\overline{\Omega}))^3$ для всех $t \in [0, T]$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |e(u^\varepsilon(x, t)) - e(u(x, t)) - u_2(x, \varepsilon^{-1}x, t)|^2 dx = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.88)$$

$$u_2(x, y, t) = e_y(u_1(x, y, t)),$$

а если $u(x, t) \in (C^2(\overline{\Omega}))^3$ для всех $t \in [0, T]$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |e(u^\varepsilon(x, t) - u(x, t) - \varepsilon u_1(x, \varepsilon^{-1}x, t))|^2 dx = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.89)$$

Последние два соотношения напрямую следуют из Теоремы 5 и свойства (v) двухмасштабной сходимости (см. также [31]).

Глава 2

Усреднение уравнений акустики для сред, состоящих из твердого материала и жидкости

2.1. Исходные уравнения акустики для сред, состоящих из твердого материала и жидкости

Рассмотрим микронеоднородную среду с ε -периодической структурой, состоящую из упругого или вязкоупругого материала одного из трех рассмотренных ранее типов (ВУМ-I, ВУМ-II, ВУМ-III) и сжимаемой вязкой или слабовязкой жидкости. Как и ранее, обозначим через $\Omega_{1\varepsilon}$ первую, а через $\Omega_{2\varepsilon}$ — вторую фазу области Ω . Без ограничения общности можно считать, что $\Omega_{1\varepsilon}$ — твердая (упругая или вязкоупругая) фаза, а $\Omega_{2\varepsilon}$ — жидкая фаза области Ω .

В твердой фазе $\Omega_{1\varepsilon}$ определяющие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^\varepsilon = & a_{ijkh}^{(1)}(\varepsilon^{-1}x)e_{kh}(u^\varepsilon) + b_{ijkh}^{(1)}(\varepsilon^{-1}x)e_{kh}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - \\ & - d_{ijkh}^{(1)}(\varepsilon^{-1}x, t) * e_{kh}(u^\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где компоненты тензоров $a^{(1)}(y)$, $b^{(1)}(y)$, $d^{(1)}(y, t)$ — Y -периодические гладкие функции по y , удовлетворяющие условиям, перечисленным в п. 2 Главы 1 в зависимости от типа твердого материала в $\Omega_{1\varepsilon}$.

В жидкой фазе $\Omega_{2\varepsilon}$ определяющие соотношения записываются в виде

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -\delta_{ij}p^\varepsilon + (\zeta_2^\varepsilon\delta_{ij}\delta_{kh} + 2\eta_2^\varepsilon\delta_{ik}\delta_{jh})e_{kh}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right), \quad (2.2)$$

где ζ_2^ε и η_2^ε — коэффициенты вязкости, не зависящие от ε для вязкой жидкости и имеющие порядок ε^2 для слабовязкой жидкости; p^ε — давление в жидкости,

$$p^\varepsilon = -\gamma \operatorname{div} u^\varepsilon, \quad \gamma = \rho_2 c^2. \quad (2.3)$$

Здесь γ — объемный модуль упругости, ρ_2 — плотность жидкости, c — скорость звука в жидкости в состоянии покоя [64].

Введем функцию плотности $\rho^\varepsilon(x)$, равную $\rho_1^\varepsilon(x)$ при $x \in \Omega_{1\varepsilon}$ и равную ρ_2 при $x \in \Omega_{2\varepsilon}$. Тогда математическая модель, описывающая совместные колебания твердого материала и жидкости в области Ω , записывается в виде

$$\begin{aligned} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ [u^\varepsilon]|_{S_\varepsilon} &= 0, \quad [\sigma_{ij}^\varepsilon n_j]|_{S_\varepsilon} = 0, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где компоненты тензора σ_{ij}^ε заданы соотношениями (2.1) в твердой фазе $\Omega_{1\varepsilon}$ и соотношениями (2.2) в жидкой фазе $\Omega_{2\varepsilon}$.

Вариационная формулировка задачи (2.4) имеет следующий вид: найти вектор-функцию $u^\varepsilon(t)$ со значениями в $(H_0^1(\Omega))^3$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot v dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} a_{ijkh}^{1\varepsilon} e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(v) dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} b_{ijkh}^{1\varepsilon} e_{kh} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) e_{ij}(v) dx - \\ &- \int_{\Omega_{1\varepsilon}} (d_{ijkh}^{1\varepsilon} * e_{kh}(u^\varepsilon)) e_{ij}(v) dx + \gamma \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \operatorname{div} u^\varepsilon \operatorname{div} v dx + \zeta^\varepsilon \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \operatorname{div} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \operatorname{div} v dx + \\ &+ 2\eta^\varepsilon \int_{\Omega_{2\varepsilon}} e_{ij} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и начальным условиям

$$u^\varepsilon(0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = 0. \quad (2.6)$$

Существование и единственность решения задачи (2.5), (2.6) доказываются аналогично тому, как это было сделано в п. 3 Главы 1 для случая, когда обе фазы состоят из твердых материалов. Действительно, если в (1.21) взять

$$a_{ijkh}^\varepsilon(x) = \begin{cases} a_{ijkh}^{1\varepsilon}(x), & x \in \Omega_{1\varepsilon}, \\ \gamma \delta_{ij} \delta_{kh}, & x \in \Omega_{2\varepsilon}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$b_{ijkh}^\varepsilon(x) = \begin{cases} b_{ijkh}^{1\varepsilon}(x), & x \in \Omega_{1\varepsilon}, \\ \zeta_2^\varepsilon \delta_{ij} \delta_{kh} + \eta_2^\varepsilon (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), & x \in \Omega_{2\varepsilon}, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$d_{ijkh}^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} d_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, t), & x \in \Omega_{1\varepsilon}, \\ 0, & x \in \Omega_{2\varepsilon}, \end{cases} \quad (2.9)$$

то интегральное тождество (1.21) принимает в точности вид (2.5). Следуя рассуждениям из п. 3 Главы 1 и дополнительно применяя неравенство Фридрикса, мы заключаем, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ существует единственное решение u^ε задачи (2.5), (2.6) и в случае вязкой жидкой фазы выполнены оценки

$$\left\| \frac{\partial^k u^\varepsilon}{\partial t^k} \right\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)} \leq C \|f\|_{H^k(0, T; (L^2(\Omega))^3)}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.10)$$

$$\left\| \nabla \frac{\partial^k u^\varepsilon}{\partial t^k} \right\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_{1\varepsilon}))^3)} \leq C \|f\|_{H^k(0, T; (L^2(\Omega))^3)}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.11)$$

$$\left\| \nabla \frac{\partial^k u^\varepsilon}{\partial t^k} \right\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_{2\varepsilon}))^3)} \leq C_\varepsilon \|f\|_{H^k(0, T; (L^2(\Omega))^3)}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.12)$$

$$\left\| \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial t^3} \right\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)} \leq C \|f\|_{H^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)}, \quad (2.13)$$

где $C_\varepsilon = C$. В случае слабовязкой жидкости эти оценки также выполнены, но при $C_\varepsilon = C/\varepsilon$ и при дополнительном предположении о связности обеих фаз в области Ω (см. п. 2.3 далее).

Построение усредненной модели гетерогенной среды, состоящей из твердого материала и жидкости, следует проводить по отдельности для случая вязкой жидкости и для случая слабовязкой жидкости, поскольку асимптотическое поведение решений u^ε задач (2.5)-(2.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ качественно различается для этих двух случаев.

2.2. Построение усредненных уравнений акустики для среды, состоящей из твердого материала и вязкой жидкости

Для вязкой жидкости коэффициенты ζ_2^ε и η_2^ε не зависят от ε , т.е. $\zeta_2^\varepsilon = \zeta_2$ и $\eta_2^\varepsilon = \eta_2$. Поэтому определяющие соотношения (2.2) записываются как

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -\delta_{ij}p^\varepsilon + (\zeta_2\delta_{ij}\delta_{kh} + 2\eta_2\delta_{ik}\delta_{jh})e_{kh}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right), \quad (2.14)$$

а задача (2.5), (2.6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot v dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} a_{ijkh}^{1\varepsilon} e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(v) dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} b_{ijkh}^{1\varepsilon} e_{kh}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) e_{ij}(v) dx + \\ & + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} (d_{ijkh}^{1\varepsilon}(t) * e_{kh}(u^\varepsilon)) e_{ij}(v) dx + \gamma \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \operatorname{div} u^\varepsilon \operatorname{div} v dx + \\ & + \zeta_2 \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \operatorname{div} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \operatorname{div} v dx + 2\eta_2 \int_{\Omega_{2\varepsilon}} e_{ij}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad (2.15) \\ & \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3 \end{aligned}$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и

$$u^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.16)$$

Решение u^ε задачи (2.15), (2.16) удовлетворяет условию (??) и оценкам (2.10)-(2.13) при $C_\varepsilon = C$, которые совпадают с оценками (1.34), (1.35) из Теоремы 1.

При выводе усредненной модели среды, состоящей из твердого материала и вязкой жидкости, мы можем воспользоваться результатами Главы 1. Для этого запишем (2.15) в виде (1.21), где компоненты тензоров $a^\varepsilon(x)$, $b^\varepsilon(x)$, $d^\varepsilon(x, t)$ даны формулами (2.7), (2.8), (2.9) (напомним, что в данном случае коэффициенты ζ_2^ε и η_2^ε в (2.8) не зависят от ε). Тогда, повторяя

рассуждения из п. 4 Главы 1, мы заключаем, что тензор ядер релаксации усредненной среды имеет вид

$$\Gamma^0(t) = \delta(t)\alpha + \delta'(t)\beta - g(t).$$

причем, независимо от того, является ли твердая фаза упругой или вязкоупругой, все три тензора α , β и $g(t)$ всегда будут ненулевыми. Компоненты этих тензоров находятся по формулам (1.77)-(1.79), которые в силу того, что

$$a_{ijkh}(y) = \begin{cases} a_{ijkh}^{(1)}(y), & y \in Y_1, \\ \gamma\delta_{ij}\delta_{kh}, & y \in Y_2, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$b_{ijkh}(y) = \begin{cases} b_{ijkh}^{(1)}(y), & y \in Y_1, \\ \zeta_2\delta_{ij}\delta_{kh} + \eta_2(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), & y \in Y_2, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$d_{ijkh}(y, t) = \begin{cases} d_{ijkh}^{(1)}(y, t), & y \in Y_1, \\ 0, & y \in Y_2, \end{cases} \quad (2.19)$$

принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{ijkh} &= \int_{Y_1} \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(D^{kh}) \right) dy + \\ &+ \int_{Y_2} \left(\gamma\delta_{ij}(\delta_{kh} + \operatorname{div}_y Z^{kh}) + \zeta_2\delta_{ij} \operatorname{div}_y D^{kh} + 2\eta_2 e_{ij}^y(D^{kh}) \right) dy, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ijkh} &= \int_{Y_1} \left(b_{ijkh}^{(1)}(y) + b_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) dy + \\ &+ \int_{Y_2} \left(\zeta_2\delta_{ij}(\delta_{kh} + \operatorname{div}_y Z^{kh}) + \eta_2(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk} + 2e_{ij}^y(Z^{kh})) \right) dy, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} g_{ijkh}(t) &= \int_{Y_1} \left(d_{ijkh}^{(1)}(y, t) dy + d_{ijlm}^{(1)}(y, t)e_{lm}^y(Z^{kh}) + d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) dy - \\ &- \int_{Y_1} \left(a_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) \right) dy - \end{aligned}$$

$$- \int_{Y_2} \left(\gamma \delta_{ij} \operatorname{div}_y W^{kh} + \zeta_2 \delta_{ij} \operatorname{div}_y \frac{\partial W^{kh}}{\partial t} + 2\eta_2 e_{ij}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) \right) dy. \quad (2.22)$$

Здесь, если $b^{(1)}(y) \neq 0$, то вектор-функции $Z^{kh}(y)$, $D^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$ — решения периодических задач (1.54), (1.55), (1.56) при

$$\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) = \begin{cases} b_{ijkh}^{(1)}(y) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}), & y \in Y_1, \\ \zeta_2 \delta_{ij} (\delta_{kh} + \operatorname{div}_y Z^{kh}) + \eta_2 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk} + 2e_{ij}^y(Z^{kh})), & y \in Y_2, \end{cases}$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(D^{kh}) = \begin{cases} a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(D^{kh}), & y \in Y_1, \\ \gamma \delta_{ij} (\delta_{kh} + \operatorname{div}_y Z^{kh}) + \zeta_2 \delta_{ij} \operatorname{div}_y D^{kh} + 2\eta_2 e_{ij}^y(D^{kh}), & y \in Y_2, \end{cases}$$

$$\sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}) = \begin{cases} a_{ijkh}^{(1)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - \\ \quad - d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(1)}(y, t) e_{lm}^y(Z^{kh}) - \\ \quad - d_{ijkh}^{(1)}(y, t), & y \in Y_1, \\ \gamma \delta_{ij} \operatorname{div}_y W^{kh} + \zeta_2 \delta_{ij} \operatorname{div}_y \frac{\partial W^{kh}}{\partial t} + 2\eta_2 e_{ij}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right), & y \in Y_2. \end{cases}$$

Если же $b^{(1)}(y) = 0$, то вектор-функции $Z^{kh}(y)$, $D^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$ — решения периодических задач (1.65), (1.66), (1.67) при

$$\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) = a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}), \quad y \in Y_1,$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}) = \zeta_2 \delta_{ij} (\delta_{kh} + \operatorname{div}_y Z^{kh}) + \eta_2 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk} + 2e_{ij}^y(Z^{kh})), \quad y \in Y_2,$$

$$\sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh}) = \gamma \delta_{ij} (\delta_{kh} + \operatorname{div}_y Z^{kh}) + \zeta_2 \delta_{ij} \operatorname{div}_y D^{kh} + 2\eta_2 e_{ij}^y(D^{kh}), \quad y \in Y_2,$$

$$\sigma_{ij}^{(4)}(W^{kh}) = \begin{cases} a_{ijkh}^{(1)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(1)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - \\ \quad - d_{ijlm}^{(1)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(1)}(t), & y \in Y_1, \\ \gamma \delta_{ij} \operatorname{div}_y W^{kh} + \zeta_2 \delta_{ij} \operatorname{div}_y \frac{\partial W^{kh}}{\partial t} + 2\eta_2 e_{ij}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right), & y \in Y_2. \end{cases}$$

Учитывая результаты Главы 1, усредненная задача для задачи (2.15), (2.16) записывается в виде (1.80) или, что то же самое, в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_{ijkh} \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \beta_{ijkh} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_h \partial t} - g_{ijkh}(t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h} \right) + f_i(x, t), \quad (2.23)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, для смешанной среды, состоящей из твердого материала и вязкой сжимаемой жидкости, усредненной является однородная вязкоупругая среда, обладающая как вязкостью, так и памятью. Заметим, что усредненная модель для среды, состоящей из упругого материала и вязкой сжимаемой жидкости, была построена в работах [64], [127], [144].

Для более полного и ясного представления о поведении вектор-функции $u^\varepsilon(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сформулируем следующую теорему, аналогичную Теореме 5 из Главы 1.

Теорема 6. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ есть решение задачи (2.4), в которой σ_{ij}^ε заданы соотношениями (2.1) в $\Omega_{1\varepsilon}$ и (2.14) в $\Omega_{2\varepsilon}$, где $p^\varepsilon = -\gamma \operatorname{div} u^\varepsilon$. Тогда для всех $t \in [0, T]$

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{в} \quad (L^2(\Omega))^3,$$

где $u(x, t)$ — решение усредненной задачи (2.23), в которой компоненты тензоров α , β , $g(t)$ определены формулами (2.20)-(2.22). Кроме того,

$$e(u^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{2} e(u(x, t)) + e_y(u_1(x, y, t)),$$

$$p^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2} -\gamma (\operatorname{div}_x u(x, t)) + \operatorname{div}_y u_1(x, y, t),$$

$$u_1(x, y, t) = Z^{kh}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t) + W^{kh}(y, t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t),$$

где вектор-функции $Z^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$ — решения периодических задач (1.54), (1.56) при $b^{(1)}(y) \neq 0$ и задач (1.65), (1.67) при $b^{(1)}(y) = 0$, в которых компоненты тензоров $a(y)$, $b(y)$, $d(y, t)$ даны формулами (2.17), (2.18), (2.19) соответственно.

Результаты этой теоремы можно дополнить следующим образом: если $u(x, t) \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$ для всех $t \in [0, T]$, то выполнено соотношение (1.88) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\operatorname{div} u^\varepsilon(x, t) - \operatorname{div} u(x, t) - u_3(x, \varepsilon^{-1}x, t))^2 dx = 0,$$

$$u_3(x, y, t) = \operatorname{div}_y u_1(x, y, t),$$

а если $u(x, t) \in (C^2(\bar{\Omega}))^3$, то выполнено соотношение (1.89).

2.3. Построение усредненных уравнений акустики для среды, состоящей из твердого материала и слабовязкой жидкости

Перейдем к построению усредненной модели гетерогенной среды, состоящей из твердого материала и слабовязкой жидкости. При этом мы введем дополнительное предположение о связности множеств E_1 и E_2 , заданных формулой (1.1), в пространстве \mathbb{R}^3 . Таким образом, мы считаем, что твердая $\Omega_{1\varepsilon}$ и жидкая $\Omega_{2\varepsilon}$ фазы области Ω связны в Ω . Пример ячейки периодичности такой гетерогенной среды изображен на рис. 1.1 (среда с двумя связными фазами).

Для слабовязкой жидкости $\zeta_2^\varepsilon = \varepsilon^2 \zeta_2$ и $\eta_2^\varepsilon = \varepsilon^2 \eta_2$, где постоянные ζ_2 и η_2 не зависят от ε . Поэтому определяющие соотношения (2.2) записываются как

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -\delta_{ij} p^\varepsilon + \varepsilon^2 (\zeta_2 \delta_{ij} \delta_{kh} + 2\eta_2 \delta_{ik} \delta_{jh}) e_{kh} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right), \quad (2.24)$$

а задача (2.5), (2.6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot v dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} a_{ijkh}^{1\varepsilon} e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(v) dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} b_{ijkh}^{1\varepsilon} e_{kh} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) e_{ij}(v) dx + \\ & + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} (d_{ijkh}^{1\varepsilon}(t) * e_{kh}(u^\varepsilon)) e_{ij}(v) dx + \gamma \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \operatorname{div} u^\varepsilon \operatorname{div} v dx + \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$+\varepsilon^2 \left(\zeta_2 \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \operatorname{div} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \operatorname{div} v dx + 2\eta_2 \int_{\Omega_{2\varepsilon}} e_{ij} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) e_{ij}(v) dx \right) = \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

$$\forall v \in (H_0^1(\Omega))^3$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и

$$u^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.26)$$

Нашей следующей целью будет исследование асимптотического поведения решений u^ε задач (2.25), (2.26) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.3.1. Усредненные уравнения в образах преобразования Лапласа

Применим преобразование Лапласа $g(t) \rightarrow g(\lambda) = g_\lambda$ к задаче (2.25), (2.26). В результате приходим к следующей задаче в образах преобразования Лапласа: для фиксированного λ такого, что $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_0 > 0$, где λ_0 достаточно велико, найти вектор-функцию $u_\lambda^\varepsilon \in (H_0^1(\Omega))^3$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\lambda^2 \int_{\Omega} \rho^\varepsilon u_\lambda^\varepsilon \cdot v dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} \Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) e_{ij}(v) dx +$$

$$+(\gamma + \lambda \zeta_2 \varepsilon^2) \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \operatorname{div} u_\lambda^\varepsilon \operatorname{div} v dx + 2\lambda \eta_2 \varepsilon^2 \int_{\Omega_{2\varepsilon}} e_{ij}(u_\lambda^\varepsilon) e_{ij}(v) dx =$$

$$= \int_{\Omega} f_\lambda \cdot v dx \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3, \quad (2.27)$$

где введено обозначение

$$\Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda) = a_{ijkh}^{1\varepsilon}(x) + \lambda b_{ijkh}^{1\varepsilon}(x) - d_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda), \quad x \in \Omega_{1\varepsilon}.$$

Полагая $v = u_\lambda^\varepsilon$ в (2.27) и используя те же самые рассуждения, что и в работе [141], мы заключаем, что решение u_λ^ε задачи (2.27) удовлетворяет

следующим априорным оценкам:

$$\int_{\Omega} |u_{\lambda}^{\varepsilon}|^2 dx \leq C, \quad \int_{\Omega_{1\varepsilon}} |\nabla u_{\lambda}^{\varepsilon}|^2 dx \leq C, \quad (2.28)$$

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |\nabla u_{\lambda}^{\varepsilon}|^2 dx \leq C, \quad \int_{\Omega} (\operatorname{div} u_{\lambda}^{\varepsilon})^2 dx \leq C. \quad (2.29)$$

Введем следующие обозначения: e^r ($r = 1, 2, 3$) — единичный вектор координатной оси Ox_r , ν_j ($j = 1, 2, 3$) — компоненты единичного вектора нормали к границе $\Gamma = \partial Y_1 \cap \partial Y_2$,

$$\Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) = a_{ijkh}^{(1)}(y) + \lambda b_{ijkh}^{(1)}(y) - d_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda), \quad y \in Y_1.$$

Для вывода усредненных уравнений в изображениях Лапласа нам требуется следующая ключевая лемма, описывающая асимптотическое поведение решений $u_{\lambda}^{\varepsilon}$ задач (2.27) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лемма 2. Пусть $u_{\lambda}^{\varepsilon}$ — решение задачи (2.27) и $p_{\lambda}^{\varepsilon} = -\gamma \operatorname{div} u_{\lambda}^{\varepsilon}$ в $\Omega_{2\varepsilon}$. Тогда (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u_{\lambda}^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} u_{\lambda}(x) + w_{\lambda}(x, y), \quad u_{\lambda} \in (H_0^1(\Omega))^3, \quad (2.30)$$

$$\chi(\Omega_{2\varepsilon}) p_{\lambda}^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_2) p_{\lambda}(x), \quad p_{\lambda} \in L^2(\Omega), \quad (2.31)$$

$$\chi(\Omega_{1\varepsilon}) \nabla u_{\lambda}^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_1) (\nabla u_{\lambda}(x) + \nabla_y u_{1\lambda}(x, y)), \quad (2.32)$$

$$\varepsilon \chi(\Omega_{2\varepsilon}) \nabla u_{\lambda}^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_2) \nabla_y w_{\lambda}(x, y), \quad (2.33)$$

где

$$w_{\lambda}(x, y) = \left(f_{\lambda r}(x) - \lambda^2 \rho_2 u_{\lambda r}(x) - \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial x_r}(x) \right) N_{\lambda}^r(y), \quad (2.34)$$

$$u_{1\lambda}(x, y) = Q_{\lambda}^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}(x) + p_{\lambda}(x) Q_{\lambda}(y). \quad (2.35)$$

Здесь вектор-функции $N_{\lambda}^r(y)$ — решения задач Стокса

$$\begin{cases} \nabla_y W_{\lambda}^r + \lambda^2 \rho_2 N_{\lambda}^r - \lambda \eta_2 \Delta_{yy} N_{\lambda}^r = e^r & \text{в } Y_2, \\ \operatorname{div}_y N_{\lambda}^r = 0 & \text{в } Y_2; \quad N_{\lambda}^r = 0 \quad \text{на } S. \end{cases} \quad (2.36)$$

а вектор-функции $Q_\lambda^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y_1))^3/\mathbb{R}^3$ и $Q_\lambda(y) \in (H_{per}^1(Y_1))^3/\mathbb{R}^3$ — решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh})) = 0 & \text{в } Y_1, \\ \sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh})\nu_j = 0 & \text{на } S, \end{cases} \quad (2.37)$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) e_{kh}^y(Q_\lambda) \right) = 0 & \text{в } Y_1, \\ \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) e_{kh}^y(Q_\lambda) \nu_j = \nu_i & \text{на } S \end{cases} \quad (2.38)$$

соответственно, где

$$\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) = \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) + \Gamma_{ijlm}^{(1)}(y, \lambda) e_{lm}^y(Q_\lambda^{kh}), \quad y \in Y_1.$$

Кроме того, имеет место слабая сходимость

$$\chi(\Omega_{1\varepsilon}) \Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) \rightharpoonup A_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) + \beta_{ij}(\lambda) p_\lambda \quad \text{в } L^2(\Omega), \quad (2.39)$$

где

$$A_{ijkh}^0(\lambda) = \int_{Y_1} \sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) dy, \quad \beta_{ij}(\lambda) = \int_{Y_1} \operatorname{div}_y Q_\lambda^{ij}(y) dy. \quad (2.40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (2.30), (2.32), (2.33) сразу следуют из оценок (2.28), (2.29) и свойства (vi) двухмасштабной сходимости, причем

$$u_{1\lambda} \in L^2(\Omega, (H_{per}^1(Y_1))^3/\mathbb{R}^3), \quad w_\lambda \in L^2(\Omega, (H_{per}^1(Y))^3),$$

$$w_\lambda = 0, \quad y \in Y_1 \cup \partial Y_1; \quad \operatorname{div}_y w_\lambda = 0, \quad y \in Y_2. \quad (2.41)$$

Докажем соотношение (2.31). Из оценки (2.29) следует, что последовательность $\chi(\Omega_{2\varepsilon}) p_\lambda^\varepsilon$ равномерно ограничена в $L^2(\Omega)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$\chi(\Omega_{2\varepsilon}) p_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} p_\lambda(x, y).$$

Теперь возьмем в интегральном тождестве (2.27) вектор-функцию вида

$$v(x) = \varepsilon \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad b \in (H_{per}^1(Y))^3, \quad \operatorname{supp} b \subset Y_2$$

и перейдем к двухмасштабному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получаем

$$\int_{\Omega} \int_{Y_2} p_{\lambda}(x, y) \varphi(x) \operatorname{div}_y b(y) dx dy = 0$$

откуда, в силу произвольности функции $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$,

$$\int_{Y_2} p_{\lambda}(x, y) \operatorname{div}_y b(y) dy = 0.$$

Интегрируя этот интеграл по частям, находим $p_{\lambda}(x, y) = p_{\lambda}(x)$ при $y \in Y_2$. Соотношение (2.31) теперь сразу следует из свойства (iii) двухмасштабной сходимости.

Для доказательства представления (2.34) вектор-функции $w_{\lambda}(x, y)$ подставим в интегральное тождество (2.27) вектор-функцию

$$v(x) = \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x), \quad \varphi(x) \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad b(y) \in (H_{per}^1(Y))^3,$$

$$\operatorname{supp} b(y) \subset Y_2, \quad \operatorname{div}_y b(y) = 0$$

и, используя соотношения (2.30)-(2.33), перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В итоге, учитывая произвольность выбора функции $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$, получаем

$$\int_{Y_2} (\lambda^2 \rho_2 w_{\lambda i} - \lambda \eta_2 \Delta_{yy} w_{\lambda i}) b_i dy = \left(f_{\lambda i} - \lambda^2 \rho_2 u_{\lambda i} - \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial x_i} \right) \int_{Y_2} b_i dy.$$

Отсюда, в частности, следует, что $p_{\lambda} \in H^1(\Omega)$. В последнем тождестве перенесем все слагаемые в левую часть и обозначим

$$G_{\lambda}(x) = f_{\lambda}(x) - \lambda^2 \rho_2 u_{\lambda}(x) - \nabla p_{\lambda}(x).$$

Тогда

$$\int_{Y_2} (\lambda^2 \rho_2 w_{\lambda}(x, y) - \lambda \eta_2 \Delta_{yy} w_{\lambda}(x, y) - G_{\lambda}(x)) \cdot b(y) dy = 0.$$

Так как это равенство выполняется для любой вектор-функции $b(y)$ указанного выше вида, то из него следует, что существует функция

$\Phi_\lambda(x, y) \in L^2(\Omega, H_{per}^1(Y_2))$ такая, что

$$\lambda^2 \rho_2 w_\lambda(x, y) - \lambda \eta_2 \Delta_{yy} w_\lambda(x, y) - G_\lambda(x) = \nabla_y \Phi_\lambda(x, y). \quad (2.42)$$

После подстановки (2.34) в (2.42), получим уравнение

$$M_\lambda^r(x) (\lambda^2 \rho_2 N_\lambda^r(y) - \lambda \eta_2 \Delta_{yy} N_\lambda^r(y)) - G_\lambda(x) = \nabla_y \Phi_\lambda(x, y). \quad (2.43)$$

Возьмем в качестве функций $M_\lambda^r(x)$ и $\Phi_\lambda(x, y)$ следующие функции:

$$M_\lambda^r(x) = G_{\lambda r}(x), \quad \Phi_\lambda(x, y) = -G_{\lambda r}(x) W_\lambda^r(y).$$

Тогда из (2.43) следует, что

$$G_{\lambda r}(x) (\nabla_y W_\lambda^r(y) + \lambda^2 \rho_2 N_\lambda^r(y) - \lambda \eta_2 \Delta_{yy} N_\lambda^r(y)) = G_{\lambda r}(x) e^r,$$

Отсюда и из (2.41) видим, что вектор-функция $N_\lambda^r(y)$ и функция $W_\lambda^r(y)$ есть решение периодической задачи Стокса (2.36), а значит, представление вектор-функции $w_\lambda(x, y)$ в виде (2.34) доказано.

Для доказательства представления (2.35) вектор-функции $u_{1\lambda}(x, y)$ возьмем в интегральном тождестве (2.27) вектор-функцию

$$v(x) = \varepsilon \varphi(x) b(\varepsilon^{-1} x), \quad \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega), \quad b(y) \in (C_{per}^\infty(Y))^3$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Используя соотношения (2.30)-(2.33), получаем

$$\int_{Y_1} \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) (e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})) e_{ij}^y(b) dy - p_\lambda \int_{Y_2} \operatorname{div}_y b dy = 0. \quad (2.44)$$

После подстановки (2.35) в (2.44), получаем следующие два интегральных тождества:

$$\int_{Y_1} \left(\Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) + \Gamma_{ijlm}^{(1)}(y, \lambda) e_{lm}^y(Q_\lambda^{kh}) \right) e_{ij}^y(b) dy = 0 \quad (2.45)$$

и

$$\int_{Y_1} \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) e_{kh}^y(Q_\lambda) e_{ij}^y(b) dy + \int_{Y_1} \operatorname{div}_y b dy = 0. \quad (2.46)$$

Интегрируя по частям, мы видим, вектор-функции $Q_\lambda^{kh}(y)$ есть решения периодических задач (2.37), а вектор-функция $O_\lambda(y)$ есть решение периодической задачи (2.38).

Остается доказать слабую сходимость (2.5.2). Для этого обозначим через $Q_{1\lambda}^{kh}(y)$ и $Q_{1\lambda}(y)$ продолжения вектор-функций $Q_\lambda^{kh}(y)$ и $Q_\lambda(y)$ с Y_1 на Y , такие что

$$Q_{1\lambda}^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3, \quad Q_{1\lambda}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3,$$

$$\|Q_{1\lambda}^{kh}\|_{(H_{per}^1(Y))^3} \leq C \|Q_\lambda^{kh}\|_{(H_{per}^1(Y_1))^3},$$

$$\|Q_{1\lambda}\|_{(H_{per}^1(Y))^3} \leq C \|Q_\lambda\|_{(H_{per}^1(Y_1))^3}.$$

Далее, полагая $b = Q_{1\lambda}$ в (2.45) и $b = Q_{1\lambda}^{kh}$ в (2.46), получаем

$$\int_{Y_1} \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) e_{kh}^y(Q_\lambda) dy = \int_{Y_1} \operatorname{div}_y Q_\lambda^{ij} dy = -\beta_{ij}(\lambda). \quad (2.47)$$

С другой стороны, из (2.32) следует, что

$$\chi(\Omega_{1\varepsilon}) \Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) \rightharpoonup \int_{Y_1} \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) (e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})) dy \text{ в } L^2(\Omega). \quad (2.48)$$

Используя (2.35), (2.40) и (2.47), находим

$$\int_{Y_1} \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) (e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})) dy = A_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) + \beta_{ij}(\lambda) p_\lambda$$

и теперь соотношение (2.39) напрямую следует из (2.48). Лемма доказана.

Выведем уравнения, которым удовлетворяют предельные вектор-функция u_λ и функция p_λ из Леммы 2. С этой целью подставим в интегральное тождество (2.27) вектор-функцию $v \in (H_0^1(\Omega))^3$, не зависящую от ε , и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Используя результаты Леммы 2, получаем

$$\lambda^2 \int_{\Omega} (\rho_0 u_\lambda + \rho_2 w_\lambda^0) \cdot v dx - \Pi \int_{\Omega_1} p_\lambda \operatorname{div} v dx +$$

$$+ \int_{\Omega} (A_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) + \beta_{ij}(\lambda) p_\lambda) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f_\lambda \cdot v dx, \quad (2.49)$$

где $\Pi = |Y_2|/|Y|$ — пористость, а ρ_0 — плотность усредненной среды:

$$\rho_0 = \int_{Y_1} \rho_1(y) dy + \rho_2 |Y_2|.$$

После интегрирования по частям получаем следующую систему уравнений:

$$\lambda^2 \rho_0 u_{\lambda i} + \lambda^2 \rho_2 w_{\lambda i}^0 = \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) - \alpha_{ij}(\lambda) p_\lambda) + f_{\lambda i} \quad \text{в } \Omega, \quad (2.50)$$

где $\alpha_{ij}(\lambda) = \Pi \delta_{ij} - \beta_{ij}(\lambda)$.

Для вывода еще одного уравнения, которому удовлетворяют u_λ и p_λ , нам потребуется следующее равенство:

$$\int_{Y_1} \operatorname{div}_y u_{1\lambda}(x, y) dy = |Y_2| \operatorname{div} u_\lambda(x) + \frac{|Y_2|}{\gamma} p_\lambda(x) + \operatorname{div} \int_{Y_2} w_\lambda(x, y) dy, \quad (2.51)$$

которое легко следует из результатов леммы 2. Действительно, из (2.30)-(2.33) имеем

$$\operatorname{div} u_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \operatorname{div} u_\lambda(x) + \operatorname{div} \int_{Y_2} w_\lambda(x, y) dy \quad \text{в } L^2(\Omega), \quad (2.52)$$

$$\chi(\Omega_{1\varepsilon}) \operatorname{div} u_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup |Y_1| \operatorname{div} u_\lambda(x) + \int_{Y_1} \operatorname{div}_y u_{1\lambda}(x, y) dy \quad \text{в } L^2(\Omega),$$

$$\chi(\Omega_{2\varepsilon}) \operatorname{div} u_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup -\frac{|Y_2|}{\gamma} p_\lambda(x) \quad \text{в } L^2(\Omega).$$

Отсюда находим

$$\operatorname{div} u_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup |Y_1| \operatorname{div} u_\lambda(x) - \frac{|Y_2|}{\gamma} p_\lambda(x) + \int_{Y_1} \operatorname{div}_y u_{1\lambda}(x, y) dy \quad \text{в } L^2(\Omega).$$

Сравнивая (2.52) с последним соотношением, получаем равенство (2.51).

После подстановки (2.35) в (2.51) мы видим, что u_λ и p_λ удовлетворяют следующему уравнению:

$$\beta_{kh}(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) - \beta(\lambda) p_\lambda = \frac{\Pi}{\gamma} p_\lambda + \Pi \operatorname{div} u_\lambda + \operatorname{div} w_0,$$

где

$$\beta(\lambda) = \int_{Y_1} \operatorname{div}_y Q_\lambda(y) dy, \quad w_\lambda^0(x) = \int_{Y_2} w_\lambda(x, y) dy.$$

Последнее уравнение удобнее записать в виде

$$\left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta(\lambda) \right) p_\lambda + \operatorname{div} w_\lambda^0 + \alpha_{kh}(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) = 0. \quad (2.53)$$

Необходимо отметить, что введенная вектор-функция w_λ^0 удовлетворяет граничному условию

$$w_\lambda^0 \cdot \nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad (2.54)$$

где ν — единичный вектор нормали к поверхности $\partial\Omega$. Действительно, из (2.30) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \operatorname{div} u_\lambda^\varepsilon dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} u_\lambda dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} w_\lambda^0 dx.$$

Интегрируя по частям, мы сразу получаем (2.54).

Объединяя полученные результаты, мы можем сформулировать усредненную задачу в образах Лапласа в следующем виде: найти вектор-функцию $u_\lambda \in (H_1^0(\Omega))^3$ и функцию $p_\lambda \in H^1(\Omega)$ такие, что

$$\lambda^2 \rho_0 u_{\lambda i} + \lambda^2 \rho_2 w_{\lambda i}^0 = \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) - \alpha_{ij}(\lambda) p_\lambda) + f_{\lambda i} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (2.55)$$

$$\left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta(\lambda) \right) p_\lambda + \operatorname{div} w_\lambda^0 + \alpha_{kh}(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (2.56)$$

$$u_\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega; \quad w_\lambda^0 \cdot \nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad (2.57)$$

где

$$w_\lambda^0(x) = \left(f_{\lambda r}(x) - \lambda^2 \rho_2 u_{\lambda r}(x) - \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_r}(x) \right) \int_{Y_2} N_\lambda^r dy. \quad (2.58)$$

2.3.2. Усредненные уравнения в первоначальных переменных

Прежде чем выписать усредненную задачу в первоначальных переменных x и t , найдем оригиналы Лапласа вектор-функций $w_\lambda^0(x)$ и $u_{1\lambda}(x)$.

Введем вектор-функцию $L_\lambda^r(y) = \lambda N^r(y)$. Из (2.36) следует, что $L_\lambda^r(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ и $W_\lambda^r(y) \in H_{per}^1(Y_2)$ есть решения задач

$$\begin{cases} \nabla_y W_\lambda^r + \lambda \rho_2 L_\lambda^r - \eta_2 \Delta_{yy} L_\lambda^r = e^r & \text{в } Y_2, \\ \operatorname{div}_y L_\lambda^r = 0 & \text{в } Y_2; \quad L_\lambda^r = 0 & \text{на } S. \end{cases}$$

Применяя к этой задаче обратное преобразование Лапласа, мы видим, что вектор-функции $L^r(y, t)$ и функции $W^r(y, t)$ есть решения следующих периодических задач Стокса:

$$\begin{cases} \rho_2 \frac{\partial L^r}{\partial t} - \eta_2 \Delta_{yy} L^r + \nabla_y W^r = 0 & \text{в } Y_2 \times (0, T), \\ \operatorname{div}_y L^r = 0 & \text{в } Y_2 \times (0, T); \quad L^r(y, 0) = \frac{e^r}{\rho_2} & \text{в } Y_2, \\ L^r(y, t) = 0 & \text{на } \Gamma \times (0, T). \end{cases} \quad (2.59)$$

Теперь из (2.58) находим

$$w(x, y, t) = \left(f_r(x, t) - \rho_2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial p}{\partial x_r}(x, t) \right) * \int_0^t L^r(y, \tau) d\tau, \quad (2.60)$$

ПОЭТОМУ

$$w^0(x, t) = \left(f_r(x, t) - \rho_2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial p}{\partial x_r}(x, t) \right) * \int_0^t D^r(\tau) d\tau,$$

где

$$D^r(t) = \int_{Y_2} L^r(y, t) dy, \quad r = 1, 2, 3.$$

Далее, из (2.35) следует, что

$$u_1(x, y, t) = Q^{kh}(y, t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t) + p(x, t) * Q(y, t).$$

Как и в п. 4 Главы 1, полагаем $Q^{kh}(y, t) = \delta(t)Z^{kh}(y) + W^{kh}(y, t)$ и рассмотрим по отдельности два случая: 1) $b^{(1)}(y) \neq 0$; 2) $b^{(1)}(y) = 0$.

Случай $b^{(1)} \neq 0$. Этот случай соответствует среде, у которой первая фаза $\Omega_{1\epsilon}$ состоит из ВУМ-I или ВУМ-III. Используя те же рассуждения, что в п. 4 Главы 1, нетрудно вывести, что $Z^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$, $Q(y, t)$ есть решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh})) = 0 & \text{в } Y_1, \quad \int_{Y_1} Z^{kh} dy = 0, \\ \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh})\nu_j = 0 & \text{на } S, \end{cases} \quad (2.61)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh})) = 0 & \text{в } Y_1 \times (0, T), \quad \int_{Y_1} W^{kh} dy = 0, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh})n_j = 0 & \text{на } S \times (0, T), \quad W^{kh}(y, 0) = D^{kh}(y) & \text{в } Y_1, \end{cases} \quad (2.62)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}(Q)) = 0 & \text{в } Y_1 \times (0, T), \quad \int_{Y_1} Q dy = 0, \\ Q(y, 0) = R(y) & \text{в } Y_1, \quad \sigma_{ij}(Q)\nu_j = 0 & \text{на } S \times (0, T) \end{cases} \quad (2.63)$$

соответственно. Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) &= b_{ijkh}^{(1)}(y) + b_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}), \\ \sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh}) &= a_{ijkh}^{(1)}(y)e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y\left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t}\right) - \\ &\quad - d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(1)}(y, t)e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(1)}(y, t), \\ \sigma_{ij}(Q) &= a_{ijlm}^{(1)}e_{lm}^y(Q) + b_{ijlm}^{(1)}e_{lm}^y\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) + d_{ijlm}^{(1)} * e_{lm}^y(Q), \end{aligned}$$

а вектор-функции $D^{kh}(y)$ и $R(y)$ — решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh})) = 0 & \text{в } Y_1, \quad \int_{Y_1} D^{kh} dy = 0, \\ \sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh})n_j = 0 & \text{на } S, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (b_{ijlm}^{(1)}e_{lm}(R)) = 0 & \text{в } Y_1, \quad \int_{Y_1} R dy = 0, \\ b_{ijlm}^{(1)}e_{lm}(R)\nu_j = -\nu_i & \text{на } S, \end{cases}$$

где

$$\sigma_{ij}^{(3)}(D^{kh}) = a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(D^{kh}).$$

Случай $b^{(1)} = 0$. Этот случай соответствует среде, у которой первая фаза $\Omega_{1\varepsilon}$ состоит из УМ или ВУМ-II. Полагая $Q(y, t) = \delta(t)N(y) + V(y, t)$ и используя рассуждения из п. 4 Главы 1, приходим к выводу, что $Z^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$, $N(y)$, $V(y, t)$ есть решения периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh})) = 0 & \text{в } Y_1, \quad \int_{Y_1} Z^{kh} dy = 0, \\ \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh})n_j = 0 & \text{на } S, \end{cases} \quad (2.64)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh})) = 0 & \text{в } Y_1 \times (0, T), \quad \int_{Y_1} W^{kh} dy = 0, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh})n_j = 0 & \text{на } S \times (0, T), \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijlm}^{(1)}e_{lm}(N)) = 0 & \text{в } Y_1, \quad \int_{Y_1} N dy = 0, \\ a_{ijlm}^{(1)}e_{lm}(N)n_j = -n_i & \text{на } S, \end{cases} \quad (2.66)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}(V)) = 0 & \text{в } Y_1 \times (0, T), \quad \int_{Y_1} V dy = 0, \\ \sigma_{ij}(V)\nu_j = 0 & \text{на } S \times (0, T), \end{cases} \quad (2.67)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}) &= a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}), \\ \sigma_{ij}^{(2)}(W^{kh}) &= a_{ijkh}^{(1)}(y)e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - \\ &\quad - d_{ijlm}^{(1)}(y, t)e_{lm}^y(Z^{kh}) - d_{ijkh}^{(1)}(y, t), \\ \sigma_{ij}(V) &= a_{ijlm}^{(1)}(y)e_{lm}^y(V) - d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(V) - d_{ijlm}^{(1)}(y, t)e_{lm}^y(N). \end{aligned}$$

Теперь применим обратное преобразование Лапласа к усредненной задаче (2.55)-(2.57). Нетрудно проверить, что оригиналом $\lambda^2 w_\lambda^0$ является $\partial^2 w^0 / \partial t^2$, поэтому усредненная задача в переменных x и t принимает сле-

дующий вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial^2 w_i^0}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + f_i \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (2.68)$$

$$\frac{\Pi}{\gamma} p + \beta * p + \operatorname{div} w^0 + \alpha_{kh} * e_{kh}(u) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.69)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad w^0 \cdot \nu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2.70)$$

где

$$\beta(t) = \int_{Y_1} \operatorname{div}_y Q(y, t) dy, \quad \alpha_{kh}(t) = \Pi \delta(t) \delta_{kh} - \int_{Y_1} \operatorname{div}_y Q^{kh}(y, t) dy,$$

$$\sigma_{ij}^0 = A_{ijkh}^0(t) * e_{kh}(u) - \alpha_{ij}(t) * p(x, t),$$

$$A_{ijkh}^0(t) = \int_{Y_1} (\Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, t) + \Gamma_{ijlm}^{(1)}(y, t) e_{lm}(Q^{kh})) dy,$$

$$\Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, t) = \delta(t) a_{ijkh}^{(1)}(y) + \delta'(t) b_{ijkh}^{(1)}(y) - d_{ijkh}^{(1)}(y, t), \quad y \in Y_1.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \left(f_r - \rho_2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial x_r} \right) * \frac{\partial D^r}{\partial t} + D^r(0) \left(f_r - \rho_2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial x_r} \right),$$

то, принимая во внимание ранее выписанные периодические задачи, окончательно усредненная задача в первоначальных переменных x и t формулируется следующим образом:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_2 G_r * \frac{\partial D_i^r}{\partial t} + \Pi G_i = \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + f_i \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Pi}{\gamma} p + \beta^{(1)} p + \beta^{(2)} * p + \operatorname{div} \left(G_r * \int_0^t D^r(\tau) d\tau \right) + \\ & + \alpha_{ij}^{(1)} e_{ij}(u) + \alpha_{ij}^{(2)} * e_{ij}(u) = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\left(G_r * \int_0^t D_j^r(\tau) d\tau \right) \nu_j = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.73)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (2.74)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^0 &= A_{ijkh}^{(1)} e_{kh}(u) + A_{ijkh}^{(2)} e_{kh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - A_{ijkh}^{(3)}(t) * e_{kh}(u) - \\ &\quad - \alpha_{ij}^{(1)} p - \alpha_{ij}^{(2)}(t) * p, \\ \alpha_{ij}^{(1)} &= \Pi \delta_{ij} - \int_{Y_1} \operatorname{div}_y Z^{ij}(y) dy, \quad \alpha_{ij}^{(2)}(t) = - \int_{Y_1} \operatorname{div}_y W^{ij}(y, t) dy, \\ G_r(x, t) &= f_r(x, t) - \rho_2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial p}{\partial x_r}(x, t).\end{aligned}\quad (2.75)$$

При этом для смешанных сред, твердая фаза которых состоит из ВУМ-I или ВУМ-III (в этом случае $b^{(1)}(y) \neq 0$),

$$\begin{aligned}A_{ijkh}^{(1)} &= \int_{Y_1} \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(D^{kh}) \right) dy, \\ A_{ijkh}^{(2)} &= \int_{Y_1} \left(b_{ijkh}^{(1)}(y) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) dy, \\ A_{ijkh}^{(3)}(t) &= \int_{Y_1} \left(d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) + d_{ijlm}^{(1)}(y, t) e_{lm}^y(Z^{kh}) + d_{ijkh}^{(1)}(y, t) \right) dy - \\ &\quad - \int_{Y_1} \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) \right) dy, \\ \beta^{(1)} &= 0, \quad \beta^{(2)}(t) = \int_{Y_1} \operatorname{div}_y Q(y, t) dy,\end{aligned}$$

а вектор-функции $Z^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$, $Q(y, t)$ — решения периодических задач (2.61), (2.62), (2.63) соответственно.

Для смешанных сред, твердая фаза которых состоит из ВУМ-II (в этом случае $b^{(1)}(y) = 0$),

$$\begin{aligned}A_{ijkh}^{(1)} &= \int_{Y_1} \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) dy, \quad A_{ijkh}^{(2)} = 0, \\ A_{ijkh}^{(3)}(t) &= \int_{Y_1} \left(d_{ijkh}^{(1)}(y, t) + d_{ijlm}^{(1)}(y, t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) dy +\end{aligned}$$

$$+ \int_{Y_1} \left(d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh}) - a_{ijkh}^{(1)}(y) e_{lm}^y(W^{kh}) \right) dy,$$

$$\beta^{(1)} = \int_{Y_1} \operatorname{div}_y N(y) dy, \quad \beta^{(2)}(t) = \int_{Y_1} \operatorname{div}_y V(y, t) dy,$$

а вектор-функции $Z^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$, $N(y)$, $V(y, t)$ — решения периодических задач (2.64), (2.65), (2.66), (2.67) соответственно.

Усредненная система уравнений акустики (2.71), (2.72) состоит из четырех интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функции $p(x, t)$ и трех компонент вектор-функции $u(x, t)$. Коэффициенты этих уравнений постоянны, а ядра сверток зависят только от времени t . Если в приведенных выше рассуждениях взять $b^{(1)}(y) = 0$ и $d^{(1)}(y, t) = 0$ (это соответствует упругой твердой фазе $\Omega_{1\varepsilon}$), то система уравнений (2.71), (2.72) описывает колебания однородной среды Био. Следует отметить, что усредненные уравнения акустики для сред, состоящих из упругого материала и слабовязкой жидкости (как сжимаемой, так и несжимаемой), были построены и строго обоснованы, например, в работах [41, 50, 118, 137, 141]. Если же твердая фаза состоит из вязкоупругого материала (ВУМ-I, ВУМ-II или ВУМ-III), то система уравнений (2.71), (2.72) описывает колебания модифицированной системы Био. Как было установлено в данном параграфе, для того, чтобы найти все коэффициенты и ядра сверток уравнений этой системы, требуется решить ряд вспомогательных стационарных и эволюционных задач на ячейке периодичности Y .

2.4. Сильная двухмасштабная сходимость

Наша следующая цель — доказательство сильной двухмасштабной сходимости в соотношениях (2.30)-(2.33) при дополнительном предположении, что $f_\lambda(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_\lambda(x) \in C^3(\overline{\Omega})$, $p_\lambda(x) \in C^2(\overline{\Omega})$.

Теорема 7. Пусть u_λ^ε — решение задачи (2.27) и $p_\lambda^\varepsilon = -\gamma \operatorname{div} u_\lambda^\varepsilon$ в $\Omega_{2\varepsilon}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{1\varepsilon}} |u_\lambda^\varepsilon(x) - u_\lambda(x)|^2 dx &= 0, & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |p_\lambda^\varepsilon(x) - p_\lambda(x)|^2 dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |u_\lambda^\varepsilon(x) - u_\lambda(x) - w_\lambda(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{1\varepsilon}} |e(u_\lambda^\varepsilon(x) - u_\lambda(x) - \varepsilon u_{1\lambda}(x, \varepsilon^{-1}x))|^2 dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \varepsilon^2 |e(u_\lambda^\varepsilon(x) - w_\lambda(x, \varepsilon^{-1}x))|^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Здесь вектор-функция $u_\lambda(x)$ и функция $p_\lambda(x)$ есть решение усредненной задачи (2.55)-(2.57), а вектор-функции $u_{1\lambda}(x, y)$ и $w_\lambda(x, y)$ определены в Лемме 2.

Доказательство. Возьмем в интегральном тождестве (2.27) пробную вектор-функцию $v = u_\lambda^\varepsilon$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Имеем

$$\sum_{m=1}^4 I_m = \int_{\Omega} \int_Y (u_\lambda + w_\lambda) \cdot f_\lambda dx,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon |u_\lambda^\varepsilon|^2 dx, & I_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{1\varepsilon}} \Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) e_{ij}(u_\lambda^\varepsilon) dx, \\ I_3 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\gamma + \lambda \zeta_2 \varepsilon^2) \int_{\Omega_{2\varepsilon}} (\operatorname{div} u_\lambda^\varepsilon)^2 dx, & I_4 &= 2\lambda \eta_2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |e_{ij}(u_\lambda^\varepsilon)|^2 dx. \end{aligned}$$

Введем вектор-функцию

$$z_{1\lambda}(x, y) = Q_{1\lambda}^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}(x) + p_\lambda(x) Q_{1\lambda}(y), \quad (2.76)$$

где $Q_{1\lambda}^{kh}(y)$ и $Q_{1\lambda}(y)$ — продолжения вектор-функций $Q_\lambda^{kh}(y)$ и Q_λ с Y_1 на Y , введенные в Лемме 2. Нам понадобится следующее равенство:

$$\int_{Y_2} (\operatorname{div} u_\lambda + \operatorname{div}_x w_\lambda + \operatorname{div}_y z_{1\lambda}) dy = -\frac{\Pi}{\gamma} p_\lambda, \quad (2.77)$$

которое непосредственно следует из равенства (2.51), если учесть, что

$$\int_{Y_2} \operatorname{div}_y z_{1\lambda} dy = \int_Y \operatorname{div}_y z_{1\lambda} dy - \int_{Y_1} \operatorname{div}_y u_{1\lambda} dy,$$

а значит, в силу периодичности по y вектор-функции $z_\lambda(x, y)$,

$$\int_{Y_2} \operatorname{div}_y z_{1\lambda} dy = - \int_{Y_1} \operatorname{div}_y u_{1\lambda} dy.$$

Далее, введем вектор-функцию

$$\psi_\lambda^\varepsilon(x) = u_\lambda(x) + w_\lambda(x, \varepsilon^{-1}x) + \varepsilon z_{1\lambda}(x, \varepsilon^{-1}x) + b_{1\lambda}^\varepsilon(x) + b_{2\lambda}^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\psi_\lambda^\varepsilon(x) = 0, \quad x \notin \Omega,$$

где $b_{1\lambda}^\varepsilon(x)$ и $b_{2\lambda}^\varepsilon(x)$ — вектор-функции функции типа пограничного слоя в окрестности $\partial\Omega$, обеспечивающие принадлежность $\psi_\lambda^\varepsilon(x)$ пространству $(H_0^1(\Omega))^3$, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (|b_{1\lambda}^\varepsilon|^2 + |\nabla b_{1\lambda}^\varepsilon|^2) dx = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |b_{2\lambda}^\varepsilon|^2 dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla b_{2\lambda}^\varepsilon|^2 dx = 0, \quad \operatorname{supp} b_{2\lambda}^\varepsilon \in \Omega_{2\varepsilon}.$$

В частности, в качестве вектор-функций $b_\lambda^{1\varepsilon}$ и $b_\lambda^{2\varepsilon}$ можно взять

$$b_\lambda^{1\varepsilon}(x) = -\varepsilon z_{1\lambda}(x, \varepsilon^{-1}x) \xi(\varepsilon^{-1}r_1(x)),$$

$$b_\lambda^{2\varepsilon}(x) = -w_\lambda(x, \varepsilon^{-1}x) \xi(\varepsilon^{-1}r_1(x)),$$

где $r_1(x)$ — расстояние от точки x до границы области Ω , а $\xi(s) \geq 0$ — функция из класса $C_0^\infty(\mathbb{R})$, равная единице в окрестности нуля [59].

Теперь возьмем в интегральном тождестве (2.27) вектор-функцию $v = \psi_\lambda^\varepsilon$ и перейдем к двухмасштабному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как

$$\psi_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u_\lambda(x) + w_\lambda(x, y),$$

$$\chi(\Omega_{1\varepsilon}) \nabla \psi_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_1) (\nabla u_\lambda(x) + \nabla_y u_{1\lambda}(x, y)),$$

$$\varepsilon \chi(\Omega_{2\varepsilon}) \nabla \psi_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_2) \nabla_y w_\lambda(x, y),$$

то из (2.27) получаем

$$\sum_{m=1}^4 J_m = \int \int_{\Omega Y} (u_\lambda + w_\lambda) \cdot f_\lambda dx, \quad (2.78)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \lambda^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon u_\lambda^\varepsilon \cdot \psi_\lambda^\varepsilon dx = \\ &= \lambda^2 \left(\rho_1 \int_{\Omega} |u_\lambda|^2 dx + \rho_2 \int \int_{\Omega Y_2} |u_\lambda + w_\lambda|^2 dx dy \right), \quad \rho_1 = \int_{Y_1} \rho_1(y) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) e_{ij}(\psi_\lambda^\varepsilon) = \\ &= \int \int_{\Omega Y_1} \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) (e_{kh}(u_\lambda) + e_{kh}^y(u_{1\lambda})) (e_{ij}(u_\lambda) + e_{ij}^y(u_{1\lambda})) dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\gamma + \lambda \zeta_2 \varepsilon^2) \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \operatorname{div} u_\lambda^\varepsilon \operatorname{div} \psi_\lambda^\varepsilon dx = \\ &= - \int \int_{\Omega Y_2} p_\lambda (\operatorname{div} u_\lambda + \operatorname{div}_x w_\lambda + \operatorname{div}_y z_\lambda) dx dy = \frac{\Pi}{\gamma} \int_{\Omega} p_\lambda^2 dx, \end{aligned}$$

$$J_4 = 2\lambda\eta_2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_{2\varepsilon}} e_{ij}(u_\lambda^\varepsilon) e_{ij}(v_\lambda^\varepsilon) dx = 2\lambda\eta_2 \int \int_{\Omega Y_2} |e_{ij}^y(w_\lambda)|^2 dx dy.$$

Сравнивая (2.77) и (2.78), мы видим, что

$$\sum_{m=1}^4 I_m = \sum_{m=1}^4 J_m, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Но по свойству полунепрерывности (iii) $I_m \geq J_m$, а значит, на самом деле здесь имеют место равенства, т.е. $I_m = J_m$, $m = 1, 2, 3, 4$. Отсюда, используя свойства (ii) и (iv) двухмасштабной сходимости, мы сразу получаем сильную двухмасштабную сходимости в соотношениях (2.30)-(2.33).

Для завершения доказательства остается воспользоваться свойством (v) двухмасштабной сходимости, согласно которому из сильной двухмасштабной сходимости в (2.30)-(2.33) следуют все утверждения теоремы. Теорема 7 доказана.

Из результатов Теоремы 7 сразу следует следующая теорема о поведении при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений $u^\varepsilon(x, t)$ начально-краевых задач (2.4), описывающих колебания смешанных сред, состоящих из твердых материалов и слабовязкой сжимаемой жидкости.

Теорема 8. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ есть решение задачи (2.4), в которой σ_{ij}^ε заданы соотношениями (2.1) и (2.24) в $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ соответственно. Тогда для всех $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{1\varepsilon}} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^2 dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |p^\varepsilon(x, t) - p(x, t)|^2 dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t) - w(x, \varepsilon^{-1}x, t)|^2 dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{1\varepsilon}} |e(u^\varepsilon(x, t) - u(x, t) - \varepsilon u^1(x, \varepsilon^{-1}x, t))|^2 &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \varepsilon^2 |e(u^\varepsilon(x, t) - w(x, \varepsilon^{-1}x, t))|^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Здесь вектор-функция $u(x, t)$ и функция $p(x, t)$ есть решение усредненной задачи (2.71)-(2.74),

$$w(x, y, t) = G_r(x, t) * \int_0^t L^r(y, t) dy,$$

а $L^r(y, t)$ — решения периодических задач (2.59). При этом, если $b^{(1)}(y) \neq 0$, то

$$u_1(x, y, t) = Z^{kh}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t) + W^{kh}(y, t) * \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_h \partial t}(x, t) + p(x, t) * Q(y, t),$$

где $Z^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$, $Q(y, t)$ — решения периодических задач (2.61), (2.62), (2.63) соответственно, а если $b^{(1)}(y) = 0$, то

$$u_1(x, y, t) = Z^{kh}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t) + W^{kh}(y, t) * \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_h \partial t}(x, t) + \\ + p(x, t)N(y) + p(x, t) * V(y, t),$$

где $Z^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$, $N(y)$, $V(y, t)$ — решения периодических задач (2.64), (2.65), (2.66), (2.67) соответственно.

Из этой теоремы, в частности, следует сильная сходимости в пространстве L^2 последовательностей решений $u^\varepsilon(x, t)$ исходных задач (2.4) к решению усредненной задачи (2.71)-(2.74), описывающей колебания модифицированной среды Био, с корректором в виде осциллирующей вектор-функции $w(x, \varepsilon^{-1}x, t)$, явный вид которой дается через решения $L^r(y, t)$ периодических задач (2.59).

2.5. Построение усредненных уравнений для сред, состоящих из частично пористого твердого материала и жидкости

В данном параграфе рассматривается среда, занимающая область Ω и образованная примыкающими друг к другу по гладкой поверхности S_0 сплошным твердым материалом и смешанной средой, состоящей из пористого твердого материала и вязкой или слабовязкой сжимаемой жидкости, заполняющей поры. Область, занятая сплошным твердым материалом, обозначается через Ω_0 , а область, занятая смешанной средой, — через Ω_1 , так что $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup S_0$. Дополнительно предполагается, что как твердый материал в Ω_0 , так и смешанная среда в Ω_1 , имеют ε -периодическую структуру. В дальнейшем будут также использоваться предыдущие обо-

значения и соглашения. В частности, твердая и жидкая фазы смешанной среды будут обозначаться, как и ранее, через $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ соответственно.

Обозначим через $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\Omega_{2\varepsilon} \cup \partial\Omega_{2\varepsilon})$ твердую часть всей области Ω , а через $S_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}$ — границу между твердой и жидкой частью. Кроме того, будем полагать, как и ранее, что граница S_ε гладкая.

Математическая модель, описывающая колебания рассматриваемой гетерогенной среды, записывается в виде

$$\begin{aligned} \rho_1^\varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i \quad \text{в } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i \quad \text{в } \Omega_{2\varepsilon} \times (0, T), \\ [u^\varepsilon]_{S_\varepsilon} &= 0, \quad [\sigma_{ij}^\varepsilon n_j]_{S_\varepsilon} = 0, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

где $\rho_1^\varepsilon(x) = \rho_1(\varepsilon^{-1}x)$, а компоненты тензора напряжений σ_{ij}^ε даются формулами (2.1) и (2.2) в Ω_ε и $\Omega_{2\varepsilon}$ соответственно. Заметим, что в (2.1) следует взять $b^{(1)}(y) = 0$, если твердый материал в Ω_ε состоит из УМ или ВУМ-II, и $d^{(1)}(y, t) = 0$, если он состоит из УМ или ВУМ-I.

При сделанных выше предположениях исследуем поведение решений u^ε задач (2.79) при $\varepsilon \rightarrow 0$ для случая вязкой и слабовязкой жидкостей.

2.5.1. Случай вязкой жидкости

Если $\Omega_{2\varepsilon}$ заполнена вязкой жидкостью, то вариационная формулировка задачи (2.79) записывается в виде интегрального тождества (2.15), в котором $\Omega_{1\varepsilon}$ следует заменить на Ω_ε , и начальных условий (2.16). Нетрудно видеть, что решение u^ε этой задачи удовлетворяет оценкам (1.34), (1.35). Применяя преобразование Лапласа, возьмем в соответствующем интегральном тождестве в качестве пробной вектор-функцию $v = \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x)\varphi(x)$, где $w(y) \in (C_{per}^\infty(Y))^3$. Тогда, используя те же рассуждения, что и в Лемме 1, сначала для $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega_0)$, а затем для $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega_1)$, заключаем, что

имеют место соотношения

$$\begin{aligned} u_\lambda^\varepsilon &\xrightarrow{2} u_\lambda(x), \quad u_\lambda(x) \in (H_0^1(\Omega))^3, \\ \nabla u_\lambda^\varepsilon &\xrightarrow{2} \nabla u_\lambda(x) + \nabla_y u_{0\lambda}(x, y), \quad x \in \Omega_0, \\ \nabla u_\lambda^\varepsilon &\xrightarrow{2} \nabla u_\lambda(x) + \nabla_y u_{1\lambda}(x, y), \quad x \in \Omega_1, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} u_{0\lambda}(x, y) &= Q_{0\lambda}^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}(x), \quad x \in \Omega_0, \\ u_{1\lambda}(x, y) &= Q_\lambda^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}(x), \quad x \in \Omega_1, \end{aligned}$$

где вектор-функции $Q_{0\lambda}^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ — решения периодических задач

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}(Q_{0\lambda}^{kh})) = 0, \quad y \in Y, \quad \int_Y Q_{0\lambda}^{kh} dy = 0 \quad (2.80)$$

при

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(Q_{0\lambda}^{kh}) &= \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) + \Gamma_{ijlm}^{(1)}(y, \lambda) e_{lm}^y(Q_{0\lambda}^{kh}), \\ \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) &= a_{ijkh}^{(1)}(y) + \lambda b_{ijkh}^{(1)}(y) - d_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda), \end{aligned}$$

а вектор-функции $Q_\lambda^{kh}(y) \in (H_{per}^1(Y))^3$ — решения периодических задач

(1.43) при

$$\sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) = \begin{cases} \Gamma_{ijkh}^{(1)}(y, \lambda) + \Gamma_{ijlm}^{(1)}(y, \lambda) e_{lm}^y(Q_\lambda^{kh}), & y \in Y_1, \\ \delta_{ij}(\gamma + \lambda \zeta_2) (\delta_{kh} + \operatorname{div}_y Q_\lambda^{kh}) + \\ \quad + \lambda \eta_2 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk} + 2e_{ij}^y(Q_\lambda^{kh})), & y \in Y_2. \end{cases}$$

Кроме того, имеет место слабая сходимость

$$\Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) \rightharpoonup \Gamma_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) \quad \text{в } L^2(\Omega_0), \quad (2.81)$$

$$\Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda) e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) \rightharpoonup \Gamma_{ijkh}^1(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) \quad \text{в } L^2(\Omega_1),$$

где

$$\Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda) = \Gamma_{ijkh}^{(1)}(\varepsilon^{-1}x, t),$$

$$\Gamma_{ijkh}^0(\lambda) = \int_Y \sigma_{ij}(Q_{0\lambda}^{kh}) dy, \quad \Gamma_{ijkh}^1(\lambda) = \int_Y \sigma_{ij}(Q_\lambda^{kh}) dy, \quad (2.82)$$

$$\Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda) = \begin{cases} \Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda), & x \in \Omega_{1\varepsilon}, \\ (\gamma + \lambda\zeta_2)\delta_{ij}\delta_{kh} + \lambda\eta_2(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), & x \in \Omega_{2\varepsilon}. \end{cases}$$

Используя приведенные соотношения, подставим в интегральное тождество, соответствующее исходной задаче в образах преобразования Лапласа, вектор-функцию $v \in (H_0^1(\Omega))^3$, не зависящую от ε , и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В итоге получаем

$$\sum_{m=0}^1 \int_{\Omega_m} (\lambda^2 \tilde{\rho}_m u_\lambda \cdot v + \Gamma_{ijkh}^m e_{kh}(u_\lambda) e_{ij}(v)) dx = \int_\Omega f_\lambda \cdot v dx,$$

где

$$\tilde{\rho}_0 = \int_Y \rho_1(y) dy, \quad \tilde{\rho}_1 = \int_{Y_1} \rho_1(y) dy + |Y_2| \rho_2. \quad (2.83)$$

Таким образом, усредненная задача в образах преобразования Лапласа принимает вид

$$\lambda^2 \tilde{\rho}_m u_{\lambda i} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ijkh}^m(\lambda) e_{kh}(u_\lambda)) + f_{\lambda i}(x) \quad \text{в } \Omega_m, \quad m = 0, 1,$$

$$[u_\lambda]|_{S_0} = 0, \quad [\sigma_{ij}^\lambda n_j^0]|_{S_0} = 0; \quad u_\lambda(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где n^0 — единичный вектор нормали к поверхности S_0 ,

$$\sigma_{ij}^\lambda = \Gamma_{ijkh}^m(\lambda) e_{kh}(u_\lambda), \quad x \in \Omega_m, \quad m = 0, 1.$$

Теперь вернемся к оригиналам преобразования Лапласа и представим вектор-функции $Q_0^{kh}(y, t)$ в виде

$$Q_0^{kh}(y, t) = \delta(t) V^{kh}(y) + M^{kh}(y, t).$$

Повторяя рассуждения из п. 4 Главы 1, нетрудно показать, что здесь вектор-функции $V^{kh}(y)$ и $M^{kh}(y, t)$ не зависят от $\delta(t)$, а именно, они определяются следующим образом.

Если $b^{(1)}(y) = 0$, то $V^{kh}(y)$ и $M^{kh}(y, t)$ — решения периодических задач

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(V^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y \quad (2.84)$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) e_{lm}^y(M^{kh}) - d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(M^{kh}) \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(d_{ijlm}^{(1)}(y, t) e_{lm}^y(V^{kh}) + d_{ijkh}^{(1)}(y, t) \right) \quad \text{в } Y \times (0, T) \end{aligned} \quad (2.85)$$

соответственно.

Если $b^{(1)}(y) \neq 0$, то $V^{kh}(y)$ и $M^{kh}(y, t)$ — решения периодических задач

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(b_{ijkh}^{(1)}(y) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(V^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y \quad (2.86)$$

и

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) e_{lm}^y(M^{kh}) + b_{ijkh}^{(1)}(y) e_{lm}^y \left(\frac{\partial M^{kh}}{\partial t} \right) - d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(M^{kh}) \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(d_{ijlm}^{(1)}(y, t) e_{lm}^y(V^{kh}) + d_{ijkh}^{(1)}(y, t) \right) \quad \text{в } Y \times (0, T), \\ & M^{kh}(y, 0) = N^{kh}(y) \quad \text{в } Y \end{aligned} \right. \quad (2.87)$$

соответственно. При этом вектор-функция $N^{kh}(y)$ в (2.87) определена как решение периодической задачи

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(V^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(N^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y.$$

Далее, представляя вектор-функции $Q_\lambda^{kh}(y)$ в виде имеем: $Q^{kh}(y, t) = \delta(t)Z^{kh}(y) + W^{kh}(y, t)$, причем вектор-функции $Z^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$ определяются точно так же, как для рассмотренного в 2.2 полностью перфорированного твердого материала с вязкой жидкостью.

Теперь мы можем выписать усредненную задачу в переменных x и t :

$$\tilde{\rho}_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x, t) \quad \text{в } \Omega_m \times (0, T), \quad m = 0, 1, \quad (2.88)$$

$$[u]_{S_0} = 0, \quad [\sigma_{ij}^0 n_j^0]_{S_0} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0,$$

где

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ijkh}^m e_{kh}(u) + \beta_{ijkh}^m e_{kh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - g_{ijkh}^m(t) * e_{kh}(u) \quad \text{в } \Omega_m \times (0, T),$$

$$m = 0, 1.$$

Здесь, компоненты тензоров α^1 , β^1 , $g^1(t)$ определяются так же, как компоненты тензоров α , β , $g(t)$ в п. 2 этой главы, а компоненты тензоров α^0 , β^0 , $g^0(t)$ находятся следующим образом: если $b^{(1)}(y) = 0$, то

$$\alpha_{ijkh}^0 = \int_Y \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(V^{kh}) \right) dy, \quad \beta_{ijkh}^0 = 0,$$

$$g_{ijkh}^0(t) = \int_Y \left(d_{ijkh}^{(1)}(y, t) + d_{ijlm}^{(1)}(y, t) e_{lm}^y(V^{kh}) \right) dy +$$

$$+ \int_Y \left(d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(M^{kh}) - a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(M^{kh}) \right) dy,$$

а если $b^{(1)}(y) \neq 0$, то

$$\alpha_{ijkh}^0 = \int_Y \left(a_{ijkh}^{(1)}(y) + a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(V^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(N^{kh}) \right) dy,$$

$$\beta_{ijkh}^0 = \int_Y \left(b_{ijkh}^{(1)}(y) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(V^{kh}) \right) dy,$$

$$g_{ijkh}^0(t) = \int_Y \left(d_{ijkh}^{(1)}(y, t) + d_{ijlm}^{(1)}(y, t) e_{lm}^y(V^{kh}) + d_{ijlm}^{(1)}(y, t) * e_{lm}^y(M^{kh}) \right) dy -$$

$$- \int_Y \left(a_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y(M^{kh}) + b_{ijlm}^{(1)}(y) e_{lm}^y \left(\frac{\partial M^{kh}}{\partial t} \right) \right) dy.$$

Усредненная задача (2.88) включает в себя две системы уравнений. Система уравнений, заданная в области Ω_1 , описывает колебания однородной вязкоупругой среды как с вязкостью, так и с памятью. Система уравнений, заданная в области Ω_0 , описывает колебания однородных материалов: упругого, если твердая фаза Ω_ε состоит из УМ; вязкоупругого с памятью,

если Ω_ε состоит из ВУМ-II; вязкоупругого с вязкостью и памятью, если Ω_ε состоит из ВУМ-I или ВУМ-III.

Как видно из (2.88), условия, связывающие усредненные уравнения акустики на границе раздела сплошного твердого материала и пористого твердого материала, представляют собой обычные условия непрерывности перемещений и напряжений на границе двух однородных материалов.

Справедлива следующая теорема о поведении при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений $u^\varepsilon(x, t)$ начально-краевых задач (2.79), описывающих колебания сред, состоящих из частично пористых твердых материалов и вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей поры.

Теорема 9. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (2.79), в которой σ_{ij}^ε заданы соотношениями (2.1) и (2.14) в Ω_ε и $\Omega_{2\varepsilon}$ соответственно. Тогда для всех $t \in [0, T]$

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{в} \quad (L^2(\Omega))^3,$$

$$e(u^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{2} e(u(x, t)) + e_y(u_0(x, y, t)), \quad x \in \Omega_0,$$

$$e(u^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{2} e(u(x, t)) + e_y(u_1(x, y, t)), \quad x \in \Omega_1,$$

где $u(x, t)$ — решение усредненной задачи (2.88), вектор-функция $u_1(x, y, t)$ определена в Теореме 6, а вектор-функция $u_0(x, y, t)$ имеет вид

$$u_0(x, y, t) = V^{kh}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t) + M^{kh}(y, t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t), \quad x \in \Omega_0.$$

Здесь вектор-функции $V^{kh}(y)$, $M^{kh}(y, t)$ — решения периодических задач (2.84), (2.85) при $b^{(1)}(y) = 0$ и задач (2.86), (2.87) при $b^{(1)}(y) \neq 0$.

Из этой теоремы также следует, что при дополнительных условиях гладкости, налагаемых на вектор-функцию $u(x, t)$, выполнены соотношения (1.88) и (1.89).

2.5.2. Случай слабовязкой жидкости

Если фаза $\Omega_{2\varepsilon}$ заполнена слабовязкой жидкостью, то вариационная формулировка задачи (2.79) записывается в виде интегрального тождества (2.25), в котором вместо интеграла по $\Omega_{1\varepsilon}$ берется интеграл по Ω_ε , и начальных условий (2.26). Решение u^ε этой задачи удовлетворяет оценкам (2.10)-(2.13) при $C_\varepsilon = C/\varepsilon$, а его образ Лапласа u_λ^ε — оценкам (2.28), (2.29), причем во всех этих оценках $\Omega_{1\varepsilon}$ следует заменить на Ω_ε .

Из Теорем 2 и 3 следует, что, с точностью до выделения подпоследовательности,

$$u_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v_{0\lambda}(x), \quad x \in \Omega_0, \quad v_{0\lambda} \in (H^1(\Omega_0))^3,$$

$$u_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v_{1\lambda}(x) + w_\lambda(x, y), \quad x \in \Omega_1, \quad v_{1\lambda} \in (H^1(\Omega_1))^3,$$

где $w_\lambda \in L^2(\Omega_1, (H_{per}^1(Y))^3)$, $w_\lambda = 0$ при $y \in Y_1 \cup \partial Y_1$, $\operatorname{div}_y w_\lambda = 0$. Докажем, что $v_{0\lambda}|_S = v_{1\lambda}|_S$. Для этого распространим перфорацию на всю область Ω и обозначим $D_\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon E_1$, где E_1 — множество, полученное периодическим продолжением Y_1 на всё пространство \mathbb{R}^3 (см. п. 1.1). Тогда из свойств двухмасштабной сходимости получаем

$$\chi(D_\varepsilon)u_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_1)u_\lambda(x), \quad u_\lambda(x) \in (H_0^1(\Omega))^3,$$

$$\chi(D_\varepsilon \cap \Omega_0)u_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_1)v_\lambda^0(x), \quad \chi(\Omega_{1\varepsilon})u_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi(Y_1)v_{1\lambda}(x)$$

(см. [59]). В силу единственности двухмасштабного предела, отсюда следует, что $u_\lambda(x) = v_{0\lambda}(x)$ при $x \in \Omega_0$ и $u_\lambda(x) = v_{1\lambda}(x)$ при $x \in \Omega_1$. Таким образом, $v_\lambda^0|_S = v_{1\lambda}|_S$ и без ограничения общности можно считать, что

$$u_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u_\lambda(x), \quad x \in \Omega_0, \tag{2.89}$$

$$u_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u_\lambda(x) + w_\lambda(x, y), \quad x \in \Omega_1. \tag{2.90}$$

Далее, из Теорем 2 и 3 получаем

$$\nabla u_\lambda^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \nabla u_\lambda(x) + \nabla_y u_{0\lambda}(x, y), \quad x \in \Omega_0, \tag{2.91}$$

$$\chi(\Omega_{1\varepsilon})\nabla u_\lambda^\varepsilon(x) \stackrel{2}{\sim} \chi(Y_1)(\nabla u_\lambda(x) + \nabla_y u_{1\lambda}(x, y)), \quad x \in \Omega_1, \quad (2.92)$$

$$\varepsilon\chi(\Omega_{2\varepsilon})\nabla u_\lambda^\varepsilon(x) \stackrel{2}{\sim} \chi(Y_2)\nabla_y w_\lambda(x, y), \quad x \in \Omega_1, \quad (2.93)$$

где $u_{0\lambda} \in L^2(\Omega_0, (H_{per}^1(Y))^3/\mathbb{R}^3)$, $u_{1\lambda} \in L^2(\Omega_1, (H_{per}^1(Y_2))^3/\mathbb{R}^3)$.

Выбирая в интегральном тождестве, которому удовлетворяет вектор-функция u_λ^ε , сначала пробные вектор-функции $v(x) = \varepsilon\varphi(x)b(\varepsilon^{-1}x)$ при $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$, $b \in (H_{per}^1(Y))^3$, $\text{supp } b \subset Y_2$, а затем $v(x) = \varphi(x)b(\varepsilon^{-1}x)$ при $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$, $b \in (H_{per}^1(Y))^3$, $\text{supp } b \subset Y_2$, $\text{div}_y b(y) = 0$ и используя рассуждения из доказательства Леммы 2, приходим к выводу, что имеет место сходимость (2.31), в котором $p(x) \in L^2(\Omega_1)$, и представление (2.34) вектор-функции $w_\lambda(x, y)$.

Теперь в интегральном тождестве возьмем пробные вектор-функции вида $v(x) = \varepsilon\varphi(x)b(\varepsilon^{-1}x)$, где $b \in (C_{per}^\infty(Y))^3$. Тогда, выбирая сначала $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$, затем $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ и переходя к двухмасштабному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, заключаем, что

$$u_{0\lambda}(x, y) = Q_{0\lambda}^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}(x), \quad x \in \Omega_0,$$

$$u_{1\lambda}(x, y) = Q_\lambda^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}(x) + p_\lambda(x)Q_\lambda(y), \quad x \in \Omega_1,$$

где вектор-функции $Q_{0\lambda}^{kh}(y)$, $Q_\lambda^{kh}(y)$, $Q_\lambda(y)$ — решения периодических задач (2.80), (2.37), (2.38) соответственно.

Опираясь на результаты п. 2.3.1 и п. 2.5.1, мы также получаем

$$\Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda)e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) \rightharpoonup \Gamma_{ijkh}^0(\lambda)e_{kh}(u_\lambda) \quad \text{в } L^2(\Omega_0),$$

$$\chi(\Omega_{1\varepsilon})\Gamma_{ijkh}^{1\varepsilon}(x, \lambda)e_{kh}(u_\lambda^\varepsilon) \rightharpoonup A_{ijkh}^0(\lambda)e_{kh}(u_\lambda) + \beta_{ij}(\lambda)p_\lambda \quad \text{в } L^2(\Omega_1),$$

где $\Gamma_{ijkh}^0(\lambda)$, $A_{ijkh}^0(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ находятся по формулам (2.82) и (2.40).

Используя вышеприведенные соотношения, подставим в интегральное тождество вектор-функцию $v \in (H_0^1(\Omega))^3$, не зависящую от ε , и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В итоге получаем

$$\lambda^2 \tilde{\rho}_0 \int_{\Omega_0} u_\lambda \cdot v dx + \lambda^2 \int_{\Omega_1} (\tilde{\rho}_1 u_\lambda + \rho_2 w_\lambda^0) \cdot v dx - \Pi \int_{\Omega_1} p_\lambda \text{div } v dx +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \Gamma_{ijkh}^0 e_{kh}(u_\lambda) e_{ij}(v) dx + \int_{\Omega_1} (A_{ijkh}^0 e_{kh}(u_\lambda) + \beta_{ij} p_\lambda) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f_\lambda \cdot v dx,$$

где $\tilde{\rho}_0$ и $\tilde{\rho}_1$ находятся по формулам (2.83).

Интегрируя по частям и добавляя уравнение (2.56) и граничные условия (2.57), записанные для области Ω_1 , получаем усредненную задачу в образах преобразования Лапласа:

$$\lambda^2 \tilde{\rho}_0 u_{\lambda i} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda)) + f_{\lambda i} \quad \text{в } \Omega_0, \quad (2.94)$$

$$\lambda^2 \tilde{\rho}_1 u_{\lambda i} + \lambda^2 \rho_2 w_{\lambda i}^0 = \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) - \alpha_{ij}(\lambda) p_\lambda) + f_{\lambda i} \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.95)$$

$$\left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta(\lambda) \right) p_\lambda + \operatorname{div} w_\lambda^0 + \alpha_{kh}(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.96)$$

$$[u_\lambda]_{S_0} = 0, \quad [\sigma_{ij}^{0\lambda} n_j^0]_{S_0} = 0; \quad u_\lambda = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad w_\lambda^0 \cdot \nu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_1, \quad (2.97)$$

где $\alpha_{ij}(\lambda) = \Pi \delta_{ij} - \beta_{ij}(\lambda)$, ν — единичный вектор нормали к Ω_1 ,

$$\sigma_{ij}^{0\lambda} = \begin{cases} \Gamma_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda), & x \in \Omega_0, \\ A_{ijkh}^0(\lambda) e_{kh}(u_\lambda) - \alpha_{ij}(\lambda) p_\lambda, & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Возвращаясь к прообразам преобразования Лапласа и используя результаты п. 2.3.2 и п. 2.5.1, мы можем выписать усредненную задачу в первоначальных переменных x и t :

$$\tilde{\rho}_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + f_i \quad \text{в } \Omega_0 \times (0, T), \quad (2.98)$$

$$\tilde{\rho}_1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_2 G_r * \frac{\partial D_i^r}{\partial t} + \Pi G_i = \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + f_i \quad \text{в } \Omega_1 \times (0, T), \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Pi}{\gamma} p + \beta^{(1)} p + \beta^{(2)} * p + \operatorname{div} \left(G_r * \int_0^t D^r(\tau) d\tau \right) + \\ & + \alpha_{ij}^{(1)} e_{ij}(u) + \alpha_{ij}^{(2)} * e_{ij}(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_1 \times (0, T), \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\left(G_r * \int_0^t D_j^r(\tau) d\tau \right) \nu_j = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_1 \times (0, T), \quad (2.101)$$

$$[u]|_{S_0} = 0, \quad [\sigma_{ij}^0 n_j^0]|_{S_0} = 0, \quad (2.102)$$

$$u|_{\Omega} = 0, \quad u_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (2.103)$$

где $D^r(t)$, $G_r(x, t)$, $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}(t)$, $\alpha^{(1)}$, $\alpha_{ij}^{(2)}(t)$ определены по п. 2.3.2, а

$$\sigma_{ij}^0 = \begin{cases} \alpha_{ijkh}^0 e_{kh}(u) + \beta_{ijkh}^0 e_{kh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + g_{ijkh}^0(t) * e_{kh}(u), & x \in \Omega_0, \\ A_{ijkh}^{(1)} e_{kh}(u) + A_{ijkh}^{(2)} e_{kh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + A_{ijkh}^{(3)}(t) * e_{kh}(u) - \\ - \alpha_{ij}^{(1)} p - \alpha_{ij}^{(2)}(t) * p, & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Здесь компоненты тензоров α^0 , β^0 , $g^0(t)$ определены в п. 2.5.1, а компоненты тензоров $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}(t)$ — в п. 2.3.2.

Система уравнений (2.99), (2.100), заданная в области Ω_1 , описывает колебания среды Био, если твердая фаза Ω_ε состоит из упругого материала, и модифицированной среды Био, если Ω_ε состоит из вязкоупругого материала (ВУМ-I, ВУМ-II или ВУМ-III). Система уравнений (2.98), заданная в области Ω_0 , описывает колебания однородных материалов: упругого, если Ω_ε состоит из УМ; вязкоупругого с памятью, если Ω_ε состоит из ВУМ-II; вязкоупругого с вязкостью и памятью, если Ω_ε состоит из ВУМ-I или ВУМ-III.

Предполагая, что $u(x, t)$, $p(x, t)$, $f(x, t)$ удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и в п. 2.4, сформулируем следующую теорему о поведении при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений $u^\varepsilon(x, t)$ начально-краевых задач (2.79), описывающих колебания сред, состоящих из частично пористых твердых материалов и слабовязкой сжимаемой жидкости, заполняющей поры.

Теорема 10. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ есть решение задачи (2.79), в которой σ_{ij}^ε заданы соотношениями (2.1) и (2.24) в Ω_ε и $\Omega_{2\varepsilon}$ соответственно. Тогда для всех $t \in [0, T]$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^2 dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |p^\varepsilon(x, t) - p(x, t)|^2 dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t) - w(x, \varepsilon^{-1}x, t)|^2 dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} |e(u^\varepsilon(x, t) - u(x, t) - \varepsilon u_0(x, \varepsilon^{-1}x, t))|^2 &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{1\varepsilon}} |e(u^\varepsilon(x, t) - u(x, t) - \varepsilon u_1(x, \varepsilon^{-1}x, t))|^2 &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \varepsilon^2 |e(u^\varepsilon(x, t) - w(x, \varepsilon^{-1}x, t))|^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Здесь вектор-функция $u(x, t)$ и функция $p(x, t)$ есть решение усредненной задачи (2.98)-(2.103), вектор-функция $u_0(x, y, t)$ определена в Теореме 9, а вектор-функции $u_1(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$ — в Теореме 8.

Отметим, что из этой теоремы следует сильная сходимость в пространстве L^2 последовательностей решений $u^\varepsilon(x, t)$ исходных задач (2.79) к решению усредненной задачи (2.98)-(2.103), с корректором в виде осциллирующей вектор-функции $w(x, \varepsilon^{-1}x, t)$.

Глава 3

Усредненные тензоры ядер релаксации двухфазных слоистых сред с диссипацией

В данной главе рассматриваются двухфазные твердые и смешанные слоистые среды с ε -периодической структурой. В качестве одной фазы берется изотропный упругий или вязкоупругий материал, а в качестве другой фазы — изотропный вязкоупругий материал или вязкая сжимаемая жидкость. Для построения усредненных моделей указанных слоистых сред с диссипацией будут использоваться результаты глав 2 и 3. Как будет показано, для всех указанных слоистых сред решения периодических задач, с помощью которых находятся компоненты тензоров ядер релаксации соответствующих усредненных сред, выписываются в явном виде. Это дает возможность вывести явные формулы для расчета компонентов тензоров модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации усредненных сред.

3.1. Исходные модели слоистых сред

Рассмотрим гетерогенную среду с диссипацией, заполняющую область Ω и состоящую из периодически повторяющихся плоских слоев двух изотропных фаз. Объединение всех слоев первой (второй) фазы обозначим через $\Omega_{1\varepsilon}$ (соответственно $\Omega_{2\varepsilon}$). В качестве одной фазы мы будем рассматривать упругий или вязкоупругий материал (ВУМ-I, ВУМ-II или ВУМ-III), а в качестве другой фазы — вязкоупругий материал (ВУМ-I, ВУМ-II или ВУМ-III) или вязкую сжимаемую жидкость. Пусть ε — суммарная толщина любых двух соседних внутренних слоев, а ε_1 (ε_2) — толщина каждого отдельного внутреннего слоя первой (второй) фазы: $\varepsilon_1 = \varepsilon(1 - h)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon h$,

$0 < h < 1$. Дополнительно будем предполагать, что все слои гетерогенной среды направлены параллельно одной из координатных плоскостей, например, плоскости Ox_2x_3 . Без ограничения общности можно считать, что ячейкой периодичности такой слоистой среды является куб $\varepsilon Y = (0, \varepsilon)^3$, содержащий один слой толщины εh второй фазы и два слоя одинаковой толщины $\varepsilon(1-h)/2$ первой фазы (рис. 3.1). Таким образом, $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Gamma$, где

$$Y_s = I_s \times (0, 1)^2, \quad I_1 = (0, h_1) \cup (h_2, 1), \quad I_2 = (h_1, h_2),$$

$$\Gamma = \bigcup_{m=1}^2 (\{h_m\} \times (0, 1)^2), \quad h_1 = \frac{1-h}{2}, \quad h_2 = \frac{1+h}{2}.$$

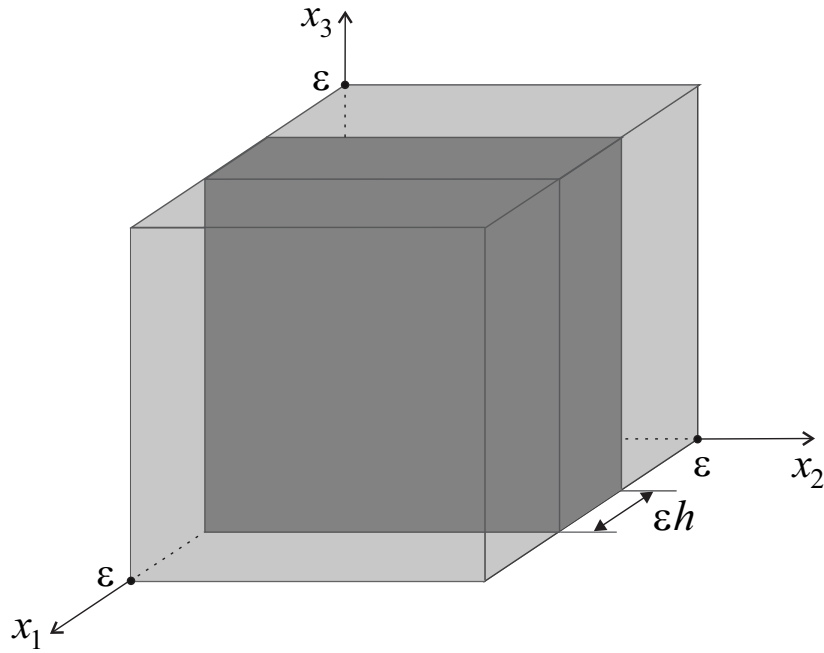


Рис. 3.1. Ячейка периодичности εY двухфазной слоистой среды

Тензор ядер релаксации для изотропной фазы $\Omega_{s\varepsilon}$ не зависит от пространственной переменной x и записывается в виде

$$\Gamma^{(s)}(t) = \delta(t)a^{(s)} + \delta'(t)b^{(s)} - d^{(s)}(t), \quad (3.1)$$

где $a^{(s)}$, $b^{(s)}$, $d^{(s)}(t)$ — тензоры модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации фазы $\Omega_{s\varepsilon}$ соответственно.

Если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ состоит из ВУМ-III, то компоненты тензора $a^{(s)}$ задаются формулами (1.7), компоненты тензора $b^{(s)}$ — формулами (1.9), а компоненты тензора $d^{(s)}(t)$ — формулами (1.14), в которых функции $G_s(t)$ и $G_{1s}(t)$ удовлетворяют условиям (1.15) и (1.11).

Если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ состоит из ВУМ-II, то компоненты тензора $b^{(s)}$ (или, что то же самое, коэффициенты вязкости ζ_s и η_s) полагаются равными нулю, компоненты тензора $a^{(s)}$ задаются формулами (1.7), а компоненты тензора $d^{(s)}(t)$ — формулами (1.14), в которых функции $G_s(t)$ и $G_{1s}(t)$ удовлетворяют условиям (1.15) и (1.11).

Если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ состоит из ВУМ-I, то компоненты тензора $d^{(s)}(t)$ полагаются равными нулю, а компоненты тензоров $a^{(s)}$ и $b^{(s)}$ задаются формулами (1.7) и (1.9) соответственно.

Если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ состоит из УМ, то компоненты тензора $a^{(s)}$ задаются формулами (1.7), а компоненты тензоров $b^{(s)}$ и $d^{(s)}(t)$ полагаются равными нулю.

И, наконец, если фаза $\Omega_{s\varepsilon}$ состоит из вязкой сжимаемой жидкости, то

$$a_{ijkh}^{(s)} = \gamma \delta_{ij} \delta_{kh}, \quad b_{ijkh}^{(s)} = \zeta_s \delta_{ij} \delta_{kh} + \eta_s (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \quad d_{ijkh}^{(s)}(t) = 0.$$

Математическая модель, описывающая колебания двухфазной слоистой среды, включает в себя систему уравнений (1.18), в которой $\rho_s^\varepsilon(x) = \rho^s = \text{const} > 0$, условия непрерывности перемещений и напряжений (1.19), которые в данном случае принимают вид

$$[u^\varepsilon]|_{S_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{i1}^\varepsilon]|_{S_\varepsilon} = 0,$$

где S_ε — плоские границы раздела слоев:

$$S_\varepsilon = \Omega \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^3} (\varepsilon(\Gamma + \partial\Gamma) + \varepsilon k) \right),$$

а также однородные начальные и граничные условия (1.20).

Согласно результатам Глав 1 и 2, усредненные модели слоистых сред с диссипацией записываются в виде начально-краевой задачи (1),

Построение усредненных моделей слоистых сред основано на применении результатов Глав 1 и 2. Согласно этим результатам, усредненные модели записываются в виде начально-краевой

В следующем параграфе будет показано, что для слоистых сред решения вспомогательных периодических задач, с помощью которых находятся компоненты тензоров ядер релаксации $\Gamma(t)$ соответствующих усредненных сред, могут быть выписаны в явном виде. Это позволит нам в дальнейшем вывести формулы, выражающие компоненты тензоров $\Gamma(t)$ через компоненты тензоров $a^{(s)}$, $b^{(s)}$, $d^{(s)}(t)$, благодаря которым становится возможным всесторонний анализ предельного поведения двухфазных слоистых сред с диссипацией при стремлении к нулю величины ε .

3.2. Решения периодических задач для слоистых сред

Согласно результатам Глав 1 и 2, вид вспомогательных периодических задач зависит от того, обладают ли фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ ненулевыми тензорами коэффициентов вязкости или нет. А именно, периодические задачи при $b^{(1)} \neq 0$, $b^{(2)} \neq 0$ записываются в виде (1.54), (1.55), (1.56); при $b^{(1)} = 0$, $b^{(2)} \neq 0$ — в виде (1.65), (1.66), (1.67); при $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$ — в виде (1.72), (1.73).

Поиск решений периодических задач целесообразно разбить на два шага: 1) поиск решений стационарных периодических задач, т.е. задач, решения которых зависят только от пространственных переменных и не зависят от времени; 2) поиск решений эволюционных периодических задач, т.е. задач, решения которых зависят и от пространственных переменных, и от времени.

3.2.1. Стационарные периодические задачи

1. *Случай $b^{(1)} \neq 0$ и $b^{(2)} \neq 0$ (одна фаза — ВУМ-I или ВУМ-III, другая фаза — ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ).* Выпишем решения вспомогательных периодических задач в случае, когда обе фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ обладают ненулевыми тензорами коэффициентов вязкости.

Прежде всего найдем решения $Z^{kh}(y)$ задач (1.54). Так как компоненты обоих тензоров $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ не зависят от y , то из (1.54) видим, что Y -периодические вектор-функции $Z^{kh}(y)$ есть решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(b_{ijlm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y_s, \quad s = 1, 2 \quad (3.2)$$

и удовлетворяют условиям

$$\int_Y Z^{kh} dy = 0, \quad [Z^{kh}]|_{y_1=h_1} = 0, \quad [Z^{kh}]|_{y_1=h_2} = 0,$$

$$b_{i1kh}^{(1)} + b_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1-0} = b_{i1kh}^{(2)} + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1+0},$$

$$b_{i1kh}^{(1)} + b_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2+0} = b_{i1kh}^{(2)} + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2-0}.$$

Нетрудно проверить, что решения $Z^{kh}(y)$ систем уравнений (3.2), удовлетворяющие заданным условиям, имеют вид

$$Z^{11}(y) = (c_{11}z(y_1), 0, 0), \quad Z^{22}(y) = Z^{33}(y) = (c_{12}z(y_1), 0, 0),$$

$$Z^{12}(y) = Z^{21}(y) = (0, c_{13}z(y_1), 0), \quad Z^{13}(y) = Z^{31}(y) = (0, 0, c_{13}z(y_1)),$$

$$Z^{23}(y) = Z^{32}(y) = (0, 0, 0),$$

где

$$c_{11} = \frac{1}{b_{12}}(1-h)(b_2 - b_1), \quad c_{12} = \frac{1}{b_{12}}(1-h)(\zeta_2 - \zeta_1),$$

$$c_{13} = \frac{1}{\eta_{12}}(1-h)(\eta_2 - \eta_1), \quad b_s = b_{1111}^{(s)} \quad (s = 1, 2),$$

$$b_{12} = b_1h + b_2(1-h), \quad \eta_{12} = \eta_1h + \eta_2(1-h),$$

а $z(y_1)$ — непрерывная кусочно-линейная 1-периодическая функция:

$$z(y_1) = \begin{cases} \frac{y_1 h}{1-h}, & y_1 \in (0, h_1), \\ -y_1 + \frac{1}{2}, & y_1 \in (h_1, h_2), \\ \frac{(y_1 - 1)h}{1-h}, & y_1 \in (h_2, 1). \end{cases}$$

Теперь, зная $Z^{kh}(y)$, мы можем перейти к поиску решений $D^{kh}(y)$ задач (1.55). Для этого заметим, что поскольку компоненты тензоров $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ не зависят от y , а ненулевые компоненты вектор-функций $Z^{kh}(y)$ есть кусочно-линейные функции от y_1 , то Y -периодические вектор-функции $D^{kh}(y)$ есть решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(b_{ijlm}^{(s)} e_{lm}^y(D^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y_s, \quad s = 1, 2 \quad (3.3)$$

и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \int_Y D^{kh} dy &= 0, \quad [D^{kh}]|_{y_1=h_1} = 0, \quad [D^{kh}]|_{y_1=h_2} = 0, \\ a_{i1kh}^{(1)} + \left(a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(D^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_1-0} &= \\ = a_{i1kh}^{(2)} + \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(D^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_1+0}, \\ a_{i1kh}^{(1)} + \left(a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(D^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_2+0} &= \\ = a_{i1kh}^{(2)} + \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(D^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_2-0}. \end{aligned}$$

Решения $D^{kh}(y)$ систем уравнений (3.3), удовлетворяющие этим условиям, имеют вид

$$\begin{aligned} D^{11}(y) &= (r_{11}z(y_1), 0, 0), \quad D^{22}(y) = D^{33}(y) = (r_{12}z(y_1), 0, 0), \\ D^{12}(y) = D^{21}(y) &= (0, r_{13}z(y_1), 0), \quad D^{13}(y) = D^{31}(y) = (0, 0, r_{13}z(y_1)), \\ D^{23}(y) = D^{32}(y) &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

где

$$r_{11} = \frac{1}{b_{12}^2}(1-h)(b_1a_2 - b_2a_1), \quad r_{12} = \frac{1-h}{b_{12}} \left(a_4 - a_3 - \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)a_{12}}{b_{12}} \right),$$

$$r_{13} = \frac{1}{\eta_{12}^2}(1-h)(\eta_1a_6 - \eta_2a_5), \quad a_{12} = a_1h + a_2(1-h),$$

$$a_s = a_{1111}^{(s)}, \quad a_{s+2} = a_{1122}^{(s)}, \quad a_{s+4} = a_{1212}^{(s)}, \quad s = 1, 2.$$

2. Случай $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{b}^{(2)} \neq \mathbf{0}$ (первая фаза – УМ или ВУМ-II, вторая фаза – ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ). Выпишем решения вспомогательных периодических задач в случае, когда только вторая фаза $\Omega_{2\varepsilon}$ обладает ненулевым тензором коэффициентов вязкости.

Сначала найдем решения $Z^{kh}(y)$ периодических задач (1.65). Так как компоненты тензоров $a^{(s)}, b^{(s)}$ постоянны, то Y -периодические вектор-функции $Z^{kh}(y)$ есть решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijlm}^{(1)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y_1, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \left(b_{ijlm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y_2$$

и удовлетворяют условиям

$$\int_Y Z^{kh} dy = 0, \quad [Z^{kh}]|_{y_1=h_1} = 0, \quad [Z^{kh}]|_{y_1=h_2} = 0,$$

$$b_{i1kh}^{(2)} + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{kh})|_{y_1=h_1+0} = b_{i1kh}^{(2)} + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{kh})|_{y_1=h_2-0} = 0.$$

Решая эти задачи, находим

$$Z^{11}(y) = (z(y_1), 0, 0), \quad Z^{22}(y) = Z^{33}(y) = (c_{22}z(y_1), 0, 0), \quad c_{22} = \frac{\zeta_2}{b_2},$$

$$Z^{12}(y) = Z^{21}(y) = (0, z(y_1), 0), \quad Z^{13}(y) = Z^{31}(y) = (0, 0, z(y_1)),$$

$$Z^{23}(y) = Z^{32}(y) = (0, 0, 0).$$

Теперь, зная $Z^{kh}(y)$, перейдем к поиску решений задач (1.66). Учитывая, что ненулевые компоненты вектор-функций $Z^{kh}(y)$ есть кусочно-линейные функции от y_1 , Y -периодические вектор-функции $D^{kh}(y)$ есть

решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(b_{ijlm}^{(2)} e_{lm}^y (D^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y_2$$

и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \int_{Y_2} D^{kh} dy = 0, \quad a_{i1kh}^{(2)} + \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y (Z^{kh}) + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y (D^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_1+0} = \\ = a_{i1kh}^{(1)} + a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y (Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1-0}, \\ a_{i1kh}^{(2)} + \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y (Z^{kh}) + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y (D^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_2-0} = \\ = a_{i1kh}^{(1)} + a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y (Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2+0}. \end{aligned}$$

Решая эти задачи, находим

$$\begin{aligned} D^{11}(y) = (r_{21}z(y_1), 0, 0), \quad D^{22}(y) = D^{33}(y) = (r_{22}z(y_1), 0, 0), \\ D^{12}(y) = D^{21}(y) = (0, r_{23}z(y_1), 0), \quad D^{13}(y) = D^{31}(y) = (0, 0, r_{23}z(y_1)), \\ D^{23}(y) = D^{32}(y) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

где

$$r_{21} = -\frac{a_1}{b_2(1-h)}, \quad r_{22} = \frac{a_4 - a_3}{b_2} - \frac{a_{12}\zeta_2}{b_2^2(1-h)}, \quad r_{23} = -\frac{a_5}{\eta_2(1-h)}.$$

3. Случай $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{0}$ (одна фаза — УМ или ВУМ-II, другая фаза — ВУМ-II). Остается выписать решения вспомогательных периодических задач в последнем третьем случае, когда обе фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ имеют нулевые тензоры коэффициентов вязкости.

Отметим, что для третьего случая число стационарных задач в два раза меньше, чем для предыдущих двух случаев: требуется найти только решения $Z^{kh}(y)$ задач (1.72). Из (1.72) видим, что Y -периодические вектор-функции $Z^{kh}(y)$ есть решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijlm}^{(s)} e_{lm}^y (Z^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y_s, \quad s = 1, 2$$

и удовлетворяют условиям

$$\int_Y Z^{kh} dy = 0, \quad [Z^{kh}]|_{y_1=h_1} = 0, \quad [Z^{kh}]|_{y_1=h_2} = 0,$$

$$a_{i1kh}^{(1)} + a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1-0} = a_{i1kh}^{(2)} + a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1+0},$$

$$a_{i1kh}^{(1)} + a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2+0} = a_{i1kh}^{(2)} + a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2-0}.$$

Решая эти задачи, находим

$$Z^{11}(y) = (c_{31}z(y_1), 0, 0), \quad Z^{22}(y) = Z^{33}(y) = (c_{32}z(y_1), 0, 0),$$

$$Z^{12}(y) = Z^{21}(y) = (0, c_{33}z(y_1), 0), \quad Z^{13}(y) = Z^{31}(y) = (0, 0, c_{33}z(y_1)),$$

$$Z^{23}(y) = Z^{32}(y) = (0, 0, 0),$$

где

$$c_{31} = \frac{1}{a_{12}}(1-h)(a_2 - a_1), \quad c_{32} = \frac{1}{a_{12}}(1-h)(\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$c_{33} = \frac{1}{\mu_{12}}(1-h)(\mu_2 - \mu_1), \quad \mu_{12} = \mu_1 h + \mu_2(1-h).$$

3.2.2. Эволюционные периодические задачи

Перейдем к поиску решений $W^{kh}(y, t)$ периодических задач, зависящих от пространственной переменной y и от времени t . Прежде чем выписать эти задачи, отметим, что вид дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют вектор-функции $W^{kh}(y, t)$, значительно упрощается в силу того, что ненулевые компоненты найденных выше решений $Z^{kh}(y)$ стационарных периодических задач являются кусочно-линейными функциями от y_1 , а компоненты тензоров $d^{(1)}(t)$ и $d^{(2)}(t)$ не зависят от пространственных переменных.

1. Случай $\mathbf{b}^{(1)} \neq 0$ и $\mathbf{b}^{(2)} \neq 0$ (одна фаза — ВУМ-I или ВУМ-III, другая фаза — ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ). Если обе фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ имеют ненулевые тензоры коэффициентов вязкости, то, согласно (1.56),

Y -периодические по y вектор-функции $W^{kh}(y, t)$ есть решения систем уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijlm}^{(s)} e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}^{(s)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - d_{ijlm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) = 0$$

в $Y_s \times (0, T)$, $s = 1, 2$, и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} & \int_Y W^{kh} dy = 0, \quad W^{kh}(y, 0) = D^{kh}(y), \quad y \in Y, \\ & [W^{kh}]|_{y_1=h_1} = 0, \quad [W^{kh}]|_{y_1=h_2} = 0, \\ & \left(a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - d_{i1lm}^{(1)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_1-0} - \\ & \quad - d_{i1lm}^{(1)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1-0} - d_{i1kh}^{(1)}(t) = \\ & = \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - d_{i1lm}^{(2)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_1+0} - \\ & \quad - d_{i1lm}^{(2)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1+0} - d_{i1kh}^{(2)}(t), \\ & \left(a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - d_{i1lm}^{(1)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_2+0} - \\ & \quad - d_{i1lm}^{(1)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2+0} - d_{i1kh}^{(1)}(t) = \\ & = \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - d_{i1lm}^{(2)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_2-0} - \\ & \quad - d_{i1lm}^{(2)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2-0} - d_{i1kh}^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Отметим, что если $d^{(s)}(t) = 0$ (при этом $G_s(t) = 0$), то системы уравнений для нахождения вектор-функций $W^{kh}(y, t)$ являются дифференциальными в $Y_s \times (0, T)$, в противном случае — интегро-дифференциальными.

Нетрудно видеть, что

$$W^{22}(y, t) = W^{33}(y, t), \quad W^{23}(y, t) = 0, \quad (3.4)$$

а значит, поиск решений периодических задач (1.56) сводится к поиску четырех вектор-функций: $W^{11}(y, t)$, $W^{22}(y, t)$, $W^{12}(y, t)$ и $W^{13}(y, t)$. Будем искать их в следующем виде:

$$\begin{aligned} W^{11}(y, t) &= (z(y_1)p_{11}(t), 0, 0), & W^{22}(y, t) &= (z(y_1)p_{12}(t), 0, 0), \\ W^{12}(y, t) &= (0, z(y_1)p_{13}(t), 0), & W^{13}(y, t) &= (0, 0, z(y_1)p_{13}(t)), \end{aligned}$$

где $z(y_1)$ — введенная выше кусочно-линейная функция, а функции $p_{1k}(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$p_{1k}(0) = r_{1k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Из условий непрерывности напряжений на границах $y_1 = h_1$ и $y = h_2$ получаем следующие уравнения для нахождения функций $p_{1k}(t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{h}{1-h} \left(a_1 p_{11}(t) + b_1 \frac{\partial p_{11}}{\partial t} - d_{1111}^{(1)}(t) * p_{11}(t) - c_{11} d_{1111}^{(1)}(t) \right) - d_{1111}^{(1)}(t) = \\ &= -a_2 p_{11}(t) - b_2 \frac{\partial p_{11}}{\partial t} + d_{1111}^{(2)}(t) * p_{11}(t) + c_{11} d_{1111}^{(2)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t), \\ &\frac{h}{1-h} \left(a_1 p_{12}(t) + b_1 \frac{\partial p_{12}}{\partial t} - d_{1111}^{(1)}(t) * p_{12}(t) - c_{12} d_{1111}^{(1)}(t) \right) - d_{1122}^{(1)}(t) = \\ &= -a_2 p_{12}(t) - b_2 \frac{\partial p_{12}}{\partial t} + d_{1111}^{(2)}(t) * p_{12}(t) + c_{12} d_{1111}^{(2)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t), \\ &\frac{h}{1-h} \left(a_5 p_{13}(t) + \eta_1 \frac{\partial p_{13}}{\partial t} - d_{1212}^{(1)}(t) * p_{13}(t) - c_{13} d_{1212}^{(1)}(t) \right) - d_{1212}^{(1)}(t) = \\ &= -a_6 p_{13}(t) - \eta_2 \frac{\partial p_{13}}{\partial t} + d_{1212}^{(2)}(t) * p_{13}(t) + c_{13} d_{1212}^{(2)}(t) - d_{1212}^{(2)}(t). \end{aligned}$$

После преобразований эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_{11}}{\partial t} - \frac{1}{b_{12}} \left(h d_{1111}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{11}(t) + \frac{a_{12}}{b_{12}} p_{11}(t) = \\ &= \frac{1-h}{b_{12}^2} \left(b_2 d_{1111}^{(1)}(t) - b_1 d_{1111}^{(2)}(t) \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial p_{12}}{\partial t} - \frac{1}{b_{12}} \left(h d_{1111}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{12}(t) + \frac{a_{12}}{b_{12}} p_{12}(t) =$$

$$= \frac{1-h}{b_{12}} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{b_{12}} (hd_{1111}^{(1)}(t) + (1-h)d_{1111}^{(2)}(t)) + d_{1122}^{(1)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t) \right), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_{13}}{\partial t} - \frac{1}{\eta_{12}} \left(hd_{1212}^{(1)}(t) + (1-h)d_{1212}^{(2)}(t) \right) * p_{13}(t) + \frac{a_{56}}{\eta_{12}} p_{13}(t) = \\ & = \frac{1-h}{\eta_{12}^2} \left(\eta_2 d_{1212}^{(1)}(t) - \eta_1 d_{1212}^{(2)}(t) \right), \quad a_{56} = a_5 h + a_6 (1-h). \end{aligned} \quad (3.8)$$

В частности, если $d^{(1)}(t) = d^{(2)}(t) = 0$, то (3.6)-(3.8) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

$$\frac{\partial p_{1k}}{\partial t} + \frac{a_{12}}{b_{12}} p_{1k}(t) = 0, \quad k = 1, 2; \quad \frac{\partial p_{13}}{\partial t} + \frac{a_{56}}{\eta_{12}} p_{13}(t) = 0$$

и их решения, удовлетворяющие начальным условиям (3.5), легко находятся:

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= r_{11} \exp\left(-\frac{a_{12}t}{b_{12}}\right) = \frac{1-h}{b_{12}^2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \exp\left(-\frac{a_{12}t}{b_{12}}\right), \\ p_{12}(t) &= \frac{1-h}{b_{12}^2} ((a_4 - a_3)b_{12} - (\zeta_2 - \zeta_1)a_{12}) \exp\left(-\frac{a_{12}t}{b_{12}}\right), \\ p_{13}(t) &= r_{13} \exp\left(-\frac{a_{56}t}{\eta_{12}}\right) = \frac{1-h}{\eta_{12}^2} (\eta_1 a_6 - \eta_2 a_5) \exp\left(-\frac{a_{56}t}{\eta_{12}}\right). \end{aligned}$$

Перейдем к поиску решений интегро-дифференциальных уравнений (3.6)-(3.8) в тех случаях, когда один или оба тензора $d^{(s)}(t)$ отличны от нуля.

а) Рассмотрим сначала слоистую среду, для которой только один из тензоров $d^{(s)}(t)$ отличен от нуля. Меняя в случае необходимости обозначения фаз, без ограничения общности считаем, что $d^{(1)}(t) = 0$, а $d^{(2)}(t) \neq 0$.

Будем искать решения уравнений (3.6)-(3.8) в виде линейной комбинации экспонент:

$$p_{1k}(t) = \sum_{m=1}^{M_{1k}} w_m^{(1k)} \exp(-\xi_m^{(1k)} t), \quad (3.9)$$

где

$$\xi_1^{(1k)} < \xi_1^{(2k)} < \dots < \xi_{M_{1k}}^{(1k)}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.10)$$

Тогда, учитывая, что

$$d_{1111}^{(2)}(t) = \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t}, \quad d_{1212}^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t},$$

$$d_{1122}^{(2)}(t) = \left(k_2 - \frac{1}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t},$$

из (3.6)-(3.8) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M_{11}} w_m^{(11)} \xi_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)} t} + \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} * \sum_{m=1}^{M_{11}} w_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)} t} - \\ - \frac{a_{12}}{b_{12}} \sum_{m=1}^{M_{11}} w_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)} t} = \frac{b_1(1-h)}{b_{12}^2} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M_{12}} w_m^{(12)} \xi_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(12)} t} + \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} * \sum_{m=1}^{M_{12}} w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(12)} t} - \\ - \frac{a_{12}}{b_{12}} \sum_{m=1}^{M_{12}} w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(12)} t} = \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 - \frac{1}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\ + \frac{(1-h)^2}{b_{12}^2} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) (\zeta_1 - \zeta_2) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M_{13}} w_m^{(13)} \xi_m^{(13)} e^{-\xi_m^{(13)} t} + \frac{1-h}{2\eta_{12}} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} * \sum_{m=1}^{M_{13}} w_m^{(13)} e^{-\xi_m^{(13)} t} - \\ - \frac{a_{56}}{\eta_{12}} \sum_{m=1}^{M_{13}} w_m^{(13)} e^{-\xi_m^{(13)} t} = \frac{\eta_1(1-h)}{2\eta_{12}^2} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t}. \end{aligned}$$

После преобразований эти равенства записываются в следующем виде:

$$\sum_{m=1}^{M_{11}} A_m^{(11)} w_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)} t} + \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} B_n^{(11)} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} = 0, \quad (3.11)$$

$$\sum_{m=1}^{M_{12}} A_m^{(12)} w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(12)} t} + \sum_{n=1}^{N_2} B_n^{(12)} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} = 0, \quad (3.12)$$

$$\sum_{m=1}^{M_{13}} A_m^{(13)} w_m^{(13)} e^{-\xi_m^{(13)} t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} B_n^{(13)} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} = 0, \quad (3.13)$$

где

$$A_m^{(11)} = \xi_m^{(11)} - \frac{a_{12}}{b_{12}} - \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}},$$

$$A_m^{(12)} = \xi_m^{(12)} - \frac{a_{12}}{b_{12}} - \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(12)} - \gamma_n^{(2)}},$$

$$\begin{aligned}
A_m^{(13)} &= \xi_m^{(13)} - \frac{a_{56}}{\eta_{12}} - \frac{1-h}{2\eta_{12}} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(13)} - \gamma_n^{(2)}}, \\
B_n^{(11)} &= \frac{1-h}{b_{12}} \sum_{m=1}^{M_{11}} \frac{w_m^{(11)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} - \frac{b_1(1-h)}{b_{12}^2}, \\
B_n^{(12)} &= \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{m=1}^{M_{12}} \frac{w_m^{(12)}}{\xi_m^{(12)} - \gamma_n^{(2)}} - \\
&\quad - \frac{1-h}{b_{12}^2} \left((1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) (\zeta_1 - \zeta_2) + \left(k_2 - \frac{1}{3} \right) b_{12} \right), \\
B_n^{(13)} &= \frac{1-h}{\eta_{12}} \sum_{m=1}^{M_{13}} \frac{w_m^{(13)}}{\xi_m^{(13)} - \gamma_n^{(2)}} - \frac{\eta_1(1-h)}{\eta_{12}^2}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что равенства (3.11)-(3.13) выполняются только тогда, когда

$$A_m^{(1k)} = 0, \quad m = 1, \dots, M_{1k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.14)$$

$$B_n^{(1k)} = 0, \quad n = 1, \dots, N_2, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.15)$$

Из (3.14) видим, что $\xi_1^{(1k)}, \dots, \xi_{M_{1k}}^{(1k)}$ есть корни дробно-рациональных уравнений

$$\xi^{(1k)} - \frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(1k)} - \gamma_n^{(2)}}, \quad k = 1, 2, \quad (3.16)$$

$$\xi^{(13)} - \frac{a_{56}}{\eta_{12}} = \frac{1-h}{2\eta_{12}} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(13)} - \gamma_n^{(2)}}. \quad (3.17)$$

После приведения к общему знаменателю каждое из этих уравнений становится алгебраическим уравнением степени $N_2 + 1$ и, следовательно,

$$M_{11} = M_{12} = M_{13} = N_2 + 1,$$

а также, в силу условия (3.10), $\xi_m^{(11)} = \xi_m^{(12)}$ для всех $m = 1, \dots, N_2 + 1$. В частности, если $N_2 = 1$, то $\xi_{1,2}^{(11)}$ и $\xi_{1,2}^{(13)}$ есть корни квадратных уравнений

$$\left(\xi^{(11)} \right)^2 - \left(\gamma_1^{(2)} + \frac{a_{12}}{b_{12}} \right) \xi^{(11)} + \frac{1}{b_{12}} \left(a_{12} \gamma_1^{(2)} - (1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) v_1^{(2)} \right) = 0$$

и

$$\left(\xi^{(13)}\right)^2 - \left(\gamma_1^{(2)} + \frac{a_{56}}{\eta_{12}}\right) \xi^{(13)} + \frac{1}{\eta_{12}} \left(a_{56}\gamma_1^{(2)} - (1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) v_1^{(2)}\right) = 0$$

соответственно. Следовательно,

$$\xi_{1,2}^{(11)} = \xi_{1,2}^{(12)} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1^{(2)} + \frac{a_{12}}{b_{12}} \pm \sqrt{D_1}\right), \quad (3.18)$$

$$\xi_{1,2}^{(13)} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1^{(2)} + \frac{a_{56}}{\eta_{12}} \pm \sqrt{D_2}\right), \quad (3.19)$$

где

$$D_1 = \left(\gamma_1^{(2)} - \frac{a_{12}}{b_{12}}\right)^2 + \frac{4v_1^{(2)}}{b_{12}}(1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3}\right),$$

$$D_2 = \left(\gamma_1^{(2)} - \frac{a_{56}}{\eta_{12}}\right)^2 + \frac{2v_1^{(2)}}{\eta_{12}}(1-h).$$

Очевидно, что при $N_2 \geq 2$ выписать корни уравнений (3.16) и (3.17) в явном и компактном виде не представляется возможным. Тем не менее, с помощью геометрических построений и формул Виета нетрудно вывести следующие оценки для корней этих уравнений при $N_2 \geq 1$:

$$0 < \xi_1^{(1k)} < \gamma_1^{(2)}, \quad \gamma_{m-1}^{(2)} < \xi_m^{(1k)} < \gamma_m^{(2)}, \quad (3.20)$$

$$k = 1, 3, \quad m = 2, \dots, N_2,$$

$$\begin{aligned} \max \left\{ \gamma_{N_2}^{(2)}, \frac{a_{12}}{b_{12}} \right\} &< \xi_{N_2+1}^{(11)} < \gamma_{N_2}^{(2)} + \frac{a_{12}}{b_{12}}, \\ \max \left\{ \gamma_{2N_2}^{(2)}, \frac{a_{56}}{\eta_{12}} \right\} &< \xi_{N_2+1}^{(13)} < \gamma_{N_2}^{(2)} + \frac{a_{56}}{\eta_{12}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Далее, из (3.15) видим, что $w_1^{(1k)}, \dots, w_{N_2+1}^{(1k)}$ есть решения систем $N_2 + 1$ линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(11)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{b_1}{b_{12}}, & n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(11)} = \frac{1-h}{b_{12}^2} (b_1 a_2 - b_2 a_1), \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(12)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{1-h}{b_{12}} (\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}, & n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(12)} = \frac{1-h}{b_{12}} \left(a_4 - a_3 - \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)a_{12}}{b_{12}} \right), \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(13)}}{\xi_m^{(13)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{\eta_1}{\eta_{12}}, & n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(13)} = \frac{1-h}{\eta_{12}^2} (\eta_1 a_6 - \eta_2 a_5). \end{cases} \quad (3.24)$$

Нетрудно выписать решения этих систем уравнений при $N_2 = 1$:

$$w_1^{(1k)} = \frac{\xi_1^{(1k)} - \gamma_1^{(2)}}{\xi_2^{(1k)} - \xi_1^{(1k)}} \left((\xi_2^{(1k)} - \gamma_1^{(2)}) C_1^{(1k)} - C_2^{(1k)} \right),$$

$$w_2^{(1k)} = -\frac{\xi_2^{(1k)} - \gamma_1^{(2)}}{\xi_2^{(1k)} - \xi_1^{(1k)}} \left((\xi_1^{(1k)} - \gamma_1^{(2)}) C_1^{(1k)} - C_2^{(1k)} \right),$$

где $\xi_{1,2}^{(1k)}$ находятся по формулам (3.18), (3.19),

$$C_1^{(11)} = \frac{b_1}{b_{12}}, \quad C_2^{(11)} = \frac{1-h}{b_{12}^2} (b_1 a_2 - b_2 a_1),$$

$$C_1^{(12)} = \frac{1-h}{b_{12}} (\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}, \quad C_2^{(12)} = \frac{1-h}{b_{12}} \left(a_4 - a_3 - \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)a_{12}}{b_{12}} \right),$$

$$C_1^{(13)} = \frac{\eta_1}{\eta_{12}}, \quad C_2^{(13)} = \frac{1-h}{\eta_{12}^2} (\eta_1 a_6 - \eta_2 a_5).$$

Нам в дальнейшем понадобятся следующие неравенства, которым удовлетворяют решения систем (3.22)-(3.24):

$$\left(\frac{a_1}{b_1} - \xi_m^{(11)} \right) w_m^{(11)} > 0, \quad (3.25)$$

$$\left(\frac{(1-h)(k_2 + 2/3)(a_3 - a_4) + a_{12}(k_2 - 1/3)}{(1-h)(k_2 + 2/3)(\zeta_1 - \zeta_2) + b_{12}(k_2 - 1/3)} - \xi_m^{(11)} \right) w_m^{(12)} > 0, \quad (3.26)$$

$$\left(\frac{a_5}{\eta_1} - \xi_m^{(13)} \right) w_m^{(13)} > 0 \quad (3.27)$$

для всех $m = 1, \dots, N_2 + 1$.

Для доказательства неравенств (3.25) рассмотрим уравнение

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(11)}}{\gamma - \xi_m^{(11)}} = -\frac{b_1}{b_{12}}. \quad (3.28)$$

Это уравнение имеет $N_2 + 1$ корней, в число которых входят $\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{N_2}^{(2)}$. Выясним, чему равен еще один его корень, который обозначим через $\gamma_0^{(2)}$.

По формуле Виета для коэффициентов и корней алгебраического уравнения, эквивалентного уравнению (3.28), имеем

$$\gamma_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{N_2+1} \xi_m^{(11)} - \frac{b_{12}}{b_1} \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(11)}.$$

С другой стороны, по формуле Виета для коэффициентов и корней алгебраического уравнения, эквивалентного уравнению (3.16),

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \xi_m^{(11)} = \sum_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} + \frac{a_{12}}{b_{12}}, \quad (3.29)$$

поэтому, учитывая последнее уравнение системы (3.22),

$$\gamma_0^{(2)} = \frac{1}{b_{12}} \left(a_{12} - \frac{1-h}{b_1} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \right) = \frac{a_1}{b_1}.$$

Принимая во внимание неравенства (3.20), нетрудно показать, что если $\gamma_0^{(2)} < \xi_1^{(11)}$, то $w_m^{(11)} < 0$ для всех $m = 1, \dots, N_2 + 1$, а если $\gamma_0^{(2)} > \xi_{N_2+1}^{(11)}$, то $w_m^{(11)} > 0$ для всех $m = 1, \dots, N_2 + 1$. Если же $\gamma_0^{(2)} \in (\xi_k^{(11)}, \xi_{k+1}^{(11)})$ при некотором k , то $w_m^{(11)} > 0$ для всех $m = 1, \dots, k$ и $w_m^{(11)} < 0$ для всех $m = k + 1, \dots, N_2 + 1$. Отсюда заключаем, что

$$\left(\gamma_0^{(2)} - \xi_m^{(11)} \right) w_m^{(11)} > 0$$

для всех $m = 1, \dots, N_2 + 1$ и неравенства (3.25) доказаны.

Аналогично доказываются неравенства (3.26) и (3.27): для их доказательства применяется формула Виета для коэффициентов и корней алгебраических уравнений, эквивалентных (3.16), (3.17) и уравнениям

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(12)}}{\gamma - \xi_m^{(11)}} = \frac{1-h}{b_{12}} (\zeta_2 - \zeta_1) - \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}, \quad (3.30)$$

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(13)}}{\gamma - \xi_m^{(13)}} = -\frac{\eta_1}{\eta_{12}}.$$

б) Теперь выпишем решения уравнений (3.6)-(3.8) для случая, когда $d^{(1)}(t) \neq 0$ и $d^{(2)}(t) \neq 0$. Для определенности условимся считать, что $\gamma_{n_1}^{(1)} \neq \gamma_{n_2}^{(2)}$ для всех $n_s = 1, \dots, N_s$. Будем искать решения $p_{1k}(t)$ указанных уравнений также в виде (3.9). После подстановки (3.9) в (3.6)-(3.8) и последующих преобразований находим, что $\xi_m^{(11)}, \xi_m^{(13)}$ есть корни дробно-рациональных уравнений

$$\xi^{(11)} - \frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{h}{b_{12}} \left(k_1 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\xi^{(11)} - \gamma_n^{(1)}} + \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(11)} - \gamma_n^{(2)}}, \quad (3.31)$$

$$\xi^{(13)} - \frac{a_{56}}{\eta_{12}} = \frac{h}{2\eta_{12}} \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\xi^{(13)} - \gamma_n^{(1)}} + \frac{1-h}{2\eta_{12}} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(13)} - \gamma_n^{(2)}}, \quad (3.32)$$

а $\xi_m^{(12)} = \xi_m^{(11)}$, $m = 1, \dots, M_{12}$ ($M_{12} = M_{11}$). Эти уравнения эквивалентны алгебраическим уравнениям степени $N_1 + N_2 + 1$, поэтому $M_{11} = M_{12} = M_{13} = N_1 + N_2 + 1$.

Введем множество

$$\gamma = \{\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{N_1}^{(1)}\} \cup \{\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{N_2}^{(2)}\}$$

и упорядочим его элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_{N_1+N_2}$ по возрастанию: $\gamma_i < \gamma_j$ при $i < j$. Тогда для корней приведенных выше дробно-рациональных уравнений имеют место следующие оценки:

$$0 < \xi_1^{(1k)} < \gamma_1, \quad \gamma_{m-1} < \xi_m^{(1k)} < \gamma_m, \quad (3.33)$$

$$k = 1, 3, \quad m = 2, \dots, N_1 + N_2,$$

$$\begin{aligned} \max \left\{ \gamma_{N_1+N_2}, \frac{a_{12}}{b_{12}} \right\} &< \xi_{N_1+N_2+1}^{(11)} < \gamma_{N_1+N_2} + \frac{a_{12}}{b_{12}}, \\ \max \left\{ \gamma_{N_1+N_2}, \frac{a_{56}}{\eta_{12}} \right\} &< \xi_{N_1+N_2+1}^{(13)} < \gamma_{N_1+N_2} + \frac{a_{56}}{\eta_{12}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Коэффициенты $w_m^{(1k)}$ перед экспонентами $e^{-\xi_m^{(1k)}}$ в разложении (3.9) представляют собой решения следующих систем $N_1 + N_2 + 1$ линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(11)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{b_2(1-h)}{b_{12}h}, \quad n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(11)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{b_1}{b_{12}}, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(11)} = \frac{1-h}{b_{12}^2}(b_1a_2 - b_2a_1), \end{array} \right. \quad (3.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(12)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(1)}} = \frac{1-h}{b_{12}}(\zeta_1 - \zeta_2) - \frac{(1-h)(k_1 - 1/3)}{h(k_1 + 2/3)}, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(12)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{1-h}{b_{12}}(\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(12)} = \frac{1-h}{b_{12}} \left(a_4 - a_3 - \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)a_{12}}{b_{12}} \right), \end{array} \right. \quad n = 1, \dots, N_1, \quad (3.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(13)}}{\xi_m^{(13)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{\eta_2(1-h)}{\eta_{12}h}, \quad n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(13)}}{\xi_m^{(13)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{\eta_1}{\eta_{12}}, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(13)} = \frac{1-h}{\eta_{12}^2}(\eta_1a_6 - \eta_2a_5). \end{array} \right. \quad (3.37)$$

2. Случай $b^{(1)} = 0$ и $b^{(2)} \neq 0$ (первая фаза – УМ или ВУМ-II, вторая фаза – ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ). Если только одна фаза $\Omega_{2\varepsilon}$ имеет ненулевой тензор коэффициентов вязкости, то, согласно (1.67), Y -периодические по y вектор-функции $W^{kh}(y, t)$ есть решения систем уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijlm}^{(1)} e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(1)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) = 0$$

в $Y_1 \times (0, T)$ и

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijlm}^{(2)} e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}^{(2)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - d_{ijlm}^{(2)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) = 0$$

в $Y_2 \times (0, T)$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} & \int_Y W^{kh} dy = 0, \quad W^{kh}(y, 0) = D^{kh}(y) \quad \text{в } Y_2, \\ & \left(a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{i1lm}^{(1)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_1-0} - \\ & \quad - d_{i1lm}^{(1)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1-0} - d_{i1kh}^{(1)}(t) = \\ & = \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - d_{i1lm}^{(2)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_1+0} - \\ & \quad - d_{i1lm}^{(2)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1+0} - d_{i1kh}^{(2)}(t), \\ & \left(a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{i1lm}^{(1)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_2+0} - \\ & \quad - d_{i1lm}^{(1)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2+0} - d_{i1kh}^{(1)}(t) = \\ & = \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) - d_{i1lm}^{(2)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_2-0} - \\ & \quad - d_{i1lm}^{(2)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2-0} - d_{i1kh}^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что решения $W^{kh}(y, t)$ удовлетворяют соотношениям (3.4) и, следовательно, достаточно найти $W^{11}(y, t)$, $W^{22}(y, t)$, $W^{12}(y, t)$ и $W^{13}(y, t)$. Как и ранее, будем искать эти вектор-функции в виде

$$W^{11}(y, t) = (z(y_1)p_{21}(t), 0, 0), \quad W^{22}(y, t) = (z(y_1)p_{22}(t), 0, 0),$$

$$W^{12}(y, t) = (0, z(y_1)p_{23}(t), 0), \quad W^{13}(y, t) = (0, 0, z(y_1)p_{23}(t)),$$

где функции $p_{2k}(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$p_{2k}(0) = r_{2k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.38)$$

Из условий непрерывности напряжений на границах $y_1 = h_1$ и $y = h_2$ получаем следующие уравнения для нахождения функций $p_{2k}(t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{1-h} \left(a_1 p_{21}(t) - d_{1111}^{(1)}(t) * p_{21}(t) - d_{1111}^{(1)}(t) \right) - d_{1111}^{(1)}(t) = \\ & = -a_2 p_{21}(t) - b_2 \frac{\partial p_{21}}{\partial t} + d_{1111}^{(2)}(t) * p_{21}(t), \\ & \frac{h}{1-h} \left(a_1 p_{22}(t) - d_{1111}^{(1)}(t) * p_{22}(t) - c_{22} d_{1111}^{(1)}(t) \right) - d_{1122}^{(1)}(t) = \\ & = -a_2 p_{22}(t) - b_2 \frac{\partial p_{22}}{\partial t} + d_{1111}^{(2)}(t) * p_{22}(t) + c_{22} d_{1111}^{(2)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t), \\ & \frac{h}{1-h} \left(a_5 p_{23}(t) - d_{1212}^{(1)}(t) * p_{23}(t) - d_{1212}^{(1)}(t) \right) - d_{1212}^{(1)}(t) = \\ & = -a_6 p_{23}(t) - \eta_2 \frac{\partial p_{23}}{\partial t} + d_{1212}^{(2)}(t) * p_{23}(t). \end{aligned}$$

После преобразований эти уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{21}}{\partial t} - \frac{1}{b_2(1-h)} \left(h d_{1111}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{21}(t) + \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} p_{21}(t) = \\ = \frac{1}{b_2(1-h)} d_{1111}^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{22}}{\partial t} - \frac{1}{b_2(1-h)} \left(h d_{1111}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{22}(t) + \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} p_{22}(t) = \\ = \frac{1}{b_2} \left(\frac{\zeta_2}{b_2(1-h)} (h d_{1111}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1111}^{(2)}(t)) + d_{1122}^{(1)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t) \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{23}}{\partial t} - \frac{1}{\eta_2(1-h)} \left(h d_{1212}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1212}^{(2)}(t) \right) * p_{23}(t) + \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} p_{23}(t) = \\ = \frac{1}{\eta_2(1-h)} d_{1212}^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

В частности, если $d^{(1)}(t) = d^{(2)}(t) = 0$, то (3.39)-(3.41) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

$$\frac{\partial p_{2k}}{\partial t} + \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} p_{2k}(t) = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\frac{\partial p_{23}}{\partial t} + \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} p_{23}(t) = 0$$

и их решения, удовлетворяющие начальным условиям (3.38), имеют вид

$$\begin{aligned} p_{21}(t) &= -\frac{a_1}{b_2(1-h)} \exp\left(-\frac{a_{12}t}{b_2(1-h)}\right), \\ p_{22}(t) &= \frac{1}{b_2} \left(a_4 - a_3 - \frac{a_{12}\zeta_2}{b_2(1-h)} \right) \exp\left(-\frac{a_{12}t}{b_2(1-h)}\right), \\ p_{23}(t) &= -\frac{a_5}{\eta_2(1-h)} \exp\left(-\frac{a_{56}t}{\eta_2(1-h)}\right). \end{aligned}$$

Покажем, что если хотя бы одна из функций $G_s(t)$ отлична от нуля и имеет вид (1.15), то решение интегро-дифференциальных уравнений (3.39)-(3.41) сводится к нахождению корней дробно-рациональных уравнений и последующему решению систем линейных уравнений.

а) Рассмотрим сначала случай, когда $d^{(1)}(t) = 0$, а $d^{(2)}(t) \neq 0$. Будем искать решения уравнений (3.39)-(3.41) в виде

$$p_{2k}(t) = \sum_{m=1}^{M_{2k}} w_m^{(2k)} \exp(-\xi_m^{(2k)}t), \quad (3.42)$$

где

$$\xi_1^{(2k)} < \xi_2^{(2k)} < \dots < \xi_{M_{2k}}^{(2k)}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.43)$$

После подстановки (3.42) в (3.39)-(3.41) получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{M_{21}} w_m^{(21)} \xi_m^{(21)} e^{-\xi_m^{(21)}t} + \frac{1}{b_2} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)}t} * \sum_{m=1}^{M_{21}} w_m^{(21)} e^{-\xi_m^{(21)}t} - \\ &\quad - \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} \sum_{m=1}^{M_{21}} w_m^{(21)} e^{-\xi_m^{(21)}t} = 0, \\ &\sum_{m=1}^{M_{22}} w_m^{(22)} \xi_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(22)}t} + \frac{1}{b_2} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)}t} * \sum_{m=1}^{M_{22}} w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(22)}t} - \\ &\quad - \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} \sum_{m=1}^{M_{22}} w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(22)}t} = \frac{1}{b_2^2} \left(\left(k_2 - \frac{1}{3} \right) b_2 - \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \zeta_2 \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)}t}, \\ &\sum_{m=1}^{M_{23}} w_m^{(23)} \xi_m^{(23)} e^{-\xi_m^{(23)}t} + \frac{1}{\eta_2} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)}t} * \sum_{m=1}^{M_{23}} w_m^{(23)} e^{-\xi_m^{(23)}t} - \end{aligned}$$

$$-\frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} \sum_{m=1}^{M_{23}} w_m^{(23)} e^{-\xi_m^{(23)} t} = 0.$$

После преобразований эти равенства принимают вид

$$\sum_{m=1}^{M_{21}} A_m^{(21)} w_m^{(21)} e^{-\xi_m^{(21)} t} + \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} B_n^{(21)} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} = 0, \quad (3.44)$$

$$\sum_{m=1}^{M_{22}} A_m^{(22)} w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(22)} t} + \sum_{n=1}^{N_2} B_n^{(22)} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} = 0, \quad (3.45)$$

$$\sum_{m=1}^{M_{23}} A_m^{(23)} w_m^{(23)} e^{-\xi_m^{(23)} t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} B_n^{(23)} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} = 0, \quad (3.46)$$

где

$$A_m^{(21)} = \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} - \xi_m^{(21)} + \frac{1}{b_2} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}},$$

$$A_m^{(22)} = \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} - \xi_m^{(22)} + \frac{1}{b_2} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(22)} - \gamma_n^{(2)}},$$

$$A_m^{(23)} = \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} - \xi_m^{(23)} + \frac{1}{2\eta_2} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(23)} - \gamma_n^{(2)}},$$

$$B_n^{(21)} = -\frac{1}{b_2} \sum_{m=1}^{M_{21}} \frac{w_m^{(21)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}}, \quad B_n^{(23)} = -\frac{1}{\eta_2} \sum_{m=1}^{M_{23}} \frac{w_m^{(23)}}{\xi_m^{(23)} - \gamma_n^{(2)}},$$

$$B_n^{(22)} = -\frac{1}{b_2} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{m=1}^{M_{22}} \frac{w_m^{(22)}}{\xi_m^{(22)} - \gamma_n^{(2)}} - \frac{1}{b_2^2} \left(\zeta_2 \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) - b_2 \left(k_2 - \frac{1}{3}\right)\right).$$

Из (3.44)-(3.46) мы видим, что $\xi_1^{(2k)}, \dots, \xi_{M_{2k}}^{(2k)}$ есть корни дробно-рациональных уравнений

$$\xi^{(2k)} - \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} = \frac{1}{b_2} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(2k)} - \gamma_n^{(2)}}, \quad k = 1, 2, \quad (3.47)$$

$$\xi^{(23)} - \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} = \frac{1}{2\eta_2} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(23)} - \gamma_n^{(2)}}. \quad (3.48)$$

Так как каждое из этих уравнений имеет в точности $N_2 + 1$ корней, то

$$M_{21} = M_{22} = M_{23} = N_2 + 1,$$

а также, в силу условия (3.43), $\xi_m^{(21)} = \xi_m^{(22)}$ для всех $m = 1, \dots, N_2 + 1$. В частности, если $N_2 = 1$, то $\xi_{1,2}^{(11)}$ и $\xi_{1,2}^{(13)}$ есть корни квадратных уравнений и

$$\xi_{1,2}^{(21)} = \xi_{1,2}^{(22)} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1^{(2)} + \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} \pm \sqrt{D_3} \right), \quad (3.49)$$

$$\xi_{1,2}^{(23)} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1^{(2)} + \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} \pm \sqrt{D_4} \right), \quad (3.50)$$

где

$$D_3 = \left(\gamma_1^{(2)} - \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} \right)^2 + \frac{4v_1^{(2)}}{b_2} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right),$$

$$D_4 = \left(\gamma_1^{(2)} - \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} \right)^2 + \frac{2v_1^{(2)}}{\eta_2}.$$

Используя геометрические построения и формулы Виета, нетрудно вывести следующие оценки для корней уравнений (3.47), (3.48) при $N_2 \geq 1$:

$$0 < \xi_1^{(2k)} < \gamma_1^{(2)}, \quad \gamma_{m-1}^{(2)} < \xi_m^{(2k)} < \gamma_m^{(2)}, \quad (3.51)$$

$$k = 1, 3, \quad m = 2, \dots, N_2,$$

$$\max \left\{ \gamma_{N_2}^{(2)}, \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} \right\} < \xi_{N_2+1}^{(21)} < \gamma_{N_2}^{(2)} + \frac{a_{12}}{b_2(1-h)}, \quad (3.52)$$

$$\max \left\{ \gamma_{N_2}^{(2)}, \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} \right\} < \xi_{N_2+1}^{(23)} < \gamma_{N_2}^{(2)} + \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)}. \quad (3.53)$$

Далее, из (3.44)-(3.46) следует, что $w_1^{(2k)}, \dots, w_{N_2+1}^{(2k)}$ есть решения систем $N_2 + 1$ линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(21)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} = 0, & n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(21)} = -\frac{a_1}{b_2(1-h)}, \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(22)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} = -\frac{\zeta_2}{b_2} + \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(22)} = \frac{1}{b_2} \left(a_4 - a_3 - \frac{\zeta_2 a_{12}}{b_2(1-h)} \right), \end{array} \right. \quad (3.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(23)}}{\xi_m^{(23)} - \gamma_n^{(2)}} = 0, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(23)} = -\frac{a_5}{\eta_2(1-h)}, \end{array} \right. \quad (3.56)$$

В частности, решения этих систем при $N_2 = 1$ имеют вид

$$w_1^{(2k)} = \frac{\xi_1^{(2k)} - \gamma_1^{(2)}}{\xi_2^{(2k)} - \xi_1^{(2k)}} \left(\left(\xi_2^{(2k)} - \gamma_1^{(2)} \right) C_1^{(2k)} - C_2^{(2k)} \right),$$

$$w_2^{(2k)} = -\frac{\xi_2^{(2k)} - \gamma_1^{(2)}}{\xi_2^{(2k)} - \xi_1^{(2k)}} \left(\left(\xi_1^{(2k)} - \gamma_1^{(2)} \right) C_1^{(2k)} - C_2^{(2k)} \right),$$

где $\xi_{1,2}^{(2k)}$ находятся по формулам (3.49), (3.50),

$$C_1^{(21)} = 0, \quad C_2^{(21)} = -\frac{a_1}{b_2(1-h)}, \quad C_1^{(22)} = -\frac{\zeta_2}{b_2} + \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3},$$

$$C_2^{(22)} = \frac{1}{b_2} \left(a_4 - a_3 - \frac{\zeta_2 a_{12}}{b_2(1-h)} \right), \quad C_1^{(23)} = 0, \quad C_2^{(23)} = \frac{a_5}{\eta_2(1-h)}.$$

Нам понадобятся следующие неравенства, которым удовлетворяют решения систем (3.54)-(3.56):

$$w_m^{(21)} < 0, \quad w_m^{(23)} < 0, \quad (3.57)$$

$$\left(\frac{(k_2 - 1/3)a_{12} + (1-h)(k_2 + 2/3)(a_3 - a_4)}{(1-h)((k_2 - 1/3)b_2 - (k_2 + 2/3)\zeta_2)} - \xi_m^{(21)} \right) w_m^{(22)} > 0 \quad (3.58)$$

для всех $m = 1, \dots, N_2 + 1$. Эти неравенства доказываются аналогично неравенствам (3.25), а именно: применяется формула Виета для коэффициентов и корней алгебраических уравнений, эквивалентных (3.47), (3.48) и уравнениям

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(21)}}{\gamma - \xi_m^{(21)}} = 0, \quad \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(23)}}{\gamma - \xi_m^{(23)}} = 0, \quad (3.59)$$

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(22)}}{\gamma - \xi_m^{(21)}} = \frac{\zeta_2}{b_2} - \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}. \quad (3.60)$$

б) Случай, когда $d^{(1)}(t) \neq 0$, $d^{(2)}(t) = 0$ исследуется аналогично только что рассмотренному: после подстановки (3.42) в (3.39)-(3.41) и последующих преобразований заключаем, что $M_{21} = M_{22} = M_{23} = N_1 + 1$, а $\xi_m^{(21)} = \xi_m^{(22)}$ и $\xi_m^{(23)}$ есть корни дробно-рациональных уравнений

$$\xi^{(21)} - \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} = \frac{h}{b_2(1-h)} \left(k_1 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\xi^{(21)} - \gamma_n^{(1)}} \quad (3.61)$$

и

$$\xi^{(23)} - \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} = \frac{h}{2\eta_2(1-h)} \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\xi^{(23)} - \gamma_n^{(1)}}, \quad (3.62)$$

соответственно, причем имеют место оценки

$$0 < \xi_1^{(2k)} < \gamma_1^{(1)}, \quad \gamma_{m-1}^{(1)} < \xi_m^{(2k)} < \gamma_m^{(1)}, \quad k = 1, 3, \quad m = 2, \dots, N_1,$$

$$\max \left\{ \gamma_{N_1}^{(1)}, \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} \right\} < \xi_{N_1+1}^{(21)} < \gamma_{N_1}^{(1)} + \frac{a_{12}}{b_2(1-h)},$$

$$\max \left\{ \gamma_{N_1}^{(1)}, \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} \right\} < \xi_{N_1+1}^{(23)} < \gamma_{N_1}^{(1)} + \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)}.$$

Далее, $w_1^{(2k)}, \dots, w_{N_1+1}^{(2k)}$ определяются как решения систем $N_1 + 1$ линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{w_m^{(21)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{1}{h}, & n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+1} w_m^{(21)} = -\frac{a_1}{b_2(1-h)}, \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{w_m^{(22)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{\zeta_2}{b_2} - \frac{(1-h)(k_1 - 1/3)}{h(k_1 + 2/3)}, & n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+1} w_m^{(22)} = \frac{1}{b_2} \left(a_4 - a_3 - \frac{\zeta_2 a_{12}}{b_2(1-h)} \right), \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{w_m^{(23)}}{\xi_m^{(23)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{1}{h}, & n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+1} w_m^{(23)} = -\frac{a_5}{\eta_2(1-h)} \end{cases} \quad (3.65)$$

и удовлетворяют следующим условиям:

$$\left(a_2 - b_2 \xi_m^{(21)}\right) w_m^{(21)} > 0, \quad \left(a_6 - \eta_2 \xi_m^{(23)}\right) w_m^{(23)} > 0, \quad (3.66)$$

$$\left(\frac{(k_1 - 1/3)a_{12} + h(k_1 + 2/3)(a_4 - a_3)}{(1-h)(k_1 - 1/3)b_2 + h(k_1 + 2/3)\zeta_2} - \xi_m^{(21)}\right) w_m^{(22)} > 0 \quad (3.67)$$

для всех $m = 1, \dots, N_1 + 1$. Для доказательства (3.66), (3.67) применяется формула Виета для коэффициентов и корней алгебраических уравнений, эквивалентных (3.61), (3.62) и уравнениям

$$\sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{w_m^{(21)}}{\gamma - \xi_m^{(21)}} = \frac{1}{h}, \quad \sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{w_m^{(23)}}{\gamma - \xi_m^{(23)}} = \frac{1}{h}, \quad (3.68)$$

$$\sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{w_m^{(22)}}{\gamma - \xi_m^{(21)}} = \frac{\zeta_2}{b_2} + \frac{(1-h)(k_1 - 1/3)}{h(k_1 + 2/3)}. \quad (3.69)$$

в) Остается выписать решения $p_{2k}(t)$ уравнений (3.39)-(3.41) для случая, когда $d^{(1)}(t) \neq 0$ и $d^{(2)}(t) \neq 0$. Считая, как и ранее, что $\gamma_{n_1}^{(1)} \neq \gamma_{n_2}^{(2)}$ для всех $n_s = 1, \dots, N_s$, будем искать функции $p_{2k}(t)$ в виде (3.42). После подстановки (3.42) в (3.39)-(3.41) и последующих преобразований находим, что $\xi_m^{(21)}$, $\xi_m^{(23)}$ есть корни дробно-рациональных уравнений

$$\begin{aligned} \xi^{(21)} - \frac{a_{12}}{b_2(1-h)} &= \frac{h}{b_2(1-h)} \left(k_1 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\xi^{(21)} - \gamma_n^{(1)}} + \\ &+ \frac{1}{b_2} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(21)} - \gamma_n^{(2)}}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\xi^{(23)} - \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)} = \frac{h}{2\eta_2(1-h)} \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\xi^{(23)} - \gamma_n^{(1)}} + \frac{1}{2\eta_2} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(23)} - \gamma_n^{(2)}}, \quad (3.71)$$

а $\xi_m^{(22)} = \xi_m^{(21)}$, $m = 1, \dots, M_{22}$ ($M_{22} = M_{21}$). Эти уравнения эквивалентны алгебраическим уравнениям степени $N_1 + N_2 + 1$, поэтому $M_{21} = M_{22} = M_{23} = N_1 + N_2 + 1$. Кроме того, для их корней $\xi_m^{(11)}$, $\xi_m^{(13)}$ ($m = 1, \dots, N_1 + N_2$) справедливы оценки (3.33), а для корней $\xi_{N_1+N_2+1}^{(11)}$ и $\xi_{N_1+N_2+1}^{(13)}$ — оценки

$$\begin{aligned} \max \left\{ \gamma_{N_1+N_2}, \frac{a_{12}}{b_{12}} \right\} &< \xi_{N_1+N_2+1}^{(11)} < \gamma_{N_1+N_2} + \frac{a_{12}}{b_2(1-h)}, \\ \max \left\{ \gamma_{N_1+N_2}, \frac{a_{56}}{\eta_{12}} \right\} &< \xi_{N_1+N_2+1}^{(13)} < \gamma_{N_1+N_2} + \frac{a_{56}}{\eta_2(1-h)}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Коэффициенты $w_m^{(2k)}$ перед экспонентами $e^{-\xi_m^{(2k)}}$ в разложении (3.42) представляют собой решения следующих систем $N_1 + N_2 + 1$ линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(21)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{1}{h}, \quad n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(21)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} = 0, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(21)} = -\frac{a_1}{b_2(1-h)}, \end{array} \right. \quad (3.73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(22)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{\zeta_2}{b_2} - \frac{(1-h)(k_1 - 1/3)}{h(k_1 + 2/3)}, \quad n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(22)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} = -\frac{\zeta_2}{b_2} + \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(22)} = \frac{1}{b_2} \left(a_4 - a_3 - \frac{\zeta_2 a_{12}}{b_2(1-h)} \right), \end{array} \right. \quad (3.74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(23)}}{\xi_m^{(23)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{1}{h}, \quad n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \frac{w_m^{(23)}}{\xi_m^{(23)} - \gamma_n^{(2)}} = 0, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(23)} = -\frac{a_5}{\eta_2(1-h)}. \end{array} \right. \quad (3.75)$$

3. Случай $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{0}$ (одна фаза – УМ или ВУМ-II, другая фаза – ВУМ-II). Если обе фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ имеют нулевые тензоры коэффициентов вязкости, то, согласно (1.73), Y -периодические по y вектор-функции $W^{kh}(y, t)$ есть решения систем уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijlm}^{(s)} e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{ijlm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в} \quad Y_s \times (0, T), \quad s = 1, 2$$

и удовлетворяют условиям

$$\int_Y W^{kh} dy = 0, \quad \left(a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{i1lm}^{(1)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_1-0} -$$

$$\begin{aligned}
& - d_{i1lm}^{(1)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1-0} - d_{i1kh}^{(1)}(t) = \\
= & \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{i1lm}^{(2)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_1+0} + \\
& - d_{i1lm}^{(2)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_1+0} - d_{i1kh}^{(2)}(t), \\
& \left(a_{i1lm}^{(1)} e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{i1lm}^{(1)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_2+0} - \\
& - d_{i1lm}^{(1)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2+0} - d_{i1kh}^{(1)}(t) = \\
= & \left(a_{i1lm}^{(2)} e_{lm}^y(W^{kh}) - d_{i1lm}^{(2)}(t) * e_{lm}^y(W^{kh}) \right) \Big|_{y_1=h_2-0} - \\
& - d_{i1lm}^{(2)}(t) e_{lm}^y(Z^{kh}) \Big|_{y_1=h_2-0} - d_{i1kh}^{(2)}(t).
\end{aligned}$$

Поскольку решения $W^{kh}(y, t)$ удовлетворяют соотношениям (3.4), то достаточно найти $W^{11}(y, t)$, $W^{22}(y, t)$, $W^{12}(y, t)$ и $W^{13}(y, t)$. Будем искать эти вектор-функции в виде

$$\begin{aligned}
W^{11}(y, t) &= (z(y_1)p_{31}(t), 0, 0), & W^{22}(y, t) &= (z(y_1)p_{32}(t), 0, 0), \\
W^{12}(y, t) &= (0, z(y_1)p_{33}(t), 0), & W^{13}(y, t) &= (0, 0, z(y_1)p_{33}(t)).
\end{aligned}$$

Из условий непрерывности напряжений на границах $y_1 = h_1$ и $y = h_2$ получаем следующие интегро-дифференциальные уравнения для нахождения функций $p_{3k}(t)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{1-h} \left(a_1 p_{31}(t) - d_{1111}^{(1)}(t) * p_{31}(t) - c_{31} d_{1111}^{(1)}(t) \right) - d_{1111}^{(1)}(t) = \\
& = -a_2 p_{31}(t) + d_{1111}^{(2)}(t) * p_{31}(t) + c_{31} d_{1111}^{(2)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t), \\
& \frac{h}{1-h} \left(a_1 p_{32}(t) - d_{1111}^{(1)}(t) * p_{32}(t) - c_{32} d_{1111}^{(1)}(t) \right) - d_{1122}^{(1)}(t) = \\
& = -a_2 p_{32}(t) + d_{1111}^{(2)}(t) * p_{32}(t) + c_{32} d_{1111}^{(2)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t), \\
& \frac{h}{1-h} \left(\mu_1 p_{33}(t) - d_{1212}^{(1)}(t) * p_{33}(t) - c_{33} d_{1212}^{(1)}(t) \right) - d_{1212}^{(1)}(t) = \\
& = -\mu_2 p_{33}(t) + d_{1212}^{(2)}(t) * p_{33}(t) + c_{33} d_{1212}^{(2)}(t) - d_{1212}^{(2)}(t).
\end{aligned}$$

После преобразований эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} p_{31}(t) - \frac{1}{a_{12}} \left(h d_{1111}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{31}(t) = \\ = \frac{1-h}{a_{12}^2} \left(a_2 d_{1111}^{(1)}(t) - a_1 d_{1111}^{(2)}(t) \right), \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} p_{32}(t) - \frac{1}{a_{12}} \left(h d_{1111}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{32}(t) = \\ = \frac{1-h}{a_{12}} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a_{12}} \left(h d_{1111}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1111}^{(2)}(t) \right) + d_{1122}^{(1)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t) \right), \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} p_{33}(t) - \frac{1}{\mu_{12}} \left(h d_{1212}^{(1)}(t) + (1-h) d_{1212}^{(2)}(t) \right) * p_{33}(t) = \\ = \frac{1-h}{\mu_{12}^2} \left(\mu_2 d_{1212}^{(1)}(t) - \mu_1 d_{1212}^{(2)}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

а) Рассмотрим сначала случай, когда только один из тензоров $d^{(s)}(t)$ отличен от нуля. Меняя при необходимости обозначения фаз, без ограничения общности можно считать, что $d^{(1)}(t) = 0$, а $d^{(2)}(t) \neq 0$. Полагая

$$p_{3k}(t) = \sum_{m=1}^{M_{3k}} w_m^{(3k)} \exp(-\xi_m^{(3k)} t), \quad (3.79)$$

$$\xi_1^{(3k)} < \xi_2^{(3k)} < \dots < \xi_{M_{3k}}^{(3k)}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.80)$$

из (3.76)-(3.78) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M_{31}} w_m^{(31)} e^{-\xi_m^{(31)} t} - \frac{1-h}{a_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} * \sum_{m=1}^{M_{31}} w_m^{(31)} e^{-\xi_m^{(31)} t} = \\ = -\frac{a_1(1-h)}{a_{12}^2} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t}, \\ \sum_{m=1}^{M_{32}} w_m^{(32)} e^{-\xi_m^{(32)} t} - \frac{1-h}{a_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} * \sum_{m=1}^{M_{32}} w_m^{(32)} e^{-\xi_m^{(32)} t} = \\ = -\frac{1-h}{a_{12}^2} \left((1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) (\lambda_1 - \lambda_2) + \left(k_2 - \frac{1}{3} \right) a_{12} \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M_{33}} w_m^{(33)} e^{-\xi_m^{(33)} t} - \frac{1-h}{2\mu_{12}} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} * \sum_{m=1}^{M_{33}} w_m^{(33)} e^{-\xi_m^{(33)} t} = \\ = -\frac{\mu_1(1-h)}{2\mu_{12}^2} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t}. \end{aligned}$$

После преобразований эти равенства записываются в следующем виде:

$$\sum_{m=1}^{M_{31}} A_m^{(31)} w_m^{(31)} e^{-\xi_m^{(31)} t} + \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} B_n^{(31)} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} = 0, \quad (3.81)$$

$$\sum_{m=1}^{M_{32}} A_m^{(32)} w_m^{(32)} e^{-\xi_m^{(32)} t} + \sum_{n=1}^{N_2} B_n^{(32)} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} = 0, \quad (3.82)$$

$$\sum_{m=1}^{M_{33}} A_m^{(33)} w_m^{(33)} e^{-\xi_m^{(33)} t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} B_n^{(33)} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} = 0, \quad (3.83)$$

где

$$\begin{aligned} A_m^{(31)} &= 1 + \frac{1-h}{a_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}}, \\ A_m^{(32)} &= 1 + \frac{1-h}{a_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(32)} - \gamma_n^{(2)}}, \\ A_m^{(33)} &= 1 + \frac{1-h}{2\mu_{12}} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(33)} - \gamma_n^{(2)}}, \\ B_n^{(31)} &= -\frac{1-h}{a_{12}} \sum_{m=1}^{M_{31}} \frac{w_m^{(31)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} + \frac{a_{12}(1-h)}{a_{12}^2}, \\ B_n^{(32)} &= -\frac{1-h}{a_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) \sum_{m=1}^{M_{32}} \frac{w_m^{(32)}}{\xi_m^{(32)} - \gamma_n^{(2)}} + \\ &+ \frac{1-h}{a_{12}^2} \left((1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3}\right) (\lambda_1 - \lambda_2) + \left(k_2 - \frac{1}{3}\right) a_{12} \right), \\ B_n^{(33)} &= -\frac{1-h}{\mu_{12}} \sum_{m=1}^{M_{33}} \frac{w_m^{(33)}}{\xi_m^{(33)} - \gamma_n^{(2)}} + \frac{\mu_1(1-h)}{\mu_{12}^2}. \end{aligned}$$

Из (3.81)-(3.83) мы видим, что $\xi_1^{(3k)}, \dots, \xi_{M_{3k}}^{(3k)}$ есть корни дробно-рациональных уравнений

$$\sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(3k)} - \gamma_n^{(2)}} = -\frac{a_{12}}{(1-h)(k_2 + 2/3)}, \quad k = 1, 2, \quad (3.84)$$

$$\sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(33)} - \gamma_n^{(2)}} = -\frac{2\mu_{12}}{1-h}. \quad (3.85)$$

Так как каждое из этих уравнений имеет в точности N_2 корней, то

$$M_{31} = M_{32} = M_{33} = N_2,$$

а также, в силу условия (3.80), $\xi_m^{(31)} = \xi_m^{(32)}$ для всех $m = 1, \dots, N_2$. В частности, при $N_2 = 1$ дробно-рациональные уравнения (3.84), (3.85) эквивалентны линейным уравнениям и их корни легко находятся:

$$\xi_m^{(31)} = \xi_m^{(32)} = \gamma_1^{(2)} - \frac{v_1^{(2)}}{a_{12}}(1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3} \right),$$

$$\xi_m^{(33)} = \gamma_1^{(2)} - \frac{v_1^{(2)}(1-h)}{2\mu_{12}}.$$

В общем случае $N_2 \geq 1$, используя геометрические построения, нетрудно показать, что для корней уравнений (3.84), (3.85) имеют место следующие оценки:

$$0 < \xi_1^{(3k)} < \gamma_1^{(2)}, \quad \gamma_{m-1}^{(2)} < \xi_m^{(3k)} < \gamma_m^{(2)}, \quad (3.86)$$

$$k = 1, 3, \quad m = 2, \dots, N_2.$$

Далее, из (3.81)-(3.83) следует, что $w_1^{(3k)}, \dots, w_{N_2+1}^{(3k)}$ есть решения систем N_2 линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^{N_2} \frac{w_m^{(31)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{a_1}{a_{12}}, \quad n = 1, \dots, N_2, \quad (3.87)$$

$$\sum_{m=1}^{N_2} \frac{w_m^{(32)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{1-h}{a_{12}}(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}, \quad n = 1, \dots, N_2, \quad (3.88)$$

$$\sum_{m=1}^{N_2} \frac{w_m^{(33)}}{\xi_m^{(33)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{\mu_1}{\mu_{12}}, \quad n = 1, \dots, N_2. \quad (3.89)$$

В частности, при $N_2 = 1$ имеем

$$w_1^{(31)} = -\frac{a_1 v_1^{(2)}}{a_{12}^2}(1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3} \right), \quad w_1^{(33)} = -\frac{\mu_1 v_1^{(2)}}{2\mu_{12}^2}(1-h),$$

$$w_1^{(32)} = -\frac{v_1^{(2)}(1-h)}{a_{12}^2} \left((\lambda_1 - \lambda_2)(1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) + a_{12} \left(k_2 - \frac{1}{3} \right) \right).$$

Используя оценки (3.86) и применяя формулу Виета для коэффициентов и корней алгебраических уравнений, эквивалентных (3.84), (3.85) и уравнениям

$$\sum_{m=1}^{N_2} \frac{w_m^{(31)}}{\gamma - \xi_m^{(31)}} = -\frac{a_1}{a_{12}}, \quad \sum_{m=1}^{N_2} \frac{w_m^{(33)}}{\gamma - \xi_m^{(33)}} = -\frac{\mu_1}{\mu_{12}}, \quad (3.90)$$

нетрудно показать, что

$$w_m^{(31)} < 0, \quad w_m^{(33)} < 0, \quad m = 1, \dots, N_2. \quad (3.91)$$

Кроме того, сравнивая (3.87) и (3.88), мы видим, что

$$w_m^{(32)} = \frac{w_m^{(31)}}{a_1} \left((1-h)(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{a_{12}(k_2 - 1/3)}{k_2 + 2/3} \right), \quad (3.92)$$

$$m = 1, \dots, N_2.$$

б) Остается выписать решения $p_{3k}(t)$ уравнений (3.76)-(3.78) для случая, когда $d^{(1)}(t) \neq 0$ и $d^{(2)}(t) \neq 0$. Считая, что $\gamma_{1n_1} \neq \gamma_{2n_2}$ для всех $n_s = 1, \dots, N_s$, будем искать функции $p_{3k}(t)$ в виде (3.79). После подстановки (3.79) в (3.76)-(3.78) и последующих преобразований находим, что $\xi_m^{(31)}$, $\xi_m^{(33)}$ есть корни дробно-рациональных уравнений

$$h \left(k_1 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\xi^{(31)} - \gamma_n^{(1)}} + (1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} = -a_{12}, \quad (3.93)$$

$$h \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\xi^{(33)} - \gamma_n^{(1)}} + (1-h) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi^{(33)} - \gamma_n^{(2)}} = -2\mu_{12}, \quad (3.94)$$

а $\xi_m^{(32)} = \xi_m^{(31)}$, $m = 1, \dots, M_{32}$ ($M_{32} = M_{31}$). Эти уравнения эквивалентны алгебраическим уравнениям степени $N_1 + N_2$, поэтому $M_{31} = M_{32} = M_{33} = N_1 + N_2$. Кроме того, для их корней $\xi_m^{(31)}$, $\xi_m^{(33)}$ ($m = 1, \dots, N_1 + N_2$) справедливы оценки (3.33).

Коэффициенты $w_m^{(3k)}$ перед экспонентами $e^{-\xi_m^{(3k)}}$ в разложении (3.79) представляют собой решения следующих систем $N_1 + N_2$ линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \frac{w_m^{(31)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{a_2(1-h)}{a_{12}h}, & n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \frac{w_m^{(31)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{a_1}{a_{12}}, & n = 1, \dots, N_2, \end{cases} \quad (3.95)$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \frac{w_m^{(32)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(1)}} = \frac{1-h}{a_{12}}(\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{(1-h)(k_1 - 1/3)}{h(k_1 + 2/3)}, & n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \frac{w_m^{(32)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{1-h}{a_{12}}(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}, & n = 1, \dots, N_2, \end{cases} \quad (3.96)$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \frac{w_m^{(33)}}{\xi_m^{(33)} - \gamma_n^{(1)}} = -\frac{\mu_2(1-h)}{\mu_{12}h}, & n = 1, \dots, N_1, \\ \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \frac{w_m^{(33)}}{\xi_m^{(33)} - \gamma_n^{(2)}} = \frac{\mu_1}{\mu_{12}}, & n = 1, \dots, N_2. \end{cases} \quad (3.97)$$

3.3. Тензоры модулей упругости

Зная решения периодических задач (1.54), (1.55), (1.65), (1.66), (1.72), мы можем вычислить по формулам (1.57), (1.68), (1.57) все компоненты тензора модулей упругости α усредненной среды, соответствующей исходной слоистой среде. Нетрудно показать, что для изотропных слоев $\alpha_{ijkh} = 0$, если $\delta_{ij}\delta_{kh} + \delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk} = 0$. Таким образом, ненулевыми компонентами тензора могут быть только α_{iijj} , α_{ijij} , α_{ijji} ($i, j = 1, 2, 3$). Учитывая свойства симметрии $\alpha_{ijkh} = \alpha_{jikh} = \alpha_{khij}$, все эти компоненты будут известны, если мы найдем α_{iijj} и α_{ijij} при $i \leq j$.

С целью сокращения записи введем следующие обозначения:

$$a(y) = a_s, \quad b(y) = b_s, \quad \lambda(y) = a_{1122}^{(s)} = a_{s+2}, \quad \zeta(y) = \zeta_s,$$

$$\mu(y) = a_{1212}^{(s)} = a_{s+4}, \quad \eta(y) = \eta_s, \quad y \in Y_s, \quad s = 1, 2.$$

Отметим, что для слоистых сред, состоящих из двух твердых фаз, $\lambda(y) = \lambda_s$ и $\mu(y) = \mu_s$ при $y \in Y_s$, $s = 1, 2$.

Подставляя найденные выше решения $Z^{kh}(y)$ и $D^{kh}(y)$ периодических задач в (1.57), (1.68), (1.74) и учитывая, что

$$\begin{aligned} Z^{22}(y) &= Z^{33}(y), & Z^{12}(y) &= Z^{13}(y), & Z^{23}(y) &= 0, \\ D^{22}(y) &= D^{33}(y), & D^{12}(y) &= D^{13}(y), & D^{23}(y) &= 0, \end{aligned} \quad (3.98)$$

нетрудно установить, что для всех трех рассмотренных ранее случаев

$$\alpha_{2222} = \alpha_{3333}, \quad \alpha_{1122} = \alpha_{1133}, \quad \alpha_{1212} = \alpha_{1313}, \quad (3.99)$$

$$\alpha_{2222} - \alpha_{2233} = \langle a \rangle - \langle \lambda \rangle = 2 \langle \mu \rangle, \quad \alpha_{2323} = (1 - h)a_{2323}^{(1)} + ha_{2323}^{(2)} = \langle \mu \rangle,$$

где введено обозначение

$$\langle \cdot \rangle = \int_Y \cdot dy.$$

Отсюда следует, в частности, что

$$\frac{1}{2} (\alpha_{2222} - \alpha_{2233}) = \alpha_{2323} \quad (3.100)$$

и, следовательно, все компоненты тензора α будут известны, если найти формулы для расчета α_{1111} , α_{2222} , α_{1122} , α_{1212} .

1. Случай $\mathbf{b}^{(1)} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b}^{(2)} \neq \mathbf{0}$ (одна фаза — ВУМ-I или ВУМ-III, другая фаза — ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ). По формулам (1.57) вычисляем:

$$\begin{aligned} \alpha_{1111} &= \langle a \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(a_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{11}) + b_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(D^{11}) \right) dy = \\ &= \langle a \rangle + hc_{11}(a_1 - a_2) + hr_{11}(b_1 - b_2) = \frac{a_2 b_1^2 h + a_1 b_2^2 (1 - h)}{(b_1 h + b_2 (1 - h))^2}, \\ \alpha_{2222} &= \langle a \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(a_{22lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{22}) + b_{22lm}^{(s)} e_{lm}^y(D^{22}) \right) dy = \\ &= \langle a \rangle + hc_{12}(a_3 - a_4) + hr_{12}(\zeta_1 - \zeta_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle a \rangle - \frac{2h}{b_{12}}(1-h)(a_3 - a_4)(\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{ha_{12}}{b_{12}^2}(1-h)(\zeta_1 - \zeta_2)^2, \\
\alpha_{1122} &= \langle \lambda \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(a_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{22}) + b_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(D^{22}) \right) dy = \\
&= \langle \lambda \rangle + c_{12}h(a_1 - a_2) + r_{12}h(b_1 - b_2) = \\
&= \frac{b_1 a_4 h + b_2 a_3 (1-h)}{b_1 h + b_2 (1-h)} + \frac{h(1-h)(\zeta_2 - \zeta_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{(b_1 h + b_2 (1-h))^2}, \\
\alpha_{1212} &= \langle \mu \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(a_{12lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{12}) + b_{12lm}^{(s)} e_{lm}^y(D^{12}) \right) dy = \\
&= \langle \mu \rangle + c_{13}h(a_5 - a_6) + r_{13}h(\eta_1 - \eta_2) = \frac{a_6 \eta_1^2 h + a_5 \eta_2^2 (1-h)}{(\eta_1 h + \eta_2 (1-h))^2}.
\end{aligned}$$

Полученные формулы удобно записать в следующем виде:

$$\alpha_{1111} = \frac{\langle ab^{-2} \rangle}{\langle b^{-1} \rangle^2}, \quad \alpha_{2222} = \langle a \rangle - 2 \langle \lambda \zeta b^{-1} \rangle + \langle \zeta^2 ab^{-2} \rangle + \quad (3.101)$$

$$+ \frac{2 \langle \zeta b^{-1} \rangle (\langle \lambda b^{-1} \rangle - \langle \zeta ab^{-2} \rangle)}{\langle b^{-1} \rangle} + \frac{\langle ab^{-2} \rangle \cdot \langle \zeta b^{-1} \rangle^2}{\langle b^{-1} \rangle^2}, \quad (3.102)$$

$$\alpha_{1212} = \frac{\langle \mu \eta^{-2} \rangle}{\langle \eta^{-1} \rangle^2}, \quad \alpha_{1122} = \frac{\langle \lambda b^{-1} \rangle - \langle \zeta ab^{-2} \rangle}{\langle b^{-1} \rangle} + \frac{\langle \zeta b^{-1} \rangle \cdot \langle ab^{-2} \rangle}{\langle b^{-1} \rangle^2}. \quad (3.103)$$

2. Случай $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{b}^{(2)} \neq \mathbf{0}$ (первая фаза – УМ или ВУМ-II, вторая фаза – ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ). По формулам (1.68) вычисляем:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1111} &= \langle a \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{11}) dy + \int_{Y_2} b_{11lm}^{(2)} e_{lm}^y(D^{11}) dy = \\
&= \langle a \rangle + h(a_1 - a_2) - hr_{21}b_2 = \frac{a_1}{1-h},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{2222} &= \langle a \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{22lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{22}) dy + \int_{Y_2} b_{22lm}^{(2)} e_{lm}^y(D^{22}) dy = \\
&= \langle a \rangle + \frac{h\zeta_2}{b_2}(\lambda_1 - a_4) - hr_{22}\zeta_2 = \\
&= \langle a \rangle + \frac{2h\zeta_2}{b_2}(\lambda_1 - a_4) + \frac{h\zeta_2^2(a_1 h + a_2(1-h))}{b_2^2(1-h)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1122} &= \langle \lambda \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{22}) dy + \int_{Y_2} b_{11lm}^{(2)} e_{lm}^y(D^{22}) dy = \\
&= \langle \lambda \rangle + \frac{h\zeta_2}{b_2} (a_1 - a_2) - hr_{22}b_2 = \lambda_1 + \frac{a_1\zeta_2 h}{b_2(1-h)}, \\
\alpha_{1212} &= \langle \mu \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{12lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{12}) dy + \int_{Y_2} b_{12lm}^{(2)} e_{lm}^y(D^{12}) dy = \\
&= \langle \mu \rangle + h(\mu_1 - a_6) - hr_{23}\eta_2 = \frac{\mu_1}{1-h}.
\end{aligned}$$

Отметим, что здесь $a_4 = \lambda_2$, $a_6 = \mu_2$ в случае твердой второй фазы и $a_4 = \gamma$, $a_6 = 0$ в случае жидкой второй фазы.

3. Случай $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{0}$ (одна фаза – УМ или ВУМ-II, другая фаза – ВУМ-II). По формулам (1.74) вычисляем:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1111} &= \langle a \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{11}) dy = \langle a \rangle + hc_{31}(a_1 - a_2) = \\
&= \frac{a_1 a_2}{a_1 h + a_2(1-h)}, \\
\alpha_{2222} &= \langle a \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{22lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{22}) dy = \langle a \rangle + hc_{32}(\lambda_1 - \lambda_2) = \\
&= \langle a \rangle - \frac{h}{a_{12}}(1-h)(\lambda_1 - \lambda_2)^2, \\
\alpha_{1122} &= \langle \lambda \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{22}) dy = \langle \lambda \rangle + hc_{32}(a_1 - a_2) = \\
&= \frac{a_1 \lambda_2 h + a_2 \lambda_1(1-h)}{a_1 h + a_2(1-h)}, \\
\alpha_{1212} &= \langle \mu \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} a_{12lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{12}) dy = \langle \mu \rangle + hc_{33}(\mu_1 - \mu_2) = \\
&= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 h + \mu_2(1-h)}.
\end{aligned}$$

Полученные формулы удобно записать в следующем виде:

$$\alpha_{1111} = \frac{1}{\langle a^{-1} \rangle}, \quad \alpha_{2222} = \langle a \rangle + \frac{\langle \zeta a^{-1} \rangle^2}{\langle a^{-1} \rangle} - \langle \lambda^2 a^{-1} \rangle,$$

$$\alpha_{1122} = \frac{\langle \lambda a^{-1} \rangle}{\langle a^{-1} \rangle}, \quad \alpha_{1212} = \frac{1}{\langle \mu^{-1} \rangle}.$$

3.4. Тензоры коэффициентов вязкости

Перейдем к выводу формул для компонентов тензора коэффициентов вязкости β усредненной среды, соответствующей исходной слоистой среде. Для этого воспользуемся приведенными выше решениями $D^{kh}(y)$ периодических задач (1.55), (1.66) и формулами (1.58), (1.69). Нетрудно показать, что тензор β , как и тензор α , имеет не более 21 ненулевой компоненты. Кроме того, из свойств симметрии $\beta_{ijkh} = \beta_{jikh} = \beta_{khij}$ следует, что все его компоненты будут известны, если мы найдем β_{iijj} и β_{ijij} при $i \leq j$.

Подставляя решения $D^{kh}(y)$ периодических задач в формулы (1.58), (1.69), можно установить, что как при $b^{(1)} \neq 0$, $b^{(2)} \neq 0$, так и при $b^{(1)} = 0$, $b^{(2)} \neq 0$, имеют место равенства

$$\beta_{2222} = \beta_{3333}, \quad \beta_{1122} = \beta_{1133}, \quad \beta_{1212} = \beta_{1313}, \quad (3.104)$$

$$\beta_{2222} - \beta_{2233} = \langle b \rangle - \langle \zeta \rangle = 2 \langle \eta \rangle, \quad \beta_{2323} = \langle \eta \rangle.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} (\beta_{2222} - \beta_{2233}) = \beta_{2323} \quad (3.105)$$

и все компоненты тензора β будут известны, если найти формулы для расчета β_{1111} , β_{2222} , β_{1122} , β_{1212} .

1. Случай $b^{(1)} \neq 0$ и $b^{(2)} \neq 0$ (одна фаза – ВУМ-I или ВУМ-III, другая фаза – ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ). По формулам (1.58) находим

$$\begin{aligned} \beta_{1111} &= \langle b \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} b_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{11}) dy = \langle b \rangle + hc_{11}(b_1 - b_2) = \\ &= \frac{b_1 b_2}{b_1 h + b_2 (1 - h)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{2222} &= \langle b \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} b_{22lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{22}) dy = \langle b \rangle + hc_{12}(\zeta_1 - \zeta_2) = \\ &= \langle b \rangle - \frac{h}{b_{12}}(1-h)(\zeta_1 - \zeta_2)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{1122} &= \langle \zeta \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} b_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{22}) dy = \langle \zeta \rangle + hc_{12}(b_1 - b_2) = \\ &= \frac{b_1 \zeta_2 h + b_2 \zeta_1 (1-h)}{b_1 h + b_2 (1-h)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{1212} &= \langle \eta \rangle + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} b_{12lm}^{(s)} e_{lm}^y(Z^{12}) dy = \langle \eta \rangle + hc_{13}(\eta_1 - \eta_2) = \\ &= \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 h + \eta_2 (1-h)}.\end{aligned}$$

Полученные формулы окончательно перепишем в следующем виде:

$$\beta_{1111} = \frac{1}{\langle b^{-1} \rangle}, \quad \beta_{2222} = \langle b \rangle + \frac{\langle \zeta b^{-1} \rangle^2}{\langle b^{-1} \rangle} - \langle \zeta^2 b^{-1} \rangle, \quad (3.106)$$

$$\beta_{1122} = \frac{\langle \zeta b^{-1} \rangle}{\langle b^{-1} \rangle}, \quad \beta_{1212} = \frac{1}{\langle \eta^{-1} \rangle}. \quad (3.107)$$

2. Случай $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{b}^{(2)} \neq \mathbf{0}$ (первая фаза – УМ или ВУМ-II, вторая фаза – ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ). По формулам (1.69) находим

$$\beta_{1111} = b_2 h + \int_{Y_2} b_{11lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{11}) dy = 0,$$

$$\beta_{2222} = b_2 h + \int_{Y_2} b_{22lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{22}) dy = \frac{h(b_2^2 - \zeta_2^2)}{b_2},$$

$$\beta_{1122} = \zeta_2 h + \int_{Y_2} b_{11lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{22}) dy = 0,$$

$$\beta_{1212} = \eta_2 h + \int_{Y_2} b_{12lm}^{(2)} e_{lm}^y(Z^{12}) dy = 0.$$

Таким образом, если только одна из двух фаз слоистой среды характеризуется ненулевым тензором коэффициентов вязкости, то тензор коэффициентов вязкости β усредненной среды вырожден и имеет только два отличных от нуля компонента: β_{2222} и β_{3333} , причем $\beta_{2222} = \beta_{3333} > 0$.

3. Случай $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{0}$ (одна фаза — УМ или ВУМ-II, другая фаза — ВУМ-II). Тензор β — нулевой.

3.5. Тензоры регулярных частей ядер релаксации

Вывод формул для компонентов тензора регулярных частей ядер релаксации $g(t)$ усредненной среды, соответствующей исходной слоистой среде, основан на подстановке в формулы (1.59), (1.70), (1.75) найденных ранее решений $W^{kh}(y, t)$ периодических задач (1.56), (1.67), (1.73). Тензор $g(t)$, как и тензоры α и β , имеет не более 21 ненулевой компоненты, причем, в силу свойств симметрии $g_{ijkh}(t) = g_{jikh}(t) = g_{khij}(t)$, поэтому все его компоненты будут известны, если мы найдем $g_{iijj}(t)$ и $g_{ijij}(t)$ при $i \leq j$.

Подставляя решения $W^{kh}(y, t)$ периодических задач в (1.59), (1.70), (1.75) и принимая во внимание (3.4), получаем

$$g_{2222}(t) = g_{3333}(t), \quad g_{1122}(t) = g_{1133}(t), \quad g_{1212}(t) = g_{1313}(t), \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} g_{2222}(t) - g_{2233}(t) &= (1 - h) \left(d_{2222}^{(1)}(t) - d_{2233}^{(1)}(t) \right) + h \left(d_{2222}^{(2)}(t) - d_{2233}^{(2)}(t) \right) = \\ &= (1 - h)G_1(t) + hG_2(t), \end{aligned}$$

$$g_{2323}(t) = (1 - h)d_{2323}^{(1)}(t) + hd_{2323}^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \left((1 - h)G_1(t) + hG_2(t) \right),$$

так что

$$\frac{1}{2} \left(g_{2222}(t) - g_{2233}(t) \right) = g_{2323}(t). \quad (3.109)$$

Отметим также, что если $G_1(t) = G_2(t) = 0$, то $g_{2323}(t) = 0$; если $G_1(t) = 0$, $G_2(t) \neq 0$, то

$$g_{2323}(t) = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t};$$

если $G_1(t) \neq 0$, $G_2(t) = 0$, то

$$g_{2323}(t) = \frac{1-h}{2} \sum_{n=1}^{N_1} v_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} t};$$

если $G_1(t) \neq 0$, $G_2(t) \neq 0$, то

$$g_{2323}(t) = \frac{1-h}{2} \sum_{n=1}^{N_1} v_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} t} + \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t}.$$

Таким образом, принимая во внимание (3.108) и (3.109), для нахождения всех компонентов тензора $g(t)$ достаточно вывести формулы для компонентов $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$, $g_{1212}(t)$.

1. Случай $\mathbf{b}^{(1)} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b}^{(2)} \neq \mathbf{0}$ (одна фаза – ВУМ-I или ВУМ-III, другая фаза – ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ). По формулам (1.75) находим

$$\begin{aligned} g_{1111}(t) &= (1-h)d_{1111}^{(1)}(t) + hd_{1111}^{(2)}(t) + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{11lm}^{(s)}(t) e_{lm}^y(Z^{11}) dy + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{11lm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{11}) - a_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(W^{11}) - b_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{11}}{\partial t} \right) \right) dy = \\ &= (1-h + hc_{11})d_{1111}^{(1)}(t) + h(1 - c_{11})d_{1111}^{(2)}(t) + h(a_2 - a_1)p_{11}(t) + \\ &\quad + h(b_2 - b_1) \frac{\partial p_{11}}{\partial t} + h \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{11}(t) = \\ &= \frac{b_2(1-h)}{b_{12}} d_{1111}^{(1)}(t) + \frac{b_1 h}{b_{12}} d_{1111}^{(2)}(t) + h(a_2 - a_1)p_{11}(t) + \\ &\quad + h(b_2 - b_1) \frac{\partial p_{11}}{\partial t} + h \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{11}(t), \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} g_{2222}(t) &= (1-h)d_{1111}^{(1)}(t) + hd_{1111}^{(2)}(t) + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{22lm}^{(s)}(t) e_{lm}^y(Z^{22}) dy + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{22lm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{22}) - a_{22lm}^{(s)} e_{lm}^y(W^{22}) - b_{22lm}^{(s)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{22}}{\partial t} \right) \right) dy = \\ &= (1-h)d_{1111}^{(1)}(t) + hd_{1111}^{(2)}(t) + hc_{12}(d_{1122}^{(1)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t)) + \\ &\quad + h(a_4 - a_3)p_{12}(t) + h(\zeta_2 - \zeta_1) \frac{\partial p_{12}}{\partial t} + h \left(d_{1122}^{(1)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t) \right) * p_{12}(t), \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned}
g_{1122}(t) &= (1-h)d_{1122}^{(1)}(t) + hd_{1122}^{(2)}(t) + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{11lm}^{(s)}(t) e_{lm}^y(Z^{22}) dy + \\
&+ \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{11lm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{22}) - a_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(W^{22}) - b_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{22}}{\partial t} \right) \right) dy = \\
&= (1-h)d_{1122}^{(1)}(t) + hd_{1122}^{(2)}(t) + hc_{12} \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) + \\
&+ h(a_2 - a_1)p_{12}(t) + h(b_2 - b_1) \frac{\partial p_{12}}{\partial t} + h \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{12}(t), \quad (3.112)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1212}(t) &= (1-h)d_{1212}^{(1)}(t) + hd_{1212}^{(2)}(t) + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{12lm}^{(s)}(t) e_{lm}^y(Z^{12}) dy + \\
&+ \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{12lm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{12}) - a_{12lm}^{(s)} e_{lm}^y(W^{12}) - b_{12lm}^{(s)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{12}}{\partial t} \right) \right) dy = \\
&= \frac{\eta_2(1-h)}{\eta_{12}} d_{1212}^{(1)}(t) + \frac{\eta_1 h}{\eta_{12}} d_{1212}^{(2)}(t) + h(a_6 - a_5)p_{13}(t) + \\
&+ h(\eta_2 - \eta_1) \frac{\partial p_{13}}{\partial t} + h \left(d_{1212}^{(1)}(t) - d_{1212}^{(2)}(t) \right) * p_{13}(t). \quad (3.113)
\end{aligned}$$

а) Наиболее простой вид компоненты $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$, $g_{1212}(t)$ принимают для слоистых сред, у которых первой фазой является ВУМ-I, а второй фазой — ВУМ-I или ВСЖ. Такие среды обладают нулевыми тензорами регулярных частей ядер релаксации $d^{(1)}(t)$ и $d^{(2)}(t)$, а функции $p_{1k}(t)$, являющиеся решениями обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с заданными начальными условиями, записываются в явном виде (см. п. 3.2.2). Далее, из (3.110)-(3.113) получаем

$$\begin{aligned}
g_{1111}(t) &= h(a_2 - a_1)p_{11}(t) + h(b_2 - b_1) \frac{\partial p_{11}}{\partial t} = \\
&= \frac{h(1-h)}{b_{12}^3} (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \exp \left(-\frac{a_{12}t}{b_{12}} \right), \\
g_{2222}(t) &= g_{2233}(t) = h(a_4 - a_3)p_{12}(t) + h(\zeta_2 - \zeta_1) \frac{\partial p_{12}}{\partial t} = \\
&= \frac{h(1-h)}{b_{12}^3} ((a_3 - a_4)b_{12} - (\zeta_1 - \zeta_2)a_{12})^2 \exp \left(-\frac{a_{12}t}{b_{12}} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1122}(t) &= h(a_2 - a_1)p_{12}(t) + h(b_2 - b_1)\frac{\partial p_{12}}{\partial t} = \\
&= \frac{h(1-h)}{b_{12}^3}(a_1b_2 - a_2b_1)((a_3 - a_4)b_{12} - (\zeta_1 - \zeta_2)a_{12}) \exp\left(-\frac{a_{12}t}{b_{12}}\right), \\
g_{1212}(t) &= h(a_6 - a_5)p_{13}(t) + h(\eta_2 - \eta_1)\frac{\partial p_{13}}{\partial t} = \\
&= \frac{h(1-h)}{\eta_{12}^3}(a_5\eta_2 - a_6\eta_1)^2 \exp\left(-\frac{a_{56}t}{\eta_{12}}\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ представляет собой произведение константы либо на экспоненту $\exp(-a_{12}t/b_{12})$, либо на экспоненту $\exp(-a_{56}t/\eta_{12})$, т.е. все ненулевые компоненты тензора $g(t)$ выражаются через 2 затухающие экспоненты.

б) Выпишем функции $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$ и $g_{1212}(t)$ для слоистых сред, у которых одна фаза состоит из ВУМ-I или ВСЖ, а другая фаза — из ВУМ-III. Меняя в случае необходимости нумерацию фаз, без ограничения общности считаем $d^{(1)}(t) = 0$, а $d^{(2)}(t) \neq 0$. Тогда, согласно результатам п. 3.3.2, функции $p_{1k}(t)$ имеют вид

$$p_{1k}(t) = \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(1k)} \exp(-\xi_m^{(1k)}t), \quad k = 1, 3; \quad p_{12}(t) = \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(12)} \exp(-\xi_m^{(11)}t),$$

где $\xi_1^{(1k)}, \dots, \xi_{N_2+1}^{(1k)}$ — корни уравнений (3.16) и (3.17) при $k = 1$ и $k = 3$ соответственно, а $w_1^{(1k)}, \dots, w_{N_2+1}^{(1k)}$ — решения систем уравнений (3.22), (3.23), (3.24) при $k = 1, k = 2, k = 3$ соответственно.

Теперь, используя (3.16) и (3.22), из (3.110) находим

$$\begin{aligned}
g_{1111}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(a_2 - a_1 - (b_2 - b_1)\xi_m^{(11)} \right) w_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)}t} + \\
&+ h \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \left[\frac{b_1}{b_{12}} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)}t} - \left(\sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)}t} \right) * \left(\sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)}t} \right) \right] = \\
&= h \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \left(\frac{b_1}{b_{12}} - \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(11)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)}t} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(a_2 - a_1 - (b_2 - b_1)\xi_m^{(11)} + \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)} t} = \\
& = \frac{h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(b_1 \xi_m^{(11)} - a_1 \right) w_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)} t}.
\end{aligned}$$

Аналогично, используя (3.16), (3.17), (3.23) и (3.24), из (3.111)-(3.113)

ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned}
g_{2222}(t) &= h \sum_{n=1}^{N_2} \left(k_2 + \frac{2}{3} - \left(k_2 - \frac{1}{3} \right) \left(c_{12} + \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(12)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} \right) \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
& +h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(a_4 - a_3 - (\zeta_2 - \zeta_1)\xi_m^{(11)} + \left(k_2 - \frac{1}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(11)} t} = \\
& = \frac{h(2k_2 + 1/3)}{k_2 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
& +h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(a_4 - a_3 - (\zeta_2 - \zeta_1)\xi_m^{(11)} + \frac{(k_2 - 1/3)(b_{12}\xi_m^{(11)} - a_{12})}{(1-h)(k_2 + 2/3)} \right) w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(11)} t}, \\
g_{1122}(t) &= h \sum_{n=1}^{N_2} \left(k_2 - \frac{1}{3} - \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \left(c_{12} + \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(12)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} \right) \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
& +h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(a_2 - a_1 - (b_2 - b_1)\xi_m^{(11)} + \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(11)} t} = \\
& = \frac{h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(b_1 \xi_m^{(11)} - a_1 \right) w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(11)} t}, \\
g_{1212}(t) &= \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \left(\frac{\eta_1}{\eta_{12}} - \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(13)}}{\xi_m^{(13)} - \gamma_n^{(2)}} \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
& +h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(a_6 - a_5 - (\eta_2 - \eta_1)\xi_m^{(13)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(13)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(13)} e^{-\xi_m^{(13)} t} = \\
& = \frac{h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(\eta_1 \xi_m^{(13)} - a_5 \right) w_m^{(13)} e^{-\xi_m^{(13)} t}.
\end{aligned}$$

Таким образом, если регулярная часть ядра сдвиговой релаксации для первой фазы равна нулю, а для второй фазы есть сумма N_2 затухающих

экспонент, то каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ является линейной комбинацией $3N_2 + 2$ затухающих экспонент

$$\exp\left(-\gamma_n^{(2)}t\right), \exp\left(-\xi_m^{(11)}t\right), \exp\left(-\xi_m^{(13)}t\right),$$

$$n = 1, \dots, N_2, \quad m = 1, \dots, N_2 + 1.$$

в) Выпишем функции $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$ и $g_{1212}(t)$ для слоистых сред, состоящих из двух разных ВУМ-III. Так как для таких сред $d^{(1)}(t) \neq 0$ и $d^{(2)}(t) \neq 0$, то (см. п. 3.2.2)

$$p_{1k}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(1k)} \exp(-\xi_m^{(1k)}t), \quad k = 1, 3,$$

$$p_{12}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(12)} \exp(-\xi_m^{(11)}t),$$

где $\xi_1^{(1k)}, \dots, \xi_{N_1+N_2+1}^{(1k)}$ — корни уравнений (3.31) и (3.32) при $k = 1$ и $k = 3$ соответственно, а $w_1^{(1k)}, \dots, w_{N_1+N_2+1}^{(1k)}$ — решения систем уравнений (3.35), (3.36), (3.37) при $k = 1, k = 2, k = 3$ соответственно.

Далее, из формул (3.111)-(3.113) получаем

$$\begin{aligned} g_{1111}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(a_2 - a_1 - (b_2 - b_1)\xi_m^{(11)} \right) w_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)}t} + \\ &+ h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s + 2/3) v_n^{(s)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(11)} e^{-\xi_m^{(11)}t}, \\ g_{2222}(t) &= \frac{(1-h)(2k_1 + 1/3)}{k_1 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_1} v_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)}t} + \frac{h(2k_2 + 1/3)}{k_2 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)}t} + \\ &+ h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\lambda_2 - \lambda_1 - (\zeta_2 - \zeta_1)\xi_m^{(11)} \right) w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(11)}t} + \\ &+ h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s - 1/3) v_n^{(s)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(11)}t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1122}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(a_2 - a_1 - (b_2 - b_1) \xi_m^{(11)} \right) w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(11)} t} + \\
&+ h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s + 2/3) v_n^{(s)}}{\xi_m^{(11)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(12)} e^{-\xi_m^{(11)} t}, \\
g_{1212}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\mu_2 - \mu_1 - (\eta_2 - \eta_1) \xi_m^{(13)} \right) w_m^{(13)} e^{-\xi_m^{(13)} t} + \\
&+ \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s v_n^{(s)}}{\xi_m^{(13)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(13)} e^{-\xi_m^{(13)} t}.
\end{aligned}$$

Следовательно, если регулярная часть ядра сдвиговой релаксации для первой фазы есть сумма N_1 затухающих экспонент, а для второй фазы — сумма N_2 затухающих экспонент, то каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ является линейной комбинацией $3N_2 + 2$ затухающих экспонент

Анализируя вид полученных выражений, заключаем, что каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ является линейной комбинацией $3N_1 + 3N_2 + 2$ затухающих экспонент

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\gamma_{n_1}^{(1)} t\right), \quad \exp\left(-\gamma_{n_2}^{(2)} t\right), \quad \exp\left(-\xi_m^{(11)} t\right), \quad \exp\left(-\xi_m^{(13)} t\right), \\
&n_s = 1, \dots, N_s \quad (s = 1, 2), \quad m = 1, \dots, N_1 + N_2 + 1.
\end{aligned}$$

2. Случай $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{b}^{(2)} \neq \mathbf{0}$ (первая фаза — УМ или ВУМ-II, вторая фаза — ВУМ-I, ВУМ-III или ВСЖ). По формулам (1.70) находим

$$\begin{aligned}
g_{1111}(t) &= (1 - h) d_{1111}^{(1)}(t) + h d_{1111}^{(2)}(t) - \int_{Y_2} b_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{11}}{\partial t} \right) + \\
&+ \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{11lm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{11}) + d_{11lm}^{(s)}(t) e_{lm}^y(Z^{11}) - a_{11lm}^{(s)} e_{lm}^y(W^{11}) \right) dy = \\
&= d_{1111}^{(1)}(t) + h(a_2 - a_1) p_{21}(t) + h b_2 \frac{\partial p_{21}}{\partial t} + h \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{21}(t), \quad (3.114) \\
g_{2222}(t) &= (1 - h) d_{1111}^{(1)}(t) + h d_{1111}^{(2)}(t) - \int_{Y_2} b_{22lm}^{(s)} e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{22}}{\partial t} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{22lm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{22}) + d_{22lm}^{(s)}(t)e_{lm}^y(Z^{22}) - a_{22lm}^{(s)}e_{lm}^y(W^{22}) \right) dy = \\
& = (1-h)d_{1111}^{(1)}(t) + hd_{1111}^{(2)}(t) + \frac{\zeta_2 h}{b_2} \left(d_{1122}^{(1)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t) \right) + \\
& + h(a_4 - a_3)p_{22}(t) + h\zeta_2 \frac{\partial p_{22}}{\partial t} + h \left(d_{1122}^{(1)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t) \right) * p_{22}(t), \quad (3.115)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1122}(t) & = (1-h)d_{1122}^{(1)}(t) + hd_{1122}^{(2)}(t) - \int_{Y_2} b_{11lm}^{(s)}e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{22}}{\partial t} \right) + \\
& + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{11lm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{22}) + d_{11lm}^{(s)}(t)e_{lm}^y(Z^{22}) - a_{11lm}^{(s)}e_{lm}^y(W^{22}) \right) dy = \\
& = (1-h)d_{1122}^{(1)}(t) + hd_{1122}^{(2)}(t) + \frac{\zeta_2 h}{b_2} \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) + \\
& + h(a_2 - a_1)p_{22}(t) + b_2 h \frac{\partial p_{22}}{\partial t} + h \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{22}(t), \quad (3.116)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1212}(t) & = (1-h)d_{1212}^{(1)}(t) + hd_{1212}^{(2)}(t) - \int_{Y_2} b_{12lm}^{(s)}e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{12}}{\partial t} \right) + \\
& + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{12lm}^{(s)}(t) * e_{lm}^y(W^{12}) + d_{12lm}^{(s)}(t)e_{lm}^y(Z^{12}) - a_{12lm}^{(s)}e_{lm}^y(W^{12}) \right) dy = \\
& = d_{1212}^{(1)}(t) + h(a_6 - a_5)p_{23}(t) + h(\eta_2 - \eta_1) \frac{\partial p_{23}}{\partial t} + \\
& + h \left(d_{1212}^{(1)}(t) - d_{1212}^{(2)}(t) \right) * p_{23}(t). \quad (3.117)
\end{aligned}$$

a) Выпишем компоненты $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$, $g_{1212}(t)$ для слоистых сред, у которых первой фазой является упругий материал, а второй фазой — ВУМ-I или ВСЖ. Такие среды обладают нулевыми тензорами регулярных частей ядер релаксации $d^{(1)}(t)$ и $d^{(2)}(t)$, а функции $p_{2k}(t)$ выписываются в явном виде (см. п. 3.2.2). С учетом этого из формул (3.114)-(3.117) находим

$$\begin{aligned}
g_{1111}(t) & = \frac{a_1^2 h}{b_2(1-h)^2} \exp \left(-\frac{a_{12}t}{b_2(1-h)} \right), \\
g_{2222}(t) & = \frac{h}{b_2} \left(a_3 - a_4 + \frac{a_{12}\zeta_2}{b_2(1-h)} \right) \exp \left(-\frac{a_{12}t}{b_2(1-h)} \right),
\end{aligned}$$

$$g_{1122}(t) = \frac{a_1 h}{b_2(1-h)} \left(a_3 - a_4 + \frac{a_{12} \zeta_2}{b_2(1-h)} \right) \exp \left(-\frac{a_{12} t}{b_2(1-h)} \right),$$

$$g_{1212}(t) = \frac{a_5^2 h}{\eta_2(1-h)^2} \exp \left(-\frac{a_{56} t}{\eta_2(1-h)} \right).$$

Из полученных выражений следует, что каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ представляет собой произведение константы либо на экспоненту $\exp(-a_{12}t/(b_2(1-h)))$, либо на экспоненту $\exp(-a_{56}t/\eta_2(1-h))$, т.е. все ненулевые компоненты тензора $g(t)$ выражаются через 2 затухающие экспоненты.

б) Выясним вид функций $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$ и $g_{1212}(t)$ для сред, первая фаза которых состоит из УМ, а вторая — из ВУМ-III. Для таких сред $d^{(1)}(t) = 0$, $d^{(2)}(t) \neq 0$ и, согласно результатам п. 3.2.2,

$$p_{2k}(t) = \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(2k)} \exp(-\xi_m^{(2k)} t), \quad k = 1, 3, \quad p_{22}(t) = \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(22)} \exp(-\xi_m^{(21)} t),$$

где $\xi_1^{(2k)}, \dots, \xi_{N_2+1}^{(2k)}$ — корни уравнений (3.47) и (3.48) при $k = 1$ и $k = 3$ соответственно, а $w_1^{(2k)}, \dots, w_{N_2+1}^{(2k)}$ — решения систем уравнений (3.54), (3.55), (3.56) при $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ соответственно.

Используя (3.47), (3.54), (3.48), (3.55) и (3.56), из (3.114)-(3.117) получаем

$$g_{1111}(t) = -h \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \left(\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(21)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} +$$

$$+ h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(a_2 - a_1 - b_2 \xi_m^{(21)} + \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(21)} e^{-\xi_m^{(21)} t} =$$

$$= -\frac{a_1 h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(21)} e^{-\xi_m^{(21)} t},$$

$$g_{2222}(t) = h \sum_{n=1}^{N_2} \left(k_2 + \frac{2}{3} - \left(k_2 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\zeta_2}{b_2} + \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(22)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} \right) \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} +$$

$$+ h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(\lambda_2 - \lambda_1 - \zeta_2 \xi_m^{(21)} + \left(k_2 - \frac{1}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h(2k_2 + 1/3)}{k_2 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
&+ h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(\lambda_2 - \lambda_1 - \zeta_2 \xi_m^{(21)} + \frac{(k_2 - 1/3)(b_2 \xi_m^{(21)}(1-h) - a_{12})}{(1-h)(k_2 + 2/3)} \right) w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t}, \\
g_{1122}(t) &= h \sum_{n=1}^{N_2} \left(k_2 - \frac{1}{3} - \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\zeta_2}{b_2} + \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(22)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} \right) \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
&+ h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(a_2 - a_1 - b_2 \xi_m^{(21)} + \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t} = \\
&= -\frac{a_1 h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t}, \\
g_{1212}(t) &= -\frac{h}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \left(\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(23)}}{\xi_m^{(23)} - \gamma_n^{(2)}} \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
&+ h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(\mu_2 - \mu_1 - \eta_2 \xi_m^{(23)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(23)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(23)} e^{-\xi_m^{(23)} t} = \\
&= -\frac{\mu_1 h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(23)} e^{-\xi_m^{(23)} t}.
\end{aligned}$$

Таким образом, каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ является линейной комбинацией $3N_2 + 2$ затухающих экспонент

$$\exp\left(-\gamma_n^{(2)} t\right), \quad \exp\left(-\xi_m^{(21)} t\right), \quad \exp\left(-\xi_m^{(23)} t\right),$$

$$n = 1, \dots, N_2, \quad m = 1, \dots, N_2 + 1.$$

в) Выясним вид функций $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$ и $g_{1212}(t)$ для сред, первая фаза которых состоит из ВУМ-II, а вторая — из ВУМ-I или ВСЖ. Для таких сред $d^{(1)}(t) \neq 0$, $d^{(2)}(t) = 0$ и

$$p_{2k}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+1} w_m^{(2k)} \exp(-\xi_m^{(2k)} t), \quad k = 1, 3, \quad p_{22}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+1} w_m^{(22)} \exp(-\xi_m^{(21)} t),$$

где $\xi_1^{(2k)}, \dots, \xi_{N_2+1}^{(2k)}$ — корни уравнений (3.70) и (3.71) при $k = 1$ и $k = 3$ соответственно, а $w_1^{(2k)}, \dots, w_{N_2+1}^{(2k)}$ — решения систем уравнений (3.63), (3.64), (3.65) при $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ соответственно.

Используя (3.61)-(3.65), из (3.114)-(3.117) находим

$$g_{1111}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+1} \left(a_2 - b_2 \xi_m^{(21)} \right) w_m^{(21)} e^{-\xi_m^{(21)} t},$$

$$g_{2222}(t) = \frac{(1-h)(2k_1+1/3)}{k_1+2/3} \sum_{n=1}^{N_1} v_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} t} +$$

$$+ h \sum_{m=1}^{N_2+1} \left(a_4 - a_3 - \zeta_2 \xi_m^{(21)} - \frac{(k_1-1/3)(b_2 \xi_m^{(21)}(1-h) - a_{12})}{h(k_1+2/3)} \right) w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t},$$

$$g_{1122}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+1} \left(a_2 - b_2 \xi_m^{(21)} \right) w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t},$$

$$g_{1212}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+1} \left(a_6 - \eta_2 \xi_m^{(23)} \right) w_m^{(23)} e^{-\xi_m^{(23)} t}.$$

Таким образом, каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ является линейной комбинацией $3N_1 + 2$ затухающих экспонент

$$\exp\left(-\gamma_n^{(1)} t\right), \quad \exp\left(-\xi_m^{(21)} t\right), \quad \exp\left(-\xi_m^{(23)} t\right),$$

$$n = 1, \dots, N_1, \quad m = 1, \dots, N_1 + 1.$$

г) Остается выяснить вид функций $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$ и $g_{1212}(t)$ для сред, первая фаза которых состоит из ВУМ-II, а вторая — из ВУМ-III. Для этих сред ненулевыми являются оба тензора $d^{(1)}(t)$ и $d^{(2)}(t)$ и, согласно результатам п. 3.2.2,

$$p_{2k}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(2k)} \exp(-\xi_m^{(2k)} t), \quad k = 1, 3,$$

$$p_{22}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} w_m^{(22)} \exp(-\xi_m^{(21)} t),$$

где $\xi_1^{(2k)}, \dots, \xi_{N_1+N_2+1}^{(2k)}$ — корни уравнений (3.70) и (3.71) при $k = 1$ и $k = 3$ соответственно, а $w_1^{(2k)}, \dots, w_{N_1+N_2+1}^{(2k)}$ — решения систем уравнений (3.73), (3.74), (3.75) при $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ соответственно.

Из формул (3.114)-(3.117) получаем

$$\begin{aligned}
g_{1111}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(a_2 - a_1 - b_2 \xi_m^{(21)} \right) w_m^{(21)} e^{-\xi_m^{(21)} t} + \\
&+ h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s + 2/3) v_n^{(s)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(21)} e^{-\xi_m^{(21)} t}, \\
g_{2222}(t) &= \frac{(1-h)(2k_1 + 1/3)}{k_1 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_1} v_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} t} + \frac{h(2k_2 + 1/3)}{k_2 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
&+ h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\lambda_2 - \lambda_1 - \zeta_2 \xi_m^{(21)} \right) w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t} + \\
&+ h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s - 1/3) v_n^{(s)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t}, \\
g_{1122}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(a_2 - a_1 - b_2 \xi_m^{(22)} \right) w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t} + \\
&+ h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s + 2/3) v_n^{(s)}}{\xi_m^{(21)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(22)} e^{-\xi_m^{(21)} t}, \\
g_{1212}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\mu_2 - \mu_1 - \eta_2 \xi_m^{(23)} \right) w_m^{(23)} e^{-\xi_m^{(23)} t} + \\
&+ \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s v_n^{(s)}}{\xi_m^{(23)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(23)} e^{-\xi_m^{(23)} t}.
\end{aligned}$$

Анализируя вид полученных выражений, заключаем, что каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ является линейной комбинацией $3N_1 + 3N_2 + 2$ затухающих экспонент

$$\exp\left(-\gamma_{n_1}^{(1)} t\right), \quad \exp\left(-\gamma_{n_2}^{(2)} t\right), \quad \exp\left(-\xi_m^{(21)} t\right), \quad \exp\left(-\xi_m^{(23)} t\right),$$

$$n_s = 1, \dots, N_s \quad (s = 1, 2), \quad m = 1, \dots, N_1 + N_2 + 1.$$

3. Случай $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{0}$ (одна фаза — УМ или ВУМ-II, другая фаза — ВУМ-II). По формулам (1.75) находим

$$g_{1111}(t) = (1-h)d_{1111}^{(1)}(t) + h d_{1111}^{(2)}(t) + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{11lm}^{(s)}(t) e_{lm}(Z^{11}) dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{11lm}^{(s)}(t) * e_{lm}(W^{11}) - a_{11lm}^{(s)} e_{lm}(W^{11}) \right) dy = \\
& = (1 - h + hc_{31})d_{1111}^{(1)}(t) + h(1 - c_{31})d_{1111}^{(2)}(t) + \\
& + h(a_2 - a_1)p_{31}(t) + h \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{31}(t) = \\
& = \frac{a_2(1 - h)}{a_{12}} d_{1111}^{(1)}(t) + \frac{a_1 h}{a_{12}} d_{1111}^{(2)}(t) + h(a_2 - a_1)p_{31}(t) + \\
& \quad + h \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{31}(t), \tag{3.118}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{2222}(t) & = (1 - h)d_{1111}^{(1)}(t) + hd_{1111}^{(2)}(t) + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{22lm}^{(s)}(t) e_{lm}(Z^{22}) dy + \\
& + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{22lm}^{(s)}(t) * e_{lm}(W^{22}) - a_{22lm}^{(s)} e_{lm}(W^{22}) \right) dy = \\
& = (1 - h)d_{1111}^{(1)}(t) + hd_{1111}^{(2)}(t) + hc_{32}(d_{1122}^{(1)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t)) + \\
& + h(\lambda_2 - \lambda_1)p_{32}(t) + h \left(d_{1122}^{(1)}(t) - d_{1122}^{(2)}(t) \right) * p_{32}(t), \tag{3.119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1122}(t) & = (1 - h)d_{1122}^{(1)}(t) + hd_{1122}^{(2)}(t) + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{11lm}^{(s)}(t) e_{lm}(Z^{22}) dy + \\
& + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{11lm}^{(s)}(t) * e_{lm}(W^{22}) - a_{11lm}^{(s)} e_{lm}(W^{22}) \right) dy = \\
& = (1 - h)d_{1122}^{(1)}(t) + hd_{1122}^{(2)}(t) + hc_{32}(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t)) + \\
& + h(a_2 - a_1)p_{32}(t) + h \left(d_{1111}^{(1)}(t) - d_{1111}^{(2)}(t) \right) * p_{32}(t), \tag{3.120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1212}(t) & = (1 - h)d_{1212}^{(1)}(t) + hd_{1212}^{(2)}(t) + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} d_{12lm}^{(s)}(t) e_{lm}(Z^{12}) dy + \\
& + \sum_{s=1}^2 \int_{Y_s} \left(d_{12lm}^{(s)}(t) * e_{lm}(W^{12}) - a_{12lm}^{(s)} e_{lm}(W^{12}) \right) dy = \\
& = (1 - h + hc_{33})d_{1212}^{(1)}(t) + h(1 - c_{33})d_{1212}^{(2)}(t) + \\
& + h(\mu_2 - \mu_1)p_{33}(t) + h \left(d_{1212}^{(1)}(t) - d_{1212}^{(2)}(t) \right) * p_{33}(t) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_2(1-h)}{\mu_{12}} d_{1212}^{(1)}(t) + \frac{\mu_1 h}{\mu_{12}} d_{1212}^{(2)}(t) + \\
&+ h(\mu_2 - \mu_1) p_{33}(t) + h \left(d_{1212}^{(1)}(t) - d_{1212}^{(2)}(t) \right) * p_{33}(t). \quad (3.121)
\end{aligned}$$

а) Выпишем функции $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$ и $g_{1212}(t)$ для слоистых сред, у которых одна фаза состоит из УМ, а другая фаза — из ВУМ-II. Меняя в случае необходимости нумерацию фаз, без ограничения общности считаем $d^{(1)}(t) = 0$, а $d^{(2)}(t) \neq 0$. Тогда, согласно результатам п. 3.3.2, функции $p_{3k}(t)$ имеют вид

$$p_{3k}(t) = \sum_{m=1}^{N_2} w_m^{(3k)} \exp(-\xi_m^{(3k)} t), \quad k = 1, 3; \quad p_{32}(t) = \sum_{m=1}^{N_2} w_m^{(32)} \exp(-\xi_m^{(31)} t),$$

где $\xi_1^{(3k)}, \dots, \xi_{N_2+1}^{(3k)}$ — корни уравнений (3.84) и (3.85) при $k = 1$ и $k = 3$ соответственно, а $w_1^{(3k)}, \dots, w_{N_2+1}^{(3k)}$ — решения систем уравнений (3.87), (3.88), (3.89) при $k = 1, k = 2, k = 3$ соответственно.

Используя (3.84) и (3.87), по формуле (3.118) находим

$$\begin{aligned}
g_{1111}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_2+1} (a_2 - a_1) w_m^{(31)} e^{-\xi_m^{(31)} t} - \\
&- h \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \left(\sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} \right) * \left(\sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(31)} e^{-\xi_m^{(31)} t} \right) = \\
&= h \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \left(\frac{a_1}{a_{12}} - \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(31)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
&+ h \sum_{m=1}^{N_2} \left(a_2 - a_1 + \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(31)} e^{-\xi_m^{(31)} t} = \\
&= -\frac{a_1 h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2} w_m^{(31)} e^{-\xi_m^{(31)} t}.
\end{aligned}$$

Аналогично, используя (3.84), (3.85), (3.88) и (3.89), по формулам (3.119)-(3.121) находим

$$g_{2222}(t) = h \sum_{n=1}^{N_2} \left(k_2 + \frac{2}{3} - \left(k_2 - \frac{1}{3} \right) \left(c_{32} + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{w_m^{(32)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} \right) \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} +$$

$$\begin{aligned}
& +h \sum_{m=1}^{N_2} \left(\lambda_2 - \lambda_1 + \left(k_2 - \frac{1}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(32)} e^{-\xi_m^{(31)} t} = \\
& = \frac{h(2k_2 + 1/3)}{k_2 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
& +h \sum_{m=1}^{N_2} \left(\lambda_2 - \lambda_1 - \frac{a_{12}(k_2 - 1/3)}{(1-h)(k_2 + 2/3)} \right) w_m^{(32)} e^{-\xi_m^{(31)} t} = \\
& = \frac{h(2k_2 + 1/3)}{k_2 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} - \\
& - \frac{h}{a_1(1-h)} \sum_{m=1}^{N_2} \left((1-h)(\lambda_2 - \lambda_1) - \frac{a_{12}(k_2 - 1/3)}{k_2 + 2/3} \right)^2 w_m^{(31)} e^{-\xi_m^{(31)} t}, \\
g_{1122}(t) & = h \sum_{n=1}^{N_2} \left(k_2 - \frac{1}{3} - \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \left(c_{32} + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{w_m^{(32)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} \right) \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
& +h \sum_{m=1}^{N_2} \left(a_2 - a_1 + \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(32)} e^{-\xi_m^{(31)} t} = \\
& = -\frac{a_1 h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2} w_m^{(32)} e^{-\xi_m^{(31)} t}, \\
g_{1212}(t) & = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_{12}} - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{w_m^{(33)}}{\xi_m^{(33)} - \gamma_n^{(2)}} \right) v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\
& +h \sum_{m=1}^{N_2} \left(\mu_2 - \mu_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi_m^{(33)} - \gamma_n^{(2)}} \right) w_m^{(33)} e^{-\xi_m^{(33)} t} = \\
& = -\frac{\mu_1 h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2} w_m^{(33)} e^{-\xi_m^{(33)} t}.
\end{aligned}$$

Таким образом, каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ является линейной комбинацией $3N_2$ затухающих экспонент

$$\exp\left(-\gamma_n^{(2)} t\right), \exp\left(-\xi_m^{(31)} t\right), \exp\left(-\xi_m^{(33)} t\right),$$

$$n = 1, \dots, N_2, \quad m = 1, \dots, N_2.$$

б) Остается выписать компоненты $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$ и $g_{1212}(t)$ для сред, состоящих из двух разных ВУМ-II. Для этих сред ненулевыми являются оба тензора $d^{(1)}(t)$ и $d^{(2)}(t)$, а функции $p_{3k}(t)$ имеют вид

$$p_{3k}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2} w_m^{(3k)} \exp(-\xi_m^{(3k)} t), \quad k = 1, 3,$$

$$p_{32}(t) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2} w_m^{(32)} \exp(-\xi_m^{(31)} t),$$

где $\xi_1^{(3k)}, \dots, \xi_{N_1+N_2}^{(3k)}$ — корни уравнений (3.70) и (3.71) при $k = 1$ и $k = 3$ соответственно, а $w_1^{(3k)}, \dots, w_{N_1+N_2}^{(3k)}$ — решения систем уравнений (3.95), (3.96), (3.97) при $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ соответственно.

По формулам (3.118)-(3.121) находим

$$\begin{aligned} g_{1111}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \left(a_2 - a_1 + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s + 2/3) v_n^{(s)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(31)} e^{-\xi_m^{(31)} t}, \\ g_{2222}(t) &= \frac{(1-h)(2k_1 + 1/3)}{k_1 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_1} v_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} t} + \frac{h(2k_2 + 1/3)}{k_2 + 2/3} \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} t} + \\ &+ h \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \left(\lambda_2 - \lambda_1 + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s - 1/3) v_n^{(s)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(32)} e^{-\xi_m^{(31)} t}, \\ g_{1122}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \left(a_2 - a_1 + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s + 2/3) v_n^{(s)}}{\xi_m^{(31)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(32)} e^{-\xi_m^{(31)} t}, \\ g_{1212}(t) &= h \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \left(\mu_2 - \mu_1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s v_n^{(s)}}{\xi_m^{(33)} - \gamma_n^{(s)}} \right) w_m^{(33)} e^{-\xi_m^{(33)} t}. \end{aligned}$$

Таким образом, каждый ненулевой компонент тензора $g(t)$ является линейной комбинацией $3N_1 + 3N_2$ затухающих экспонент

$$\exp(-\gamma_{n_1}^{(1)} t), \quad \exp(-\gamma_{n_2}^{(2)} t), \quad \exp(-\xi_m^{(21)} t), \quad \exp(-\xi_m^{(23)} t),$$

$$n_s = 1, \dots, N_s \quad (s = 1, 2), \quad m = 1, \dots, N_1 + N_2.$$

Анализ выражений для компонентов $g_{1111}(t)$, $g_{2222}(t)$, $g_{1122}(t)$, $g_{1212}(t)$ и $g_{2323}(t)$ тензора $g(t)$ показывает, что для всех слоистых сред с диссипацией,

рассматриваемых в данной главе, их можно записать в следующем общем виде:

$$g_{1111}(t) = \sum_{m=1}^M hc_m^{(1)} w_m^{(1)} e^{-\xi_m t}, \quad g_{1122}(t) = \sum_{m=1}^M hc_m^{(1)} w_m^{(2)} e^{-\xi_m t},$$

$$g_{2222}(t) = \sum_{m=1}^M hc_m^{(2)} w_m^{(2)} e^{-\xi_m t} + \sum_{s=1}^2 \frac{R_s |Y_s| (2k_s + 1/3)}{k_s + 2/3} \sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} e^{-\gamma_n^{(s)} t},$$

$$g_{1212}(t) = \sum_{m=1}^M hc_m^{(3)} w_m^{(3)} e^{-\tau_m t}, \quad g_{2323}(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 R_s |Y_s| \sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} e^{-\gamma_n^{(s)} t},$$

где $|Y_1| = 1 - h$, $|Y_2| = h$,

$$R_s = \begin{cases} 1, & \text{если } d^{(s)}(t) \neq 0 \text{ (} s\text{-я фаза — ВУМ-II или ВУМ-III),} \\ 0, & \text{если } d^{(s)}(t) = 0 \text{ (} s\text{-я фаза — УМ, ВУМ-I или ВСЖ),} \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} R_1 N_1 + R_2 N_2 + 1, & \text{если } b^{(1)} + b^{(2)} \neq 0, \\ R_1 N_1 + R_2 N_2, & \text{если } b^{(1)} + b^{(2)} = 0. \end{cases}$$

$$c_m^{(1)} = a_2 - a_1 - (b_2 - b_1) \xi_m + \sum_{s=1}^2 R_s \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s + 2/3) v_n^{(s)}}{\xi_m - \gamma_n^{(s)}},$$

$$c_m^{(2)} = a_4 - a_3 - (\zeta_2 - \zeta_1) \xi_m + \sum_{s=1}^2 R_s \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s - 1/3) v_n^{(s)}}{\xi_m - \gamma_n^{(s)}},$$

$$c_m^{(3)} = a_6 - a_5 - (\eta_2 - \eta_1) \tau_m + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 R_s \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s v_n^{(s)}}{\tau_m - \gamma_n^{(s)}}.$$

Здесь $a_s = \lambda_s + 2\mu_s$, $a_{s+2} = \lambda_s$, $a_{s+4} = \mu_s$, если s -я фаза состоит из УМ или ВУМ; $a_s = a_{s+2} = \gamma$, $a_{s+4} = 0$, если s -я фаза состоит из ВСЖ; $b_s = \zeta_s + 2\eta_s$, $s = 1, 2$; ξ_1, \dots, ξ_M и τ_1, \dots, τ_M — упорядоченные по возрастанию корни уравнений

$$b_{12}\xi - a_{12} = \sum_{s=1}^2 R_s (k_s + 2/3) |Y_{3-s}| \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\xi - \gamma_n^{(s)}} \quad (3.122)$$

и

$$\eta_{12}\tau - a_{56} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 R_s |Y_{3-s}| \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\xi - \gamma_n^{(s)}} \quad (3.123)$$

соответственно; $w_1^{(j)}, \dots, w_M^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, — решения трех систем M линейных уравнений. Если $b^{(1)} + b^{(2)} \neq 0$, т.е. если хотя бы одна фаза слоистой среды — ВУМ-I, ВСЖ или ВУМ-III, то эти системы уравнений имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m - \gamma_n^{(1)}} + \frac{b_2(1-h)}{b_{12}h} \right) = 0, \quad n = 1, \dots, N_1, \\ R_2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m - \gamma_n^{(2)}} - \frac{b_1}{b_{12}} \right) = 0, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^M w_m^{(1)} = \frac{1-h}{b_{12}^2} (b_1 a_2 - b_2 a_1), \end{array} \right. \quad (3.124)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(2)}}{\xi_m - \gamma_n^{(1)}} - \frac{1-h}{b_{12}} (\zeta_1 - \zeta_2) - \frac{(1-h)(k_1 - 1/3)}{h(k_1 + 2/3)} \right) = 0, \\ \hspace{25em} n = 1, \dots, N_1, \\ R_2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(2)}}{\xi_m - \gamma_n^{(2)}} - \frac{1-h}{b_{12}} (\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3} \right) = 0, \\ \hspace{25em} n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^M w_m^{(2)} = \frac{1-h}{b_{12}} \left(a_4 - a_3 - \frac{(\zeta_2 - \zeta_1) a_{12}}{b_{12}} \right), \end{array} \right. \quad (3.125)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(3)}}{\tau_m - \gamma_n^{(1)}} + \frac{\eta_2(1-h)}{\eta_{12}h} \right) = 0, \quad n = 1, \dots, N_1, \\ R_2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(3)}}{\tau_m - \gamma_n^{(2)}} - \frac{\eta_1}{\eta_{12}} \right) = 0, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ \sum_{m=1}^M w_m^{(3)} = \frac{1-h}{\eta_{12}^2} (\eta_1 a_6 - \eta_2 a_5). \end{array} \right. \quad (3.126)$$

Если же $b^{(1)} + b^{(2)} = 0$, т.е. если фазами слоистой среды являются УМ и ВУМ-II или два разных ВУМ-II, то указанные системы имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m - \gamma_n^{(1)}} + \frac{a_2(1-h)}{a_{12}h} \right) = 0, \quad n = 1, \dots, N_1, \\ R_2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m - \gamma_n^{(2)}} - \frac{a_1}{a_{12}} \right) = 0, \quad n = 1, \dots, N_2, \end{array} \right. \quad (3.127)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(2)}}{\xi_m - \gamma_n^{(1)}} - \frac{1-h}{a_{12}}(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{(1-h)(k_1 - 1/3)}{h(k_1 + 2/3)} \right) = 0, \\ R_2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(2)}}{\xi_m - \gamma_n^{(2)}} - \frac{1-h}{a_{12}}(\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3} \right) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n = 1, \dots, N_1, \\ n = 1, \dots, N_2, \end{array} \quad (3.128)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(3)}}{\tau_m - \gamma_n^{(1)}} + \frac{\mu_2(1-h)}{\mu_{12}h} \right) = 0, \\ R_2 \left(\sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(3)}}{\tau_m - \gamma_n^{(2)}} - \frac{\mu_1}{\mu_{12}} \right) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n = 1, \dots, N_1, \\ n = 1, \dots, N_2. \end{array} \quad (3.129)$$

Заметим, что для слоистых сред с диссипацией, обе фазы которых обладают нулевыми тензорами $d^{(1)}(t)$ и $d^{(2)}(t)$, уравнения (3.122) и (3.123) являются линейными, следовательно, их корни выписываются в явном виде. С учетом этого выражения для $c_m^{(1)}$, $c_m^{(2)}$, $c_m^{(3)}$ принимают следующий вид:

$$c_m^{(1)} = \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{b_{12}}, \quad c_m^{(3)} = \frac{\eta_1 a_6 - \eta_2 a_5}{\eta_{12}},$$

$$c_m^{(2)} = \frac{1}{b_{12}}((a_4 - a_3)b_{12} - (\zeta_2 - \zeta_1)a_{12}).$$

Для слоистых сред, имеющих хотя бы одну фазу с нулевым тензором регулярных частей ядер релаксации, выражения для $c_m^{(1)}$, $c_m^{(2)}$, $c_m^{(3)}$ также можно записать в более наглядном виде: при $d^{(1)}(t) = 0$, $d^{(2)}(t) \neq 0$ — в виде

$$c_m^{(1)} = \frac{b_1 \xi_m - a_1}{1-h}, \quad c_m^{(3)} = \frac{\eta_1 \tau_m - a_5}{1-h},$$

$$c_m^{(2)} = a_4 - a_3 - (\zeta_2 - \zeta_1)\xi_m + \frac{(k_2 - 1/3)(b_{12}\xi_m - a_{12})}{(1-h)(k_2 + 2/3)},$$

а при $d^{(1)}(t) \neq 0$, $d^{(2)}(t) = 0$ — в виде

$$c_m^{(1)} = \frac{a_2 - b_2 \xi_m}{h}, \quad c_m^{(3)} = \frac{a_6 - \eta_2 \tau_m}{h},$$

$$c_m^{(2)} = a_4 - a_3 - (\zeta_2 - \zeta_1)\xi_m - \frac{(k_1 - 1/3)(b_{12}\xi_m - a_{12})}{h(k_1 + 2/3)}.$$

Спектральный анализ одномерных собственных колебаний двухфазных слоистых сред с диссипацией

Целью данной главы является исследование спектров одномерных собственных колебаний двухфазных слоистых и соответствующих им усредненных сред, а также сравнение спектральных свойств слоистых сред и их отдельных фаз. При этом, как и в главе 3, мы предполагаем, что одна фаза состоит из изотропного упругого или вязкоупругого материала (ВУМ-I, ВУМ-II или ВУМ-III), а другая — из изотропного вязкоупругого материала (ВУМ-I, ВУМ-II или ВУМ-III) или вязкой сжимаемой жидкости.

4.1. Спектр одномерных собственных колебаний изотропного вязкоупругого материала

Согласно введенному выше предположению, почти все изучаемые нами слоистые среды содержат одну или две изотропные вязкоупругие фазы. Поэтому ближайшей нашей целью является исследование спектра одномерных собственных колебаний изотропного вязкоупругого материала (ВУМ-I, ВУМ-II или ВУМ-III), занимающего неограниченную полосу $0 < x_1 < L$ и характеризующегося плотностью ρ и определяющими соотношениями

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}^{(0)} e_{kh}(u) + b_{ijkh}^{(0)} e_{kh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - R_0 d_{ijkh}^{(0)}(x, t) * e_{kh}(u), \quad (4.1)$$

где $R_0 = 0$ для ВУМ-I, $R_0 = 1$ для ВУМ-II и ВУМ-III,

$$a_{ijkh}^{(0)} = \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu_0 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}),$$

$$b_{ijkh}^{(0)} = \zeta_0 \delta_{ij} \delta_{kh} + \eta_0 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \quad \zeta_0 = \kappa_0 - \frac{2}{3} \eta_0,$$

$$d_{ijkh}^{(0)}(t) = \sum_{n=1}^N v_n e^{-\gamma_n t} \left(\left(k_0 - \frac{1}{3} \right) \delta_{ij} \delta_{kh} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \right).$$

Здесь λ_0 и μ_0 — параметры Ламе; η_0 и κ_0 — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости; $\zeta_0 = \eta_0 = 0$ для ВУМ-II. Предполагается также, что для ВУМ-II и ВУМ-III выполнены следующие условия:

$$k_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad v_n, \gamma_n \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma_i < \gamma_j \text{ при } i < j,$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{v_n}{\gamma_n} \leq \begin{cases} \min \left\{ 2\mu_0, \frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{3k_0} \right\}, & \text{если } k_0 > 0, \\ 2\mu_0, & \text{если } k_0 = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Мы будем рассматривать одномерные колебания, распространяющиеся в вязкоупругом материале вдоль оси Ox_1 . Таким колебаниям соответствует вектор перемещений

$$u(x, t) = (u_1(x_1, t), 0, 0).$$

Математическая модель, описывающая колебания вдоль оси Ox_1 вязкоупругого материала с определяющими соотношениями (4.1), имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial t} - R_0 \left(\sum_{n=1}^N q_n e^{-\gamma_n t} \right) * \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} +$$

$$+ f(x_1, t), \quad x_1 \in (0, L), \quad t > 0, \quad (4.3)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x_1, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (0, L),$$

где введены следующие обозначения:

$$u(x_1, t) = u_1(x_1, t), \quad A = \lambda_0 + 2\mu_0, \quad B = \zeta_0 + 2\eta_0,$$

$$q_n = \left(k_0 + \frac{2}{3} \right) v_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Следует отметить, что в задаче (4.3) $A > 0$; $B = 0$ для ВУМ-II; $B > 0$ для ВУМ-I и ВУМ-III; $q_n > 0$ ($n = 1, \dots, N$) для ВУМ-II и ВУМ-III. Кроме

того, в силу условия (4.2), для ВУМ-II и ВУМ-III

$$A - \sum_{m=1}^N \frac{q_n}{\gamma_n} > 0. \quad (4.4)$$

Применяя преобразование Лапласа $u(x_1, t) \rightarrow u(x_1, \lambda) = u_\lambda(x_1)$, запишем задачу (4.3) при $f(x_1, t) \equiv 0$ в изображениях Лапласа:

$$\rho\lambda^2 u_\lambda = \left(A + B\lambda - R_0 \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\lambda + \gamma_n} \right) \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x_1^2}, \quad u_\lambda(0) = u_\lambda(L) = 0. \quad (4.5)$$

В дальнейшем λ рассматривается в качестве спектрального параметра, а под спектром одномерных собственных колебаний, распространяющихся в вязкоупругом материале вдоль оси Ox_1 , понимается спектр S_0 задачи (4.5), т.е. множество всех комплексных значений λ , при которых эта задача имеет нетривиальные решения $u_\lambda(x_1)$: $S_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : u_\lambda(x_1) \neq 0\}$. При этом множество всех положительных мнимых частей точек спектра S_0 представляет собой спектр F_0 собственных частот одномерных колебаний вязкоупругого материала вдоль оси Ox_1 , т.е. $F_0 = \{\omega : \omega = \text{Im } \lambda > 0, \lambda \in S_0\}$. Если спектр S_0 содержит конечное (бесконечное) число вещественных точек, то F_0 — конечное (соответственно бесконечное) множество. В частности, в случае полностью вещественного спектра S_0 множество F_0 — пустое.

Чтобы найти элементы множества S_0 , будем искать решение $u_\lambda(x_1)$ задачи (4.5) в виде разложения в ряд Фурье по x_1 :

$$u_\lambda(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{\lambda k} \sin \frac{\pi k x_1}{L}. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.5), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda^2 + C_k \left(A + B\lambda - R_0 \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\lambda + \gamma_n} \right) \right) u_{\lambda k} \sin \frac{\pi k x_1}{L} = 0,$$

где введено обозначение

$$C_k = \frac{\pi^2 k^2}{\rho L^2}. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что для ВУМ-I ($R_0 = 0$) спектр S_0 представляет собой объединение корней квадратных уравнений

$$\lambda^2 + BC_k\lambda + AC_k = 0 \quad (4.8)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, а для ВУМ-II и ВУМ-III ($R_0 = 1$) — объединение корней дробно-рациональных уравнений

$$\lambda^2 + BC_k\lambda + AC_k = \sum_{n=1}^N \frac{C_k q_n}{\lambda + \gamma_n} \quad (4.9)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$.

Перейдем к изучению структуры множества S_0 и рассмотрим по отдельности четыре случая: 1) $R_0 = 0$, $B > 0$; 2) $R_0 = 1$, $B = 0$, $N = 1$; 3) $R_0 = 1$, $B > 0$, $N = 1$; 4) $R_0 = 1$, $B \geq 0$, $N > 1$. Первый случай соответствует ВУМ-I; второй и четвертый при $B = 0$ — ВУМ-II; третий и четвертый при $B > 0$ — ВУМ-III.

1) Случай $R_0 = 0$, $B > 0$. Чтобы описать элементы множества S_0 для ВУМ-I, прежде всего выпишем корни квадратных уравнений (4.8):

$$\lambda_{1k,2k} = \frac{BC_k}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A}{B^2 C_k}} \right).$$

Теперь введем обозначение

$$k_1 = \min \left\{ k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : k < \frac{2L}{\pi B} \sqrt{\rho A} \right\}$$

и сформулируем следующую теорему, описывающую структуру спектра S_0 для ВУМ-I.

Теорема 11. *Если $R_0 = 0$, $B > 0$, то спектр S_0 задачи (4.5) представим в виде*

$$S = \{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty}, \quad (4.10)$$

где

$$\lambda_{1k,2k} = \frac{\pi^2 k^2 B}{2\rho L^2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho L^2 A}{\pi^2 k^2 B^2}} \right).$$

При этом, если $k_1 = 0$, то $\lambda_{1k,2k} \in \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, а если $k_1 \geq 1$, то $\lambda_{1k,2k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ для $k = 1, \dots, k_1$ и $\lambda_{1k,2k} \in \mathbb{R}$ для всех $k \geq k_1 + 1$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\lambda_{1k} = -\frac{A}{B} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

$$\lambda_{2k} = O(k^2) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2k}}{k^2} = -\frac{\pi^2 B}{\rho L^2}.$$

Интересно отметить, что число пар k_1 комплексно-сопряженных собственных значений спектральной задачи (4.3) зависит не только от параметров ρ , A , B , но и от толщины полосы $0 < x_1 < L$, занятой ВУМ-I. Уменьшение (увеличение) размера L приводит в целом к уменьшению (соответственно увеличению) числа k_1 . В частности, если $L < \pi B / (2\sqrt{\rho A})$, то спектр S_0 является полностью вещественным.

Структура спектра S_0 для ВУМ-I изображена на рис. 4.1.

2) Случай $R_0 = 1$, $B = 0$, $N = 1$. Перейдем к выяснению структуры спектра S_0 для ВУМ-II при $N = 1$. Для этого требуется исследовать корни дробно-рациональных уравнений

$$\lambda^2 + AC_k = \frac{C_k q_1}{\lambda + \gamma_1} \quad (4.11)$$

или, что то же самое, кубических уравнений

$$\lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + AC_k \lambda + (A\gamma_1 - q_1)C_k = 0 \quad (4.12)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ уравнение (4.12) имеет либо три вещественных корня, либо один вещественный и два сопряженных комплексных корня. Обозначим корни этого уравнения через λ_{1k} , λ_{2k} , λ_{3k} , считая для определенности, что $\lambda_{1k} \in \mathbb{R}$, в то время как $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ или $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Для того, чтобы выяснить, при каких k уравнение (4.12) имеет не вещественные корни λ_{2k} и λ_{3k} , воспользуемся подстановкой $\lambda = \theta - \gamma_1/3$ и

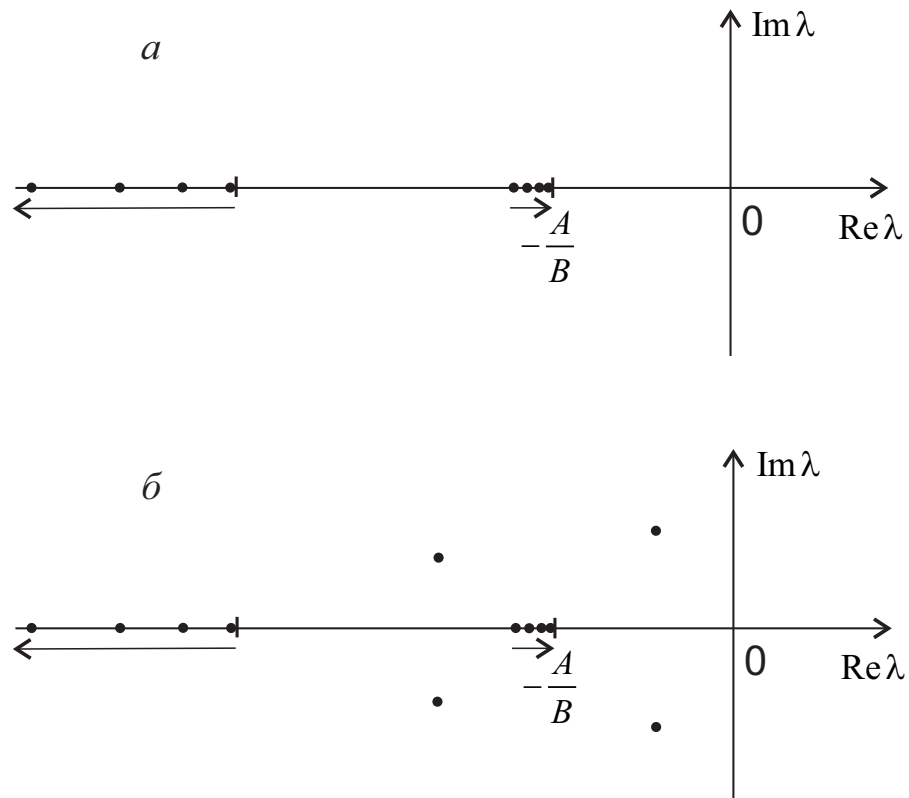


Рис. 4.1. Спектр задачи (4.5) в случае отсутствия (а) и существования (б) невещественных собственных значений

приведем уравнение (4.12) к “неполному” виду

$$\theta^3 + a_k \theta + b_k = 0, \quad (4.13)$$

где

$$a_k = -\frac{\gamma_1^2}{3} + AC_k, \quad b_k = \frac{2\gamma_1^3}{27} - \frac{C_k}{3} (A\gamma_1 - 3(A\gamma_1 - q_1)).$$

Число m_k вещественных корней уравнения (4.12) определяется знаком выражения $Q_k = a_k^3/27 + b_k^2/4$, а именно: $m_k = 1$ при $Q_k > 0$ и $m_k = 3$ при $Q_k \leq 0$. При этом, если $Q_k = 0$, то уравнение (4.12) имеет по крайней мере два равных вещественных корня. После преобразований выражение для Q_k принимает вид

$$Q_k = C_k \left(\frac{A^3}{27} C_k^2 + \left(\frac{2}{27} A^2 \gamma_1^2 - \frac{1}{3} A \gamma_1 q_1 + \frac{1}{4} q_1^2 \right) C_k + \frac{\gamma_1^3}{27} (A \gamma_1 - q_1) \right).$$

Рассмотрим квадратное уравнение

$$\frac{A^3}{27} z^2 + \left(\frac{2}{27} A^2 \gamma_1^2 - \frac{1}{3} A \gamma_1 q_1 + \frac{1}{4} q_1^2 \right) z + \frac{\gamma_1^3}{27} (A \gamma_1 - q_1) = 0. \quad (4.14)$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = \frac{4q_1}{27} \left(\frac{3q_1}{4} - \frac{2A\gamma_1}{3} \right)^3.$$

Нетрудно видеть, что при $q_1 < (8/9)A\gamma_1$ уравнение (4.14) не имеет вещественных корней и, следовательно, $Q_k > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Это значит, что $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Далее, при $q_1 = (8/9)A\gamma_1$ уравнение (4.14) имеет один корень $z_0 = 27q_1^2/(64A^3)$ кратности 2. В этом случае, если число

$$k_0 = \frac{3q_1 L}{8\pi A} \sqrt{\frac{3\rho}{A}}$$

является целым, то $Q_k = 0$ при $k = k_0$ и $Q_k > 0$ для всех остальных значений $k \in \mathbb{N}$. Если же $k_0 \notin \mathbb{N}$, то $Q_k > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ только для $k = k_0 \in \mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $(8/9)A\gamma_1 < q_1 < A\gamma_1$. Обозначим корни уравнения (4.14) через z_1 и z_2 , полагая для определенности, что $z_1 < z_2$. Нетрудно проверить, что $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$. Это означает, что для указанного случая $Q_k \leq 0$ при $z_1 \leq C_k \leq z_2$ и $Q_k > 0$ при $C_k < z_1$ и $C_k > z_2$. Следовательно, если ввести обозначения

$$k_1 = \min \left\{ k : k \in \mathbb{N}, k \geq \frac{L}{\pi} \sqrt{\rho z_1} \right\},$$

$$k_2 = \max \left\{ k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq \frac{L}{\pi} \sqrt{\rho z_2} \right\},$$

то $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ только при $k_1 \leq k \leq k_2$ и $k_2 \geq k_1$. Если же $k_2 < k_1$, то $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом, согласно полученным результатам, существует не более конечного числа значений $k \in \mathbb{N}$, при которых $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$. Это означает, в частности, что при $B = 0$ и $N = 1$ существует бесконечное множество не вещественных собственных значений спектральной задачи (4.5). Чтобы составить более полное представление о структуре спектра S_0 для ВУМ-II

при $N = 1$, необходимо найти оценки для корней λ_{ik} уравнений (4.12), а также выяснить их асимптотическое поведение при $k \rightarrow \infty$.

Вначале отметим, что если $\lambda < -\gamma_1$ или $\lambda > -\gamma_1 + q_1/A$, то

$$\lambda^2 + AC_k > \frac{C_k q_1}{\lambda + \gamma_1},$$

поэтому вещественные корни уравнения (4.11) не могут лежать вне интервала $(-\gamma_1, -\gamma_1 + q_1/A)$. Этот факт вместе с формулой Виета

$$\lambda_{1k} + \lambda_{2k} + \lambda_{3k} = -\gamma_1$$

позволяет также оценить вещественную часть корней λ_{2k} и λ_{3k} в случае, когда $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. В итоге получаем следующие оценки:

$$-\gamma_1 < \lambda_{ik} < -\gamma_1 + \frac{q_1}{A}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.15)$$

если $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ и

$$-\gamma_1 < \lambda_{1k} < -\gamma_1 + \frac{q_1}{A}, \quad -\frac{q_1}{2A} < \operatorname{Re} \lambda_{ik} < 0, \quad i = 2, 3, \quad (4.16)$$

если $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Далее, используя результаты работы [18], выпишем следующие асимптотические соотношения для корней уравнений (4.5):

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= -\gamma_1 + \frac{q_1}{A} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty, \\ \operatorname{Re} \lambda_{2k,3k} &= -\frac{q_1}{2A} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \operatorname{Im} \lambda_{2k,3k} = \pm O(k), \quad k \rightarrow \infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_{ik}}{k} &= \pm \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{A}{\rho}}, \quad i = 2, 3. \end{aligned} \quad (4.17)$$

На основании вышеизложенного, сформулируем следующую теорему, описывающую точки спектра S_0 для ВУМ-II при $N = 1$.

Теорема 12. *Если $R_0 = 1$, $B = 0$, $N = 1$, то спектр задачи (4.5) представим в виде*

$$S = \{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{3k}\}_{k=1}^{\infty}, \quad (4.18)$$

где λ_{ik} ($i = 1, 2, 3$) – корни кубических уравнений (4.12) и $\lambda_{1k} \in \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. При этом $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $q_1 < (8/9)A\gamma_1$;
- 2) $q_1 = (8/9)A\gamma_1$ и $k_0 \notin \mathbb{N}$;
- 3) $(8/9)A\gamma_1 < q_1 < A\gamma_1$ и $k_1 = k_2 + 1$.

Если ни одно из условий 1)-3) не выполняется, то последовательности $\{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$ содержат конечное число вещественных чисел. А именно, $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ только при следующих значениях k :

- 1) $k = k_0$, если $q_1 = (8/9)A\gamma_1$ и $k_0 \in \mathbb{N}$;
- 2) $k = k_1, \dots, k_2$, если $(8/9)A\gamma_1 < q_1 < A\gamma_1$ и $k_2 \geq k_1$.

Кроме того, если $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$, то выполнены оценки (4.15), а если $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то выполнены оценки (4.16) и соотношения (4.17).

Структура спектра S_0 для ВУМ-II при $N = 1$ изображена на рис. 4.2.

3) Случай $R_0 = 1, B > 0, N = 1$. Перейдем к выяснению структуры спектра S_0 для ВУМ-III при $N = 1$. Для этого требуется исследовать корни дробно-рациональных уравнений

$$\lambda^2 + BC_k\lambda + AC_k = \frac{C_k q_1}{\lambda + \gamma_1} \quad (4.19)$$

или, что то же самое, кубических уравнений

$$\lambda^3 + (\gamma_1 + BC_k)\lambda^2 + (A + B\gamma_1)C_k\lambda + (A\gamma_1 - q_1)C_k = 0 \quad (4.20)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим корни этих уравнений через $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{3k}$, считая, как и в предыдущем случае, что $\lambda_{1k} \in \mathbb{R}$, а $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ или $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

С помощью подстановки $\lambda = \theta - (\gamma_1 + BC_k)/3$ уравнение (4.20) приводится к “неполному” виду (4.13), в котором коэффициенты a_k и b_k определены следующим образом:

$$a_k = -\frac{1}{3}(\gamma_1 + BC_k)^2 + aC_k, \quad a = A + B\gamma_1,$$

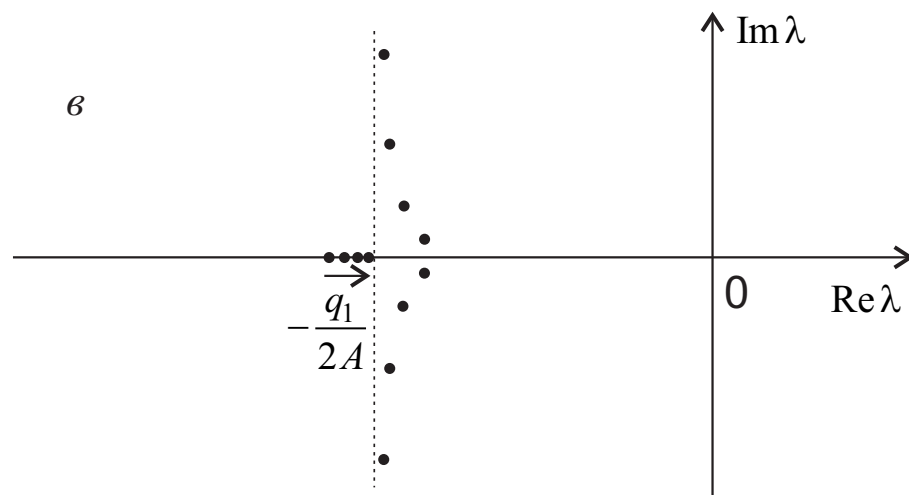
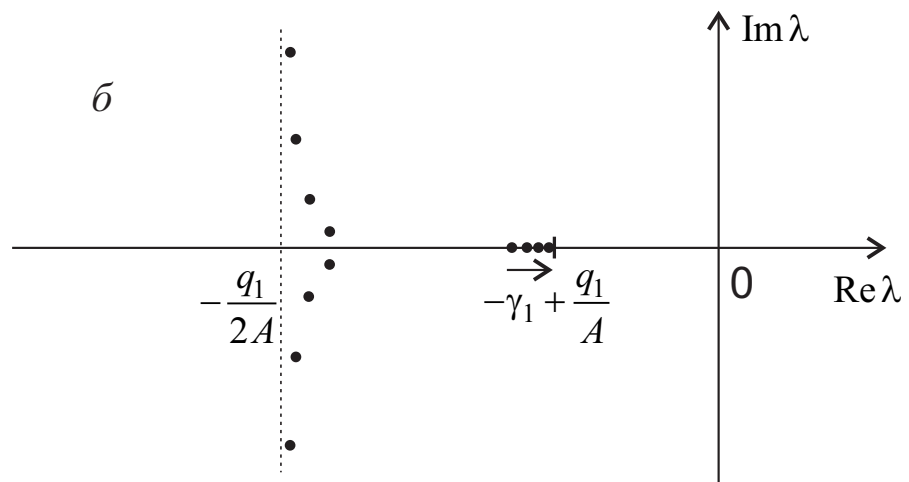
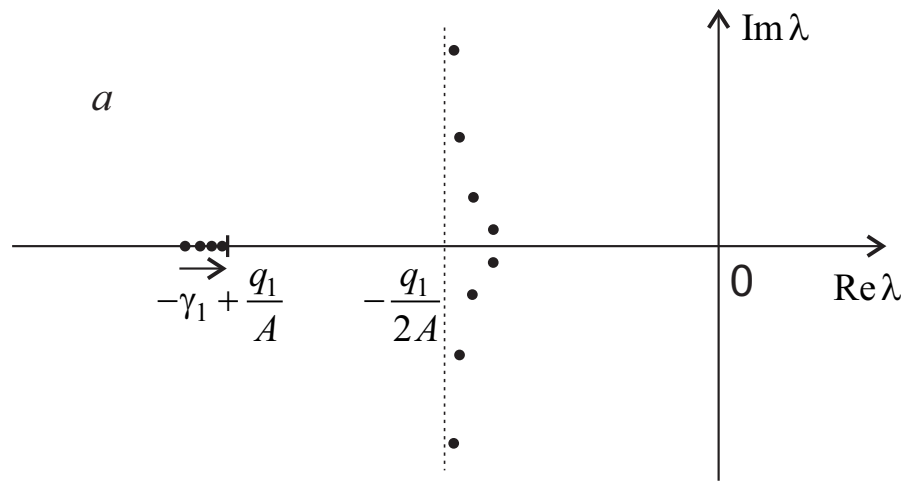


Рис. 4.2. Спектр задачи (4.5) при $B = 0$, $N = 1$ в случае $\gamma_1 > \frac{3q_1}{2A}$ (*a*), $\gamma_1 < \frac{3q_1}{2A}$ (*б*) и $\gamma_1 = \frac{3q_1}{2A}$ (*в*)

$$b_k = \frac{2}{27}(\gamma_1 + BC_k)^3 - \frac{C_k}{3}((\gamma_1 + BC_k)a - 3b), \quad b = A\gamma_1 - q_1.$$

Число вещественных корней уравнения (4.20) зависит от знака выражения $Q_k = a_k^3/27 + b_k^2/4$, которое после преобразований записывается в виде

$$Q_k = A_1 C_k^3 + A_2 C_k^2 + A_3 C_k + A_4,$$

где

$$A_1 = -\frac{B^2}{108}((A - B\gamma_1)^2 + 4Bq_1),$$

$$A_2 = \frac{a^3}{27} - \frac{B}{54}(a^2\gamma_1 + 9ab - 6Bb\gamma_1),$$

$$A_3 = \frac{b^2}{4} - \frac{\gamma_1}{108}(a^2\gamma_1 + 18ab - 12Bb\gamma_1), \quad A_4 = \frac{1}{27}\gamma_1^3 b.$$

Обозначим через n_0 число положительных корней кубического уравнения

$$A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4 = 0. \quad (4.21)$$

Учитывая, что $A_1 < 0$ и $A_4 > 0$, возможны только два случая: $n_0 = 1$ или $n_0 = 3$. Введем следующие обозначения: M_1 — положительный корень уравнения (4.21) при $n_0 = 1$; M_1, M_2, M_3 ($M_1 < M_2 < M_3$) — положительные корни уравнения (4.21) при $n_0 = 3$;

$$k_i = \max \left\{ n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n < \frac{L}{\pi} \sqrt{\rho M_i} \right\}, \quad i = 1, 3,$$

$$k_2 = \min \left\{ n : n \in \mathbb{N}, \quad n > \frac{L}{\pi} \sqrt{\rho M_2} \right\}.$$

При $n_0 = 1$ неравенство $Q_k \leq 0$ выполнено только для $C_k \geq M_1$, а значит, $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ для всех $k > k_1$. При $n_0 = 3$ неравенство $Q_k \leq 0$ выполнено только для $M_1 \leq C_k \leq M_2$ или $C_k \geq M_3$, следовательно, $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ для всех $k > k_3$ и, если $k_2 > k_1 + 1$, то и для $k \in (k_1, k_2)$.

Следует отметить, что независимо от числа положительных корней уравнения (4.21), существует не более конечного числа значений $k \in \mathbb{N}$, при которых $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Отсюда следует, что спектр S_0 задачи (4.5)

при $B \neq 0$, $N = 1$ либо полностью вещественный, либо содержит конечное число невещественных собственных значений.

Аналогично тому, как это было сделано выше, доказываем, что если $\gamma_1 > BC_k$ ($\gamma_1 < BC_k$), то вещественные корни уравнения (4.19) не могут лежать вне интервала $(-\gamma_1, 0)$ (соответственно $(-BC_k, 0)$). Отсюда и из формулы Виета

$$\lambda_{1k} + \lambda_{2k} + \lambda_{3k} = -\gamma_1 - BC_k$$

получаем следующие оценки:

$$-\max\{\gamma_1, BC_k\} < \lambda_{ik} < 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.22)$$

если $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ и

$$-\gamma_1 < \lambda_{1k} < 0, \quad -\frac{1}{2}(\gamma_1 + BC_k) < \operatorname{Re} \lambda_{2k,3k} < -\frac{1}{2}BC_k, \quad (4.23)$$

если $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Для описания асимптотического поведения корней при $k \rightarrow \infty$ обозначим через λ_1 и λ_2 корни квадратного уравнения

$$B\lambda^2 + (A + B\gamma_1)\lambda + A\gamma_1 - q_1 = 0.$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2B} \left(-A - B\gamma_1 \pm \sqrt{(A - B\gamma_1)^2 + 4Bq_1} \right)$$

и справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_{ik} &= \lambda_i + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \\ \lambda_{3k} &= O(k^2), \quad k \rightarrow \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{3k}}{k^2} = -\frac{B\pi^2}{\rho L^2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Подводя итог проведенному исследованию структуры корней уравнений (4.20) и учитывая возможные соотношения между определенными выше числами k_1 , k_2 и k_3 , сформулируем следующую теорему, описывающую точки спектра S_0 для ВУМ-III при $N = 1$.

Теорема 13. Если $R_0 = 1$, $B > 0$, $N = 1$, то спектр S_0 задачи (4.5) представим в виде

$$S = \{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{3k}\}_{k=1}^{\infty}, \quad (4.25)$$

где λ_{ik} ($i = 1, 2, 3$) — корни кубических уравнений (4.20) и $\lambda_{1k} \in \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. При этом $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $n_0 = 1$, $k_1 = 0$;
- 2) $n_0 = 3$, $k_3 = 0$;
- 3) $n_0 = 3$, $k_1 = 0$, $k_3 = k_2 - 1$.

Если ни одно из условий 1)-3) не выполняется, то последовательно-сти $\{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$ содержат конечное число не вещественных чисел. А именно, $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ только при следующих значениях k :

- 1) $k \in [1, k_1]$, если $n_0 = 1$, $k_1 > 0$ или $n_0 = 3$, $k_1 > 0$, $k_3 = k_2 - 1$;
- 2) $k \in [k_2, k_3]$, если $n_0 = 3$, $k_1 = 0$, $k_3 > k_2 - 1$;
- 3) $k \in [1, k_1] \cup [k_2, k_3]$, если $n_0 = 3$, $k_1 > 0$, $k_3 > k_2 - 1$.

Кроме того, если $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то выполнены оценки (4.23), а если $\lambda_{2k}, \lambda_{3k} \in \mathbb{R}$, то выполнены оценки (4.22) и соотношения (4.24).

Отметим, что структура спектра S_0 для ВУМ-III при $N = 1$, как и для ВУМ-I, зависит от толщины полосы $0 < x_1 < L$. В частности, существует такое число L_0 , что спектр задачи (4.5) является полностью вещественным для всех $L \leq L_0$. При этом $L_0 = \pi/(\sqrt{\rho M_1})$, если $n_0 = 1$, и $L_0 = \pi/(\sqrt{\rho M_3})$, если $n_0 = 3$. Кроме того, если $n_0 = 1$, то для всех $L > L_0$ спектр S_0 обязательно содержит конечное число не вещественных собственных значений. Если же $n_0 = 3$, то может существовать отрезок

$$[L_1, L_2] \subset \left[\frac{\pi}{\sqrt{\rho M_2}}, \frac{\pi}{\sqrt{\rho M_1}} \right]$$

такой, что спектр S_0 является полностью вещественным не только для всех

$L \leq L_0$, но и для всех $L \in [L_1, L_2]$. Существование или отсутствие такого отрезка $[L_1, L_2]$ проверяются численным расчетом.

Структура спектра задачи (4.5) при $B > 0$ и $N = 1$ изображена на рис. 4.3.

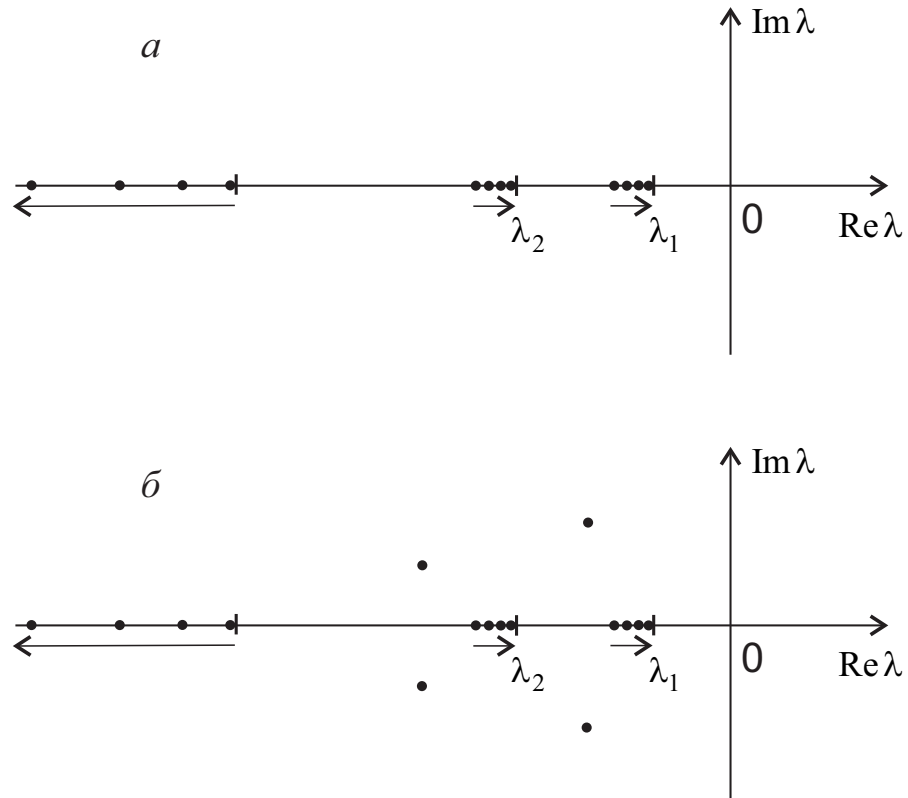


Рис. 4.3. Спектр задачи (4.5) при $B > 0$, $N = 1$ в случае отсутствия (а) и существования (б) не вещественных собственных значений

4) Случай $R_0 = 1$, $B \geq 0$, $N > 1$. Такое точное описание множества собственных значений задачи (4.5), как это было сделано при $N = 1$, становится практически невозможным при $N > 1$. Это связано с тем, что дробно-рациональные уравнения (4.9) эквивалентны алгебраическим уравнениям $(N + 2)$ -го порядка

$$\lambda^{N+2} + \left(BC_k + \sum_{n=1}^N \gamma_n \right) \lambda^{N+1} + \dots + C_k \left(\prod_{n=1}^N \gamma_n \right) \left(A - \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\gamma_n} \right) = 0,$$

корни которых уже при $N = 2$ находятся по весьма громоздким формулам, малоприспособленным для анализа. Тем не менее, оказывается возможным

доказать, что если $B = 0$, то при любом $N \geq 1$ спектр задачи (4.5) содержит бесконечное число не вещественных собственных значений. Если же $B > 0$, то ситуация становится противоположной, т.е. спектр этой задачи содержит только конечное число не вещественных собственных значений. Чтобы доказать это утверждение для любого $N > 1$, достаточно найти числа $M_{11} \geq 0$ и $M_{12} \geq 0$ такие, что при $B = 0$ уравнение (4.9) имеет не вещественные корни для всех $C_k \geq M_{11}$, а при $B > 0$ оно имеет только вещественные корни для всех $C_k \geq M_{12}$.

При фиксированном $k \in \mathbb{N}$ уравнение (4.9) имеет либо $N+2$ вещественных корня, либо N вещественных корней и два комплексно-сопряженных корня. Пусть m_k — число вещественных корней уравнения (4.9). Обозначим корни уравнения (4.9) через λ_{ik} , $i = 1, 2, \dots, N+2$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_{ik} \in \mathbb{R}$ при $i = 1, \dots, N$ и $\lambda_{1k} > \lambda_{2k} > \dots > \lambda_{Nk}$.

Используя геометрические построения, можно получить следующие оценки:

$$-\gamma_1 < \lambda_{1k} < 0, \quad -\gamma_n < \lambda_{nk} < -\gamma_{n-1}, \quad n = 2, \dots, N. \quad (4.26)$$

Кроме того, если корни $\lambda_{(N+1)k}$ и $\lambda_{(N+2)k}$ также вещественны, то

$$-\gamma_N < \lambda_{jk} < 0, \quad j = N+1, N+2 \quad (4.27)$$

при $B = 0$ и

$$-BC_k < \lambda_{jk} < 0, \quad j = N+1, N+2 \quad (4.28)$$

при $B > 0$.

Рассмотрим функцию

$$f_k(\lambda) = \lambda^2 + BC_k\lambda + C_k \left(A - \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\lambda + \gamma_n} \right),$$

нули которой являются корнями уравнения (4.9). График функции $f_k(\lambda)$ имеет асимптоты в точках $\lambda = -\gamma_n$, причем при $\varepsilon \downarrow 0$

$$f_k(-\gamma_n + \varepsilon) \rightarrow -\infty, \quad f_k(-\gamma_n - \varepsilon) \rightarrow +\infty, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.29)$$

Исследуем поведение функции $f_k(\lambda)$ на интервалах $I_1 = (-\gamma_1, 0)$ и $I_n = (-\gamma_n, -\gamma_{n-1})$, $n = 2, \dots, N$. Так как

$$f'_k(\lambda) = 2\lambda + C_k \left(B + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{(\lambda + \gamma_n)^2} \right),$$

то при $\lambda \in I_n$, $n = 1, \dots, N$, имеем

$$f'_k(\lambda) > -2\gamma_N + \frac{C_k}{\gamma_N^2} \sum_{n=1}^N q_n$$

и, следовательно, $f'_k(\lambda) > 0$ при $C_k \geq M_{11}$, где

$$M_{11} = 2\gamma_N^3 \left(B\gamma_N^2 + \sum_{n=1}^N q_n \right)^{-1}. \quad (4.30)$$

Это означает, что если $C_k \geq M_{11}$, то функция $f_k(\lambda)$ строго возрастает на каждом интервале I_n . С другой стороны, $f_k(0) > 0$, поэтому из (4.29) следует, что функция $f_k(\lambda)$ имеет только один вещественный нуль λ_{nk} внутри каждого интервала I_n , $n = 1, \dots, N$.

Если $B = 0$, то

$$M_{11} = 2\gamma_N^3 \left(\sum_{n=1}^N q_n \right)^{-1}$$

и в силу оценок (4.26), (4.27) заключаем, что при $C_k > M_{11}$ функция $f_k(\lambda)$ имеет N вещественных и два комплексно-сопряженных корня. Таким образом, $m_k = N$ для всех $k \geq \pi^{-1}L\sqrt{\rho M_{11}}$. В частности, если $L \leq \pi/\sqrt{\rho M_{11}}$, то $m_k = N$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Если $B > 0$, то положим

$$M_{12} = \max \left\{ \frac{2\gamma_N}{B}, \frac{4A}{B^2} \right\}.$$

Тогда $M_{12} > M_{11}$, а значит, при $C_k \geq M_{12}$ функция $f_k(\lambda)$ имеет только один вещественный нуль λ_{nk} внутри каждого интервала I_n , $n = 1, \dots, N$.

Кроме того,

$$f_k(-\gamma_N - \varepsilon) \rightarrow +\infty \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0,$$

$$f_k\left(-\frac{1}{2}BC_k\right) = -\frac{1}{4}B^2C_k^2 + C_k\left(A - \sum_{n=1}^N \frac{2q_n}{BC_k - 2\gamma_n}\right) < 0,$$

$$f_k(-BC_k) = C_k\left(A + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{BC_k - \gamma_n}\right) > 0,$$

поэтому функция $f_k(\lambda)$ имеет 2 вещественных корня $\lambda_{(N+1)k}$ и $\lambda_{(N+2)k}$ в интервале $(-BC_k, -\gamma_N)$, причем

$$-\frac{1}{2}BC_k < \lambda_{((N+1)k)} < -\gamma_N, \quad -BC_k < \lambda_{(N+2)k} < -\frac{1}{2}BC_k.$$

Тем самым мы доказали, что при $C_k \geq M_{12}$ функция $f_k(\lambda)$ имеет $N + 2$ вещественных корня, т.е. $m_k = N + 2$ для всех $k \geq \pi^{-1}L\sqrt{\rho M_{12}}$. В частности, если $L \leq \pi/\sqrt{\rho M_{12}}$, то $m_k = N + 2$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Необходимо отметить, что при $B = 0$ условие $C_k \geq M_{11}$ является достаточным, но не необходимым условием существования невещественных корней уравнения (4.9). На самом деле $m_k = N$ для всех $C_k \geq M_{01}$, где $M_{01} < M_{11}$. При этом число M_{01} может оказаться много меньше числа M_{11} , найденного по формуле (4.30), и, в частности, оно может быть равно нулю. Последнее означает, что уравнение (4.9) имеет два комплексно-сопряженных корня при каждом $k \in \mathbb{N}$. Например, полагая $N = 1$ и $q_1 = (2/3)A\gamma_1$, находим $M_{11} = 3\gamma_1^2/A$, в то время как из предыдущих результатов следует, что $M_{01} = 0$.

Аналогичная ситуация имеет место и при $B > 0$: в действительности $m_k = N + 2$ для всех $C_k \geq M_{02}$, где $M_{02} < M_{12}$.

Перейдем к исследованию асимптотического поведения корней дробно-рациональных уравнений (4.9) при $N > 1$, $k \rightarrow \infty$. С этой целью обозначим через $\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1N}$ корни уравнения

$$\sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\lambda + \gamma_n} = A,$$

а через $\lambda_{21}, \dots, \lambda_{2(N+1)}$ — корни уравнения

$$\sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\lambda + \gamma_n} = B\lambda + A.$$

С помощью геометрических построений нетрудно убедиться в том, что корни этих уравнений вещественны и различны, поэтому без ограничения общности можно считать $\lambda_{si} < \lambda_{sj}$ при $i > j$, $s = 1, 2$.

Используя результаты работы [18], выпишем следующие соотношения, описывающие асимптотическое поведение корней уравнения (4.9) при $B = 0$, $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lambda_{ik} &= \lambda_{1i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad i = 1, \dots, N, \\ \operatorname{Re} \lambda_{jk} &= -\frac{1}{2A} \sum_{n=1}^N q_n + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad j = N+1, N+2, \\ \operatorname{Im} \lambda_{jk} &= \pm O(k), \quad j = N+1, N+2, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_{jk}}{k} &= \pm \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{A}{\rho}}, \quad j = N+1, N+2. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Соотношения, описывающие асимптотическое поведение корней уравнения (4.9) при $B > 0$, $k \rightarrow \infty$, имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{ik} &= \lambda_{2i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad i = 1, \dots, N+1, \\ \lambda_{(N+2)k} &= O(k^2), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{3k}}{k^2} = -\frac{B\pi^2}{\rho L^2}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Завершая исследование структуры корней дробно-рациональных уравнений (4.9), воспользуемся формулой Виета. Имеем

$$\sum_{i=1}^{N+2} \lambda_{ik} = -\sum_{n=1}^N \gamma_n - BC_k.$$

Из этого равенства и оценок (4.26)-(4.28) заключаем, что если

$$\lambda_{(N+1)k}, \lambda_{(N+2)k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

то

$$-\frac{1}{2}(BC_k + \gamma_N) < \operatorname{Re} \lambda_{jk} < -\frac{1}{2}BC_k, \quad j = N + 1, N + 2. \quad (4.33)$$

В частности, при $B = 0$

$$-\frac{\gamma_N}{2} < \operatorname{Re} \lambda_{jk} < 0, \quad j = N + 1, N + 2. \quad (4.34)$$

Суммируя вышеизложенные результаты, сформулируем следующую теорему, описывающую точки спектра S_0 для ВУМ-II и ВУМ-III при $N > 1$.

Теорема 14. *При $R_0 = 1$, $B \geq 0$, $N > 1$ спектр S задачи (4.5) представим в виде*

$$S = \{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \dots \cup \{\lambda_{(N+1)k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{(N+2)k}\}_{k=1}^{\infty}, \quad (4.35)$$

где λ_{ik} ($i = 1, \dots, N + 2$) – корни уравнений (4.9) и $\lambda_{jk} \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, N$) для всех $k \in \mathbb{N}$,

$$0 > \lambda_{1k} > -\gamma_1 > \lambda_{2k} > -\gamma_2 > \dots > -\gamma_{N-1} > \lambda_{Nk} > -\gamma_N.$$

При этом, если $B = 0$ ($B > 0$), то последовательности $\{\lambda_{(N+1)k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{(N+2)k}\}_{k=1}^{\infty}$ могут содержать не более конечного числа вещественных (соответственно не вещественных) чисел. А именно, существуют номера $K_1 \geq 1$ и $K_2 \geq 1$ такие, что если $B = 0$, то $\lambda_{(N+1)k}, \lambda_{(N+2)k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ для всех $k \geq K_1$, а если $B > 0$, то $\lambda_{(N+1)k}, \lambda_{(N+2)k} \in \mathbb{R}$ для всех $k \geq K_2$. Кроме того, если $\lambda_{(N+1)k}, \lambda_{(N+2)k} \in \mathbb{R}$, то при $B = 0$ выполнены оценки (4.27), а при $B > 0$ – оценки (4.28) и соотношения (4.32). Если же $\lambda_{(N+1)k}, \lambda_{(N+2)k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то при $B > 0$ выполнены оценки (4.33), а при $B = 0$ – оценки (4.34) и соотношения (4.31).

Анализируя результаты теорем 11-14, мы обнаруживаем следующее качественное различие в структуре спектра S_0 для ВУМ-II и ВУМ-I,III: для ВУМ-II спектр S_0 состоит из бесконечного множества вещественных и

бесконечного множества комплексно-сопряженных собственных значений, а для ВУМ-I и ВУМ-III он состоит из бесконечного множества вещественных и не более конечного числа комплексно-сопряженных собственных значений. В частности, для ВУМ-II множество F_0 собственных частот является бесконечным, а для ВУМ-I и ВУМ-III — конечным (в частности, оно может быть пустым).

4.2. Спектры одномерных собственных колебаний усредненных моделей слоистых сред

Перейдем к исследованию спектров одномерных собственных колебаний усредненных сред, занимающих полосу $0 < x_1 < L$ и соответствующих двухфазным слоистым средам, рассмотренным в Главе 3, а также отличающихся от них лишь расположением слоев по отношению к координатным плоскостям (см. рис. 4.4). Предполагается, что собственные колебания распространяются вдоль оси Ox_1 перпендикулярно слоям (если последние параллельны плоскости Ox_2x_3) или параллельно слоям (если последние параллельны плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3).

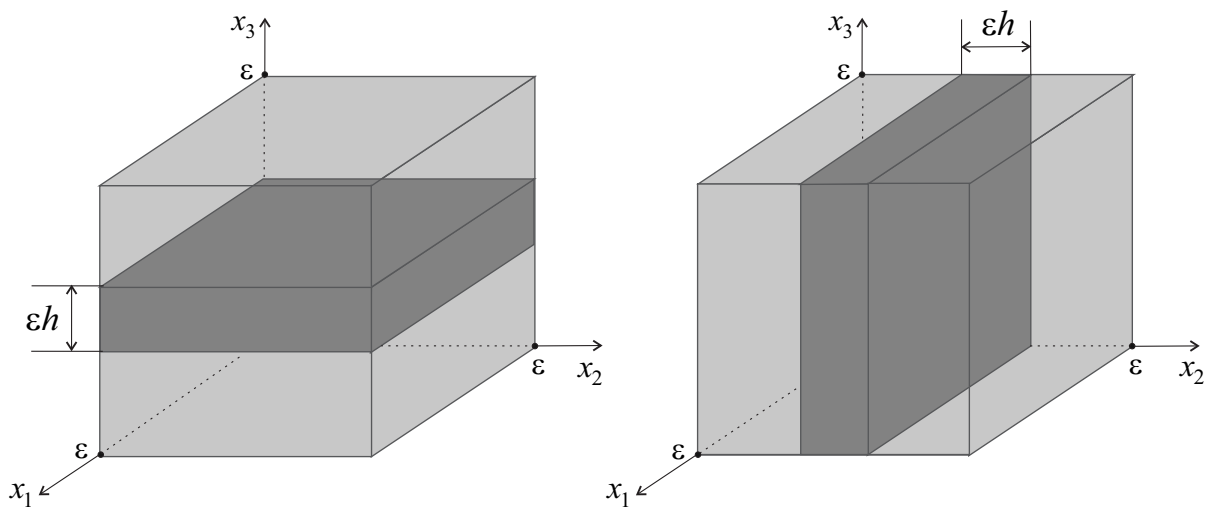


Рис. 4.4. Модели двухфазных слоистых сред, слои которых параллельны плоскости Ox_1x_2 или плоскости Ox_1x_3

Для того, чтобы найти точки указанных спектров, сначала выпишем математическую модель, описывающую одномерные колебания усредненной среды вдоль оси Ox_1 . Согласно результатам Глав 1 и 2, она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \alpha_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \beta_i \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial t} - g_i(t) * \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x_1, t), \quad x_1 \in (0, L), \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x_1, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, 0) = 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где $u(x_1, t)$ — смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x_1 в момент времени t ; $f(x_1, t)$ — внешняя сила, направленная вдоль оси Ox_1 ; $i = 1$ в случае слоев, параллельных плоскости Ox_2x_3 , и $i = 2$ в случае слоев, параллельных плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3 ,

$$\alpha_i = \alpha_{iiii}, \quad \beta_i = \beta_{iiii}, \quad g_i(t) = g_{iiii}(t), \quad i = 1, 2.$$

Здесь α_{iiii} , β_{iiii} , $g_{iiii}(t)$ вычисляются по формулам, приведенным в Главе 3. Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\langle ab^{-2} \rangle}{\langle b^{-1} \rangle^2}, \quad \alpha_2 = \langle a \rangle - 2 \langle \lambda \zeta b^{-1} \rangle + \langle \zeta^2 ab^{-2} \rangle + \\ &+ \frac{2 \langle \zeta b^{-1} \rangle (\langle \lambda b^{-1} \rangle - \langle \zeta ab^{-2} \rangle)}{\langle b^{-1} \rangle} + \frac{\langle ab^{-2} \rangle \cdot \langle \zeta b^{-1} \rangle^2}{\langle b^{-1} \rangle^2}, \\ \beta_1 &= \frac{1}{\langle b^{-1} \rangle}, \quad \beta_2 = \langle b \rangle + \frac{\langle \zeta b^{-1} \rangle^2}{\langle b^{-1} \rangle} - \langle \zeta^2 b^{-1} \rangle, \end{aligned}$$

если $b^{(1)} \neq 0$, $b^{(2)} \neq 0$;

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_1}{1-h}, \quad \alpha_2 = \langle a \rangle + \frac{2h\zeta_2}{b_2}(\lambda_1 - a_4) + \frac{h\zeta_2^2 a_{12}}{b_2^2(1-h)}, \\ \beta_1 &= 0, \quad \beta_2 = \frac{h(b_2^2 - \zeta_2^2)}{b_2}, \end{aligned}$$

если $b^{(1)} = 0$, $b^{(2)} \neq 0$;

$$\alpha_1 = \frac{1}{\langle a^{-1} \rangle}, \quad \alpha_2 = \langle a \rangle + \frac{\langle \zeta a^{-1} \rangle^2}{\langle a^{-1} \rangle} - \langle \lambda^2 a^{-1} \rangle, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0,$$

если $b^{(1)} = 0$, $b^{(2)} = 0$.

Что касается функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$, то, используя формулы и обозначения из Главы 3, запишем их в виде

$$g_1(t) = \sum_{m=1}^M d_m \exp(-\xi_m t), \quad (4.37)$$

$$g_2(t) = \sum_{m=1}^M p_m \exp(-\xi_m t) + \sum_{s=1}^2 R_s k_{2+s} \sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} \exp(-\gamma_n^{(s)} t), \quad (4.38)$$

$$k_3 = \frac{(1-h)(2k_1 + 1/3)}{k_1 + 2/3}, \quad k_4 = \frac{h(2k_2 + 1/3)}{k_2 + 2/3},$$

Здесь $M = R_1 N_1 + R_2 N_2 + 1$, если хотя бы одна фаза исходной слоистой среды обладает ненулевыми тензорами коэффициентов вязкости, и $M = R_1 N_1 + R_2 N_2$ в противном случае,

$$d_m = h c_m^{(1)} w_m^{(1)}, \quad p_m = h c_m^{(2)} w_m^{(2)}, \quad m = 1, \dots, M,$$

а ξ_1, \dots, ξ_M — упорядоченные по возрастанию корни уравнений (3.122).

Обозначим через $u_\lambda(x_1)$ и $g_i(\lambda)$ изображения Лапласа функций $u(x_1, t)$ и $g_i(t)$ соответственно. Если слои исходной среды параллельны плоскости Ox_2x_3 , то под спектром одномерных собственных колебаний, распространяющихся в усредненной среде вдоль оси Ox_1 , мы будем подразумевать множество S_1 всех комплексных значений λ , при которых спектральная задача

$$\rho_0 \lambda^2 u_\lambda = (\alpha_1 + \beta_1 \lambda - g_1(\lambda)) \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x_1^2}, \quad u_\lambda(0) = u_\lambda(L) = 0 \quad (4.39)$$

имеет нетривиальные решения $u_\lambda(x_1)$.

Если слои исходной среды параллельны плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3 , то под спектром одномерных собственных колебаний, распространяющихся в усредненной среде вдоль оси Ox_1 , понимается множество S_2 всех комплексных значений λ , при которых спектральная задача

$$\rho_0 \lambda^2 u_\lambda = (\alpha_2 + \beta_2 \lambda - g_2(\lambda)) \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x_1^2}, \quad u_\lambda(0) = u_\lambda(L) = 0$$

имеет нетривиальные решения $u_\lambda(x_1)$.

Спектры F_1 и F_2 собственных частот колебаний, распространяющихся в усредненной среде вдоль оси Ox_1 соответственно перпендикулярно и параллельно слоям исходной среды, определяются следующим образом:

$$F_i = \{\omega : \omega = \text{Im } \lambda > 0, \lambda \in S_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Переобозначая $C_k = \pi^2 k^2 / (\rho_0 L^2)$ и повторяя рассуждения из предыдущего параграфа, можно показать, что спектр S_1 представляет собой объединение корней уравнений

$$\lambda^2 + \beta_1 C_k \lambda + \alpha_1 C_k = C_k \sum_{m=1}^M \frac{d_m}{\lambda + \xi_m}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.40)$$

а спектр S_2 — объединение корней уравнений

$$\lambda^2 + \beta_2 C_k \lambda + \alpha_2 C_k = C_k \left(\sum_{m=1}^M \frac{p_m}{\lambda + \xi_m} + \sum_{s=1}^2 R_s \sum_{n=1}^{N_s} \frac{k_{2+s} v_n^{(s)}}{\lambda + \gamma_n^{(s)}} \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.41)$$

Проверим возможность применения результатов теорем 11-14 для описания точек спектров S_i для сред различных типов.

$$\mathbf{1) } \mathbf{b^{(1)} \neq \mathbf{0}, } \mathbf{b^{(2)} \neq \mathbf{0}, } \mathbf{d^{(1)}(t) = d^{(2)}(t) = \mathbf{0.}$$

Рассмотрим слоистую среду, состоящую либо из двух разных ВУМ-I, либо либо из ВУМ-I и ВСЖ. Для такой среды $M = 1$ и

$$g_1(t) = d_1 \exp(-\xi_1 t), \quad g_2(t) = p_1 \exp(-\xi_1 t),$$

где

$$d_1 = \frac{h(1-h)}{b_{12}^3} (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \quad \xi_1 = \frac{a_{12}}{b_{12}},$$

$$p_1 = \frac{h(1-h)}{b_{12}^3} ((a_3 - a_4) b_{12} - (\zeta_1 - \zeta_2) a_{12})^2.$$

Предположим сначала, что

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{a_3 - a_4}{\zeta_1 - \zeta_2} \neq \frac{a_{12}}{b_{12}}.$$

Тогда $d_1 > 0$ и $p_1 > 0$, причем непосредственные вычисления показывают, что $\alpha_1 - d_1/\xi_1 > 0$ и $\alpha_2 - p_1/\xi_1 > 0$. Это означает, что спектр S_1

совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_0$, $A = \alpha_1$, $B = \beta_1$, $N = 1$, $q_1 = d_1$, $\gamma_1 = \xi_1$, а спектр S_2 — со спектром этой же задачи при $\rho = \rho_0$, $A = \alpha_2$, $B = \beta_2$, $N = 1$, $q_1 = p_1$, $\gamma_1 = \xi_1$. Таким образом, множества точек спектров S_1 и S_2 описываются теоремой 13. Из этой теоремы следует, в частности, что каждый из спектров S_1 и S_2 состоит либо из трех последовательностей $\{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел, либо из одной последовательности $\{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел и двух последовательностей $\{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$, все элементы которых вещественны, за исключением их конечного числа.

Теперь предположим, что

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (4.42)$$

Тогда $d_1 = 0$ и спектр S_1 совпадает со спектром задачи (4.3) при $\rho = \rho_0$, $A = \alpha_1$, $B = \beta_1$. Согласно теореме 11, он состоит из двух последовательностей $\{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$\lambda_{1k,2k} = \frac{\pi^2 k^2 \beta_1}{2\rho_0 L^2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho_0 L^2 \alpha_1}{\pi^2 k^2 \beta_1^2}} \right).$$

Аналогично, если

$$\frac{a_3 - a_4}{\zeta_1 - \zeta_2} = \frac{a_{12}}{b_{12}},$$

то спектр S_2 состоит из двух последовательностей $\{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$\lambda_{1k,2k} = \frac{\pi^2 k^2 \beta_2}{2\rho_0 L^2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho_0 L^2 \alpha_2}{\pi^2 k^2 \beta_2^2}} \right).$$

Представляет интерес сравнение спектров S_1 и S_2 со спектрами одномерных собственных колебаний отдельных фаз слоистой среды. Для этого предположим, что j -я фаза (в данном случае ВУМ-I или ВСЖ) слоистой среды целиком заполняет всю полосу $0 < x_1 < L$. Опираясь на рассуждения из предыдущего параграфа, легко показать, что спектр $S^{(j)}$ собственных колебаний, распространяющихся в сплошной j -й фазе вдоль оси Ox_1 ,

совпадает со спектром задачи (4.3) при $\rho = \rho_j$, $A = a_j$, $B = b_j$. Поэтому из теоремы (11) следует, что

$$S^{(j)} = \{\lambda_{1k}^{(j)}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{2k}^{(j)}\}_{k=1}^{\infty},$$

где

$$\lambda_{1k,2k}^{(j)} = \frac{\pi^2 k^2 b_j}{2\rho_j L^2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a_j \rho_j L^2}{\pi^2 k^2 b_j^2}} \right). \quad (4.43)$$

Таким образом, спектры S_1 , S_2 , $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ обладают следующим свойством: они либо не содержат не вещественных собственных значений, либо содержат только конечное их число.

$$2) \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{0}, \mathbf{b}^{(2)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{d}^{(1)}(t) = \mathbf{d}^{(2)}(t) = \mathbf{0}.$$

Рассмотрим слоистую среду, у которой первая фаза состоит из упругого материала, а вторая — из ВУМ-I или ВСЖ. Для такой среды $M = 1$ и

$$g_1(t) = d_1 \exp(-\xi_1 t), \quad g_2(t) = p_1 \exp(-\xi_1 t),$$

где

$$d_1 = \frac{a_1^2 h}{b_2(1-h)^2}, \quad \xi_1 = \frac{a_{12}}{b_2(1-h)},$$

$$p_1 = \frac{h}{b_2} \left(\lambda_1 - a_4 + \frac{a_{12}\zeta_2}{b_2(1-h)} \right)^2.$$

Нетрудно проверить, что $\alpha_1 - d_1/\xi_1 > 0$ и $\alpha_2 - p_1/\xi_1 > 0$, а значит, спектр S_1 совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_0$, $A = \alpha_1$, $B = 0$, $N = 1$, $q_1 = d_1$, $\gamma_1 = \xi_1$, а спектр S_2 — со спектром этой задачи при $\rho = \rho_0$, $A = \alpha_2$, $B = \beta_2$, $N = 1$, $q_1 = r_1$, $\gamma_1 = \xi_1$. Таким образом, множества точек спектров S_1 и S_2 описываются теоремами 12 и 13 соответственно. Из этих теорем следует, в частности, что спектр S_1 (соответственно S_2) состоит из одной последовательности $\{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел и двух последовательностей $\{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$, у которых все или почти все элементы — не вещественные (соответственно вещественные) числа. Мы видим, что имеется качественное различие в структуре спектров S_1 и S_2 : спектр S_1

содержит бесконечное число незначительных собственных значений, в то время как спектр S_2 содержит не более конечного числа незначительных собственных значений.

Для сравнения выпишем спектры одномерных собственных колебаний для каждой фазы слоистой среды. Спектр $S^{(1)}$ одномерных собственных колебаний упругого материала, заполняющего полосу $0 < x_1 < L$ и являющегося первой фазой слоистой среды, состоит из двух последовательностей $\{\lambda_{1k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{2k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ чисто мнимых собственных значений

$$\lambda_{1k,2k}^{(1)} = \pm \frac{i\pi k}{L} \sqrt{\frac{a_1}{\rho_1}}. \quad (4.44)$$

Спектр $S^{(2)}$ одномерных собственных колебаний ВУМ-I (или ВСЖ), заполняющего полосу $0 < x_1 < L$ и являющегося второй фазой слоистой среды, состоит из двух последовательностей $\{\lambda_{1k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{2k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$, элементы которых находятся по формуле (4.43) при $j = 2$.

Таким образом, спектральные свойства фаз слоистой среды качественно отличаются друг от друга, а именно: для первой фазы точками спектра одномерных собственных колебаний являются чисто мнимые числа, а для второй фазы — вещественные числа, за исключением, возможно, их конечного числа. Как уже отмечалось, такое же качественное отличие в структуре наблюдается и у спектров S_1 и S_2 .

$$\mathbf{3) } \mathbf{b^{(1)} \neq 0, b^{(2)} \neq 0, d^{(1)}(t) = 0, d^{(2)}(t) \neq 0.}$$

Рассмотрим слоистую среду, у которой первая фаза состоит из ВУМ-I или ВСЖ, а вторая фаза — из ВУМ-III. Для такой среды $M = N_2 + 1$ и

$$d_m = \frac{hw_m^{(1)}}{1-h} (b_1\xi_m - a_1),$$

$$p_m = hw_m^{(2)} \left(\lambda_2 - a_3 - (\zeta_2 - \zeta_1)\xi_m + \frac{(k_2 - 1/3)(b_{12}\xi_m - a_{12})}{(1-h)(k_2 + 2/3)} \right),$$

$$m = 1, \dots, N_2 + 1,$$

где $\xi_1, \dots, \xi_{N_2+1}$ — упорядоченные по возрастанию корни уравнений (3.122), а $w_1^{(1)}, \dots, w_{N_2+1}^{(1)}$ и $w_1^{(2)}, \dots, w_{N_2+1}^{(2)}$ — решения систем линейных уравнений (3.124) и (3.125) при $R_1 = 0, R_2 = 1$.

Отметим, что $k_4 v_n^{(2)} \in \mathbb{R}^+$ для всех $n = 1, \dots, N_2$, а также, в силу (3.25) и (3.26), $d_m, p_m \in \mathbb{R}^+$ для всех $m = 1, \dots, N_2 + 1$. Поэтому для того, чтобы можно было воспользоваться результатами предыдущего параграфа, нам нужно доказать выполнение неравенств

$$\alpha_1 - \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{d_m}{\xi_m} > 0, \quad \alpha_2 - \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{p_m}{\xi_m} - k_4 \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\gamma_n^{(2)}} > 0. \quad (4.45)$$

Докажем первое из этих неравенств. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{d_m}{\xi_m} &= \frac{b_1 h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2+1} w_m^{(1)} - \frac{a_1 h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m} = \\ &= \frac{b_1 h}{b_{12}^2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) - \frac{a_1 h}{1-h} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Далее, применяя формулу Виета, выпишем соотношения, связывающие коэффициенты и корни алгебраических уравнений, равносильных уравнению (3.122) при $R_1 = 0, R_2 = 1$ и уравнению

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(1)}}{\gamma - \xi_m} = -\frac{b_1}{b_{12}}. \quad (4.47)$$

Так как корнями последнего уравнения являются значения $a_1/b_1, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{N_2}^{(2)}$, то эти соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{N_2+1} \xi_m &= \prod_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} \left(\frac{a_{12}}{b_{12}} - \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\gamma_n^{(2)}} \right), \\ \gamma_0^{(2)} \prod_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} &= \prod_{m=1}^{N_2+1} \xi_m \left(1 - \frac{b_{12}}{b_1} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_{1m}}{\xi_m} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\left(1 - \frac{b_{12}}{b_1} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m} \right) \left(a_{12} - (1-h) \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\gamma_n^{(2)}} \right) = \frac{a_1 b_{12}}{b_1}.$$

Но

$$a_{12} - (1 - h) \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\gamma_n^{(2)}} > a_1 h,$$

поэтому

$$\left(1 - \frac{b_{12}}{b_1} \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m} \right) < \frac{b_{12}}{b_1 h},$$

откуда

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m} > -\frac{b_2(1-h)}{b_{12}h}.$$

Теперь из (4.46) находим

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(1)}}{\xi_m} < \frac{b_1 h}{b_{12}^2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) + \frac{a_1 b_2}{b_{12}} = \frac{a_2 b_1^2 h + a_1 b_2^2 (1-h)}{b_{12}^2}$$

и первое неравенство в (4.49) доказано.

Аналогично, с помощью формулы Виета для коэффициентов и корней алгебраических уравнений, равносильных уравнению (3.122) при $R_1 = 0$, $R_2 = 1$ и уравнению

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(2)}}{\gamma - \xi_m} = \frac{1-h}{b_{12}} (\zeta_2 - \zeta_1) - \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3},$$

доказывается второе неравенство в (4.49).

Из (4.49) следует, что спектр S_1 совпадает со спектром задачи (4.5) при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_1, \quad B = \beta_1, \quad N = N_2 + 1, \quad q_n = d_n, \quad \gamma_n = \xi_n,$$

а спектр S_2 — со спектром этой же задачи при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_2, \quad B = \beta_2, \quad N = 2N_2 + 1, \quad \gamma_n = \tau_n;$$

$$q_n = p_m, \quad \text{если } \gamma_n = \xi_m; \quad q_n = k_4 v_n^{(2)}, \quad \text{если } \gamma_n = \gamma_n^{(2)},$$

где τ_n — n -й элемент множества $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_2+1}\} \cup \{\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{N_2}^{(2)}\}$, упорядоченного по возрастанию.

Поскольку $\beta_1 \neq 0$ и $\beta_2 \neq 0$, оба спектра S_1 и S_2 описываются теоремой 14 при $B > 0$. Согласно этой теореме, спектры S_1 и S_2 состоят соответственно из $N_2 + 3$ и $2N_2 + 3$ последовательностей собственных значений и содержат не более конечного числа незначительных собственных значений.

Отсутствием бесконечного числа незначительных собственных значений характеризуются также спектры $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ одномерных собственных колебаний обеих фаз исходной среды: если ВУМ-I или ВСЖ (первая фаза) заполняет всю полосу $0 < x_1 < L$, то спектр $S^{(1)}$ состоит из двух последовательностей $\{\lambda_{1k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{2k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$, элементы которых находятся по формуле (4.43) при $j = 1$. Если же ВУМ-III (вторая фаза) заполняет всю полосу $0 < x_1 < L$, то спектр $S^{(2)}$ совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_2$, $A = a_2$, $B = b_2$, $N = N_2$, $q_n = (k_2 + 2/3)v_n^{(2)}$, $\gamma_n = \gamma_n^{(2)}$, поэтому по теореме 14 он состоит из $N_2 + 2$ последовательностей собственных значений и содержит не более конечного числа незначительных собственных значений.

$$4) \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{0}, \mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{0}, \mathbf{d}^{(1)}(t) = \mathbf{0}, \mathbf{d}^{(2)}(t) \neq \mathbf{0}.$$

Рассмотрим слоистую среду, у которой первая фаза состоит из упругого материала, а вторая — из ВУМ-II. Для такой среды $M = N_2$ и

$$d_m = -\frac{a_1 h w_m^{(1)}}{1 - h},$$

$$p_m = -\frac{h w_m^{(1)}}{a_1 (1 - h)} \left((1 - h)(\lambda_2 - \lambda_1) - \frac{a_{12}(k_2 - 1/3)}{k_2 + 2/3} \right)^2,$$

$$m = 1, \dots, N_2,$$

где ξ_1, \dots, ξ_{N_2} — корни уравнения (3.122) при $b_{12} = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 1$, а $w_1^{(1)}, \dots, w_{N_2}^{(1)}$ — решение системы линейных уравнений (3.127) при $R_1 = 0$, $R_2 = 1$.

Отметим, что $k_4 v_n^{(2)} \in \mathbb{R}^+$ для всех $n = 1, \dots, N_2$, а также, в силу (3.91) и (3.92), $d_m, p_m \in \mathbb{R}^+$ для всех $m = 1, \dots, N_2$. Кроме того, имеют место

неравенства

$$\alpha_1 - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{d_m}{\xi_m} > 0, \quad \alpha_2 - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{p_m}{\xi_m} - k_4 \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\gamma_n^{(2)}} > 0,$$

доказательство которых основано на применении формул Виета для коэффициентов и корней алгебраических уравнений, равносильных уравнению (3.122) при $b_{12} = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 1$ и уравнениям

$$\sum_{m=1}^{N_2} \frac{w_m^{(1)}}{\gamma - \xi_m} = -\frac{a_1}{a_{12}}, \quad \sum_{m=1}^M \frac{w_m^{(2)}}{\gamma - \xi_m} = \frac{1-h}{a_{12}}(\lambda_2 - \lambda_1) - \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}. \quad (4.48)$$

Из указанных неравенств следует, что спектр S_1 совпадает со спектром задачи (4.5) при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_1, \quad B = 0, \quad N = N_2, \quad q_n = d_n, \quad \gamma_n = \xi_n,$$

а спектр S_2 — со спектром задачи этой задачи при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_2, \quad B = 0, \quad N = 2N_2, \quad \gamma_n = \tau_n,$$

$$q_n = p_m, \quad \text{если } \gamma_n = \xi_m; \quad q_n = k_4 v_n^{(2)}, \quad \text{если } \gamma_n = \gamma_n^{(2)},$$

где τ_n — n -й элемент множества $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_2}\} \cup \{\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{N_2}^{(2)}\}$, упорядоченного по возрастанию.

Поскольку $\beta_1 = \beta_2 = 0$, спектры S_1 и S_2 описываются теоремой 14 при $B = 0$. Согласно этой теореме, спектры S_1 и S_2 состоят соответственно из N_2 и $2N_2$ последовательностей вещественных чисел и двух последовательностей, у которых все или почти все элементы — не вещественные числа.

Наличием бесконечного числа не вещественных собственных значений характеризуются также спектры $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ одномерных собственных колебаний обеих фаз исходной слоистой среды: если упругий материал (первая фаза) заполняет всю полосу $0 < x_1 < L$, то спектр $S^{(1)}$ состоит из двух последовательностей $\{\lambda_{1k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{2k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ чисто мнимых собственных значений (4.44). Если же ВУМ-II (вторая фаза) заполняет всю полосу

$0 < x_1 < L$, то спектр $S^{(2)}$ совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_2$, $A = a_2$, $B = b_2$, $N = N_2$, $q_n = (k_2 + 2/3)v_n^{(2)}$, $\gamma_n = \gamma_n^{(2)}$, поэтому состоит из N_2 последовательностей вещественных чисел и двух последовательностей, у которых все или почти все элементы не вещественны.

5) $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b}^{(2)} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{d}^{(1)}(t) = \mathbf{0}$, $\mathbf{d}^{(2)}(t) \neq \mathbf{0}$.

Рассмотрим слоистую среду, у которой первая фаза состоит из упругого материала, а вторая — из ВУМ-III. Для такой среды $M = N_2 + 1$ и

$$d_m = -\frac{a_1 h w_m^{(1)}}{1 - h},$$

$$p_m = h w_m^{(2)} \left(\lambda_2 - \lambda_1 - \zeta_2 \xi_m + \frac{(k_2 - 1/3)(b_2(1 - h)\xi_m - a_{12})}{(1 - h)(k_2 + 2/3)} \right),$$

$$m = 1, \dots, N_2 + 1,$$

где $\xi_1, \dots, \xi_{N_2+1}$ — упорядоченные по возрастанию корни уравнений (3.122) при $b_{12} = b_2(1 - h)$, $R_1 = 0$, $R_2 = 1$, а $w_1^{(1)}, \dots, w_{N_2+1}^{(1)}$ и $w_1^{(2)}, \dots, w_{N_2+1}^{(2)}$ — решения систем линейных уравнений (3.124) и (3.125) при $R_1 = 0$, $R_2 = 1$.

Отметим, что $k_4 v_n^{(2)} \in \mathbb{R}^+$ для всех $n = 1, \dots, N_2$, а также, в силу (3.57) и (3.58), $d_m, p_m \in \mathbb{R}^+$ для всех $m = 1, \dots, N_2 + 1$. Кроме того, имеют место неравенства (4.49), которые доказываются с помощью формул Виета для коэффициентов и корней алгебраических уравнений, равносильных уравнению (3.122) при $b_{12} = b_2(1 - h)$, $R_1 = 0$, $R_2 = 1$ и уравнений

$$\sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(1)}}{\gamma - \xi_m} = 0, \quad \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{w_m^{(2)}}{\gamma - \xi_m} = \frac{\zeta_2}{b_2} - \frac{k_2 - 1/3}{k_2 + 2/3}.$$

Таким образом, спектр S_1 совпадает со спектром задачи (4.5) при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_1, \quad B = 0, \quad N = N_2 + 1, \quad q_n = d_n, \quad \gamma_n = \xi_n,$$

а спектр S_2 — со спектром задачи (4.5) при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_2, \quad B = \beta_2, \quad N = 2N_2 + 1, \quad \gamma_n = \tau_n$$

$$q_n = p_m, \quad \text{если } \gamma_n = \xi_m; \quad q_n = k_4 v_n^{(2)}, \quad \text{если } \gamma_n = \gamma_n^{(2)},$$

где τ_n — n -й элемент множества $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_2+1}\} \cup \{\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{N_2}^{(2)}\}$, упорядоченного по возрастанию.

Так как $\beta_1 = 0$, а $\beta_2 \neq 0$, то структура спектров S_1 и S_2 описывается теоремой 14 при $B = 0$ и $B > 0$ соответственно. Из этой теоремы следует, что спектр S_1 (S_2) состоит из $N_2 + 1$ (соответственно $2N_2 + 1$) последовательностей вещественных чисел и двух последовательностей, у которых все или почти все элементы — не вещественные (соответственно вещественные) числа. Таким образом, имеется качественное различие в структуре спектров S_1 и S_2 , связанное с наличием или отсутствием бесконечного числа не вещественных собственных значений.

Необходимо отметить, что указанное качественное различие обнаруживается также при сравнении спектров $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ одномерных собственных колебаний двух фаз слоистой среды: если упругий материал (первая фаза) заполняет всю полосу $0 < x_1 < L$, то спектр $S^{(1)}$ состоит из двух последовательностей $\{\lambda_{1k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{2k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ чисто мнимых собственных значений (4.44). Если же ВУМ-III (вторая фаза) заполняет всю полосу $0 < x_1 < L$, то спектр $S^{(2)}$ совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_2$, $A = a_2$, $B = b_2$, $N = N_2$, $q_n = (k_2 + 2/3)v_n^{(2)}$, $\gamma_n = \gamma_n^{(2)}$, поэтому состоит из $N_2 + 2$ последовательностей собственных значений и содержит не более конечного числа не вещественных собственных значений.

6) $b^{(1)} = 0$, $b^{(2)} \neq 0$, $d^{(1)}(t) \neq 0$, $d^{(2)}(t) = 0$.

Рассмотрим слоистую среду, у которой первая фаза состоит из ВУМ-II, а вторая фаза — из ВУМ-I или ВСЖ. Для такой среды $M = N_1 + 1$ и

$$d_m = -\frac{a_1 h w_m^{(1)}}{1 - h},$$

$$p_m = h w_m^{(2)} \left(a_4 - \lambda_1 - \zeta_2 \xi_m + \frac{(k_1 - 1/3)(b_2(1 - h)\xi_m - a_{12})}{(1 - h)(k_1 + 2/3)} \right),$$

$$m = 1, \dots, N_1 + 1,$$

где $\xi_1, \dots, \xi_{N_1+1}$ — корни уравнений (3.122) при $b_{12} = b_2(1 - h)$, $R_1 = 1$,

$R_2 = 0$, а $w_1^{(1)}, \dots, w_{N_1+1}^{(1)}$ и $w_1^{(2)}, \dots, w_{N_1+1}^{(2)}$ — решения систем уравнений (3.124) и (3.125) при $R_1 = 1, R_2 = 0$.

Отметим, что $k_3 v_n^{(1)} \in \mathbb{R}^+$ для всех $n = 1, \dots, N_1$, а также, в силу (3.91) и (3.92), $d_m, p_m \in \mathbb{R}^+$ для всех $m = 1, \dots, N_1 + 1$. Кроме того, имеют место неравенства

$$\alpha_1 - \sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{d_m}{\xi_m} > 0, \quad \alpha_2 - \sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{p_m}{\xi_m} - k_3 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\gamma_n^{(1)}} > 0, \quad (4.49)$$

которые доказываются с помощью формул Виета для коэффициентов и корней алгебраических уравнений, эквивалентных уравнениям

$$\sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{w_m^{(1)}}{\gamma - \xi_m} = \frac{1}{h}, \quad \sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{w_m^{(2)}}{\xi_m^{(1)} - \gamma_n^{(1)}} = \frac{1-h}{b_{12}} (\zeta_2 - \zeta_1) - \frac{(1-h)(k_1 - 1/3)}{h(k_1 + 2/3)}.$$

Таким образом, спектр S_1 совпадает со спектром задачи (4.5) при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_1, \quad B = 0, \quad N = N_1 + 1, \quad q_n = d_n, \quad \gamma_n = \xi_n,$$

а спектр S_2 — со спектром этой задачи при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_2, \quad B = \beta_2, \quad N = 2N_1 + 1, \quad \gamma_n = \tau_n,$$

$$q_n = p_m, \quad \text{если } \gamma_n = \xi_m; \quad q_n = k_3 v_n^{(1)}, \quad \text{если } \gamma_n = \gamma_n^{(1)},$$

где τ_n — n -й элемент множества $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_1+1}\} \cup \{\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{N_1}^{(1)}\}$, упорядоченного по возрастанию.

Так как $\beta_1 = 0$, а $\beta_2 \neq 0$, то спектры S_1 и S_2 описываются теоремой 14 при $B = 0$ и $B > 0$ соответственно. Из этой теоремы следует, что спектр S_1 (S_2) состоит из $N_1 + 1$ (соответственно $2N_1 + 1$) последовательностей вещественных чисел и двух последовательностей, у которых все или почти все элементы — не вещественные (соответственно вещественные) числа. Таким образом, как и для предыдущей слоистой среды, состоящей из упругого материала и ВУМ-III, имеется упомянутое выше качественное различие в структуре спектров S_1 и S_2 .

Отметим, что это различие обнаруживается также при сравнении спектров $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ одномерных собственных колебаний двух фаз слоистой среды: если ВУМ-II (первая фаза) заполняет всю полосу $0 < x_1 < L$, то $S^{(1)}$ совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_1$, $A = a_1$, $B = 0$, $N = N_1$, $q_n = (k_1 + 2/3)v_n^{(1)}$, $\gamma_n = \gamma_n^{(1)}$, поэтому состоит из N_1 последовательностей вещественных чисел и двух последовательностей, у которых все или почти все элементы невещественны. Если же ВУМ-I или ВСЖ (вторая фаза) заполняет всю полосу $0 < x_1 < L$, то $S^{(2)}$ состоит из двух последовательностей $\{\lambda_{1k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{2k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$, элементы которых находятся по формуле (4.43) при $j = 2$, и содержит не более конечного числа невещественных собственных значений.

7) $d^{(1)}(t) \neq 0$, $d^{(2)}(t) \neq 0$.

Рассмотрим слоистые среды, у которых обе фазы обладают ненулевыми тензорами регулярных частей ядер релаксации. К такому типу относятся среды, у которых либо обе фазы состоят из ВУМ-II, либо обе фазы — из ВУМ-III, либо одна фаза — из ВУМ-II, а другая — из ВУМ-III.

Предполагая, что $\gamma_{n_1}^{(1)} \neq \gamma_{n_2}^{(s)}$ для всех $n_s = 1, \dots, N_s$ ($s = 1, 2$), выпишем коэффициенты d_m и p_m для функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$ (см. (4.37) и (4.38)):

$$d_m = hw_m^{(1)} \left(a_2 - a_1 - (b_2 - b_1)\xi_m + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s + 2/3)v_n^{(s)}}{\xi_m - \gamma_n^{(s)}} \right),$$

$$p_m = hw_m^{(2)} \left(\lambda_2 - \lambda_1 - (\zeta_2 - \zeta_1)\xi_m + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s - 1/3)v_n^{(s)}}{\xi_m - \gamma_n^{(s)}} \right),$$

$$m = 1, \dots, M.$$

Здесь для среды, состоящей из двух разных ВУМ-III или из ВУМ-II и ВУМ-III, $M = N_1 + N_2 + 1$, $\xi_1, \dots, \xi_{N_1+N_2+1}$ — упорядоченные по возрастанию корни уравнений (3.122) при $R_1 = R_2 = 1$, $b_{12} \neq 0$, а $w_1^{(1)}, \dots, w_{N_1+N_2+1}^{(1)}$ и $w_1^{(2)}, \dots, w_{N_1+N_2+1}^{(2)}$ — решения систем уравнений (3.124) и (3.125) соответственно.

Для среды, состоящей из двух разных ВУМ-II, $M = N_1 + N_2$, $\xi_1, \dots, \xi_{N_1+N_2}$ — упорядоченные по возрастанию корни уравнений (3.122) при

$R_1 = R_2 = 1$, $b_{12} = 0$, а $w_1^{(1)}, \dots, w_{N_1+N_2+1}^{(1)}$ и $w_1^{(2)}, \dots, w_{N_1+N_2+1}^{(2)}$ — решения систем уравнений (3.127) и (3.128) соответственно.

Отметим, что $k_3 v_n^{(1)} \in \mathbb{R}^+$ для всех $n = 1, \dots, N_1$ и $k_4 v_n^{(2)} \in \mathbb{R}^+$ для всех $n = 1, \dots, N_2$. Численное исследование при $N_1, N_2 = 1, 2, 3$ показывает, что $d_m, p_m \in \mathbb{R}^+$, $m = 1, \dots, N_1 + N_2 + N_3$, т.е. обе функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ представляют собой суммы затухающих экспонент. Кроме того, численные расчеты подтверждают выполнение неравенств

$$\alpha_1 - \sum_{m=1}^M \frac{d_m}{\xi_m} > 0,$$

$$\alpha_2 - \sum_{m=1}^M \frac{p_m}{\xi_m} - k_3 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{v_n^{(1)}}{\gamma_n^{(1)}} - k_4 \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\gamma_n^{(2)}} > 0,$$

из которых следует, что спектр S_1 совпадает со спектром задачи (4.5) при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_1, \quad B = \beta_1, \quad N = M, \quad q_n = d_n, \quad \gamma_n = \xi_n,$$

а спектр S_2 — со спектром этой же задачи при

$$\rho = \rho_0, \quad A = \alpha_2, \quad B = \beta_2, \quad N = M + N_1 + N_2, \quad \gamma_n = \tau_n,$$

$$q_n = p_m, \quad \text{если } \gamma_n = \tau_n; \quad q_n = k_3 v_n^{(1)}, \quad \text{если } \gamma_n = \gamma_n^{(1)},$$

$$q_n = k_4 v_n^{(2)}, \quad \text{если } \gamma_n = \gamma_n^{(2)},$$

где τ_n — n -й элемент множества $\{\xi_1, \dots, \xi_M\} \cup \{\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{N_1}^{(1)}\} \cup \{\gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{N_2}^{(2)}\}$, упорядоченного по возрастанию.

Используя результаты теоремы 14, опишем структуру спектров S_1 и S_2 для слоистых сред трех разных типов по отдельности.

а) Если $b^{(1)} \neq 0$, $b^{(2)} \neq 0$, т.е. если исходная среда состоит из слоев двух разных ВУМ-III, то $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$. Тогда, согласно теореме 14 при $B > 0$, спектры S_1 и S_2 состоят соответственно из $N_1 + N_2 + 3$ и $2N_1 + 2N_2 + 3$ последовательностей собственных значений и содержат не более конечного числа не вещественных собственных значений. Отсутствием бесконечного числа не вещественных собственных значений характеризуются также

спектры одномерных собственных колебаний обеих фаз исходной среды: для ВУМ-III (j -й фазы), заполняющего полосу $0 < x_1 < L$, спектр $S^{(j)}$ совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_j$, $A = a_j$, $B = b_j$, $N = N_j$, $q_n = (k_2 + 2/3)v_n^{(j)}$, $\gamma_n = \gamma_n^{(j)}$, поэтому состоит из $N_j + 2$ последовательностей собственных значений и содержит не более конечного числа не вещественных собственных значений.

б) Если $b^{(1)} = 0$, $b^{(2)} \neq 0$, т.е. если первой фазой является ВУМ-II, а второй фазой — ВУМ-III, то $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$. Тогда, согласно теореме 14, спектр S_1 (S_2) состоит из $N_1 + N_2 + 1$ (соответственно $2N_1 + 2N_2 + 1$) последовательностей вещественных собственных значений и двух последовательностей, у которых все или почти все элементы не вещественны (соответственно вещественны). Следовательно, имеется качественное различие в структуре спектров S_1 и S_2 , связанное с наличием или отсутствием бесконечного числа не вещественных собственных значений. Такое же различие обнаруживается при сравнении спектров одномерных собственных колебаний первой и второй фаз слоистой среды: для ВУМ-II (первой фазы), заполняющего полосу $0 < x_1 < L$, спектр $S^{(1)}$ совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_1$, $A = a_1$, $B = 0$, $N = N_1$, $q_n = (k_1 + 2/3)v_n^{(1)}$, $\gamma_n = \gamma_n^{(1)}$ и состоит из N_1 последовательностей вещественных чисел и двух последовательностей, у которых все или почти все элементы не вещественны. Для ВУМ-III (второй фазы), заполняющего полосу $0 < x_1 < L$, спектр $S^{(2)}$ совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_2$, $A = a_2$, $B = b_2$, $N = N_2$, $q_n = (k_2 + 2/3)v_n^{(2)}$, $\gamma_n = \gamma_n^{(2)}$, поэтому состоит из $N_2 + 2$ последовательностей собственных значений и содержит не более конечного числа не вещественных собственных значений.

в) Если $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$, т.е. если исходная среда состоит из слоев двух разных ВУМ-II, то $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Тогда, согласно теореме 14, спектры S_1 и S_2 состоят соответственно из $N_1 + N_2$ и $2N_1 + 2N_2$ последовательностей вещественных собственных значений и двух последовательностей, у

которых все или почти все элементы не вещественны. Наличием бесконечного числа не вещественных собственных значений характеризуются также спектры одномерных собственных колебаний обеих фаз исходной среды: для ВУМ-II (j -й фазы), заполняющего полосу $0 < x_1 < L$, спектр $S^{(j)}$ совпадает со спектром задачи (4.5) при $\rho = \rho_j$, $A = a_j$, $B = 0$, $N = N_j$, $q_n = (k_2 + 2/3)v_n^{(j)}$, $\gamma_n = \gamma_n^{(j)}$ и состоит из N_j последовательностей вещественных собственных значений и двух последовательностей, у которых все или почти все элементы не вещественны.

Анализируя вышеизложенные результаты, можно сделать следующие выводы о структуре спектра одномерных собственных колебаний усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с диссипацией.

Если обе фазы слоистой среды обладают ненулевыми тензорами коэффициентов вязкости, то для усредненной среды, независимо от направления распространения собственных колебаний (параллельно или перпендикулярно слоям), спектр является вещественным, кроме, возможно, конечного числа его точек. При этом множество собственных частот колебаний — конечное множество (в частности, оно является пустым, если спектр полностью вещественен).

Если только одна фаза слоистой среды обладает ненулевым тензором коэффициентов вязкости, то для усредненной среды структура спектра зависит от направления распространения собственных колебаний: если они распространяются перпендикулярно слоям, то спектр вместе с вещественной частью содержит бесконечное множество комплексно-сопряженных точек. При этом множество собственных частот колебаний — бесконечное множество. Если же собственные колебания распространяются параллельно слоям исходной среды, то спектр является вещественным, кроме, возможно, конечного числа его точек. При этом множество собственных частот колебаний — конечное множество (в частности, оно является пустым,

если спектр полностью вещественен).

Если обе фазы слоистой среды с диссипацией обладают нулевыми тензорами коэффициентов вязкости, то для усредненной среды, независимо от направления распространения собственных колебаний (параллельно или перпендикулярно слоям), спектр вместе с вещественной частью содержит бесконечное множество комплексно-сопряженных точек. При этом множество собственных частот колебаний является бесконечным множеством.

Интересно отметить, что если обе фазы имеют ненулевые тензоры коэффициентов вязкости, то можно выбрать такое значение $L_1 > 0$, что для усредненной среды, занимающей полосу $0 < x_1 < L$, спектр одномерных собственных колебаний (вдоль оси Ox_1) является полностью вещественным при любом $L \leq L_1$, независимо от того, параллельны или перпендикулярны плоскости Ox_2x_3 слои исходной среды. Если же только одна фаза имеет ненулевой тензор коэффициентов вязкости, то такое значение L_1 существует только в том случае, когда собственные колебания распространяются параллельно слоям, т.е. когда слои параллельны плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3 . При этом следует иметь в виду, что при фиксированном L уменьшение доли фазы, имеющей ненулевой тензор коэффициентов вязкости, приводит в целом к увеличению числа невещественных точек спектра, а значит, к увеличению числа собственных частот колебаний. С другой стороны, уменьшение величины L приводит в целом к уменьшению числа невещественных точек спектра и собственных частот колебаний вплоть до их исчезновения. Таким образом, даже незначительная доля ВСЖ, ВУМ-I или ВУМ-III между слоями УМ или ВУМ-II приводит к качественному отличию спектральных свойств двухфазной среды от спектральных свойств УМ или ВУМ-II. Близкий экспериментальный результат, в котором был обнаружен эффект исчезновения собственных частот колебаний при попадании в поры мраморного стержня очень малого количества вазелинового масла, приведен в работе [2].

Указанное выше качественное различие в динамике колебаний, распространяющихся перпендикулярно или параллельно слоям, можно объяснить на примере среды, состоящей из упругого материала и вязкой сжимаемой жидкости, следующим образом. В случае колебаний, распространяющихся перпендикулярно слоям, слои вязкой сжимаемой жидкости двигаются в основном как единое целое, а в случае колебаний, распространяющихся параллельно слоям, границы слоев обязаны (в силу граничных условий) двигаться так, как двигаются упругие границы. При этом центральные части жидкости вследствие инерционности жидкости могут отставать от движения их границ. Это приводит к большим значениям градиента скорости внутри жидких слоев, что, в свою очередь, порождает высокий уровень рассеивания энергии в тепло. Этим и можно объяснить интересный эффект “исчезновения” собственных колебаний, описанный в [2].

4.3. Спектры собственных колебаний слоистых сред, распространяющихся перпендикулярно слоям

В предыдущем параграфе было показано, что исследование спектра одномерных собственных колебаний усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с диссипацией, сводится к поиску корней дробно-рациональных уравнений. В данном параграфе будет установлено, что исследование спектра одномерных собственных колебаний, распространяющихся в слоистой среде с диссипацией перпендикулярно ее слоям, сводится к поиску корней трансцендентных уравнений.

Предположим, что ε -периодическая слоистая среда заполняет полосу $0 < x_1 < L$ и состоит из M слоев первой фазы и M слоев второй фазы (при этом $L = \varepsilon M$). Без ограничения общности можно считать, что слои первой фазы $\Omega_{1\varepsilon}$ занимают полосы $(m-1)\varepsilon < x_1 < (m-h)\varepsilon$, а слои второй

фазы $\Omega_{2\varepsilon}$ — полосы $(m-h)\varepsilon < x_1 < m\varepsilon$, $m = 1, \dots, M$. Обозначим

$$I_{s\varepsilon} = \bigcup_{m=1}^M I_{sm}^\varepsilon, \quad s = 1, 2,$$

где

$$I_{1m}^\varepsilon = ((m-1)\varepsilon, (m-h)\varepsilon), \quad I_{2m}^\varepsilon = ((m-h)\varepsilon, m\varepsilon), \quad m = 1, \dots, M.$$

Математическая модель, описывающая колебания слоистой среды вдоль оси Ox_1 , имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial x_1} + f(x_1, t), \quad x_1 \in I_{s\varepsilon}, \quad t > 0, \quad s = 1, 2, \\ [u^\varepsilon]|_{x_1=(m-h)\varepsilon} &= 0, \quad [\sigma^\varepsilon]|_{x_1=(m-h)\varepsilon} = 0, \quad m = 1, \dots, M, \\ [u^\varepsilon]|_{x_1=n\varepsilon} &= 0, \quad [\sigma^\varepsilon]|_{x_1=n\varepsilon} = 0, \quad n = 1, \dots, M-1, \\ u^\varepsilon(0, t) &= u^\varepsilon(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u^\varepsilon(x_1, 0) &= \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (0, L), \end{aligned} \quad (4.50)$$

где $u^\varepsilon(x_1, t)$ — смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x_1 в момент времени t ; $f(x_1, t)$ — внешняя сила, направленная вдоль оси Ox_1 ;

$$\begin{aligned} \sigma^\varepsilon &= a_s \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} + b_s \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1 \partial t} + R_s \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \left(\sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} e^{-\gamma_n^{(s)} t} \right) * \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1}, \\ x_1 &\in I_{s\varepsilon}, \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Применим преобразование Лапласа $u^\varepsilon(x_1, t) \rightarrow u_\lambda^\varepsilon(x_1)$ и запишем задачу (4.50) при $f(x_1, t) = 0$ в изображениях Лапласа:

$$\begin{aligned} \rho_s \lambda^2 u_\lambda^\varepsilon &= A_{s\lambda} \frac{\partial^2 u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1^2}, \quad x_1 \in I_{s\varepsilon}, \quad s = 1, 2, \\ [u_\lambda^\varepsilon]|_{(m-h)\varepsilon} &= 0, \quad A_{1\lambda} \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1} \Big|_{(m-h)\varepsilon-0} = A_{2\lambda} \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1} \Big|_{(m-h)\varepsilon+0}, \\ [u_\lambda^\varepsilon]|_{n\varepsilon} &= 0, \quad A_{1\lambda} \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1} \Big|_{n\varepsilon+0} = A_{2\lambda} \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1} \Big|_{n\varepsilon-0}, \\ u_\lambda^\varepsilon(0) &= u_\lambda^\varepsilon(L) = 0, \\ m &= 1, \dots, M; \quad n = 1, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (4.51)$$

где введено обозначение

$$A_{s\lambda} = a_s + b_s\lambda - R_s \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\lambda + \gamma_n^{(s)}}, \quad s = 1, 2.$$

Под спектром одномерных собственных колебаний, распространяющихся в слоистой среде вдоль оси Ox_1 , понимается множество S_ε всех комплексных значений λ , при которых спектральная задача (4.51) имеет нетривиальное решение, т.е. $S_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : u_\lambda^\varepsilon(x_1) \not\equiv 0\}$.

Для описания элементов множества S_ε обозначим через P_λ^ε квадратную матрицу 2-го порядка, связывающую значения $u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 0)$ и $\frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon + 0)$ со значениями $u_\lambda^\varepsilon(+0)$ и $\frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0)$:

$$\begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon + 0) \end{pmatrix} = P_\lambda^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(+0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в силу периодичности по x_1 коэффициентов уравнений, входящих в задачу (4.51),

$$\begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon((n+1)\varepsilon + 0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}((n+1)\varepsilon + 0) \end{pmatrix} = P_\lambda^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(n\varepsilon + 0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(n\varepsilon + 0) \end{pmatrix}$$

для всех $n = 0, \dots, M-1$, так что

$$\begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(L) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(L) \end{pmatrix} = (P_\lambda^\varepsilon)^M \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(0) \end{pmatrix}.$$

Но $u_\lambda^\varepsilon(0) = u_\lambda^\varepsilon(L) = 0$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(L) \end{pmatrix} = (P_\lambda^\varepsilon)^M \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(0) \end{pmatrix},$$

откуда следует, что спектральная задача (4.51) имеет нетривиальное решение $u_\lambda^\varepsilon(x_1)$, если λ удовлетворяет уравнению

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{12}^M = 0. \quad (4.52)$$

Таким образом, нашей ближайшей целью становится поиск элемента $(P_\lambda^\varepsilon)_{12}^M$ матрицы $(P_\lambda^\varepsilon)^M$. Для этого сначала выпишем общие решения уравнений, входящих в задачу (4.51), на интервале $(0, \varepsilon)$:

$$u_\lambda^\varepsilon(x_1) = C_{1\lambda}^\varepsilon \exp(-B_{1\lambda}x_1) + C_{2\lambda}^\varepsilon \exp(B_{1\lambda}x_1), \quad x_1 \in (0, \varepsilon(1-h)),$$

$$u_\lambda^\varepsilon(x_1) = C_{3\lambda}^\varepsilon \exp(-B_{2\lambda}x_1) + C_{4\lambda}^\varepsilon \exp(B_{2\lambda}x_1), \quad x_1 \in (\varepsilon(1-h), \varepsilon),$$

где

$$B_{s\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{\rho_s}{A_{s\lambda}}}, \quad s = 1, 2.$$

Имеем

$$u_\lambda^\varepsilon(+0) = C_{1\lambda}^\varepsilon + C_{2\lambda}^\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0) = B_{1\lambda}(-C_{1\lambda}^\varepsilon + C_{2\lambda}^\varepsilon),$$

$$u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) = C_{3\lambda}^\varepsilon \exp(-\varepsilon B_{2\lambda}(1-h)) + C_{4\lambda}^\varepsilon \exp(\varepsilon B_{2\lambda}(1-h)),$$

$$\frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0) = B_{2\lambda}(-C_{3\lambda}^\varepsilon \exp(-\varepsilon B_{2\lambda}(1-h)) + C_{4\lambda}^\varepsilon \exp(\varepsilon B_{2\lambda}(1-h))),$$

откуда находим

$$C_{1\lambda}^\varepsilon = \frac{1}{2B_{1\lambda}} \left(B_{1\lambda} u_\lambda^\varepsilon(+0) - \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0) \right),$$

$$C_{2\lambda}^\varepsilon = \frac{1}{2B_{1\lambda}} \left(B_{1\lambda} u_\lambda^\varepsilon(+0) + \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0) \right),$$

$$C_{3\lambda}^\varepsilon = \frac{\exp(\varepsilon B_{2\lambda}(1-h))}{2B_{2\lambda}} \left(B_{2\lambda} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) - \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0) \right),$$

$$C_{4\lambda}^\varepsilon = \frac{\exp(-\varepsilon B_{2\lambda}(1-h))}{2B_{2\lambda}} \left(B_{2\lambda} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) + \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0) \right).$$

Таким образом,

$$u_\lambda^\varepsilon(x_1) = \frac{\exp(-B_{1\lambda}x_1)}{2B_{1\lambda}} \left(B_{1\lambda} u_\lambda^\varepsilon(+0) - \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0) \right) +$$

$$+ \frac{\exp(B_{1\lambda}x_1)}{2B_{1\lambda}} \left(B_{1\lambda} u_\lambda^\varepsilon(+0) + \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0) \right), \quad x_1 \in (0, \varepsilon(1-h)),$$

$$u_\lambda^\varepsilon(x_1) = \frac{\exp(B_{2\lambda}(\varepsilon(1-h) - x_1))}{2B_{2\lambda}}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(B_{2\lambda} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) - \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0) \right) + \\ & + \frac{\exp(-B_{2\lambda}(\varepsilon(1-h) - x_1))}{2B_{2\lambda}} \left(B_{2\lambda} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) + \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0) \right), \\ & x_1 \in (\varepsilon(1-h), \varepsilon). \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) - 0) &= \frac{1}{2} (e^{-\varepsilon M_{1\lambda}} + e^{\varepsilon M_{1\lambda}}) u_\lambda^\varepsilon(+0) + \\ & + \frac{1}{2B_{1\lambda}} (-e^{-\varepsilon M_{1\lambda}} + e^{\varepsilon M_{1\lambda}}) \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0), \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) - 0) &= \frac{B_{1\lambda}}{2} (-e^{-\varepsilon M_{1\lambda}} + e^{\varepsilon M_{1\lambda}}) u_\lambda^\varepsilon(+0) + \\ & + \frac{1}{2} (e^{-\varepsilon M_{1\lambda}} + e^{\varepsilon M_{1\lambda}}) \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0), \\ u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon - 0) &= \frac{1}{2} (e^{-\varepsilon M_{2\lambda}} + e^{\varepsilon M_{2\lambda}}) u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) + \\ & + \frac{1}{2B_{2\lambda}} (-e^{-\varepsilon M_{2\lambda}} + e^{\varepsilon M_{2\lambda}}) \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0), \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon - 0) &= \frac{B_{2\lambda}}{2} (-e^{-\varepsilon M_{2\lambda}} + e^{\varepsilon M_{2\lambda}}) u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) + \\ & + \frac{1}{2} (e^{-\varepsilon M_{2\lambda}} + e^{\varepsilon M_{2\lambda}}) \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0), \end{aligned}$$

где

$$M_{1\lambda} = (1-h)B_{1\lambda} = \lambda(1-h)\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}}, \quad (4.53)$$

$$M_{2\lambda} = hB_{2\lambda} = \lambda h\sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}}. \quad (4.54)$$

Полученные четыре равенства можно также записать в матричном виде

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) - 0) \\ \frac{A_{1\lambda}}{A_{2\lambda}} \cdot \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) - 0) \end{pmatrix} = P_{1\lambda}^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(+0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0) \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon - 0) \\ \frac{A_{2\lambda}}{A_{1\lambda}} \cdot \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon - 0) \end{pmatrix} = P_{2\lambda}^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}(P_{1\lambda}^\varepsilon)_{11} &= \frac{1}{2} (e^{-\varepsilon M_{1\lambda}} + e^{\varepsilon M_{1\lambda}}), & (P_{1\lambda}^\varepsilon)_{12} &= \frac{1}{2B_{1\lambda}} (-e^{-\varepsilon M_{1\lambda}} + e^{\varepsilon M_{1\lambda}}), \\ (P_{1\lambda}^\varepsilon)_{21} &= \frac{A_{1\lambda}B_{1\lambda}}{2A_{2\lambda}} (-e^{-\varepsilon M_{1\lambda}} + e^{\varepsilon M_{1\lambda}}), & (P_{1\lambda}^\varepsilon)_{22} &= \frac{A_{1\lambda}}{2A_{2\lambda}} (e^{-\varepsilon M_{1\lambda}} + e^{\varepsilon M_{1\lambda}}), \\ (P_{2\lambda}^\varepsilon)_{11} &= \frac{1}{2} (e^{-\varepsilon M_{2\lambda}} + e^{\varepsilon M_{2\lambda}}), & (P_{2\lambda}^\varepsilon)_{12} &= \frac{1}{2B_{2\lambda}} (-e^{-\varepsilon M_{2\lambda}} + e^{\varepsilon M_{2\lambda}}), \\ (P_{2\lambda}^\varepsilon)_{21} &= \frac{A_{2\lambda}B_{2\lambda}}{2A_{1\lambda}} (-e^{-\varepsilon M_{2\lambda}} + e^{\varepsilon M_{2\lambda}}), & (P_{2\lambda}^\varepsilon)_{22} &= \frac{A_{2\lambda}}{2A_{1\lambda}} (e^{-\varepsilon M_{2\lambda}} + e^{\varepsilon M_{2\lambda}}).\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) - 0) &= u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0), & u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon - 0) &= u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 0), \\ A_{1\lambda} \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) - 0) &= A_{2\lambda} \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0), \\ A_{2\lambda} \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon - 0) &= A_{1\lambda} \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon + 0),\end{aligned}$$

то из последних двух матричных неравенств получаем

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0) \end{pmatrix} &= P_{1\lambda}^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(+0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon + 0) \end{pmatrix} &= P_{2\lambda}^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon(1-h) + 0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon(1-h) + 0) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon + 0) \end{pmatrix} = P_\lambda^\varepsilon \begin{pmatrix} u_\lambda^\varepsilon(+0) \\ \frac{\partial u_\lambda^\varepsilon}{\partial x_1}(+0) \end{pmatrix},$$

где элементы $(P_\lambda^\varepsilon)_{ij}$ матрицы $P_\lambda^\varepsilon = P_{2\lambda}^\varepsilon P_{1\lambda}^\varepsilon$ находятся по формулам

$$\begin{aligned}(P_\lambda^\varepsilon)_{11} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{A_{1\lambda}B_{1\lambda}}{A_{2\lambda}B_{2\lambda}} \right) \left(e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{A_{1\lambda}B_{1\lambda}}{A_{2\lambda}B_{2\lambda}} \right) \left(e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(P_\lambda^\varepsilon)_{12} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{B_{1\lambda}} + \frac{A_{1\lambda}}{A_{2\lambda}B_{2\lambda}} \right) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{B_{1\lambda}} - \frac{A_{1\lambda}}{A_{2\lambda}B_{2\lambda}} \right) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} \right), \\
(P_\lambda^\varepsilon)_{21} &= \frac{1}{4} \left(B_{1\lambda} + \frac{A_{2\lambda}B_{2\lambda}}{A_{1\lambda}} \right) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(B_{1\lambda} - \frac{A_{2\lambda}B_{2\lambda}}{A_{1\lambda}} \right) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} \right), \\
(P_\lambda^\varepsilon)_{22} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{A_{2\lambda}B_{2\lambda}}{A_{1\lambda}B_{1\lambda}} \right) \left(e^{\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{A_{2\lambda}B_{2\lambda}}{A_{1\lambda}B_{1\lambda}} \right) \left(e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} \right).
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$A_{s\lambda}B_{s\lambda} = \lambda\sqrt{\rho_s A_{s\lambda}}, \quad s = 1, 2,$$

предыдущие формулы можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
(P_\lambda^\varepsilon)_{11} &= \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}} \right) \left(e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}} \right) \left(e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} \right), \\
(P_\lambda^\varepsilon)_{12} &= \frac{1}{4\lambda} \sqrt{\frac{A_{1\lambda}}{\rho_1}} \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}} \right) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{4\lambda} \sqrt{\frac{A_{1\lambda}}{\rho_1}} \left(1 - \sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}} \right) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} \right), \\
(P_\lambda^\varepsilon)_{21} &= \frac{\lambda}{4} \sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}} \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_2 A_{2\lambda}}{\rho_1 A_{1\lambda}}} \right) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} \right) + \\
&\quad + \frac{\lambda}{4} \sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}} \left(1 - \sqrt{\frac{\rho_2 A_{2\lambda}}{\rho_1 A_{1\lambda}}} \right) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} \right), \\
(P_\lambda^\varepsilon)_{22} &= \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_2 A_{2\lambda}}{\rho_1 A_{1\lambda}}} \right) \left(e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}+M_{2\lambda})} \right) +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{\rho_2 A_{2\lambda}}{\rho_1 A_{1\lambda}}} \right) \left(e^{-\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})} \right).$$

Вычисления показывают, что $\det P_\lambda^\varepsilon = 1$, поэтому $(P_\lambda^\varepsilon)_{12}^M$ определяется через элементы матрицы P_λ^ε следующим образом:

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{12}^M = (P_\lambda^\varepsilon)_{12} \sum_{j=1}^K (-1)^{j-1} C_{M-j}^{j-1} (\operatorname{tr} P_\lambda^\varepsilon)^{M+1-2j},$$

$$\operatorname{tr} P_\lambda^\varepsilon = (P_\lambda^\varepsilon)_{11} + (P_\lambda^\varepsilon)_{22},$$

где $K = M/2$ при четном M и $K = (M+1)/2$ при нечетном M , а C_{M-j}^{j-1} — биномиальные коэффициенты,

$$C_{M-j}^{j-1} = \frac{(M-j)!}{(j-1)!(M+1-2j)!}.$$

Таким образом, уравнение (4.52) разбивается на два уравнения:

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{12} = 0$$

и

$$\sum_{j=1}^K (-1)^{j-1} C_{M-j}^{j-1} (\operatorname{tr} P_\lambda^\varepsilon)^{M+1-2j} = 0. \quad (4.55)$$

Докажем, что второе уравнение, в свою очередь, разбивается на $M-1$ уравнений

$$\operatorname{tr} P_\lambda^\varepsilon = 2 \cos \frac{\pi k}{M}, \quad k = 1, \dots, M-1.$$

Действительно, уравнение (4.55) есть алгебраическое уравнение степени $M-1$ относительно $\operatorname{tr} P_\lambda^\varepsilon$. Для того, чтобы убедиться, что ему удовлетворяют те значения λ , при которых $\operatorname{tr} P_\lambda^\varepsilon = 2 \cos(\pi k/M)$, воспользуемся тождеством (см. [129])

$$\sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l C_{n-l}^l (2 \cos z)^{n-2l} = \frac{\sin(n+1)z}{\sin z}.$$

Полагая здесь $l = j-1$, $n = M-1$, $z = \pi k/M$, получаем

$$\sum_{j=1}^K (-1)^{j-1} C_{M-j}^{j-1} (\operatorname{tr} P_\lambda^\varepsilon)^{M+1-2j} = \frac{\sin \pi k}{\sin \frac{\pi k}{M}} = 0, \quad k = 1, \dots, M-1,$$

что и требовалось доказать.

Введем обозначение

$$K_\lambda = \sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}}$$

и объединим полученные в данном параграфе результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 15. *Спектр S_ε задачи (4.51) представляет собой объединение корней следующих M уравнений:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda}(1 + K_\lambda) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})} \right) + \\ & + \frac{1}{\lambda}(1 - K_\lambda) \left(-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} & \left(2 + K_\lambda + \frac{1}{K_\lambda} \right) \left(e^{-\varepsilon(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})} \right) + \\ & + \left(2 - K_\lambda - \frac{1}{K_\lambda} \right) \left(e^{-\varepsilon(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})} \right) = \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$= 8 \cos \frac{\pi k}{M}, \quad k = 1, \dots, M - 1.$$

Интересно отметить, что если $\lambda \in S_\varepsilon$ есть корень уравнения (4.56), то решение $u_\lambda^\varepsilon(x_1)$ задачи (4.51) обладает следующим свойством:

$$u_\lambda^\varepsilon(n\varepsilon) = 0, \quad n = 0, \dots, M.$$

Таким образом, исследование спектра одномерных собственных колебаний, распространяющихся в слоистой среде перпендикулярно ее слоям, сводится к решению трансцендентных уравнений (4.56) и (4.57). Эти уравнения могут быть решены только численно, поскольку найти их аналитическое решение даже в отдельных частных случаях не представляется возможным. Вместе с тем необходимо отметить, что отсутствие информации о локализации и кратности корней уравнений (4.56) и (4.57) существенно затрудняет их поиск с помощью численных методов. Кроме того, увеличение числа слоев, входящих в рассматриваемый образец слоистой среды,

приводит к пропорциональному увеличению числа этих уравнений, а значит, росту объема вычислительных процедур при численном поиске точек спектра S_ε .

4.4. Сравнение спектров одномерных собственных колебаний слоистых и усредненных сред

Для того, чтобы выяснить, какие начальные приближения следует выбирать при численном поиске корней трансцендентных уравнений (4.56) и (4.57) в случае многослойных сред, требуется исследовать асимптотическое поведение корней $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ этих уравнений при $\varepsilon \rightarrow 0$. Такое исследование даст возможность выяснить, насколько близки между собой точки спектров S_ε и S_1 одномерных собственных колебаний соответственно слоистой и усредненной сред.

Разложим функции $e^{\pm\varepsilon\lambda(M_1 \pm M_2)}$ в ряды по степеням $\pm\varepsilon\lambda(M_1 \pm M_2)$, а функцию $\cos(\pi k/M)$ — в ряд по степеням $\varepsilon\pi k/L$. Имеем

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n (M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})^n}{n!}, \\ e^{-\varepsilon(M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^n (M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})^n}{n!}, \\ \cos \frac{\pi k}{M} = \cos \frac{\varepsilon\pi k}{L} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\varepsilon\pi k}{L} \right)^{2n} \end{aligned} \quad (4.58)$$

и, следовательно,

$$e^{-\varepsilon(M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})} = 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n} (M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})^{2n}}{(2n)!}, \quad (4.59)$$

$$-e^{-\varepsilon(M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})} + e^{\varepsilon(M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-1} (M_{1\lambda} \pm M_{2\lambda})^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad (4.60)$$

После подстановки разложений (4.60) в уравнение (4.56) получаем

$$\frac{1}{\lambda} (1 + K_\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-1} (M_{1\lambda} + M_{2\lambda})^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$+\frac{1}{\lambda}(1-K_\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{2n-1}(M_{1\lambda}-M_{2\lambda})^{2n-1}}{(2n-1)!}=0$$

или, разделив на ε ,

$$\begin{aligned} & 2\left((1-h)\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}}+hK_\lambda\sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}}\right)+ \\ & +\left(1+\sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\varepsilon\lambda)^{2n-2}}{(2n-1)!}\left((1-h)\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}}+hK_\lambda\sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}}\right)^{2n-1}+ \\ & +\left(1-\sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\varepsilon\lambda)^{2n-2}}{(2n-1)!}\left((1-h)\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}}-hK_\lambda\sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}}\right)^{2n-1}=0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$2\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}}\left(1-h+\frac{hA_{1\lambda}}{A_{2\lambda}}\right)+\varepsilon^2Q_{1\lambda}^\varepsilon=0, \quad (4.61)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{1\lambda}^\varepsilon & =\left(1+\sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon^{2n-4}\lambda^{2n-2}}{(2n-1)!}\left((1-h)\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}}+h\sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}}\right)^{2n-1}+ \\ & +\left(1-\sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon^{2n-4}\lambda^{2n-2}}{(2n-1)!}\left((1-h)\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}}-h\sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}}\right)^{2n-1}. \end{aligned}$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, считая, что последовательность корней $\lambda(\varepsilon)$ ограничена и

$$\lambda(\varepsilon) \rightarrow \theta_0 < \infty.$$

Предполагая, что $A_{1\lambda}$ и $A_{2\lambda}$ не пропорциональны друг другу, т.е. $A_{1\lambda} \neq kA_{2\lambda}$ для всех $k = \text{const} > 0$, из (4.61) заключаем, что θ_0 есть корень уравнения

$$b_{12}\theta + a_{12} = \sum_{s=1}^2 R_s(k_s + 2/3)|Y_{3-s}| \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\theta + \gamma_n^{(s)}}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (3.122), мы видим, что $-\theta_0$ совпадает с одним из корней ξ_m уравнения (3.122). Таким образом, θ_0 есть точка, в

которой обращается в нуль знаменатель одной из дробей в правых частях уравнений (4.40). Отметим, что из теоремы Руше следует обратное утверждение, а именно: для каждой точки $\theta_m = -\xi_m$, в которой обращается в нуль один из знаменателей дробей в правых частях уравнений (4.40), найдется последовательность корней уравнения (4.56), сходящаяся к θ_m при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, конечные предельные точки последовательностей корней уравнений (4.56) не являются точками спектра S_1 .

Завершая исследование поведения корней уравнения (4.56) при $\varepsilon \rightarrow 0$, отметим, что если $A_{1\lambda} = kA_{2\lambda}$ при некотором $k = \text{const} > 0$, то из (4.61) следует существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что уравнение (4.56) не имеет корней при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Таким образом, в этом случае не существует конечного предела при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательности корней $\lambda(\varepsilon)$ уравнений (4.56). Заметим, что указанному условию пропорциональности удовлетворяют только функции $A_{s\lambda} = a_s + b_s\lambda$, если a_s и b_s связаны соотношением (4.42).

Перейдем к исследованию асимптотического поведения корней уравнений (4.57) при $\varepsilon \rightarrow 0$. С этой целью подставим (4.58) и (4.59) в (4.57).

Имеем

$$\begin{aligned} & \left(2 + K_\lambda + \frac{1}{K_\lambda}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})^{2n}}{(2n)!} + \\ & + \left(2 - K_\lambda - \frac{1}{K_\lambda}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})^{2n}}{(2n)!} - \\ & - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\varepsilon\pi k}{L}\right)^{2n} = 0, \quad k = 1, \dots, M-1, \end{aligned}$$

откуда после деления на $2\varepsilon^2$ получаем

$$\begin{aligned} & M_{1\lambda}^2 + M_{2\lambda}^2 + M_{1\lambda}M_{2\lambda} \left(K_\lambda - \frac{1}{K_\lambda}\right) + \frac{\pi^2 k^2}{L^2} + \\ & + \left(1 + \frac{K_\lambda}{2} + \frac{1}{2K_\lambda}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-2}}{(2n)!} (M_{1\lambda} + M_{2\lambda})^{2n} + \\ & + \left(1 - \frac{K_\lambda}{2} - \frac{1}{2K_\lambda}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-2}}{(2n)!} (M_{1\lambda} - M_{2\lambda})^{2n} - \end{aligned}$$

$$-2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^{2n-2}}{(2n)!} \left(\frac{\pi k}{L} \right)^{2n} = 0, \quad k = 1, \dots, M-1.$$

Принимая во внимание (4.53) и (4.54), эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$\rho_0 \left(\frac{1-h}{A_{1\lambda}} + \frac{h}{A_{2\lambda}} \right) \lambda^2 + \frac{\pi^2 k^2}{L^2} + \varepsilon^2 Q_{2\lambda}^\varepsilon = 0, \quad (4.62)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{2\lambda}^\varepsilon = & \left(1 + \frac{K_\lambda}{2} + \frac{1}{2K_\lambda} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-4} \lambda^{2n}}{(2n)!} \left((1-h) \sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}} + h \sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}} \right)^{2n} + \\ & + \left(1 - \frac{K_\lambda}{2} - \frac{1}{2K_\lambda} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-4} \lambda^{2n}}{(2n)!} \left((1-h) \sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}} - h \sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}} \right)^{2n} - \\ & - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^{2n-4}}{(2n)!} \left(\frac{\pi k}{L} \right)^{2n}. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_k(\varepsilon)$ — последовательность корней k -го уравнения (4.57) и

$$\lambda_k(\varepsilon) \rightarrow \theta_k < \infty.$$

Тогда из (4.62) следует, что θ_k есть корень уравнения

$$(A_{1\theta}h + A_{2\theta}(1-h))\theta^2 + C_k A_{1\theta} A_{2\theta} = 0, \quad C_k = \frac{\pi^2 k^2}{\rho_0 L^2},$$

которое в развернутом виде записывается как

$$\begin{aligned} & b_{12}\theta^3 + \left(a_{12} - \sum_{s=1}^2 R_s |Y_{3-s}| \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(k_s + 2/3)v_n^{(s)}}{\theta + \gamma_n^{(s)}} \right) \theta^2 + \\ & + C_k \prod_{s=1}^2 \left(a_s + b_s \theta - R_s \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\theta + \gamma_n^{(s)}} \right) = 0, \quad (4.63) \end{aligned}$$

Покажем, что уравнение (4.63) эквивалентно уравнению (4.40). Проще всего это сделать для случая, когда $R_1 = R_2 = 0$. Действительно, в этом случае уравнение (4.40) эквивалентно кубическому уравнению

$$\lambda^3 + (\xi_1 + \beta_1 C_k) \lambda^2 + (\alpha_1 + \beta_1 \xi_1) C_k \lambda + (\alpha_1 \xi_1 - d_1) C_k = 0.$$

Так как для слоистых сред с диссипацией $b_{12} \neq 0$ при $R_1 = R_2 = 0$, то после подстановки найденных выше величин $\alpha_1, \beta_1, d_1, \xi_1$ получаем уравнение

$$\lambda^3 + \frac{1}{b_{12}}(a_{12} + b_1 b_2 C_k) \lambda^2 + \frac{1}{b_{12}}(a_1 b_2 + a_2 b_1) C_k \lambda + \frac{a_1 a_2}{b_{12}} C_k = 0,$$

коэффициенты которого совпадают с коэффициентами уравнения (4.63) при $R_1 = R_2 = 0$.

Пусть теперь $R_1 + R_2 = 1$. Меняя в случае необходимости обозначения фаз, без ограничения общности можно считать, что $R_1 = 0$, а $R_2 = 1$. Далее, выпишем алгебраические уравнения, эквивалентные дробно-рациональным уравнениям (4.40) и (4.63) при $R_1 = 0, R_2 = 1$:

$$\lambda^{N_2+k} + S_1 \lambda^{N_2+k-1} + \dots + S_{N_2+k} = 0,$$

$$\theta^{N_2+k} + D_1 \theta^{N_2+k-1} + \dots + D_{N_2+k} = 0,$$

где

$$k = 2, \quad S_1 = \sum_{m=1}^{N_2} \xi_m, \quad D_1 = \sum_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} - \frac{1-h}{a_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)},$$

...

$$S_{N_2+2} = C_k \prod_{m=1}^{N_2} \xi_m \left(\frac{a_1 a_2}{a_{12}} - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{d_m}{\xi_m} \right),$$

$$D_{N_2+2} = \frac{a_1 C_k}{a_{12}} \prod_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} \left(a_2 - \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\gamma_n^{(2)}} \right)$$

при $b_{12} = 0$ и

$$k = 3, \quad S_1 = \frac{b_1 b_2}{b_{12}} C_k + \sum_{m=1}^{N_2+1} \xi_m, \quad D_1 = \frac{a_{12} + b_1 b_2 C_k}{b_{12}} + \sum_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)},$$

...

$$S_{N_2+3} = C_k \prod_{m=1}^{N_2+1} \xi_m \left(\frac{a_2 b_1^2 h + a_1 b_2^2 (1-h)}{b_{12}} - \sum_{m=1}^{N_2+1} \frac{d_m}{\xi_m} \right),$$

$$D_{N_2+3} = \frac{a_1 C_k}{b_{12}} \prod_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} \left(a_2 - \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\gamma_n^{(2)}} \right)$$

при $b_{12} \neq 0$. Докажем, что $S_1 = D_1$. Для этого выпишем уравнения

$$\prod_{n=1}^{N_2} (\xi + \gamma_n^{(2)}) \left(1 + \frac{1-h}{a_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi + \gamma_n^{(2)}} \right) = 0 \quad (4.64)$$

и

$$\prod_{n=1}^{N_2} (\xi + \gamma_n^{(2)}) \left(\xi - \frac{a_{12}}{b_{12}} - \frac{1-h}{b_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n^{(2)}}{\xi + \gamma_n^{(2)}} \right) = 0, \quad (4.65)$$

равносильные уравнению (3.122) при $b_{12} = 0$ и $b_{12} \neq 0$ соответственно. Применяя формулу Виета, связывающую корни уравнения (4.64) и коэффициент при ξ^{N_2-1} , а также корни уравнения (4.65) и коэффициент при ξ^{N_2} , получаем

$$\sum_{n=1}^{N_2} \xi_m = \sum_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} - \frac{1-h}{a_{12}} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)},$$

если $b_{12} = 0$, и

$$\sum_{n=1}^{N_2+1} \xi_m = \sum_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} + \frac{a_{12}}{b_{12}},$$

если $b_{12} \neq 0$. Отсюда сразу же получаем требуемое равенство $S_1 = D_1$.

Для доказательства остальных равенств $S_2 = D_2, \dots, S_{N_2+k} = D_{N_2+k}$ применяются формулы Виета, связывающие корни и коэффициенты уравнений (4.64) и (4.65), а также корни и коэффициенты алгебраических уравнений, эквивалентных дробно-рациональным уравнениям (4.47) и (4.48).

Нам остается рассмотреть случай, когда $R_1 \neq 0, R_2 \neq 0$. Алгебраические уравнения, эквивалентные дробно-рациональным уравнениям (4.40) и (4.63) имеют вид

$$\lambda^{N_1+N_2+k} + S_1 \lambda^{N_1+N_2+k-1} + \dots + S_{N_1+N_2+k} = 0,$$

$$\theta^{N_1+N_2+k} + D_1 \theta^{N_1+N_2+k-1} + \dots + D_{N_1+N_2+k} = 0,$$

где

$$k = 2, \quad S_1 = \sum_{m=1}^{N_1+N_2} \xi_m,$$

$$D_1 = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \left(\gamma_n^{(s)} - \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \frac{|Y_{3-s}| v_n^{(s)}}{a_{12}} \right),$$

...

$$S_{N_1+N_2+2} = C_k \prod_{n=1}^{N_1+N_2} \xi_m \left(\frac{a_1 a_2}{a_{12}} - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \frac{d_m}{\xi_m} \right),$$

$$D_{N_1+N_2+2} = \frac{C_k}{a_{12}} \prod_{n=1}^{N_1} \gamma_n^{(1)} \prod_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} \prod_{s=1}^2 \left(a_s - \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \right)$$

при $b_{12} = 0$ и

$$k = 3, \quad S_1 = \frac{b_1 b_2}{b_{12}} C_k + \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \xi_m,$$

$$D_1 = \frac{a_{12} + b_1 b_2 C_k}{b_{12}} + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{N_s} \gamma_n^{(s)},$$

...

$$S_{N_1+N_2+3} = C_k \prod_{n=1}^{N_1+N_2+1} \xi_m \left(\frac{a_2 b_1^2 h + a_1 b_2^2 (1-h)}{b_{12}} - \sum_{n=1}^{N_1+N_2+1} \frac{d_m}{\xi_m} \right),$$

$$D_{N_1+N_2+3} = \frac{C_k}{b_{12}} \prod_{n=1}^{N_1} \gamma_n^{(1)} \prod_{n=1}^{N_2} \gamma_n^{(2)} \prod_{s=1}^2 \left(a_s - \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \right)$$

при $b_{12} \neq 0$. Выписывая алгебраические уравнения, эквивалентные уравнению (3.122) при $b_{12} = 0$ и $b_{12} \neq 0$, а затем применяя формулу Виета, связывающую корни этих уравнений и коэффициенты при $\xi^{N_1+N_2-1}$ и $\xi^{N_1+N_2}$ соответственно, получаем равенство $S_1 = D_1$. Численное исследование подтверждает также выполнение равенств $S_2 = D_2, \dots, S_{N_1+N_2+k} = D_{N_1+N_2+k}$ для $N_1, N_2 = 1, 2$.

Установленная эквивалентность уравнений (4.40) и (4.63) позволяет утверждать, что все конечные предельные точки последовательностей корней трансцендентных уравнений (4.57) являются точками спектра S_1 одномерных собственных колебаний, распространяющихся в усредненной среде вдоль оси Ox_1 . Кроме того, из теоремы Руше следует обратное утверждение, а именно: для каждого корня λ_{jk} , $j = 1, \dots, M+2$, уравнения (4.40)

найдется последовательность корней k -го уравнения (4.62), сходящаяся к λ_{jk} при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Объединим полученные в данном параграфе результаты в виде двух теорем.

Теорема 16. *Если $R_1 = R_2 = 0$, а компоненты $a_s = a_{1111}^{(s)}$ и $b_s = b_{1111}^{(s)}$ тензоров $a^{(s)}$ и $b^{(s)}$ связаны соотношением (4.42), то спектр S_ε задачи (4.51) сходится по Хаусдорфу к спектру S_1 задачи (4.39), т.е.*

(i) *для любого $\lambda \in S_1$ найдется последовательность $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ такая, что $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;*

(ii) *если $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ и $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0 < \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\lambda_0 \in S_1$.*

Необходимо отметить, что сходимость спектров по Хаусдорфу $S_\varepsilon \rightarrow S_1$ имеет место только для указанного частного случая слоистой среды. Для всех остальных рассматриваемых нами слоистых сред с диссипацией сходимость спектров по Хаусдорфу отсутствует, так как предел по Хаусдорфу спектра S_ε исходной задачи “больше” спектра S_1 .

Перед формулировкой второй теоремы обозначим через V множество, состоящее из всех точек, к которым обращается в нуль знаменатель одной из дробей в правых частях уравнений (4.40), корни которых образуют спектр S_1 : $V = \{-\xi_1, \dots, -\xi_M\}$.

Теорема 17. *Если условия теоремы 16 не выполнены, то спектр S_ε задачи (4.51) сходится по Хаусдорфу к объединению спектра S_1 задачи (4.39) и множества V , т.е.*

(i) *для любого $\lambda \in S_1$ и для любого $\theta \in V$ найдутся последовательности $\lambda_{1\varepsilon} \in S_\varepsilon$ и $\lambda_{2\varepsilon} \in S_\varepsilon$ такие, что $\lambda_{1\varepsilon} \rightarrow \lambda$ и $\lambda_{2\varepsilon} \rightarrow \theta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;*

(ii) *если $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ — последовательность корней уравнения (4.56) и $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0 < \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\lambda_0 \in V$;*

(iii) если $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ — последовательность корней одного из уравнений (4.57) и $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0 < \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\lambda_0 \in S_1$.

Интересно отметить, что если в предыдущих рассуждениях с самого начала взять $b_{12} = 0$, $R_1 = R_2 = 0$ (это соответствует случаю слоистой упругой среды), то из (4.61) следует существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что уравнение (4.56) не имеет корней для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. В этом случае все конечные предельные точки последовательностей λ_ε являются корнями уравнений (4.63), которые в данном случае принимают вид

$$\lambda^2 - \frac{a_1 a_2 \pi^2 k^2}{\rho_0 a_{12} L^2} = 0.$$

Объединение корней

$$\lambda_{1k,2k} = \pm \frac{i\pi k}{L} \sqrt{\frac{1}{\langle a^{-1} \rangle}}$$

этих квадратных уравнений для всех $k \in \mathbb{N}$ представляет собой спектр одномерных собственных колебаний усредненного упругого материала, что приводит к хорошо известному результату о сходимости по Хаусдорфу спектров исходной и усредненной задач для слоистых упругих сред [56].

Отметим, что установленная сходимость $S_\varepsilon \rightarrow S_1 \cup V$ по Хаусдорфу означает, в частности, что для многослойных сред с диссипацией при численном поиске точек спектра S_ε в качестве начальных приближений следует брать точки как спектра S_1 , так и множества V .

Для численного исследования степени близости точек спектра S_ε и точек спектра S_1 и множества V возьмем $L = 0.14$ м и рассмотрим слоистый композит, занимающий полосу $0 < x_1 < L$ и состоящий из чередующихся слоев УМ (первая фаза) и ВУМ-II (вторая фаза) со следующими числовыми характеристиками: $\varepsilon = 0.014$ м, $h = 0.5$, $\rho_1 = 5500$ кг/м³, $\rho_2 = 2500$ кг/м³, $\lambda_1 = 9.8 \times 10^9$ Па, $\mu_1 = 8.5 \times 10^9$ Па, $\lambda_2 = 5.5 \times 10^8$ Па, $\mu_2 = 3.8 \times 10^8$ Па, $N_2 = 1$, $k_2 = 0$, $v_1^{(2)} = 3 \cdot 10^{11}$ Па · с⁻¹, $\gamma_1^{(2)} = 400$

с^{-1} . Отметим, что выбранный композит состоит из 10 упругих и 10 вязкоупругих слоев (т.е. $M = 10$), причем толщина всех слоев предполагается одинаковой и равной 7 мм.

Используя приведенные ранее формулы, вычисляем коэффициенты и ядро свертки интегро-дифференциального уравнения, входящего в задачу (4.36):

$$\rho_0 = 4000 \text{ кг/м}^3, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_1 = 2.4979 \times 10^9 \text{ Па},$$

$$g_1(t) = d_1 \exp(-\xi_1 t), \quad d_1 = 3.6359 \times 10^{11} \text{ Па} \cdot \text{с}^{-1}, \quad \xi_1 = 392.8851 \text{ с}^{-1}.$$

Спектр S_1 есть объединение корней уравнений (4.40) при $M = 1$ или, что то же самое, кубических уравнений

$$\lambda^3 + \xi_1 \lambda^2 + \alpha_1 C_k \lambda + (\alpha_1 \xi_1 - d_1) C_k = 0, \quad C_k = \frac{\pi^2 k^2}{\rho_0 L^2} \quad (4.66)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Так как $d_1 < (8/9)\alpha_1 \xi_1$, то при каждом $k \in \mathbb{N}$ уравнение (4.66) имеет один вещественный корень $\lambda_{1k}^{(0)}$ и два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{2k,3k}^{(0)} = A_k^{(0)} \pm i\omega_k^{(0)}$ (см. Теорему 12), причем при $k \rightarrow \infty$

$$\lambda_{1k}^{(0)} \rightarrow -\xi_1 + \frac{d_1}{\alpha_1} = -247.3282 \text{ с}^{-1},$$

$$A_k^{(0)} \rightarrow -\frac{d_1}{2\alpha_1} = -72.7784 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_k^{(0)} \rightarrow \infty.$$

В таблице 4.1 приведены значения $\lambda_{1k}^{(0)}$ и $A_k^{(0)}$, вычисленные с точностью до 0.0001 с^{-1} , и собственные частоты $\omega_k^{(0)}$ колебаний усредненной среды, вычисленные с точностью до 0.1 с^{-1} .

Перейдем к численному исследованию погрешностей значений $-\xi_1$, $\lambda_{1k}^{(0)}$, $\lambda_{2k}^{(0)}$ и $\lambda_{3k}^{(0)}$, принимая их в качестве приближенных значений точек спектра S_ε . Согласно теореме 4.35, спектр S_ε есть совокупность нулей функций

$$\begin{aligned} R^{(M)}(\lambda) = & \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 A_{2\lambda}}}\right) \left(-e^{-L(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})/M} + e^{L(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})/M}\right) + \\ & + \left(1 - \sqrt{\frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 A_{2\lambda}}}\right) \left(-e^{-L(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})/M} + e^{L(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})/M}\right) \end{aligned}$$

	$\lambda_{1k}^{(0)}, c^{-1}$	$A_k^{(0)}, c^{-1}$	$\omega_k^{(0)}, c^{-1}$
$k = 1$	-247.3566	-72.7643	17731.7
$k = 2$	-247.3353	-72.7749	35465.2
$k = 3$	-247.3314	-72.7769	53198.3
$k = 4$	-247.3300	-72.7775	70931.3
$k = 5$	-247.3294	-72.7779	88664.2

Таблица 4.1. Результаты расчета точек $\lambda_{1k}^{(0)}$ и $A_k^{(0)} + i\omega_k^{(0)}$ спектра S_1

и

$$R_k^{(M)}(\lambda) = \left(2 + \sqrt{\frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 A_{2\lambda}}} + \sqrt{\frac{\rho_2 A_{2\lambda}}{\rho_1 a_1}} \right) \left(e^{-L(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})/M} + e^{L(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})/M} \right) +$$

$$+ \left(2 - \sqrt{\frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 A_{2\lambda}}} - \sqrt{\frac{\rho_2 A_{2\lambda}}{\rho_1 a_1}} \right) \left(e^{-L(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})/M} + e^{L(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})/M} \right) - 8 \cos \frac{\pi k}{M},$$

$$k = 1, \dots, M - 1,$$

где

$$a_1 = \lambda_1 + 2\mu_1, \quad A_{2\lambda} = \lambda_2 + 2\mu_2 - \frac{v_1^{(2)}(k_2 + 2/3)}{\lambda + \gamma_1^{(2)}},$$

$$M_{1\lambda} = \lambda(1 - h) \sqrt{\frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}}, \quad M_{2\lambda} = \lambda h \sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}}.$$

Эти функции имеют единственную изолированную особую точку $\lambda = \lambda_1$ — точку, в которой $A_{2\lambda} = 0$. Нетрудно проверить, что

$$\lambda_1 = -\gamma_1^{(2)} + \frac{v_1^{(2)}(k_2 + 2/3)}{\lambda_2 + 2\mu_2} = -\xi_1 + \frac{d_1}{\alpha_1},$$

т.е. λ_1 совпадает с пределом последовательности $\lambda_{1k}^{(0)}$ вещественных корней кубических уравнений (4.66).

Для нахождения точки спектра S_ε , наиболее близкой к $-\xi_1$, опишем вокруг точки $(-\xi_1, 0)$ комплексной плоскости окружность D радиуса R . Из принципа аргумента, хорошо известного в теории функций комплексного переменного, следует, что разность между числом нулей и числом

полюсов функции $R^{(10)}(\lambda)$ внутри круга, ограниченного окружностью D , равна полному числу оборотов вокруг точки $w = 0$, которые сделает вектор $w = R^{(10)}(\lambda)$, когда λ обходит путь D [70]. Опираясь на принцип аргумента, с помощью численных расчетов можно установить, что внутри круга радиуса $R = 0.00001 \text{ с}^{-1}$ с центром в точке $-\xi_1 = -392.8851 \text{ с}^{-1}$ функция $R^{(10)}(\lambda)$ имеет в точности один нуль $\lambda^{(10)}$. Таким образом, $\lambda^{(10)}$ совпадает с $-\xi_1$ с точностью до 0.0001 с^{-1} , а относительная погрешность значения $-\xi_1$, принимаемого в качестве приближенного значения $\lambda^{(10)} \in S_\varepsilon$, не превышает $2.6 \cdot 10^{-6} \%$.

Для нахождения точек спектра S_ε , лежащих вблизи вещественных точек $\lambda_{1k}^{(0)}$ спектра S_1 , опишем вокруг каждой точки $(\lambda_{1k}^{(0)}, 0)$ комплексной плоскости окружность радиуса R_k . Используя принцип аргумента, с помощью численных расчетов можно установить, что внутри круга радиуса 0.0002 с^{-1} с центром в точке $\lambda_{1k}^{(0)}$ функция $R_k^{(10)}(\lambda)$ имеет в точности один нуль. Дальнейшее численное исследование позволяет вычислить вещественные нули $\lambda_{1k}^{(10)}$ функций $R_k^{(10)}(\lambda)$ с точностью до 0.0001 с^{-1} (см. табл. 4.2). Сравнивая значения $\lambda_{1k}^{(10)}$ с их начальными приближениями $\lambda_{1k}^{(0)}$, мы видим, что абсолютная погрешность $\lambda_{1k}^{(10)}$ равна 0.0001 с^{-1} , а относительная погрешность не превышает $4.1 \cdot 10^{-4} \%$.

	$\lambda_{1k}^{(10)}, \text{ с}^{-1}$	$ \lambda_{1k}^{(10)} - \lambda_{1k}^{(0)} , \text{ с}^{-1}$
$k = 1$	-247.3567	0.0001
$k = 2$	-247.3354	0.0001
$k = 3$	-247.3315	0.0001
$k = 4$	-247.3301	0.0001
$k = 5$	-247.3295	0.0001

Таблица 4.2. Вещественные точки $\lambda_{1k}^{(10)}$ спектра S_ε

Для нахождения точек спектра S_ε , лежащих вблизи комплексных точек $\lambda_{2k,3k}^{(0)}$ спектра S_1 , опишем вокруг каждой точки $(A_k^{(0)}, \pm\omega_k^{(0)})$ комплексной плоскости эллипс E_k^\pm с центром в этой точке, большая полуось которого параллельна мнимой оси (т.е. эллипс вытянут вдоль мнимой оси). Обозначим через A_{2k} и B_{2k} длину соответственно малой и большой полуоси эллипса E_k^\pm . Используя принцип аргумента и численные расчеты, можно установить, что если взять

$$\begin{aligned} A_{21} &= 0.2 \text{ с}^{-1}, & B_{21} &= 35 \text{ с}^{-1}, & A_{22} &= 0.5 \text{ с}^{-1}, & B_{22} &= 260 \text{ с}^{-1}, \\ A_{23} &= 1 \text{ с}^{-1}, & B_{23} &= 910 \text{ с}^{-1}, & A_{24} &= 1.5 \text{ с}^{-1}, & B_{24} &= 2300 \text{ с}^{-1}, \\ A_{25} &= 2.5 \text{ с}^{-1}, & & & B_{25} &= 4800 \text{ с}^{-1}, \end{aligned}$$

то внутри эллипса E_k^\pm функция $R_k^{(10)}(\lambda)$ имеет в точности один нуль $A_k^{(10)} \pm i\omega_k^{(10)}$. Используя начальную локализацию нулей функций $R_k^{(10)}(\lambda)$ и опираясь на принцип аргумента, с помощью сдвига центров эллипсов и уменьшения длин их полуосей мы можем численно найти $A_k^{(10)}$ и $\omega_k^{(10)}$ с точностью до 0.0001 с^{-1} и 0.1 с^{-1} соответственно. Результаты расчетов приведены в таблицах 4.3 и 4.4.

	$A_k^{(10)}, \text{ с}^{-1}$	$\delta A_k^{(10)}, \text{ с}^{-1}$	$\Delta A_k^{(10)}, \%$
$k = 1$	-72.8000	0.0357	0.049
$k = 2$	-72.9188	0.1439	0.197
$k = 3$	-73.1028	0.3259	0.446
$k = 4$	-73.3614	0.5839	0.796
$k = 5$	-73.6947	0.9168	1.244

Таблица 4.3. Вещественные части точек $A_k^{(10)} + i\omega_k^{(10)}$ спектра S_ε и погрешности $\delta A_k^{(10)}$, $\Delta A_k^{(10)}$

В таблицах 4.3 и 4.4 приведены также абсолютные и относительные

	$\omega_k^{(10)}, \text{ c}^{-1}$	$\delta\omega_k^{(10)}, \text{ c}^{-1}$	$\Delta\omega_k^{(10)}, \%$
$k = 1$	17701.6	30.1	0.170
$k = 2$	35220.6	244.6	0.694
$k = 3$	52351.3	847.0	1.618
$k = 4$	68849.1	2082.2	3.024
$k = 5$	84400.2	4264.0	5.052

Таблица 4.4. Мнимые части точек $A_k^{(10)} + i\omega_k^{(10)}$ спектра S_ε и погрешности $\delta\omega_k^{(10)}$, $\Delta\omega_k^{(10)}$ погрешности

$$\delta A_k^{(10)} = |A_k^{(10)} - A_k^{(0)}|, \quad \delta\omega_k^{(10)} = |\omega_k^{(10)} - \omega_k^{(0)}|,$$

$$\Delta A_k^{(10)} = \frac{|A_k^{(10)} - A_k^{(0)}|}{|A_k^{(10)}|}, \quad \Delta\omega_k^{(10)} = \frac{|\omega_k^{(10)} - \omega_k^{(0)}|}{|\omega_k^{(10)}|}$$

значений $A_k^{(0)}$ и $\omega_k^{(0)}$, принимаемых в качестве приближенных значений $A_k^{(10)}$ и $\omega_k^{(10)}$ для точек $A_k^{(10)} \pm i\omega_k^{(10)}$, принадлежащих спектру S_ε . Отметим, в частности, что при увеличении номера k относительные погрешности $\Delta A_k^{(10)}$ и $\Delta\omega_k^{(10)}$ увеличиваются и при $k = 5$ достигают 1.244% и 5.052% соответственно.

Перейдем к численному исследованию скорости сходимости точек спектра S_ε к их предельным значениям $-\xi_1$, $\lambda_{1k}^{(0)} \in S_1$ и $A_k^{(0)} \pm i\omega_k^{(0)} \in S_1$ при увеличении числа слоев, входящих в рассматриваемый образец слоистого композита. С этой целью рассмотрим еще два композита, занимающие полосу $0 < x_1 < L$ при $L = 0.14$ м и отличающиеся от предыдущего только числом и толщиной упругих и вязкоупругих слоев: для первого композита примем $M = 14$ (при этом $\varepsilon = 0.01$ м), а для второго — $M = 28$ (при этом $\varepsilon = 0.005$ м). Учитывая, что относительные погрешности приближенных вещественных значений $-\xi_1$ и $\lambda_{1k}^{(0)}$ очень малы даже при $M = 10$, мы ограничимся вычислением относительных погрешностей вещественных и мнимых частей комплексных точек $A_k^{(0)} \pm i\omega_k^{(0)}$ спектра S_1 , принимаемых в

качестве приближенных значений комплексных точек $A_k^{(M)} \pm i\omega_k^{(M)}$ спектра S_ε для указанных двух композитов.

В таблицах 4.5 и 4.6 приведены значения $A_k^{(M)}$ и $\omega_k^{(M)}$, вычисленные с точностью до 0.0001 с^{-1} и 0.1 с^{-1} соответственно, а также относительные погрешности

$$\Delta A_k^{(M)} = \frac{|A_k^{(0)} - A_k^{(M)}|}{|A_k^{(M)}|}, \quad \Delta \omega_k^{(M)} = \frac{|\omega_k^{(0)} - \omega_k^{(M)}|}{|\omega_k^{(M)}|}.$$

M	$A_k^{(M)}, \text{ с}^{-1}$		$\Delta A_k^{(M)}, \%$	
	14	28	14	28
$k = 1$	-72.7825	-72.7688	0.025	0.006
$k = 2$	-72.8481	-72.7931	0.100	0.025
$k = 3$	-72.9422	-72.8180	0.227	0.056
$k = 4$	-73.0729	-72.8507	0.404	0.100
$k = 5$	-73.2419	-72.8924	0.634	0.157

Таблица 4.5. Вещественные части точек $A_k^{(M)} + i\omega_k^{(M)}$ спектра S_ε и относительные погрешности $\Delta A_k^{(M)}$

Сравнение относительных погрешностей $\Delta A_k^{(M)}$, $\Delta \omega_k^{(M)}$ при $M = 10$, $M = 14$ и $M = 28$ показывает, что имеют место оценки

$$\Delta A_k^{(14)} < 0.52 \Delta A_k^{(10)}, \quad \Delta A_k^{(28)} \leq 0.25 \Delta A_k^{(14)},$$

$$\Delta \omega_k^{(14)} < 0.51 \Delta \omega_k^{(10)}, \quad \Delta \omega_k^{(28)} < 0.25 \Delta \omega_k^{(14)},$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Из этих оценок следует, что погрешность приближенных комплексных собственных значений $\lambda_{2k,3k}^{(0)}$ достаточно быстро убывает с увеличением числа M . В частности, удвоение числа M с 14 до 28 приводит к уменьшению погрешности не менее, чем в 4 раза.

M	$\omega_k^{(M)}, \text{c}^{-1}$		$\Delta\omega_k^{(M)}, \%$	
	14	28	14	28
$k = 1$	17716.4	17727.9	0.086	0.021
$k = 2$	35341.7	35434.5	0.349	0.087
$k = 3$	52775.9	53094.5	0.800	0.196
$k = 4$	69911.4	70684.2	1.459	0.350
$k = 5$	86624.2	88178.8	2.355	0.550

Таблица 4.6. Мнимые части точек $A_k^{(M)} + i\omega_k^{(M)}$ спектра S_ε и относительные погрешности $\Delta\omega_k^{(M)}$

Интересно также отметить, что для всех трех рассмотренных слоистых композитов $\omega_k^{(M)} < \omega_k^{(0)}$, $k = 1, \dots, 5$. Кроме того, при увеличении k расстояния $S_k^{(M)} = \omega_{k+1}^{(M)} - \omega_k^{(M)}$ и $S_k^{(0)} = \omega_{k+1}^{(0)} - \omega_k^{(0)}$ между “соседними” собственными частотами колебаний для исходного композита и соответствующего ему усредненного материала уменьшаются, т.е. $S_{k_1}^{(M)} > S_{k_2}^{(M)}$ и $S_{k_1}^{(0)} > S_{k_2}^{(0)}$ при $k_1 < k_2$. При этом для усредненного материала это уменьшение очень незначительно: с $S_1 = 17733.5$ до $S_4 = 17732.9$. Для исходного композита оно зависит от числа его слоев, а именно: $S_k^{(M_1)} > S_k^{(M_2)}$ при $M_1 > M_2$. Другими словами, чем большее число слоев содержится в выбранном образце слоистого композита, тем медленнее уменьшается расстояние между собственными частотами $\omega_{k+1}^{(M)}$ и $\omega_k^{(M)}$ при увеличении номера k .

Глава 5

Распространение плоских звуковых волн в слоистых средах с диссипацией

В данной главе исследуется процесс распространения плоских звуковых волн в двухфазных слоистых средах с диссипацией, рассмотренных в Главе 4 (см. п. 4.2) и имеющих общие границы с однородными сжимаемыми средами (изотропным упругим материалов, жидкостью или газом).

5.1. Приближенные значения комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн

5.1.1. Случай слоистой среды, занимающей полупространство

$$x_1 > 0$$

Предположим, что полупространство $x_1 > 0$ занято двухфазной слоистой средой с диссипацией, все слои которой параллельны одной из координатных плоскостей (см. рис. 3.1 и 4.4), а тензоры ядер релаксации для каждой фазы заданы формулой (3.1), в то время как полупространство $x_1 < 0$ занято однородной сжимаемой средой (изотропным упругим материалом, жидкостью или газом) с плотностью ρ и скоростью распространения продольной волны c . Пусть со стороны отрицательных x_1 на границу раздела $x_1 = 0$ падает монохроматическая плоская звуковая волна $u_0(x_1, t)$ единичной амплитуды, фронт которой параллелен плоскости Ox_2x_3 . Предполагая, что длина волны много больше величины периода ε (суммы толщин любых двух соседних внутренних слоев), заменим слоистую среду на соответствующую ей усредненную вязкоупругую среду и рассмотрим задачу об отражении волны $u_0(x_1, t)$ от границы раздела $x_1 = 0$.

Введем следующие обозначения: $u_1(x_1, t)$ — волна, отраженная от границы $x_1 = 0$; $u_2(x_1, t)$ — волна, прошедшая в однородную (усредненную) вязкоупругую среду через границу $x_1 = 0$. Имеем

$$u_0(x_1, t) = \exp[i(\omega t - kx_1)], \quad x_1 < 0, \quad (5.1)$$

$$u_1(x_1, t) = A_1 \exp[i(\omega t + kx_1)], \quad x_1 < 0, \quad (5.2)$$

$$u_2(x_1, t) = A_2 \exp(-\delta_0 x_1) \exp[i(\omega t - k_0 x_1)], \quad x_1 > 0, \quad (5.3)$$

где i — мнимая единица, A_1 и A_2 — комплексные амплитуды отраженной и прошедшей волн, $\delta_0 = \delta_0(\omega)$ — коэффициент затухания в вязкоупругой среде, $k = \frac{\omega}{c}$ и $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ — волновые числа, $c_0 = c_0(\omega)$ — фазовая скорость продольной волны в вязкоупругой среде.

Неизвестные комплексные амплитуды A_1 и A_2 находятся из условий непрерывности перемещений и напряжений на границе раздела $x_1 = 0$. Эти условия имеют вид

$$u_0(0, t) + u_1(0, t) = u_2(0, t),$$

$$\sigma_0(0, t) + \sigma_1(0, t) = \sigma_2(0, t),$$

где через $\sigma_m(x_1, t)$ обозначено напряжение, вызванное перемещением $u_m(x_1, t)$:

$$\sigma_m(x_1, t) = a \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(x_1, t), \quad a = \rho c^2, \quad m = 0, 1,$$

$$\sigma_2(x_1, t) = \alpha_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, t) + \beta_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial t}(x_1, t) - g_0(t) * \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, t).$$

Здесь для слоев, параллельных плоскости Ox_2x_3 ,

$$\alpha_0 = \alpha_1, \quad \beta_0 = \beta_1, \quad g_0(t) = g_1(t),$$

а для слоев, параллельных плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3 ,

$$\alpha_0 = \alpha_2, \quad \beta_0 = \beta_2, \quad g_0(t) = g_2(t),$$

где α_i , β_i и $g_i(t)$ находятся по формулам, приведенным в п. 4.2.

Из (4.37) и (4.38) видно, что ядро свертки $g_0(t)$ можно представить в следующем виде:

$$g_0(t) = \sum_{n=1}^N q_n \exp(-\nu_n t),$$

где для слоев, параллельных фронту волны (т.е. плоскости Ox_2x_3),

$$N = M, \quad q_n = d_n, \quad \nu_n = \xi_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

а для слоев, перпендикулярных фронту волны (т.е. параллельных плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3),

$$N = M + R_1 N_1 + R_2 N_2, \quad q_n = p_n, \quad \nu_n = \xi_n, \quad n = 1, \dots, M,$$

$$\text{при } R_1 = 1 : \quad q_{M+n} = k_3 v_n^{(1)}, \quad \xi_{M+n} = \gamma_n^{(1)}, \quad n = 1, \dots, N_1,$$

$$\text{при } R_2 = 1 : \quad q_{M+R_1 N_1+n} = k_4 v_n^{(2)}, \quad \xi_{M+R_1 N_1+n} = \gamma_n^{(2)}, \quad n = 1, \dots, N_2.$$

Далее, выразим $\sigma_m(x_1, t)$ через $u_m(x_1, t)$:

$$\sigma_0(x_1, t) = -iak u_0(x_1, t), \quad \sigma_1(x_1, t) = iaku_1(x_1, t),$$

$$\sigma_2(x_1, t) = -(\delta_0 + ik_0) ((\alpha_0 + i\omega\beta_0)u_2(x_1, t) - g_0(t) * u_2(x_1, t)).$$

Считая перемещения равными нулю при $t < 0$, находим

$$\begin{aligned} g_0(t) * u_2(x_1, t) &= A_2 \exp[-(\delta_0 + ik_0)x_1] \int_{-\infty}^t g_0(t-s) \exp(i\omega s) ds = \\ &= A_2 \exp[-(\delta_0 + ik_0)x_1] \sum_{n=1}^N q_n \int_{-\infty}^t \exp[-\nu_n(t-s)] \exp(i\omega s) ds. \end{aligned}$$

После замены переменной $t-s = \eta$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \exp[-\nu_n(t-s)] \exp(i\omega s) ds &= \exp(i\omega t) \int_0^{\infty} \exp(-\nu_n \eta) \exp(-i\omega \eta) d\eta = \\ &= \exp(i\omega t) \left(\int_0^{\infty} \exp(-\nu_n \eta) \cos(\omega \eta) d\eta - i \int_0^{\infty} \exp(-\nu_n \eta) \sin(\omega \eta) d\eta \right) = \end{aligned}$$

$$= \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^N \frac{q_n(\nu_n - i\omega)}{\nu_n^2 + \omega^2}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Следовательно,

$$g_0(t) * u_2(x_1, t) = u_2(x_1, t) \sum_{n=1}^N \frac{q_n(\nu_n - i\omega)}{\nu_n^2 + \omega^2}$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_2(x_1, t) &= -(\delta_0 + ik_0) \left(\alpha_0 + i\omega\beta_0 - \sum_{n=1}^N \frac{q_n(\nu_n - i\omega)}{\nu_n^2 + \omega^2} \right) u_2(x_1, t) = \\ &= \theta u_2(x_1, t). \end{aligned}$$

Здесь через $\theta = \theta(\omega)$ обозначена комплекснозначная функция, определяемая с помощью двух вещественнозначных частотных функций $\theta_1(\omega)$ и $\theta_2(\omega)$ следующим образом:

$$\theta(\omega) = \theta_1(\omega) - i\theta_2(\omega),$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1(\omega) &= \left(\beta_0 + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\nu_n^2 + \omega^2} \right) \omega k_0(\omega) - \left(\alpha_0 - \sum_{n=1}^N \frac{q_n \nu_n}{\nu_n^2 + \omega^2} \right) \delta_0(\omega), \\ \theta_2(\omega) &= \left(\beta_0 + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\nu_n^2 + \omega^2} \right) \omega \delta_0(\omega) + \left(\alpha_0 - \sum_{n=1}^N \frac{q_n \nu_n}{\nu_n^2 + \omega^2} \right) k_0(\omega). \end{aligned}$$

Так как

$$u_0(0, t) = \exp(i\omega t), \quad u_m(0, t) = A_m \exp(i\omega t), \quad m = 1, 2,$$

то приведенные выше условия непрерывности перемещений и напряжений на границе $x_1 = 0$ приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = -1, \\ akA_1 + iA_2\theta = ak, \end{cases}$$

решая которую находим

$$A_1(\omega) = \frac{ak - i\theta(\omega)}{ak + i\theta(\omega)}, \quad A_2(\omega) = \frac{2ak}{ak + i\theta(\omega)}. \quad (5.4)$$

Для уточнения характера частотных зависимостей комплексных амплитуд $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ нам потребуются формулы, определяющие фазовую скорость $c_0(\omega)$ и коэффициент затухания $\delta_0(\omega)$ в вязкоупругой среде [43]:

$$c_0(\omega) = \sqrt{\frac{|C(\omega)|}{\rho_0}} \sec \frac{\varphi(\omega)}{2}, \quad \delta_0(\omega) = \frac{\omega}{c_0(\omega)} \operatorname{arctg} \frac{\varphi(\omega)}{2},$$

где $C(\omega)$ — комплексный модуль, $C(\omega) = C_1(\omega) + iC_2(\omega)$, $C_1(\omega)$ — модуль накопления, $C_2(\omega)$ — модуль потерь, $\varphi(\omega)$ — угол потерь,

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{C_2(\omega)}{C_1(\omega)}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sec \frac{\varphi(\omega)}{2} = \sqrt{\frac{2|C(\omega)|}{|C(\omega)| + C_1(\omega)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi(\omega)}{2} = \sqrt{\frac{|C(\omega)| - C_1(\omega)}{|C(\omega)| + C_1(\omega)}},$$

поэтому предыдущие формулы можно переписать в виде

$$c_0(\omega) = |C(\omega)| \sqrt{\frac{2}{\rho_0 (|C(\omega)| + C_1(\omega))}}, \quad (5.5)$$

$$\delta_0(\omega) = \frac{\omega}{|C(\omega)|} \sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| - C_1(\omega))}. \quad (5.6)$$

Для того, чтобы найти комплексный модуль $C(\omega)$, в одномерном соотношении между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $e(t)$

$$\sigma(t) = \alpha_0 e(t) + \beta_0 \frac{\partial e}{\partial t}(t) - g_0(t) * e(t)$$

возьмем $e(t) = e_0 \exp(i\omega t)$, где e_0 — амплитуда (см. [43], [57]). В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= e_0 ((\alpha_0 + i\omega\beta_0) \exp(i\omega t) - g_0(t) * \exp(i\omega t)) = \\ &= e_0 \left(\alpha_0 + i\omega\beta_0 - \sum_{n=1}^N \frac{q_n(\nu_n - i\omega)}{\nu_n^2 + \omega^2} \right) \exp(i\omega t) = \\ &= e_0 (C_1(\omega) + iC_2(\omega)) \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

где

$$C_1(\omega) = \alpha_0 - \sum_{n=1}^N \frac{q_n \nu_n}{\nu_n^2 + \omega^2}, \quad C_2(\omega) = \omega \left(\beta_0 + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\nu_n^2 + \omega^2} \right).$$

Отсюда следует, в частности, что

$$\begin{aligned} \theta_1(\omega) &= C_2(\omega)k_0(\omega) - C_1(\omega)\delta_0(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| - C_1(\omega))}, \\ \theta_2(\omega) &= C_1(\omega)k_0(\omega) + C_2(\omega)\delta_0(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| + C_1(\omega))}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $ak = \rho c \omega$, из (5.4) получаем

$$A_1(\omega) = \frac{Z - \eta(\omega)}{Z + \eta(\omega)}, \quad A_2(\omega) = \frac{2Z}{Z + \eta(\omega)}, \quad (5.7)$$

где $Z = \rho c$ — импеданс продольной волны в среде, занимающей полупространство $x_1 < 0$, а $\eta(\omega)$ — комплекснозначная частотная функция:

$$\eta(\omega) = \sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| + C_1(\omega))} + i \sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| - C_1(\omega))}. \quad (5.8)$$

Необходимо отметить, что если взять $\beta_0 = 0$, $g_0(t) \equiv 0$, то фазовая скорость $c_0(\omega)$, модуль накопления $C_1(\omega)$ и комплексный модуль $C(\omega)$ не зависят от частоты:

$$c_0 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\rho_0}}, \quad C_1 = C = \alpha_0,$$

поэтому $\eta(\omega) = \rho_0 c_0 = \text{const}$. Следовательно, формулы (5.7) принимают вид

$$A_1 = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}, \quad A_2 = \frac{2Z}{Z + Z_0}, \quad Z_0 = \rho_0 c_0$$

и являются хорошо известными формулами для амплитуд отраженной и прошедшей волн в случае нормального падения плоской звуковой волны на границу упругой среды (см., например, [14] и [15]).

Покажем, что функция $\eta(\omega)$ представляет собой не то иное, как импеданс продольной волны в вязкоупругой среде. Действительно, по определению импеданс есть отношение звукового давления к нормальному компо-

ненту скорости в плоской волне, распространяющейся в направлении положительных значений x_1 [14]. Обозначим через $p_2(x_1, t)$ давление, вызванное перемещением $u_2(x_1, t)$. Тогда

$$p_2(x_1, t) = -\sigma_2(x_1, t) = -\theta u_2(x_1, t) = i\omega\eta u_2(x_1, t),$$

$$v_2(x_1, t) = \frac{\partial u_2(x_1, t)}{\partial t} = i\omega u_2(x_1, t),$$

поэтому

$$\frac{p_2(x_1, t)}{v_2(x_1, t)} = \eta,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что комплексные амплитуды $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ представляют собой коэффициенты отражения и прохождения по перемещению или, что то же самое, по колебательной скорости. Зная $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$, можно найти коэффициенты отражения и прохождения по давлению. Для этого обозначим через $p_m(x_1, t)$ давление, вызванное перемещением $u_m(x_1, t)$ ($m = 0, 1$). Имеем

$$p_0(x_1, t) = -\sigma_0(x_1, t) = i\omega Z u_0(x_1, t) = \omega Z \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) u_0(x_1, t),$$

$$p_1(x_1, t) = -\sigma_1(x_1, t) = -i\omega Z u_1(x_1, t) = \omega Z \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right) u_1(x_1, t),$$

$$p_2(x_1, t) = -\sigma_2(x_1, t) = i\omega\eta(\omega)u_2(x_1, t) = \omega\eta(\omega) \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) u_2(x_1, t).$$

Отсюда следует, что коэффициент отражения $V(\omega)$ и коэффициент прохождения $W(\omega)$ (по давлению) равны

$$V(\omega) = A_1(\omega) \exp(i\pi) = \frac{\eta(\omega) - Z}{\eta(\omega) + Z}, \quad (5.9)$$

$$W(\omega) = \frac{\eta(\omega)}{Z} A_2(\omega) = \frac{2\eta(\omega)}{Z + \eta(\omega)}. \quad (5.10)$$

Поскольку ранее нами было установлено, что комплекснозначная частотная функция $\eta(\omega)$ есть импеданс продольной волны в вязкоупругой среде, формулы (5.9) и (5.10) совпадают с формулами для коэффициентов

отражения и прохождения по давлению, приведенными в монографии [15] для сред с диссипацией и полученными из условия непрерывности давлений и импедансов на границе сред. Тем не менее, приведенный нами способ вывода этих формул, основанный на выполнении условий непрерывности перемещений и напряжений на границе сред, представляет собой самостоятельный интерес, поскольку он позволил найти импеданс вязкоупругой среды, зная ее плотность и комплексный модуль.

Для того, чтобы определить амплитуды и начальные фазы отраженной и прошедшей волн, представим комплексные амплитуды $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ в следующем виде:

$$A_1 = B_1 \exp(i\varphi_1), \quad A_2 = B_2 \exp(i\varphi_2),$$

где $B_1 = B_1(\omega)$ и $B_2 = B_2(\omega)$ — амплитуды, а $\varphi_1 = \varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(\omega)$ — начальные фазы колебаний. Так как

$$\operatorname{Re} A_1(\omega) = \frac{Z^2 - \eta_1^2(\omega) - \eta_2^2(\omega)}{(Z + \eta_1(\omega))^2 + \eta_2^2(\omega)},$$

$$\operatorname{Re} A_2(\omega) = \frac{2Z(Z + \eta_1(\omega))}{(Z + \eta_1(\omega))^2 + \eta_2^2(\omega)},$$

$$\operatorname{Im} A_1(\omega) = \operatorname{Im} A_2(\omega) = -\frac{2Z\eta_2(\omega)}{(Z + \eta_1(\omega))^2 + \eta_2^2(\omega)},$$

где

$$\eta_1(\omega) = \operatorname{Re} \eta(\omega) = \sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| + C_1(\omega))}, \quad (5.11)$$

$$\eta_2(\omega) = \operatorname{Im} \eta(\omega) = \sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| - C_1(\omega))}, \quad (5.12)$$

то

$$B_1(\omega) = \sqrt{\frac{\eta_2^2(\omega) + (Z - \eta_1(\omega))^2}{\eta_2^2(\omega) + (Z + \eta_1(\omega))^2}},$$

$$B_2(\omega) = \frac{2Z}{\sqrt{\eta_2^2(\omega) + (Z + \eta_1(\omega))^2}},$$

$$\varphi_1(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{если } \eta_3(\omega) = Z^2, \\ K(\omega) + \operatorname{arctg} \frac{2Z\eta_2(\omega)}{\eta_3(\omega) - Z^2}, & \text{если } \eta_3(\omega) \neq Z^2, \end{cases}$$

$$\varphi_2(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\eta_2(\omega)}{Z + \eta_1(\omega)},$$

где $\eta_3(\omega) = \eta_1^2(\omega) + \eta_2^2(\omega)$,

$$K(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta_3(\omega) < Z^2, \\ -\pi, & \text{если } \eta_3(\omega) > Z^2. \end{cases}$$

Подставляя (5.11) и (5.12) в полученные формулы, находим амплитуду и начальную фазу колебаний отраженной волны:

$$B_1(\omega) = \sqrt{\frac{\rho_0|C(\omega)| - Z\sqrt{2\rho_0(|C(\omega)| + C_1(\omega)) + Z^2}}{\rho_0|C(\omega)| + Z\sqrt{2\rho_0(|C(\omega)| + C_1(\omega)) + Z^2}}}, \quad (5.13)$$

$$\varphi_1(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{если } |C(\omega)| = \frac{Z^2}{\rho_0}, \\ \operatorname{arctg} \frac{Z\sqrt{2\rho_0(|C(\omega)| - C_1(\omega))}}{\rho_0|C(\omega)| - Z^2}, & \text{если } |C(\omega)| < \frac{Z^2}{\rho_0}, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{Z\sqrt{2\rho_0(|C(\omega)| - C_1(\omega))}}{\rho_0|C(\omega)| - Z^2}, & \text{если } |C(\omega)| > \frac{Z^2}{\rho_0}, \end{cases} \quad (5.14)$$

а также амплитуду и начальную фазу колебаний прошедшей волны:

$$B_2(\omega) = \frac{2Z}{\sqrt{\rho_0|C(\omega)| + Z\sqrt{2\rho_0(|C(\omega)| + C_1(\omega)) + Z^2}}}, \quad (5.15)$$

$$\varphi_2(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\rho_0(|C(\omega)| - C_1(\omega))}}{\sqrt{\rho_0(|C(\omega)| + C_1(\omega)) + Z\sqrt{2}}}. \quad (5.16)$$

Отсюда следует, что коэффициент отражения $V(\omega)$ и коэффициент прохождения $W(\omega)$ по давлению равны

$$V(\omega) = B_1(\omega) \exp[i\varphi_1(\omega) + \pi], \quad W(\omega) = \frac{\eta(\omega)}{Z} B_2(\omega) \exp[i\varphi_2(\omega)].$$

Обозначим через $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$ точные амплитуды отраженной и прошедшей волн при падении звуковой волны на границу $x_1 = 0$ исходной слоистой среды и выясним диапазон частот ω , для которого $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ допустимо рассматривать в качестве приближенных значений $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$ соответственно. С этой целью введем следующие обозначения: $\lambda_0(\omega)$ — длина продольной волны в усредненной вязкоупругой среде, $\lambda_s(\omega)$ — длина продольной волны в s -й фазе слоистой среды ($s = 1, 2$). Имеем

$$\lambda_k(\omega) = \frac{2\pi c_k(\omega)}{\omega}, \quad k = 0, 1, 2,$$

где, как и прежде, $c_0(\omega)$ — фазовая скорость волны в усредненной среде, определяемая формулой (5.5), а $c_s(\omega)$ — фазовая скорость волны в s -й фазе:

$$c_s(\omega) = |C^{(s)}(\omega)| \sqrt{\frac{2}{\rho_s \left(|C^{(s)}(\omega)| + C_1^{(s)}(\omega) \right)}},$$

$$C^{(s)}(\omega) = C_1^{(s)}(\omega) + iC_2^{(s)}(\omega), \quad s = 1, 2.$$

Здесь $C^{(s)}(\omega)$, $C_1^{(s)}(\omega)$, $C_2^{(s)}(\omega)$ — комплексный модуль, модуль накопления и модуль потерь s -й фазы слоистой среды,

$$C_1^{(s)}(\omega) = a_{1111}^{(s)} - R_s \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)} \gamma_n^{(s)}}{(\gamma_n^{(s)})^2 + \omega^2}, \quad (5.17)$$

$$C_2^{(s)}(\omega) = \omega \left(b_{1111}^{(s)} + R_s \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{(\gamma_n^{(s)})^2 + \omega^2} \right). \quad (5.18)$$

В частности, если s -й фазой слоистой среды является упругий материал, то

$$c_s = \sqrt{\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho_s}}.$$

Учитывая, что замена исходной среды на ее усредненную модель математически обоснована только при исследовании волн, длина которых много больше величины периода ε [9], формулы (5.7) и (5.13)-(5.16) можно

считать пригодными для расчета приближенных значений амплитуд отраженной и прошедшей волн, если частота ω удовлетворяет условию

$$\min\{\lambda_0(\omega), \lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)\} > B\varepsilon, \quad (5.19)$$

где B — положительная постоянная, не зависящая от ε , $B \gg 1$. Так как $\lambda_k(\omega)$ — убывающие функции от частоты, то формулы (5.7) и (5.13)-(5.16) можно использовать для волн с частотами $0 < \omega < \omega_0$, где ω_0 удовлетворяет равенству

$$\min\{\lambda_0(\omega_0), \lambda_1(\omega_0), \lambda_2(\omega_0)\} = B\varepsilon.$$

5.1.2. Случай слоистой среды, занимающей полосу

$$0 < x_1 < L$$

Теперь предположим, что слоистая среда занимает неограниченную полосу $0 < x_1 < L$, а полупространство $x_1 < 0$ ($x_1 > L$) занято однородной сжимаемой средой с плотностью ρ (соответственно ρ_3) и скоростью распространения продольной волны c (соответственно c_3). Пусть, как и прежде, со стороны отрицательных x_1 на границу раздела $x_1 = 0$ падает плоская звуковая волна $u_0(x_1, t)$, заданная выражением (5.1). Считая, что частота ω удовлетворяет условию (5.19) и $L \gg \varepsilon$, заменим слоистую среду внутри полосы $0 < x_1 < L$ на слой соответствующей ей усредненной вязкоупругой среды. Введем следующие обозначения: $u_1(x_1, t)$ — волна, отраженная от границы $x_1 = 0$ вязкоупругого слоя толщины L ; $u_2(x_1, t)$ — волна, проникающая в вязкоупругий слой через границу $x_1 = 0$; $u_3(x_1, t)$ — волна, прошедшая вязкоупругий слой и отраженная от границы $x_1 = L$; $u_4(x_1, t)$ — волна, вышедшая из вязкоупругого слоя через границу $x_1 = L$.

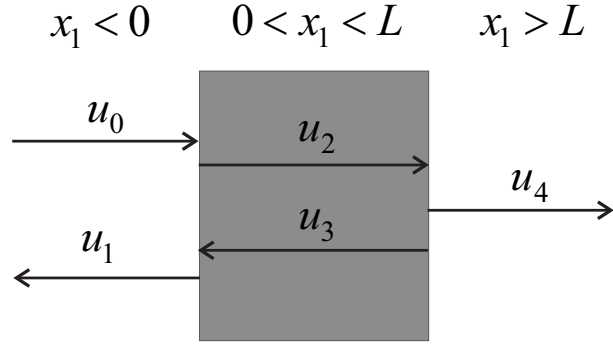


Рис. 5.1. Отраженные и прошедшие волны на границах однородного вязкоупругого слоя

Имеем

$$u_1(x_1, t) = D_1 \exp[i(\omega t + kx_1)], \quad x_1 < 0,$$

$$u_2(x_1, t) = D_2 \exp(-\delta_0 x_1) \exp[i(\omega t - k_0 x_1)], \quad 0 < x_1 < L,$$

$$u_3(x_1, t) = D_3 \exp[\delta_0(x_1 - L)] \exp[i(\omega t + k_0(x_1 - L))], \quad 0 < x_1 < L,$$

$$u_4(x_1, t) = D_4 \exp[i(\omega t - k_3(x_1 - L))], \quad x_1 > L,$$

где D_j — комплексные амплитуды; $\delta_0 = \delta_0(\omega)$ — коэффициент затухания в усредненной вязкоупругой среде; $k = \omega/c$, $k_3 = \omega/c_3$ и $k_0 = \omega/c_0$ — волновые числа.

Неизвестные комплексные амплитуды D_j находятся из условий непрерывности перемещений и напряжений на границах $x_1 = 0$ и $x_1 = L$. Эти условия записываются в следующем виде:

$$u_0(0, t) + u_1(0, t) = u_2(0, t) + u_3(0, t),$$

$$u_2(L, t) + u_3(L, t) = u_4(L, t),$$

$$\sigma_0(0, t) + \sigma_1(0, t) = \sigma_2(0, t) + \sigma_3(0, t),$$

$$\sigma_2(L, t) + \sigma_3(L, t) = \sigma_4(L, t),$$

где $\sigma_m(x_1, t)$ — напряжение, вызванное перемещением $u_m(x_1, t)$:

$$\sigma_m(x_1, t) = a \frac{\partial u_m}{\partial x_1}, \quad a = \rho c^2, \quad m = 0, 1,$$

$$\sigma_m(x_1, t) = \alpha_0 \frac{\partial u_m}{\partial x_1} + \beta_0 \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_1 \partial t} - g_0(t) * \frac{\partial u_m}{\partial x_1}, \quad m = 2, 3,$$

$$\sigma_4(x_1, t) = a_3 \frac{\partial u_4}{\partial x_1}, \quad a_3 = \rho_3 c_3^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\sigma_0(x_1, t) &= -i\omega Z u_0(x_1, t), & \sigma_1(x_1, t) &= i\omega Z u_1(x_1, t), \\ \sigma_2(x_1, t) &= -i\omega \eta u_2(x_1, t), & \sigma_3(x_1, t) &= i\omega \eta u_3(x_1, t), \\ \sigma_4(x_1, t) &= -i\omega Z_3 u_4(x_1, t),\end{aligned}$$

где $Z_3 = \rho_3 c_3$ — импеданс продольной волны в среде, занимающей полу-пространство $x_1 > L$, а $\eta(\omega)$ — импеданс продольной волны в усредненной среде, определенный формулой (5.8).

Далее находим

$$\begin{aligned}u_m(0, t) &= D_m \exp(i\omega t), & m &= 1, 2, \\ u_3(0, t) &= D_3 \exp(-b_0 L) \exp(i\omega t), \\ u_2(L, t) &= D_2 \exp(-b_0 L) \exp(i\omega t), \\ u_m(L, t) &= D_m \exp(i\omega t), & m &= 3, 4,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}b_0 &= b_0(\omega) = \delta_0(\omega) + ik_0(\omega) = \\ &= \frac{\omega}{|C(\omega)|} \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| - C_1(\omega))} + i \sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| + C_1(\omega))} \right).\end{aligned}$$

Следовательно, приведенные выше условия непрерывности на границах $x_1 = 0$ и $x_1 = L$ приводят к следующей системе уравнений для нахождения комплексных амплитуд D_j :

$$\begin{cases} D_1 - D_2 - D_3 \exp(-b_0 L) = -1, \\ D_1 Z + D_2 \eta - D_3 \eta \exp(-b_0 L) = Z, \\ D_2 \exp(-b_0 L) + D_3 - D_4 = 0, \\ D_2 \eta \exp(-b_0 L) - D_3 \eta - D_4 Z_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$D_1(\omega) = \frac{-(\eta(\omega) - Z)(\eta(\omega) + Z_3) + (\eta(\omega) + Z)(\eta(\omega) - Z_3)e^{-2b_0(\omega)L}}{(\eta(\omega) + Z)(\eta(\omega) + Z_3) - (\eta(\omega) - Z)(\eta(\omega) - Z_3)e^{-2b_0(\omega)L}}, \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
D_2(\omega) &= \frac{2Z(\eta(\omega) + Z_3)}{(\eta(\omega) + Z)(\eta(\omega) + Z_3) - (\eta(\omega) - Z)(\eta(\omega) - Z_3)e^{-2b_0(\omega)L}}, \\
D_3(\omega) &= \frac{2Z(\eta(\omega) - Z_3)e^{-b_0(\omega)L}}{(\eta(\omega) + Z)(\eta(\omega) + Z_3) - (\eta(\omega) - Z)(\eta(\omega) - Z_3)e^{-2b_0(\omega)L}}, \\
D_4(\omega) &= \frac{4Z\eta(\omega)e^{-\beta_0(\omega)L}}{(\eta(\omega) + Z)(\eta(\omega) + Z_3) - (\eta(\omega) - Z)(\eta(\omega) - Z_3)e^{-2b_0(\omega)L}}. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

В частности, если $Z = Z_3$, то

$$\begin{aligned}
D_1(\omega) &= \frac{(\eta^2(\omega) - Z^2)(-1 + \exp[-2b_0(\omega)L])}{(\eta(\omega) + Z)^2 - (\eta(\omega) - Z)^2 \exp[-2b_0(\omega)L]}, \quad (5.22) \\
D_2(\omega) &= \frac{2Z(\eta(\omega) + Z)}{(\eta(\omega) + Z)^2 - (\eta(\omega) - Z)^2 \exp[-2b_0(\omega)L]}, \\
D_3(\omega) &= \frac{2Z(\eta(\omega) - Z) \exp[-b_0(\omega)L]}{(\eta(\omega) + Z)^2 - (\eta(\omega) - Z)^2 \exp[-2b_0(\omega)L]}, \\
D_4(\omega) &= \frac{4Z\eta(\omega) \exp[-b_0(\omega)L]}{(\eta(\omega) + Z)^2 - (\eta(\omega) - Z)^2 \exp[-2b_0(\omega)L]}. \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Отметим, что если взять $\beta_1 = 0$, $g_1(t) \equiv 0$, то $\eta(\omega) = \rho_0 c_0 = Z_0 = \text{const}$. Следовательно, формулы для $D_1(\omega)$ и $D_4(\omega)$ принимают вид

$$\begin{aligned}
D_1(\omega) &= \frac{-(Z_0 - Z)(Z_0 + Z_3) + (Z_0 + Z)(Z_0 - Z_3) \exp[-2i\varphi_0(\omega)]}{(Z_0 + Z)(Z_0 + Z_3) - (Z_0 - Z)(Z_0 - Z_3) \exp[-2i\varphi_0(\omega)]}, \\
D_4(\omega) &= \frac{4ZZ_0 \exp[-i\varphi_0(\omega)]}{(Z_0 + Z)(Z_0 + Z_3) - (Z_0 - Z)(Z_0 - Z_3) \exp[-2i\varphi_0(\omega)]},
\end{aligned}$$

где $\varphi_0 = k_0 L$ — набег фазы плоской волны при распространении через упругий слой [15]. Эти формулы представляют собой хорошо известные формулы для амплитуд отраженной и прошедшей волн в случае однородного упругого слоя (см. [14], [15]).

Возвращаясь к исходной слоистой среде, занимающей полосу $0 < x_1 < L$, заметим, что при введенных ранее предположениях $D_1(\omega)$ и $D_4(\omega)$ являются приближенными значениями комплексных амплитуд волны, отраженной от границы $x_1 = 0$, и волны, прошедшей через всю полосу толщины L слоистой среды.

С помощью формулы (5.23) можно вывести формулу для расчета приближенных значений изменений уровня интенсивности звука при прохождении его через полосу $0 < x_1 < L$ слоистой среды. С этой целью обозначим через I_1 (I_2) интенсивность звука в усредненной среде при $x_1 < 0$ (соответственно при $x_1 > L$). Тогда

$$I_1(\omega) = \frac{\omega^2 Z}{2}, \quad I_2(\omega) = \frac{\omega^2 Z_3 |D_4(\omega)|^2}{2}.$$

Отсюда следует, что уровень интенсивности звука при переходе через полосу слоистой среды толщины L меняется приблизительно на величину

$$I(\omega) = 10 \lg \frac{I_2(\omega)}{I_1(\omega)} = 10 \lg \frac{Z_3 |D_4(\omega)|^2}{Z}.$$

Для численного исследования зависимости функции $I(\omega)$ от частоты рассмотрим полосу слоистой среды толщины $L = 0.14$ м, состоящую из чередующихся 10 слоев упругого материала и 10 слоев ВУМ-II, причем толщину всех слоев предполагаем одинаковой, т.е. $h = 0.5$, $\varepsilon = 0.014$ м. Числовые характеристики упругого и вязкоупругого материалов возьмем те же самые, что и в п. 4.4. Среду вне полосы $0 < x_1 < L$ считаем заполненной воздухом, т.е. полагаем $\rho = \rho_3 = 1.3$ кг/м³, $c = c_3 = 330$ м/с.

Заменим слоистую среду на соответствующую ей усредненную среду и найдем ρ_0 , α_0 , β_0 и $g_0(t)$. Прежде всего, используя приведенные выше формулы, находим ρ_0 и β_0 : $\rho_0 = 4000$ кг/м³, $\beta_0 = 0$. Далее, для слоев, параллельных плоскости Ox_2x_3 , имеем (см. п. 4.4): $\alpha_0 = 2.4979 \times 10^9$ Па, $g_0(t) = q_1 \exp(-\nu_1 t)$, $q_1 = 3.6359 \times 10^{11}$ Па · с⁻¹, $\nu_1 = 392.8851$ с⁻¹. Для слоев, параллельных плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3 , вычисляем:

$$\alpha_0 = 1.2533 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad g_0(t) = q_1 \exp(-\nu_1 t) + q_2 \exp(-\nu_2 t),$$

$$q_1 = 2.9219 \times 10^9 \text{ Па} \cdot \text{с}^{-1}, \quad q_2 = 7.5 \times 10^{10} \text{ Па} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\nu_1 = 392.8851 \text{ с}^{-1}, \quad \nu_2 = 400 \text{ с}^{-1}.$$

Рассмотрим частотный диапазон $D_1 = [1 \text{ Гц}, 30 \text{ кГц}]$ и убедимся в допустимости применения усредненной модели при исследовании волн с частотами из этого диапазона. Обозначим через $\lambda_{01}(\omega)$ ($\lambda_{02}(\omega)$) длину продольной волны с частотой ω в усредненной вязкоупругой среде, соответствующей слоистой среде, для которой слои параллельны плоскости Ox_2x_3 (соответственно Ox_1x_2 или Ox_1x_3). Вычисления показывают, что при увеличении частоты ω с 1 Гц до 30 кГц функции $\lambda_{0s}(\omega)$ и $\lambda_s(\omega)$ (длина продольной волны в s -й фазе) монотонно убывают, причем $\lambda_{0s}(\omega), \lambda_s(\omega) > 0.15 \text{ м}$ при $\omega = 30 \text{ кГц}$, $s = 1, 2$. Таким образом, при исследовании волн с частотами из указанного диапазона применение формулы (5.23) для расчета приближенного значения комплексной амплитуды волны, прошедшей через все 10 упругих и 10 вязкоупругих слоев, вполне обосновано, поскольку длины таких волн можно считать много больше величины $\varepsilon = 0.014 \text{ м}$.

На рисунках 5.2 и 5.3 представлены графики изменения приближенного значения $I(\omega)$ уровня интенсивности звука при прохождении его через полосу композита для диапазонов частот 1–1000 Гц и 1–30 кГц соответственно: сплошная линия 1 соответствует прохождению звука через полосу композита, слои которого параллельны фронту волны; сплошная линия 2 — через полосу композита, слои которого перпендикулярны фронту волны; штриховая линия — через полосу сплошного упругого материала (первой фазы композита); пунктирная линия — через полосу сплошного вязкоупругого материала (второй фазы композита). На рис. 5.2 сплошные линии 1 и 2 совпадают друг с другом, так как в этом частотном диапазоне различие между изменениями уровней интенсивности звука для композитов, отличающихся друг от друга только расположением слоев по отношению к координатным осям, составляет менее 0.04 дБ.

Интересно отметить, что внутри частотного диапазона D_1 функция $I(\omega)$ достигает локального максимума для двух сред: композита, слои которого параллельны фронту волны, и сплошного вязкоупругого материала

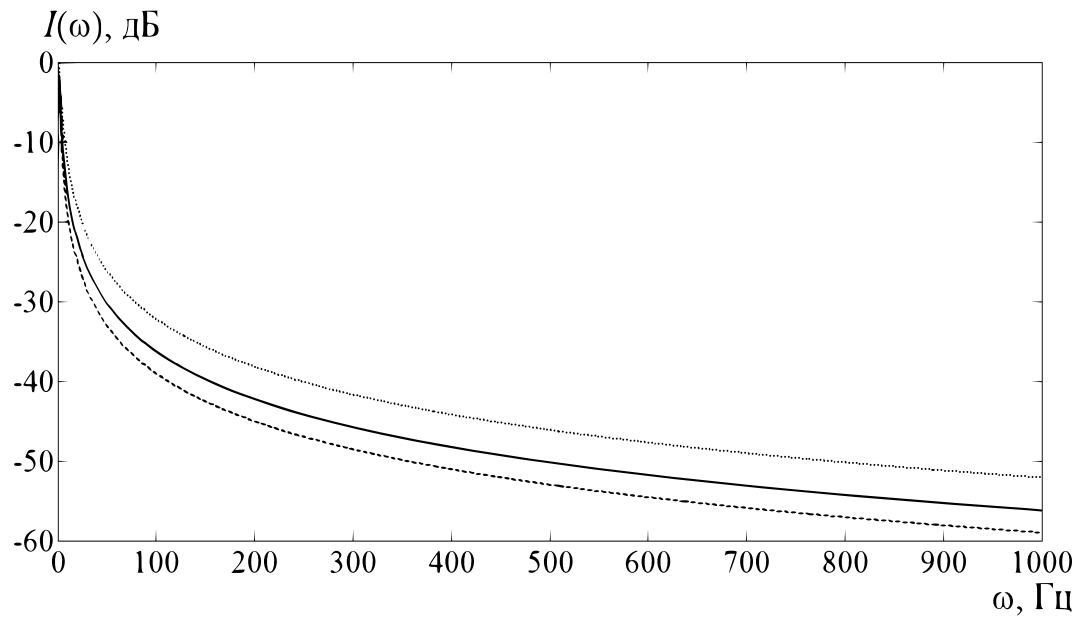


Рис. 5.2. График функции $I(\omega)$ в диапазоне частот 1–1000 Гц

(см. кривую 1 и пунктирную кривую на рис. 5.3). Согласно расчетам, для сплошного вязкоупругого материала максимум достигается при частоте 16242.5 Гц, равной наименьшей собственной частоте его одномерных колебаний, а для композита — при частоте 17731.7 Гц, равной наименьшей собственной частоте одномерных колебаний соответствующего ему усредненного материала (см. табл. 4.1).

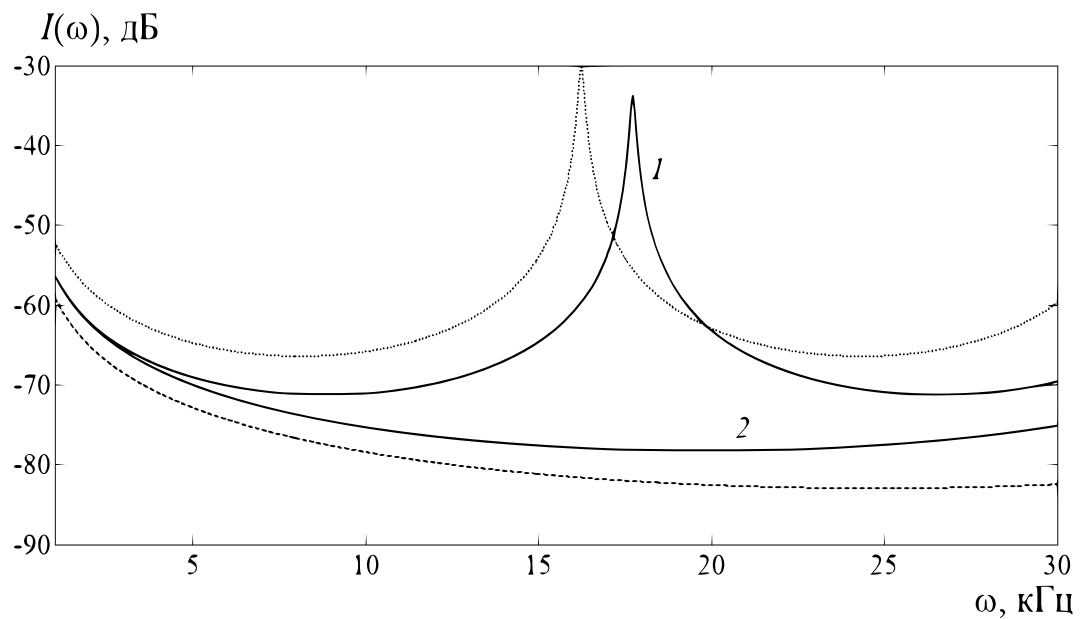


Рис. 5.3. График функции $I(\omega)$ в диапазоне частот 1–30 кГц

5.2. Точные значения комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн для конечного числа слоев

Предположим, что слоистая среда, заполняющая полосу $0 < x_1 < L$, состоит из $2M$ слоев, параллельных плоскости Ox_2x_3 : M слоев первой фазы и M слоев второй фазы (при этом $L = \varepsilon M$). Определим слои Ω_{1m}^ε первой фазы и слои Ω_{2m}^ε второй фазы следующим образом:

$$\begin{aligned}\Omega_{1m}^\varepsilon &= I_{1m}^\varepsilon \times (-\infty, \infty)^2, & I_{1m}^\varepsilon &= ((m-1)\varepsilon, (m-h)\varepsilon), \\ \Omega_{2m}^\varepsilon &= I_{2m}^\varepsilon \times (-\infty, \infty)^2, & I_{2m}^\varepsilon &= ((m-h)\varepsilon, m\varepsilon), \\ & & m &= 1, \dots, M.\end{aligned}$$

Пусть, как и выше, $u_0(x_1, t)$ — падающая волна единичной амплитуды, заданная выражением (5.1), а $u_1(x_1, t)$ — результирующая волна, отраженная от границы $x_1 = 0$:

$$u_1(x_1, t) = U_1 \exp[i(\omega t + kx_1)], \quad x_1 < 0,$$

где U_1 — комплексная амплитуда.

Введем следующие обозначения: $u_{4m-2}(x_1, t)$ и $u_{4m-1}(x_1, t)$ — волны, распространяющиеся в слое Ω_{1m}^ε соответственно в положительном и отрицательном направлении оси Ox_1 ; $u_{4m}(x_1, t)$ и $u_{4m+1}(x_1, t)$ — волны, распространяющиеся в слое Ω_{2m}^ε соответственно в положительном и отрицательном направлении оси Ox_1 ; $u_{4M+2}(x_1, t)$ — волна, прошедшая через все $2M$ слоя. Тогда

$$\begin{aligned}u_{4m-2}(x_1, t) &= U_{4m-2} \exp[-\delta_1(x_1 - (m-1)\varepsilon)] \cdot \\ &\quad \cdot \exp[i(\omega t - k_1(x_1 - (m-1)\varepsilon))], \quad x_1 \in I_{1m}^\varepsilon, \\ u_{4m-1}(x_1, t) &= U_{4m-1} \exp[\delta_1(x_1 - (m-h)\varepsilon)] \cdot \\ &\quad \cdot \exp[i(\omega t + k_1(x_1 - (m-h)\varepsilon))], \quad x_1 \in I_{1m}^\varepsilon,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{4m}(x_1, t) &= U_{4m} \exp[-\delta_2(x_1 - (m - h)\varepsilon)] \cdot \\
&\quad \cdot \exp[i(\omega t - k_2(x_1 - (m - h)\varepsilon))], \quad x_1 \in I_{2m}^\varepsilon, \\
u_{4m+1}(x_1, t) &= U_{4m+1} \exp[\delta_2(x_1 - m\varepsilon)] \cdot \\
&\quad \cdot \exp[i(\omega t + k_2(x_1 - m\varepsilon))], \quad x_1 \in I_{2m}^\varepsilon, \\
u_{4M+2}(x_1, t) &= U_{4M+2} \exp[i(\omega t - k_3(x_1 - L))], \quad x_1 > L.
\end{aligned}$$

Здесь U_j — комплексные амплитуды; $\delta_s(\omega)$ — коэффициенты затухания в слоях I_{sm}^ε ; $k_s = \omega/c_s$ — волновые числа, $s = 1, 2$.

Комплексные амплитуды U_j находятся из условий непрерывности перемещений и напряжений на границах $x_1 = 0$ и $x_1 = L$, а также на границах $x_1 = n\varepsilon$ и $x_1 = (m - h)\varepsilon$, разделяющих слои друг от друга ($n = 1, \dots, M - 1$; $m = 1, \dots, M$). Эти условия записываются в виде

$$\begin{aligned}
u_0(0, t) + u_1(0, t) &= u_2(0, t) + u_3(0, t), \\
\sigma_0(0, t) + \sigma_1(0, t) &= \sigma_2(0, t) + \sigma_3(0, t), \\
u_{4n}(n\varepsilon, t) + u_{4n+1}(n\varepsilon, t) &= u_{4n+2}(n\varepsilon, t) + u_{4n+3}(n\varepsilon, t), \\
\sigma_{4n}(n\varepsilon, t) + \sigma_{4n+1}(n\varepsilon, t) &= \sigma_{4n+2}(n\varepsilon, t) + \sigma_{4n+3}(n\varepsilon, t), \\
u_{4m-2}((m - h)\varepsilon, t) + u_{4m-1}((m - h)\varepsilon, t) &= \\
&= u_{4m}((m - h)\varepsilon, t) + u_{4m+1}((m - h)\varepsilon, t), \\
\sigma_{4m-2}((m - h)\varepsilon, t) + \sigma_{4m-1}((m - h)\varepsilon, t) &= \\
&= \sigma_{4m}((m - h)\varepsilon, t) + \sigma_{4m+1}((m - h)\varepsilon, t), \\
u_{4M}(L, t) + u_{4M+1}(L, t) &= u_{4M+2}(L, t), \\
\sigma_{4M}(L, t) + \sigma_{4M+1}(L, t) &= \sigma_{4M+2}(L, t), \\
n = 1, \dots, M - 1; \quad m = 1, \dots, M,
\end{aligned}$$

где

$$\sigma_j(x_1, t) = a \frac{\partial u_j}{\partial x_1}, \quad a = \rho c^2, \quad j = 0, 1,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{4m-s}(x_1, t) &= a_1 \frac{\partial u_{4m-s}}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial^2 u_{4m-s}}{\partial x_1 \partial t} \\
-R_1 \left(k_1 + \frac{2}{3} \right) \left(\sum_{n=1}^{N_1} v_n^{(1)} \exp(-\gamma_n^{(1)} t) \right) &* \frac{\partial u_{4m-s}}{\partial x_1}, \quad s = 1, 2, \\
\sigma_{4m+j}(x_1, t) &= a_2 \frac{\partial u_{4m+j}}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial^2 u_{4m+j}}{\partial x_1 \partial t} \\
-R_2 \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) \left(\sum_{n=1}^{N_2} v_n^{(2)} \exp(-\gamma_n^{(2)} t) \right) &* \frac{\partial u_{4m+j}}{\partial x_1}, \quad j = 0, 1, \\
\sigma_{4M+2}(x_1, t) &= a_3 \frac{\partial u_4}{\partial x_1}, \quad a_3 = \rho_3 c_3^2.
\end{aligned}$$

Вычисляя значения перемещений $u_k(x_1, t)$ на границах слоев, находим

$$\begin{aligned}
u_0(0, t) &= e^{i\omega t}, \quad u_s(0, t) = U_s e^{i\omega t}, \quad u_3(0, t) = U_3 E_1 e^{i\omega t}, \\
u_{4m}(m\varepsilon, t) &= U_{4m} E_2 e^{i\omega t}, \quad u_{4m+s}(m\varepsilon, t) = U_{4m+s} e^{i\omega t}, \\
u_{4n+3}(n\varepsilon, t) &= U_{4n+3} E_1 e^{i\omega t}, \quad u_{4m-2}((m-h)\varepsilon, t) = U_{4m-2} E_1 e^{i\omega t}, \\
u_{4m-1}((m-h)\varepsilon, t) &= U_{4m-1} e^{i\omega t}, \quad u_{4m}((m-h)\varepsilon, t) = U_{4m} e^{i\omega t}, \\
u_{4m+1}((m-h)\varepsilon, t) &= U_{4m+1} E_2 e^{i\omega t}, \\
m &= 1, \dots, M; \quad n = 1, \dots, M-1; \quad s = 1, 2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_1(\omega) = \exp[-\varepsilon(1-h)(\delta_1(\omega) + ik_1(\omega))], \\
E_2 &= E_2(\omega) = \exp[-\varepsilon h(\delta_2(\omega) + ik_2(\omega))].
\end{aligned}$$

Условия непрерывности перемещений на границах $x_1 = 0$, $x_1 = m\varepsilon$, $x_1 = (m-h)\varepsilon$ приводят к следующим $2M+1$ уравнениям:

$$\left\{ \begin{aligned}
U_1 - U_2 - E_1 U_3 &= -1, \\
E_1 U_{4m-2} + U_{4m-1} - U_{4m} - E_2 U_{4m+1} &= 0, \\
E_2 U_{4n} + U_{4n+1} - U_{4n+2} - E_1 U_{4n+3} &= 0, \\
E_2 U_{4M} + U_{4M+1} - U_{4M+2} &= 0, \\
m &= 1, \dots, M; \quad n = 1, \dots, M-1.
\end{aligned} \right. \quad (5.24)$$

Прежде чем выписать уравнения, к которым приводят условия непрерывности напряжений на границах слоев, вычисляем:

$$\left(\sum_{n=1}^{N_1} \exp(-\gamma_n^{(1)} t) \right) * \frac{\partial u_{4m-2}}{\partial x_1} = -U_{4m-2}(\delta_1 + ik_1) \cdot \exp[-(\delta_1 + ik_1)(x_1 - (m-1)\varepsilon)] \sum_{n=1}^{N_1} \int_{-\infty}^t \exp[-\gamma_n^{(1)}(t-s)] \exp(i\omega s) ds.$$

Но

$$\int_{-\infty}^t \exp[-\gamma_n^{(1)}(t-s)] \exp(i\omega s) ds = \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\gamma_n^{(1)} - i\omega}{(\gamma_n^{(1)})^2 + \omega^2},$$

поэтому

$$\left(\sum_{n=1}^{N_1} \exp(-\gamma_n^{(1)} t) \right) * \frac{\partial u_{4m-2}}{\partial x_1} = -(\delta_1 + ik_1) u_{4m-2}(x_1, t) \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\gamma_n^{(1)} - i\omega}{(\gamma_n^{(1)})^2 + \omega^2}.$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{N_1} \exp(-\gamma_n^{(1)} t) \right) * \frac{\partial u_{4m-1}}{\partial x_1} &= (\delta_1 + ik_1) u_{4m-1}(x_1, t) \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\gamma_n^{(1)} - i\omega}{(\gamma_n^{(1)})^2 + \omega^2}, \\ \left(\sum_{n=1}^{N_2} \exp(-\gamma_n^{(2)} t) \right) * \frac{\partial u_{4m}}{\partial x_1} &= -(\delta_2 + ik_2) u_{4m}(x_1, t) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\gamma_n^{(2)} - i\omega}{(\gamma_n^{(2)})^2 + \omega^2}, \\ \left(\sum_{n=1}^{N_2} \exp(-\gamma_n^{(2)} t) \right) * \frac{\partial u_{4m+1}}{\partial x_1} &= (\delta_2 + ik_2) u_{4m+1}(x_1, t) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\gamma_n^{(2)} - i\omega}{(\gamma_n^{(2)})^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Используя эти формулы для свертки, после элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{4m-2}(x_1, t) &= (\theta_1^{(1)} - i\theta_2^{(1)}) u_{4m-2}(x_1, t), \\ \sigma_{4m-1}(x_1, t) &= -(\theta_1^{(1)} - i\theta_2^{(1)}) u_{4m-1}(x_1, t), \\ \sigma_{4m}(x_1, t) &= (\theta_1^{(2)} - i\theta_2^{(2)}) u_{4m}(x_1, t), \\ \sigma_{4m+1}(x_1, t) &= -(\theta_1^{(2)} - i\theta_2^{(2)}) u_{4m+1}(x_1, t), \end{aligned}$$

где вещественнозначные частотные функции $\theta_1^{(s)}(\omega)$, $\theta_2^{(s)}(\omega)$, $s = 1, 2$, определены следующим образом:

$$\begin{aligned}\theta_1^{(s)}(\omega) &= \left(b_s + R_s \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{(\gamma_n^{(s)})^2 + \omega^2} \right) \omega k_s(\omega) - \\ &\quad - \left(a_s - R_s \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)} \gamma_n^{(s)}}{(\gamma_n^{(s)})^2 + \omega^2} \right) \delta_s(\omega), \\ \theta_2^{(s)}(\omega) &= \left(b_s + R_s \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{(\gamma_n^{(s)})^2 + \omega^2} \right) \omega \delta_s(\omega) + \\ &\quad + \left(a_s - R_s \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)} \gamma_n^{(s)}}{(\gamma_n^{(s)})^2 + \omega^2} \right) k_s(\omega).\end{aligned}$$

Используя формулы (5.17) и (5.18) для модуля накопления $C_1^{(s)}$ и модуля потерь $C_2^{(s)}$ и учитывая, что

$$\begin{aligned}k_s(\omega) &= \frac{\omega}{|C^{(s)}(\omega)|} \sqrt{\frac{\rho_s}{2} \left(|C^{(s)}(\omega)| + C_1^{(s)}(\omega) \right)}, \\ \delta_s(\omega) &= \frac{\omega}{|C^{(s)}(\omega)|} \sqrt{\frac{\rho_s}{2} \left(|C^{(s)}(\omega)| - C_1^{(s)}(\omega) \right)},\end{aligned}$$

выражения для $\theta_1^{(s)}$ и $\theta_2^{(s)}$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\theta_1^{(s)}(\omega) &= C_2^{(s)}(\omega) k_s(\omega) - C_1^{(s)}(\omega) \delta_s(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho_s}{2} \left(|C^{(s)}(\omega)| - C_1^{(s)}(\omega) \right)}, \\ \theta_2^{(s)}(\omega) &= C_1^{(s)}(\omega) k_s(\omega) + C_2^{(s)}(\omega) \delta_s(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho_s}{2} \left(|C^{(s)}(\omega)| + C_1^{(s)}(\omega) \right)}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sigma_{4m-2}(x_1, t) &= -i\omega\eta^{(1)}u_{4m-2}(x_1, t), \quad \sigma_{4m-1}(x_1, t) = i\omega\eta^{(1)}u_{4m-1}(x_1, t), \\ \sigma_{4m}(x_1, t) &= -i\omega\eta^{(2)}u_{4m}(x_1, t), \quad \sigma_{4m+1}(x_1, t) = i\omega\eta^{(2)}u_{4m+1}(x_1, t),\end{aligned}$$

где $\eta^{(s)}(\omega)$, $s = 1, 2$, — комплекснозначные частотные функции:

$$\eta^{(s)}(\omega) = \sqrt{\frac{\rho_s}{2} \left(\sqrt{|C^{(s)}(\omega)| + C_1^{(s)}(\omega)} + i\sqrt{|C^{(s)}(\omega)| - C_1^{(s)}(\omega)} \right)}.$$

Рассуждая так же, как в п. 5.1, можно показать, что $\eta^{(s)}(\omega)$ представляет собой импеданс продольной волны в s -й фазе слоистой среды.

Зная значения перемещений на границах слоев, мы можем выписать значения напряжений $\sigma_k(x_1, t)$ на этих границах:

$$\begin{aligned}\sigma_0(0, t) &= -i\omega Z e^{i\omega t}, & \sigma_1(0, t) &= i\omega Z U_1 e^{i\omega t}, & \sigma_2(0, t) &= -i\omega \eta^{(1)} U_2 e^{i\omega t}, \\ \sigma_3(0, t) &= i\omega \eta^{(1)} E_1 U_3 e^{i\omega t}, & \sigma_{4m}(m\varepsilon, t) &= -i\omega \eta^{(2)} E_2 U_{4m} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{4m+1}(m\varepsilon, t) &= i\omega \eta^{(2)} U_{4m+1} e^{i\omega t}, & \sigma_{4n+2}(n\varepsilon, t) &= -i\omega \eta^{(1)} U_{4n+2} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{4n+3}(n\varepsilon, t) &= i\omega \eta^{(1)} E_1 U_{4n+3} e^{i\omega t}, & \sigma_{4M+2}(M\varepsilon, t) &= -i\omega Z_3 U_{4M+2} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{4m-2}((m-h)\varepsilon, t) &= -i\omega \eta^{(1)} E_1 U_{4m-2} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{4m-1}((m-h)\varepsilon, t) &= i\omega \eta^{(1)} U_{4m-1} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{4m}((m-h)\varepsilon, t) &= -i\omega \eta^{(2)} U_{4m} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{4m+1}((m-h)\varepsilon, t) &= i\omega \eta^{(2)} E_2 U_{4m+1} e^{i\omega t}, \\ m &= 1, \dots, M; & n &= 1, \dots, M-1.\end{aligned}$$

Условия непрерывности напряжений на границах $x_1 = 0$, $x_1 = m\varepsilon$, $x_1 = (m-h)\varepsilon$ приводят к следующим $2M+1$ уравнениям:

$$\begin{cases} ZU_1 + \eta^{(1)}U_2 - E_1\eta^{(1)}U_3 = Z, \\ E_1\eta^{(1)}U_{4m-2} - \eta^{(1)}U_{4m-1} - \eta^{(2)}U_{4m} + E_2\eta^{(2)}U_{4m+1} = 0, \\ E_2\eta^{(2)}U_{4n} - \eta^{(2)}U_{4n+1} - \eta^{(1)}U_{4n+2} + E_1\eta^{(1)}U_{4n+3} = 0, \\ E_2\eta^{(2)}U_{4M} - \eta^{(2)}U_{4M+1} - Z_3U_{4M+2} = 0, \end{cases} \quad (5.25)$$

$$m = 1, \dots, M; \quad n = 1, \dots, M-1.$$

Таким образом, для вычисления точных значений $U_1(\omega)$ и $U_{4M+2}(\omega)$ комплексных амплитуд волны, отраженной от границы $x_1 = 0$, и волны, прошедшей через все $2M$ слоя, требуется решить систему из $4M+2$ линейных уравнений (5.24), (5.25).

Система уравнений (5.24), (5.25), связывающая комплексные амплитуды отраженных и прошедших волн в соседних слоях, дает возможность численно сравнивать амплитуды $|U_1(\omega)|$ и $|U_{4M+2}(\omega)|$, вычисленные для точной модели слоистой среды, с амплитудами $|D_1(\omega)|$ и $|D_4(\omega)|$, вычисленными для ее усредненной модели. С помощью такого сравнения можно исследовать, в частности, влияние числа слоев среды на относительные погрешности

$$\Delta_1^{(M)}(\omega) = \frac{||U_1(\omega)| - |D_1(\omega)||}{|U_1(\omega)|}, \quad \Delta_2^{(M)}(\omega) = \frac{||U_{4M+2}(\omega)| - |D_4(\omega)||}{|U_{4M+2}(\omega)|}.$$

амплитуд $|D_1(\omega)|$ и $|D_4(\omega)|$, принимаемых в качестве приближенных значений $|U_1(\omega)|$ и $|U_{4M+2}(\omega)|$ соответственно.

В качестве примера рассмотрим три образца слоистого композита, занимающих полосу $0 < x_1 < L$ при $L = 0.14$ м и состоящих из M слоев упругого материала и M слоев ВУМ-II с теми же числовыми параметрами, что и в п. 4.4. Образцы отличаются друг от друга только толщиной и числом их слоев: для первого образца принимается $M = 10$ (при этом $\varepsilon = 0.014$ м), для второго образца — $M = 14$ (при этом $\varepsilon = 0.01$ м), а для третьего образца — $M = 28$ (при этом $\varepsilon = 0.005$ м).

Возьмем частотный диапазон $D_1 = [1 \text{ Гц}, 30 \text{ кГц}]$ и исследуем функцию $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ при $\omega \in I_1$ и $M = 10, 14, 28$.

Непосредственные вычисления показывают, что наибольшие значения функция $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ принимает вблизи собственных частот $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_1^{(M)}$ одномерных колебаний слоистой и усредненной сред (см. табл. 4.2 и 4.4). Это объясняется тем, что при этих значениях частот функции $|D_4(\omega)|$ и $|U_{4M+2}(\omega)|$ имеют “резкие” максимумы, т.е. их значения довольно быстро меняются вблизи точек максимума. С целью уточнения поведения функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ вблизи точек $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_1^{(M)}$ выделим частотный диапазон $Q_1 = [17 \text{ кГц}, 18.8 \text{ кГц}]$. Вычисления показывают, что имеют место следующие

оценки:

$$\Delta_2^{(10)}(\omega) < 23.3\%, \quad \Delta_2^{(14)}(\omega) < 11.3\%, \quad \Delta_2^{(28)}(\omega) < 2.8\%, \quad \omega \in Q_1.$$

На рис. 5.4 изображен график функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ при $\omega \in Q_1$: кривая 1 соответствует $M = 10$, кривая 2 — $M = 14$, а кривая 3 — $M = 28$ (эти же соответствия будут приняты и в следующих рисунках).

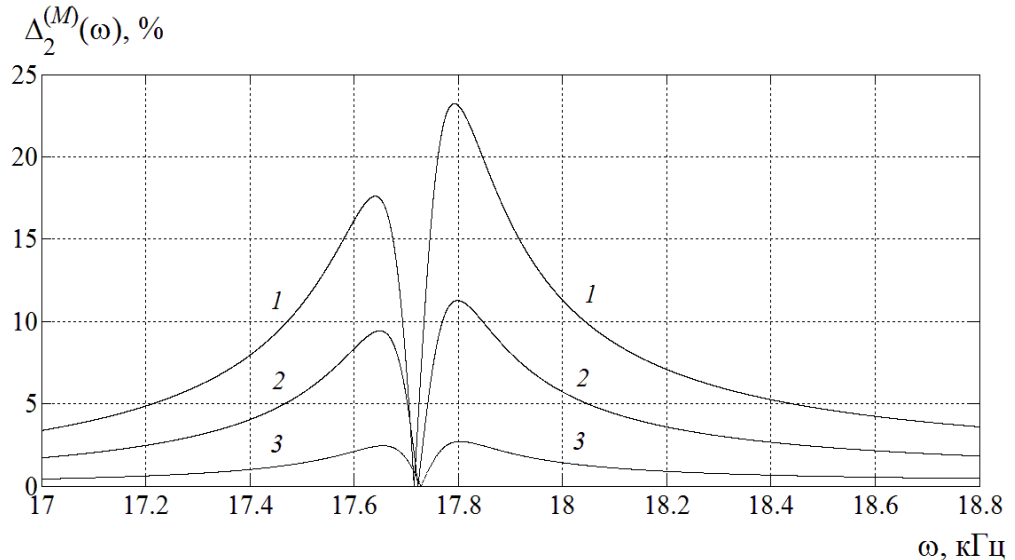


Рис. 5.4. График функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ для частот $\omega \in Q_1$

Вне Q_1 значения функций $|D_4(\omega)|$ и $|U_{4M+2}(\omega)|$ меняются достаточно плавно. Для более полного представления о величине относительной погрешности $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ рассмотрим частотные диапазоны $I_1 = [1 \text{ Гц}, 1 \text{ кГц}]$, $I_2 = [1 \text{ кГц}, 14 \text{ кГц}]$, $I_3 = [14 \text{ кГц}, 17 \text{ кГц}]$, $I_4 = [18.8 \text{ кГц}, 30 \text{ кГц}]$. Вычисления показывают, что при $\omega \in I_1$

$$\Delta_2^{(10)}(\omega) < 0.0014\%, \quad \Delta_2^{(14)}(\omega) < 0.0008\%, \quad \Delta_2^{(28)}(\omega) < 0.00018\%,$$

а при $\omega \in I_2$

$$\Delta_2^{(10)}(\omega) < 0.2\%, \quad \Delta_2^{(14)}(\omega) < 0.1\%, \quad \Delta_2^{(28)}(\omega) < 0.025\%.$$

На рис. 5.5 изображены графики функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ при $\omega \in I_3$ и $\omega \in I_4$.

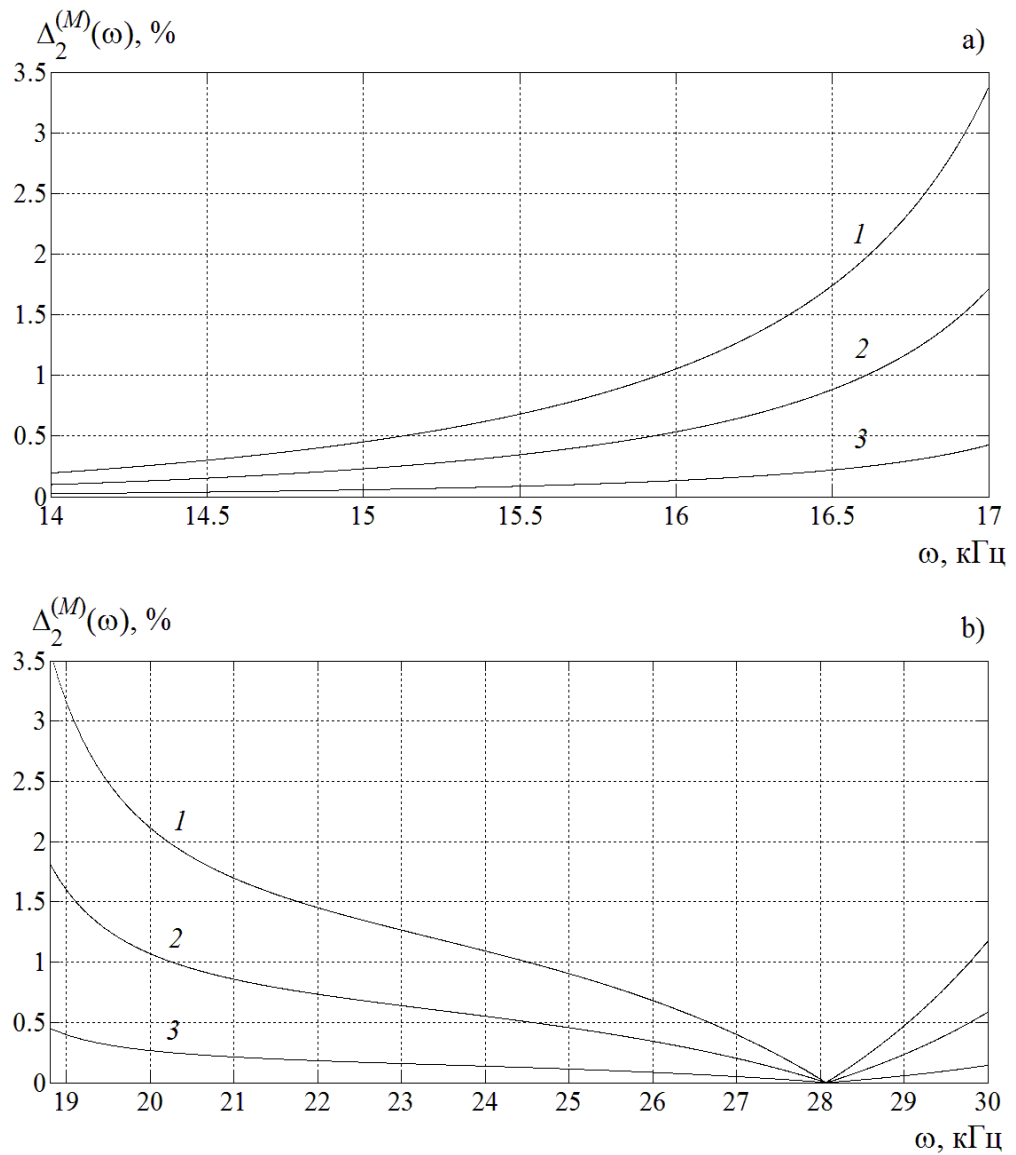


Рис. 5.5. График функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ для частот: а) $\omega \in I_3$; б) $\omega \in I_4$

Проведенное численное исследование показывает, что одновременное увеличение числа слоев композита и уменьшение их толщины приводит к достаточно быстрому повышению точности приближенного значения $|D_4(\omega)|$ во всём частотном диапазоне [1 Гц, 30 кГц].

В завершение исследуем вопрос о точности приближенного значения $|D_4(\omega)|$ при частотах, больших 30 кГц. Для определенности рассмотрим два частотных диапазона $D_2 = [30 \text{ кГц}, 60 \text{ кГц}]$ и $D_3 = [60 \text{ кГц}, 90 \text{ кГц}]$. Согласно численному исследованию, в каждом из этих двух диапазонов наибольшие значения функция $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ принимает внутри интервалов $Q_2 = (34.5 \text{ кГц}, 36.5 \text{ кГц}) \in D_2$ и $Q_3 = (52.5 \text{ кГц}, 54.1 \text{ кГц}) \in D_3$,

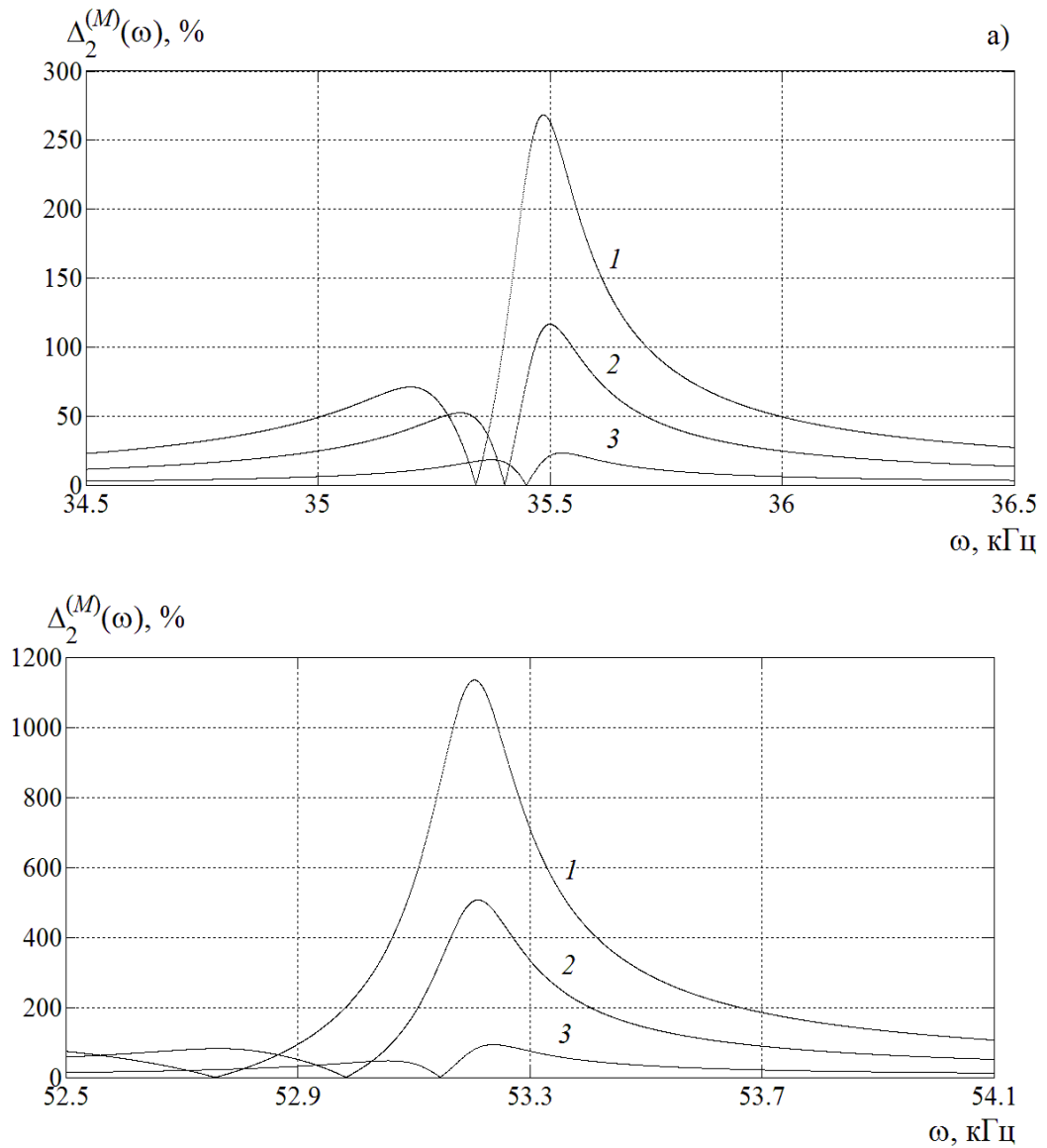


Рис. 5.6. График функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ для частот: а) $\omega \in Q_2$; б) $\omega \in Q_3$

содержащих точки локального максимума функций $|D_4(\omega)|$ и $|U_{4M+2}(\omega)|$. Вычисления показывают, что для функции $|D_4(\omega)|$ эти точки совпадают с собственными частотами $\omega_2^{(0)} \in D_2$ и $\omega_3^{(0)} \in D_3$ усредненной среды, значения которых приведены в табл. 4.1, а для функции $|U_{4M+2}(\omega)|$ — с собственными частотами $\omega_2^{(M)} \in D_2$, $\omega_3^{(M)} \in D_3$ слоистого композита, значения которых приведены в табл. 4.4 и 4.6 при $M = 10, 14, 28$. Графики функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ при $\omega \in Q_2$ и $\omega \in Q_3$ представлены на рис. 5.7.

Сравнение графиков функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ при $\omega \in D_k$ ($k = 1, 2, 3$) показывает, что наибольшие значения этой функции, достигаемые внутри

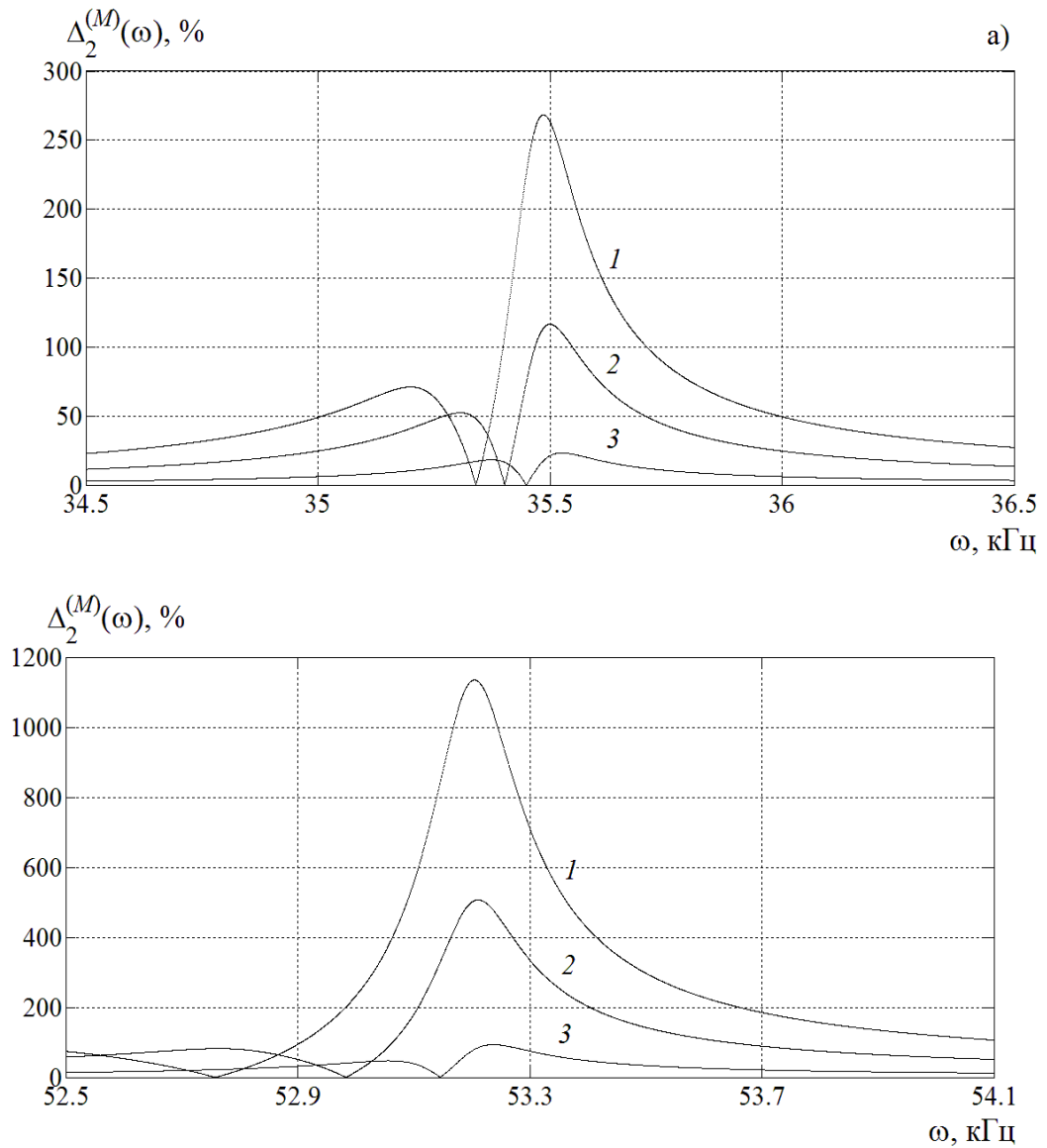


Рис. 5.7. График функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ для частот: а) $\omega \in Q_2$; б) $\omega \in Q_3$

D_k , быстро увеличиваются при увеличении номера k . Кроме того, суммарная длина всех интервалов внутри D_k , для которых относительная погрешность приближенного значения $|D_4(\omega)|$ недопустимо велика (например, больше 20%), также быстро увеличивается при увеличении k .

Результаты проведенного численного исследования наглядно демонстрируют тот факт, что одновременное увеличение числа слоев композита и пропорциональное уменьшение их толщины приводит к расширению границ частотного диапазона, для которого относительная погрешность приближенного значения $|D_4(\omega)|$ амплитуды $|U_{4M+2}(\omega)|$ волны, прошедшей че-

рез все слои композита, не превосходит некоторого заранее заданного ее значения. Иными словами, уменьшение величины периода ε приводит к увеличению диапазона длин волн, для исследования которых допустимо использовать усредненную модель слоистого композита.

Заключение

Цель проведенных в диссертационной работе исследований заключалась в исследовании эффективных динамических характеристик усредненных (эффективных) моделей микронеоднородных сред с периодической микроструктурой при наличии диссипации, обусловленной вязкостью и/или последствием, и последующем исследовании их динамических характеристик. В работе получены следующие основные результаты.

1. Выведены усредненные уравнения акустики для твердых сред с периодической микроструктурой, состоящих из вязкоупругих материалов или из упругого и вязкоупругого материалов. В качестве вязкоупругих материалов рассмотрены вязкоупругие материалы, обладающие вязкостью и/или памятью. Показано, что во всех случаях усредненные уравнения являются интегро-дифференциальными и описывают колебания однородных вязкоупругих материалов с памятью. Выписаны вспомогательные стационарные и эволюционные периодические задачи для расчета компонентов тензоров ядер релаксации усредненных вязкоупругих материалов.

2. Выведены усредненные уравнения акустики для смешанных сред с периодической микроструктурой, состоящих из вязкоупругого материала с вязкостью и/или памятью и сжимаемой вязкой или слабовязкой жидкости. Установлено, что усредненные уравнения являются интегро-дифференциальными и в случае вязкой жидкости описывают колебания однородной вязкоупругой среды, обладающей как вязкостью, так и памятью, а в случае слабовязкой жидкости — колебания модифицированной среды Био. Выписаны вспомогательные стационарные и эволюционные периодические задачи, с помощью которых находятся коэффициенты и ядра сверток усредненных уравнений.

3. Исследован вопрос о сходимости последовательностей решений исходных начально-краевых задач, описывающих колебания микронеодно-

родных твердых и смешанных сред из пп. 1 и 2, к решениям начально-краевых задач, описывающих колебания соответствующих усредненных сред, при неограниченном уменьшении величины периода. Доказано, что для твердых сред и смешанных сред с вязкой жидкой фазой решения усредненных задач есть сильные L^2 -пределы последовательностей решений допредельных (исходных) задач. Для смешанных сред со слабовязкой жидкой фазой установлена сильная сходимость в пространстве L^2 последовательностей решений допредельных задач к решениям усредненных задач с корректорами в виде осциллирующих вектор-функций, явный вид которых дается через решения вспомогательных задач на ячейке периодичности.

4. Получены усредненные уравнения акустики для сред с периодической микроструктурой, состоящих из частично пористого твердого материала и сжимаемой вязкой или слабовязкой жидкости, заполняющей поры. В частности, выведены граничные условия, связывающие эти уравнения на границе раздела двух сред: сплошного твердого материала и смешанной среды, состоящей из пористого твердого материала и жидкости.

5. Выведены формулы для расчета всех компонентов тензоров ядер релаксации усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с периодической микроструктурой. В качестве одной фазы этих сред был взят изотропный упругий или вязкоупругий материал, а в качестве другой фазы — изотропный вязкоупругий материал или вязкая сжимаемая жидкость. Для вывода указанных формул были решены вспомогательные периодические задачи: как стационарные, так и эволюционные.

6. Исследована структура спектров одномерных собственных колебаний усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с диссипацией из п. 5. Установлено, что спектр собственных колебаний, направление которых перпендикулярно или параллельно слоям исходной среды, представляет собой объединение корней дробно-рациональных уравнений. Показано, что спектр одномерных собственных колебаний усреднен-

ной среды является вещественным, за исключением, возможно, конечного числа его точек, если выполнено одно из следующих двух условий: 1) обе фазы слоистой среды обладают вязкостью; 2) только одна фаза слоистой среды обладает вязкостью и при этом собственные колебания направлены параллельно слоям. Если же ни одно из этих двух условий не выполнено, то спектр одномерных собственных колебаний усредненной среды, кроме вещественной части, содержит бесконечное множество невещественных точек.

7. Для двухфазных слоистых сред с диссипацией установлено, что спектры собственных колебаний, распространяющихся перпендикулярно их слоям, представляют собой объединение корней трансцендентных уравнений. Доказано, что при неограниченном уменьшении величины периода указанные спектры сходятся по Хаусдорфу к объединению спектров одномерных собственных колебаний соответствующих усредненных сред и множеств, состоящих из точек, в которых знаменатели упомянутых в п. 5 дробно-рациональных уравнений обращаются в нуль. Проведено численное сравнение спектральных характеристик двухфазного слоистого композита и соответствующего ему усредненного материала. Численно подтверждено, что увеличение числа слоев композита приводит к сближению точек спектров одномерных собственных колебаний композита и усредненного материала.

8. Для плоских звуковых волн, нормально падающих на границы двухфазных слоистых сред с диссипацией из п. 5, занимающих полупространство или неограниченную полосу, выведены приближенные формулы для расчета комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн. Для этого была использована замена исходных слоистых сред на соответствующие им усредненные среды. Получена также система линейных уравнений для расчета точных значений комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн в случае, когда слоистые среды состоят из конечного числа

слоев, параллельных фронту падающей волны. Проведено численное сравнение точного и приближенного значений амплитуды прошедшей волны для двухфазного слоистого композита. Численно исследовано влияние числа слоев на границы применимости приближенных формул и, в частности, численно выявлен резкий рост относительной погрешности приближенного значения амплитуды для волн, частоты которых близки к собственным частотам слоистого композита или усредненного материала.

Список литературы

1. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
2. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Динамическая модель пористой среды, заполненной вязкой жидкостью // Доклады АН. 2005. Т. 401. № 5. С. 630–633.
3. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Инерционные и диссипативные свойства пористой среды, заполненной вязкой жидкостью // Известия РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 109–119.
4. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В.* Определение резонансным методом динамических свойств гранулированных сред, пропитанных жидкостью // Известия РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 96–108.
5. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Упругие свойства гранулированной среды, пропитанной жидкостью // Известия РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 3–16.
6. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 320 с.
7. *Бардзокас Д.И., Зобнин А.И.* Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС, 2003.
8. *Барях А.А., Асанов В.А., Паньков И.Л.* Физико-механические свойства соляных пород Верхнекамского калийного месторождения. Пермь: ПГТУ, 2008.
9. *Бахвалов Н.С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой. ДАН СССР. 1974. Т. 218, № 5. С. 1046–1048.
10. *Бахвалов Н.С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частны-

ми производными с быстро осциллирующими коэффициентами. ДАН СССР. 1975. Т. 225, № 2. С. 249–252.

11. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
12. *Бленд Д.Р.* Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 200 с.
13. *Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В.* Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. Днепропетровск: Пороги. 2008. 196 с.
14. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
15. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
16. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 457 с.
17. *Власов В.В., Ву Дж.* Спектральный анализ и разрешимость абстрактных гиперболических уравнений с последствием // Диф. уравнения. 2009. Т. 45, № 4. С. 524–533.
18. *Власов В.В., Ву Дж., Кабирова Г.Р.* Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последствием // Современная математика. Фундам. направления. 2010. Т. 35. С. 44–59.
19. *Власов В.В., Гавриков А.А., Иванов С.А., Князьков Д.Ю., Самарин В.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства комбинированных сред // Современные проблемы математики и механики. 2009. Т. 5. № 1. С. 134–155.
20. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике. Докл. РАН. 2010. Т. 434, № 1. С. 12–15.
21. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Современная математика. Фундам. направления. 2010. Т. 35. С. 60–70.

- математика. Фундам. направления. 2012. Т. 45. С. 43–61.
22. *Волевич Л.Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Математический сборник. 1965. Т. 68. № 3. С. 373–416.
 23. *Гавриков А.А., Шамаев А.С.* Некоторые вопросы акустики эмульсий // ДАН. 2010. Т. 434. № 1. С. 42–46.
 24. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
 25. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е.* Особенности поведения вязкоупругих моделей // Известия РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 119–157.
 26. *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В.* Теория упругости и пластичности. М.: Физматлит, 2002.
 27. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z -преобразования. М.: Наука, 1971.
 28. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
 29. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
 30. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Матем. сборник. 2000. Т. 191, № 7. С. 31–72.
 31. *Жиков В.В.* Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Известия РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 2. С. 81–148.
 32. *Жиков В.В.* О двухмасштабной сходимости // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд. МГУ, 2003. Вып. 23. С. 149–187.
 33. *Жиков В.В.* О лакунах в спектре некоторых дивергентных эллиптических операторов с периодическими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, вып. 5. С. 34–58.
 34. *Жиков В.В.* О спектральном методе в теории усреднения // Труды МИАН. 2005. Т. 250. С. 95–104.
 35. *Жиков В.В., Иосифьян Г.А.* Введение в теорию двухмасштабной схо-

- димости // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд. МГУ, 2013. Вып. 29. С. 281–332.
36. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
37. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
38. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
39. *Ковтун А.А.* Об уравнениях модели Био и их модификациях // Ученые записки СПбГУ. 2011. № 444. С. 3–26.
40. *Константинова С.А., Аптуков В.Н.* Некоторые задачи механики деформирования и разрушения соляных пород. Новосибирск: Наука, 2013.
41. *Космодемьянский Д.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред // Известия РАН. МТТ. 2009. № 6. С. 75–114.
42. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 340 с.
43. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
44. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
45. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
46. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
47. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Едиториал УРСС, 2010. 586 с.
48. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи с мелкозернистой гра-

- ницей // Мат. сборник. 1964. Т. 65(107), № 3. С. 458–472.
49. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 319 с.
50. *Мейрманов А.М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуэтсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. мат. ж. 2007. Т. 48. № 3. С. 645–667.
51. *Мейрманов А.М.* Определение акустических и фильтрационных характеристик термоупругих пористых сред: уравнения термо-порупругости Био // Мат. сборник. 2008. Т. 199, № 3. С. 45–68.
52. *Молотков Л.А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984.
53. *Молотков Л.А.* О распространении нормальных волн в изолированном пористом флюидонасыщенном слое Био // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1999. Т. 257. С. 165–183.
54. *Молотков Л.А.* Исследования распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 347 с.
55. *Молотков Л.А.* Распространение волн в изолированном пористом слое Био с закрытыми порами на границах // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2008. Т. 354, С. 173–189.
56. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990.
57. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984.
58. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Основы механики сплошной среды. М.: "Физматлит 2006. 272 с.
59. *Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С.* Усреднение. Методы и приложения. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007.
60. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

61. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
62. *Рытов С.М.* Акустические свойства мелкодисперсной среды // Акуст. журн. 1956. Т. 2. № 1. С. 71–83.
63. *Сандраков Г.В.* Осреднение нестационарных уравнений с контрастными коэффициентами // Доклады РАН. 1997. Т. 335, № 5. С. 605–608.
64. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
65. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Том 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
66. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
67. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
68. *Трапезникова Н.А.* Прогноз и интерпретация динамики сейсмических волн. М.: Наука, 1985. 112 с.
69. *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1944. Т. 8. № 4. С. 133–150.
70. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987. 577 с.
71. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с вязкой жидкостью // Доклады АН. 2011. Т. 436, № 2. С. 199–202.
72. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью // Известия РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 92–103.
73. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для пористого вязкоупругого материала с долговременной памятью, заполненного вязкой жидкостью // Диф. уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1174–1186.
74. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний ком-

- позита, состоящего из слоев упругого и вязкоупругого материалов // Сиб. журнал индустр. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 124–134.
75. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре собственных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкой жидкости // Доклады АН. 2013. Т. 448, № 1. С. 43–46.
76. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2013. Т. 53, № 2. С. 282–290.
77. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Спектр одномерных колебаний в комбинированной слоистой среде, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости // Известия РАН. МЖГ. 2013. № 1. С. 17–25.
78. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Отражение плоской акустической волны от границы раздела упругого материала и слоистой упруго-жидкой среды // Известия РАН. МЖГ. 2014. № 6. С. 45–53.
79. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усредненные модели гетерогенных сред и их спектральные свойства // Международная конференция “Спектральная теория и дифференциальные уравнения”, посвященная 100-летию Б.М. Левитана: Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ и ООО “ИНТУИТ.РУ”, 2014. С. 143–144.
80. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Прохождение плоской звуковой волны через слой композита с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // Международная конференция “Современные проблемы вычислительной математики и математической физики”: Тезисы докладов. М.: МАКС-Пресс, 2014. С. 208.
81. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Прохождение плоской звуковой волны через композит из упругих и вязкоупругих слоев // Доклады АН. 2015. Т. 463, № 1. С. 45–48.

82. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Прохождение плоской звуковой волны через слоистый композит с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // Акуст. журнал. 2015. Т. 61, № 1. С. 10–20.
83. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Отражение плоской звуковой волны от границы слоистой гетерогенной среды с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник докладов. Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 4166–4168.
84. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Труды МИАН. 2016. Т. 295. С. 218–228.
85. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений состояния для гетерогенной среды, состоящей из слоев двух ползучих материалов // Труды МИАН. 2016. Т. 295. С. 229–240.
86. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Прохождение плоской звуковой волны через композит из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Известия РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 32–44.
87. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Расчет собственных частот колебаний многослойной упруго-жидкой среды с помощью ее усредненной модели // Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Аэрокосмические технологии. М.: МФТИ, 2017. С. 24–26.
88. *Швиданенко А.М.* Распространение волн в вязкоупругой слоистой среде // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 5. С. 791–794.
89. *Шумилова В.В., Шамаев А.С.* О спектре одномерных колебаний в периодической комбинированной слоистой среде // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 1882–1883.
90. *Шумилова В.В.* Об усреднении уравнений акустики для пористых

- вязкоупругих материалов, заполненных вязкой жидкостью // Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная 110-ой годовщине со дня рождения И.Г. Петровского: Сборник тезисов. М.: Изд-во МГУ и ООО “ИНТУИТ.РУ”, 2011. С. 397–398.
91. *Шумилова В.В.* Об усреднении уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с жидкостью // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов. М.: МИАН, 2011. С.
92. *Шумилова В.В., Шамаев А.С.* О спектре одномерных колебаний в периодической комбинированной слоистой среде // Современные проблемы механики. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков: Тезисы докладов. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. С. 213–214.
93. *Шумилова В.В.* О спектре усредненных моделей для слоистой комбинированной среды // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: Тезисы докладов. М.: МИАН, 2012. С. 182.
94. *Шумилова В.В.* Об усреднении задачи вязкоупругости с долговременной памятью // Математические заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 441–454.
95. *Шумилова В.В.* К вопросу об отражении акустических волн от границы упругого материала и слоистой упруго-жидкой среды // Сб. науч. трудов “Актуальные вопросы машиноведения”, Минск: ОИМ НАН Беларуси. 2013. Вып. 2. С. 214–216.
96. *Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкой жидкости // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов. М.: МИАН, 2013. С. 243–244.

97. *Шумилова В.В.* Эффективные модели нестареющих вязкоупругих композитов // Крымская международная математическая конференция: Сборник тезисов. Т. 3. Симферополь: изд-во КНЦ НАНУ, 2013. С. 79.
98. *Шумилова В.В.* Отражение плоской звуковой волны от границы гетерогенной среды из слоев упругого и вязкоупругого материалов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1208–1220.
99. *Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для среды из вязкоупругого материала и слабвязкой сжимаемой жидкости // Диф. уравнения. 2015. Т. 51, № 4. С. 556–560.
100. *Abdessamad Z., Kostin I., Panasenko G.* Memory effect in homogenization of a viscoelastic Kelvin-Voigt model with time-dependent coefficients // Math. Models and Methods in Applied Sciences. 2009. V. 19, No 9. P. 1603–1630.
101. *Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Persivale D.* An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains. *Nonlinear Analysis*. 1992. V. 18. P. 481–496.
102. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // *SIAM J. Math. Anal.* 1992. V. 23. № 6. P. 1482–1518.
103. *Allaire G., Braine M.* Multiscale convergence and reiterated homogenization // *Proceed. of Royal. Soc. Edinburgh*. 1996. V. 126A. P. 297–342.
104. *Allaire G., Damlamian A., Hornung U.* Two-scale convergence on periodic surfaces and applications // *Mathematical Modelling of Flow through Porous Media*. Eds: A. Bourgeat et al. Singapore: World Scientific. 1995. P. 15–25.
105. *Arbogast T., Douglas J., Hornung U.* Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // *SIAM J. Math. Anal.* 1990. V. 21, N 4. P. 823–836.

106. *Auriault J.-L.* Poroelastic media // In “Homogenization and Porous Media” (ed. U. Hornung). Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, Berlin. 1997. P. 163–182.
107. *Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. North Holland, Amsterdam, 1978.
108. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Lower frequency range // Journal of the Acoustical Society of America. 1956. V. 28, No 2. P. 168-178.
109. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // Journal of the Acoustical Society of America. 1956. V. 28, No 2. P. 179-191.
110. *Biot M.A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoustic Soc. Amer. 1962. V. 34. P. 1254–1+264.
111. *Biot M.A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. P. 1482–1498.
112. *Burridge R., Keller J.B.* Poroelasticity equations derived from microstructure // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. P. 1140–1146.
113. *Carcione J.M.* Viscoelastic effective rheologies for modelling wave propagation in porous media // Geophys. Prospect. 1998. Vol. 46., No 3. P. 249–270.
114. *Carcione J.M.* Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media. Amsterdam: Elsevier, 2007. 538 p.
115. *Casado-Diaz J., Gayte I.* A general compactness result and its application to two-scale convergence of almost periodic functions // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 1996. V. 323, N. 4. P. 329–334.
116. *Casado-Diaz J., Gayte I.* The two-scale convergence method applied to generalized Besicovitch spaces // R. Soc. Lond. Proc., Ser. A. 2002. V. 458. P. 2925–2946.
117. *Caviglia G., Morro A.* Wave propagation and reflection-transmission in a

- stratified viscoelastic solid // *Int. J. of Solids and Structures*. 2012. V. 49. P. 567–575.
118. *Clopeau Th., Ferrin J. L., Gilbert R. P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed, Part II // *Math. and Comput. Modelling*. 2003. V. 33. P. 821–841.
119. *Coussy O.* Poromechanics. Chichester: John Wiley and Sons. 2002.
120. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 1: Physical origins and classical methods. Springer-Verlag, Berlin, 1990. 720 p.
121. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5: Evolution problems I. Springer-Veglag, Berlin, 1992, 709 p.
122. *De Giorgi E., Spagnolo S.* Sulla convergenza delli integrali dell energia per operatori ellitici del secondo ordine // *Boll. Unione Mat. Ital.* 1973. V. 8. P. 391–411.
123. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin-Pipkin type equations // *SIAM J. Math. Anal.* 2011. V. 43, No 5. P. 2296–2306.
124. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics. American Math. Society, 662 p.
125. *Ferrin J.L., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of a porous matrix containing an incompressible inviscid fluid // *Math. Methods Appl. Sci.* 2003. V. 26, No 10. P. 831–859.
126. *Gilbert K.E.* A propagator matrix method for periodically stratified media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1983. V. 73. № 1. P. 137–142.
127. *Gilbert R.P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I // *Nonlinear Analysis*. 2000. T. 40. № 1. P. 185–212.
128. *Gilbert R.P., Panchenko A., Xie X.* Homogenization of a viscoelastic matrix in linear frictional contact // *Math. Models and Methods in Applied Sciences*. 2005. V. 28. P. 309–328.

129. *Gould H.W.* Combinatorial Identities: a standardized set of tables listing 500 binomial coefficient summations. Revised edition, published by the author, Morgantown, W.V, 1972.
130. *Hill R* The elastic behaviour of a crystalline aggregate // Proc. Phys. Soc. A. 1952. V. 65, No. 5. P. 349–354.
131. *Kelder O., Smeulders D. M. J.* Observation of the Biot slow wave in water-saturated Nivel-steiner sandston // Geophysics. 1997. Vol. 62, N 6. P. 1794–1796
132. *Kennet B.L.N.* Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge: Cambridge Uni-versity Press, 1983. 342 p.
133. *Lakes R.S.* Viscoelastic materials. UK: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
134. *Levy T.* Propagation waves in a fluid-saturated porous elastic solid // Intern. J. Engrg. Sci. 1979. V. 17. P. 1005–1014.
135. *Lukassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence // Int. J. Pure and Appl. Math. 2002. V. 20. № 1. P. 35–86.
136. *Meirmanov A.* A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal. 2008. V. 40. № 3. P. 1272–1289.
137. *Meirmanov A.* Mathematical Models for Poroelastic Flows. Paris: Atlantis Press. 2013. 449 p.
138. *Nazarov S., Pankratova I., Piatnitski A.* Homogenization of the spectral problem for periodic elliptic operators with sign-changing density function // Archive Rat. Mech. Analysis. 2011. V. 2003. No 3. P. 747–788.
139. *Neuss-Radu M.* Some extension of two-scale convergence // C. r. Acad. Sci., Paris. Ser. I. 1996. V. 322. № 9. P. 899–904.
140. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. № 3. P. 608–623.

141. *Nguetseng G.* Asimptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 6. P. 1394–1414.
142. *Orlik J.* Transmission and homogenization in hereditary viscoelasticity with aging and shrinkage. PhD-Thesis Shaker Verlag, 2000.
143. *Plona T.J.* Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies // Appl. Phys. Lett. 1980. V. 36. P. 259–261.
144. *Sanchez-Hubert J.* Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture // Math. Methods Appl. Sci. 1980. № 2. P. 158–190.
145. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* On the spectrum of an integro-differential equation arising in viscoelasticity theory // Journal of Mathematical Sciences. 2012. V. 181, No 5. P. 751–754.
146. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Homogenization of acoustic equations for a partially perforated elastic material with slightly viscous fluid // Журнал СФУ. Серия «Математика и физика». 2015. Т. 8, № 3. С. 356-370.
147. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Calculation of natural frequencies and damping coefficients of a multi-layered composite using homogenization theory // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, N 2. P. 126–131.
148. *Shumilova V.V.* On the spectrum of one-dimensional oscillations of layered viscoelastic materials // International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday: Book of abstracts. Kharkiv: B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU, 2012. P. 100.
149. *Shumilova V.V.* Spectrum of one-dimensional vibrations of a layered medium consisting of a Kelvin-Voigt material and a viscous incompressible fluid // Журнал СФУ. Серия «Математика и физика». 2013. Т. 6, № 3. 349–356.
150. *Shumilova V.V.* Averaging of acoustic equation for partially perforated viscoelastic material with channels filled by a liquid // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 190, No 1. P. 194–208.

151. *Shumilova V.V.* Spectral analysis of integro–differential equations in viscoelasticity theory // Journal of Mathematical Sciences. 2014. V. 196, No 3. P. 434–440.
152. *Skriganov M.M.* The spectrum band structure of the three–dimensional Schrodinger operator with periodic potential // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 107–121.
153. *Spagnolo S.* Sul limite dell soluzioni di problemi di Cauchy relativi all’equazione del calore. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. 1967. Vol. 21, No 4. P. 637–699.
154. *Spagnolo S.* Sulla convergenza delle soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. 1968. Vol. 22, No 3. P. 571–597.
155. *Stovas A., Arntsen B.* Vertical propagation of low-frequency waves in finely layered media // Geophysics. 2006. V. 71. № 3. P. T87–T94.
156. *Stovas A., Ursin B.* Reflection and transmission responses of layered transversely isotropic viscoelastic media // Geophys. Prospecting. 2003. V. 51. P. 447–477.
157. *Stovas A., Ursin B.* Reflection and transmission responses of layered transversely isotropic viscoelastic media // Geophys. Prospecting. 2003. V. 51. P. 447–477.
158. *Visintin A.* Some properties of two-scale convergence // Rendic. Accad. Lincei XV. P. 93–107.
159. *Visintin A.* Towards a two-scale calculus // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2006. V. 12. P. 371–397.
160. *Zhu J.B., Zhao X.B., Wu W., Zhao J.* Wave propagation across rock joints filled with viscoelastic medium using modified recursive method // J. of Appl. Geophys. 2012. V. 86. P. 82–87.