

На правах рукописи

Шумилова Владлена Валерьевна

ЭФФЕКТИВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ДИССИПАЦИЕЙ

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Официальные оппоненты:

Ерофеев Владимир Иванович

д.ф.-м.н, профессор, директор Института проблем машиностроения РАН,
г. Нижний Новгород

Мейрманов Анварбек Мукатович

д.ф.-м.н, профессор кафедры дифференциальных уравнений Белгородского государственного национального исследовательского университета,
г. Белгород

Михайлов Игорь Ефимович

д.ф.-м.н, профессор, ведущий научный сотрудник отдела механики сплошных сред Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” РАН, г. Москва

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова”, механико-математический факультет

Защита диссертации состоится “ ” сентября 2019 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при ИПМех РАН по адресу: 119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН <http://www.ipmnet.ru/diss/diss/>.

Автореферат разослан “___” _____ 2019 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета Д 002.240.01,
кандидат физико-математических наук

Е.Я. Сысоева

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Определение динамических характеристик микронеоднородных сред, состоящих из твердых материалов или из твердых материалов и жидкости, является одной из наиболее актуальных задач механики гетерогенных сред. Её практическая значимость обусловлена широким распространением таких сред в природе (горные породы, водонасыщенные грунты, коллекторы нефти и т.д.), а также запросами современной промышленности (производство композиционных материалов с заданными физико-механическими свойствами, фильтров и т.д.).

При изучении поведения микронеоднородных сред, состоящих из двух или более фаз с разными реологическими свойствами, большой интерес вызывает тот факт, что их динамические характеристики могут качественно отличаться от динамических характеристик одной из их фаз даже в том случае, когда доля всех остальных фаз очень мала. Так, например, в работе Л.Д. Акуленко и С.В. Нестерова [1] экспериментально было обнаружено явление исчезновения собственных частот колебаний при попадании в поры мраморного стержня очень малого количества вазелинового масла. Очевидно, что для теоретического обоснования такого рода явлений требуется привлечение строгого математического аппарата.

Математическое описание динамики микронеоднородных сред часто основано на предположении о наличии у них периодической структуры. Однако, несмотря на такое существенное упрощение, численный расчет динамических характеристик сред, состоящих из тысяч или миллионов ячеек периодичности, довольно затруднителен даже при использовании современных компьютеров. В связи с этим возникает необходимость определения их эффективных характеристик с помощью соответствующих им усредненных (эффективных) сред, являющихся во многих случаях однородными (гомогенными) средами.

Основы математической теории усреднения дифференциальных уравнений в частных производных были заложены в конце 60-х и первой половине 70-х годов XX-го века Н.С. Бахваловым, В.А. Марченко, Е.Я. Хрущевым, S. Spagnolo и E. De Giorgi. В настоящее время основными методами этой теории, активно используемыми при построении усредненных моделей сред с периодической микроструктурой, являются метод асимптотических разложений Н.С. Бахвалова и метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуэтсенга. Развитию этих методов и их применению к различным задачам механики гетерогенных сред посвящено огромное количество работ как отечественных, так и зарубежных ученых.

Среди множества моделей микронеоднородных сред самыми распространенными и доступными для исследования являются двухфазные среды. Простейшим примером такой среды является двухфазный упругий

композит — композит, состоящий из двух изотропных упругих материалов. Математически обоснованные алгоритмы построения усредненных моделей упругих композитов разработаны достаточно давно и могут быть найдены, например, в монографиях [2-4].

С точки зрения приложений, большой интерес вызывают двухфазные среды с диссипацией, состоящие из двух твердых материалов или из твердого материала и жидкости. Примером двухфазной твердой среды с диссипацией служит вязкоупругий композит, состоящий из двух изотропных вязкоупругих материалов. Если эти вязкоупругие материалы характеризуются определяющими соотношениями одного типа, то такой композит — частный случай микронеоднородного вязкоупругого материала. Усредненная модель микронеоднородного вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта приведена в монографии [5]. Интересно отметить, что она описывает поведение однородного вязкоупругого материала с “долговременной” памятью, т.е. предельный материал представляет собой вязкоупругий материал иного типа, чем исходный.

Примером двухфазной среды с диссипацией, состоящей из твердого материала и жидкости, служит флюидонасыщенная пористая среда. Началом активного изучения динамического поведения таких сред следует считать работу Я.И. Френкеля [6]. В 50-60-е годы XX-го века М.А. Biot, исходя из физических соображений, развил общую теорию волновых процессов, протекающих в пористых упругих материалах, поры которых заполнены жидкостью. Эффективная модель Био в целом согласуется с эффективными моделями пористых упругих сред со слабовязкой жидкостью, построенными с помощью метода асимптотических разложений в работах Э. Санчес-Паленсии [5], J.-L. Auriault [7], R. Burridge, J.V. Keller [8], T. Levy [9] и др. Вместе с тем необходимо отметить, что в этих работах остался открытым основной в теории усреднения вопрос о какой-либо приемлемой сходимости последовательностей решений исходных задач к решениям соответствующих усредненных задач. Этот вопрос впервые был решен Г. Нгуэтсенгом [10] с помощью введенного им метода двухмасштабной сходимости. Строгому выводу усредненных моделей пористых упругих сред со слабовязкой жидкостью с помощью метода двухмасштабной сходимости и исследованию вопросов сходимости посвящены работы Д.А. Космодемьянского, А.С. Шамаева [11], А.М. Мейрманова [12], Th. Cloreau, R.P. Gilbert, J.L. Ferrin, A. Mikelić [13] и др.

Усредненные модели для сред, состоящих из упругого материала и вязкой жидкости, были построены в работах Э. Санчес-Паленсии [5], J. Sanchez-Hubert [14] и R.P. Gilbert, A. Mikelić [15]. Как было установлено в этих работах, для указанных сред, как и для микронеоднородных

материалов Кельвина-Фойгта, предельными средами являются однородные вязкоупругие материалы с долговременной памятью. Таким образом, предельные среды приобретают такое свойство, которым не обладают ни упругий материал, ни вязкая жидкость по отдельности. Эффект появления долговременной памяти при исследовании макроскопического поведения суспензии, состоящей из упругих сферических частиц в ньютоновской вязкой среде, был также описан в монографии Р. Кристенсена [16].

При изучении динамического поведения диссипативных сред важной задачей является определение возможности изучения спектров их собственных колебаний с помощью спектров собственных колебаний соответствующих им усредненных сред. В случае дискретных спектров математически это сводится к исследованию степени близости собственных значений допредельных и предельных краевых задач. Для этого требуется установить существование какой-либо сходимости спектров допредельных задач к спектру предельных задач. Оптимальной в этом плане является сходимость по Хаусдорфу спектров операторов, возникающих при операторной форме записи краевых задач [17].

Для самосопряженных операторов теории упругости, возникающих при исследовании упругих сред с ε -периодической структурой, сходимость по Хаусдорфу их спектров к спектру предельного оператора с постоянными коэффициентами была доказана О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяном и А.С. Шамаевым [3]. Сходимость спектров дифференциальных операторов дивергентного типа с ε -периодическими коэффициентами в случае, когда матрица коэффициентов высококонтрастна с коэффициентом контрастности $1 : \varepsilon^2$ между жесткой и мягкой фазами (это соответствует т.н. модели двойной пористости), исследовалась В.В. Жиковым [17]. С помощью метода двухмасштабной сходимости им было доказано, если мягкая фаза дисперсна, то спектры допредельных операторов сходятся по Хаусдорфу к спектру предельного двухмасштабного оператора, который определен в пространстве функций от удвоенного количества независимых переменных.

В приведенных выше работах при доказательстве сходимости спектров по Хаусдорфу существенно использовалась самосопряженность операторов. В работе [11] в связи с различными задачами механики гетерогенных сред с диссипацией, рассматривались несамосопряженные операторы с быстроосциллирующими периодическими коэффициентами и исследовался спектр предельного двухмасштабного оператора. Существование или отсутствие сходимости спектров по Хаусдорфу в данной работе не доказано, поскольку к несамосопряженным операторам не применимы известные теоремы о сходимости собственных значений самосопряженных операторов.

Целью диссертационной работы является построение с помощью современных методов асимптотического анализа и исследование динамических свойств усредненных моделей микронеоднородных сред с периодической микроструктурой при наличии диссипации, обусловленной вязкостью и/или последствием.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, функционального анализа, теории функций комплексного переменного, а также метод двухмасштабной сходимости и численные методы.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Предложен единый подход к выводу усредненных уравнений акустики для твердых сред с периодической микроструктурой, состоящих либо из вязкоупругих материалов, либо из упругого и вязкоупругого материалов.

2. Выведены усредненные уравнения акустики для смешанных сред с периодической микроструктурой, состоящих из вязкоупругого материала и сжимаемой вязкой или слабовязкой жидкости.

3. Исследован вопрос о сильной сходимости в пространстве L^2 последовательностей решений начально-краевых задач, описывающих колебания микронеоднородных твердых и смешанных сред с диссипацией из пп. 1 и 2, к решениям начально-краевых задач, описывающих колебания соответствующих усредненных сред.

4. Выведены усредненные уравнения акустики для микронеоднородных сред с периодической микроструктурой, состоящих из частично пористых твердых материалов и сжимаемой вязкой или слабовязкой жидкости, заполняющей поры.

5. Для двухфазных слоистых сред с диссипацией, одна фаза которых состоит из упругого или вязкоупругого материала, а другая фаза — из вязкоупругого материала или вязкой сжимаемой жидкости, выведены явные формулы для расчета всех компонентов тензоров ядер релаксации соответствующих им усредненных сред.

6. Исследована структура спектров одномерных собственных колебаний усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с диссипацией из п. 5.

7. Для двухфазных слоистых сред с диссипацией из п. 5 исследованы спектры одномерных собственных колебаний, распространяющихся перпендикулярно их слоям. Доказано, что при неограниченном уменьшении величины периода эти спектры сходятся по Хаусдорфу к объединению спектров одномерных собственных колебаний соответствующих усредненных сред и множеств, состоящих из конечного числа вещественных точек.

Численно исследовано влияние числа слоев на степень близости точек спектров одномерных собственных колебаний слоистого композита и соответствующего ему усредненного материала.

8. Для плоских звуковых волн, нормально падающих на границы двухфазных слоистых сред с диссипацией из п. 5, занимающих полупространство или неограниченную полосу, выведены формулы для расчета приближенных значений комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн. Получена также система линейных уравнений для расчета точных значений указанных амплитуд для случая, когда слоистые среды состоят из конечного числа слоев, параллельных фронту волны. Численно исследовано влияние числа слоев на границы применимости приближенных формул.

Обоснованность и достоверность результатов. Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами и сравнением с результатами проведенных в работе численных расчетов.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическую значимость представляют разработанные в работе методы исследования асимптотического поведения решений широкого класса начально-краевых задач для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих колебания двухфазных микронеоднородных сред с диссипацией. Разработанные методы могут быть применены при исследовании асимптотического поведения решений начально-краевых задач для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамические процессы в многофазных микронеоднородных средах с диссипацией, в том числе многофазных сильно контрастных средах с диссипацией.

Практическая значимость результатов работы обусловлена возможностью их применения при разработке новых композиционных материалов с заданными механическими свойствами, а также при акустическом исследовании гетерогенных сред естественного происхождения (горные породы, флюидонасыщенные коллекторы). Использование построенных в работе усредненных моделей позволяет кардинально уменьшить объем вычислений без существенной потери точности при расчете полей напряжений и динамических характеристик двухфазных гетерогенных сред с диссипацией. Полученные в работе явные формулы для расчета эффективных характеристик двухфазных слоистых сред дают возможность всесторонне исследовать влияние параметров фаз на динамические свойства слоистых сред. Эти формулы можно также применять для верификации численных

методов, применяемых для точного расчета поля напряжений, звукового поля и собственных частот колебаний слоистых сред.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях: международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной 110-ой годовщине И.Г. Петровского (Москва, 2011); международных конференциях по математической теории управления и механике (Суздаль, 2011, 2013); X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011); международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2012); международной конференции «Spectral Theory and Differential Equations», посвященной 90-летию со дня рождения академика В.А. Марченко (Харьков, 2012); Крымской международной математической конференции (Судак, 2013); международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященной памяти академика А.А. Самарского к 95-летию со дня рождения (Москва, 2014); международной конференции «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященной 100-летию Б.М. Левитана (Москва, 2014); VI Белорусском конгрессе по теоретической и прикладной механике (Минск, 2013); 57-й, 58-й и 60-й научных конференциях МФТИ (Долгопрудный, 2014, 2015, 2017); 9th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (Vienna, 2018).

Результаты диссертационной работы также докладывались и обсуждались на семинарах по теории управления и динамике систем ИПМех РАН под руководством академика РАН Ф.Л. Черноусько (Москва, 2014, 2018); на семинарах по проблемам механики сплошной среды ИПМех РАН под руководством профессоров С.В. Нестерова и Д.В. Георгиевского (Москва, 2012, 2018); на семинаре по механике деформирования и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН под руководством чл.-корр. РАН Р.В. Гольдштейна (Москва, 2013); на семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина ИПМех РАН под руководством профессора С.А. Манжирова (Москва, 2018); на семинаре по механике деформируемого твердого тела НИИ Механики МГУ под руководством академика РАН И.Г. Горячевой (Москва, 2018).

На разных этапах работа поддерживалась грантами Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-01-12115-офи-м-2011, 13-01-00384, 16-01-00412) и Российского научного фонда (коды проектов 14-50-00005, 16-11-10343).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 35 научных работах, из них: 22 статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в Перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science,

Scopus; 2 статьи в рецензируемых научных журналах не из Перечня ВАК РФ; 11 работ в сборниках тезисов докладов научных конференций. Полный список публикаций приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора. В работах [1–3, 18, 19] автором были выведены усредненные уравнения акустики и исследован вопрос о сильной сходимости последовательностей решений допредельных задач к решениям соответствующих усредненных задач по норме пространства L^2 ; постановка задач и идея применения преобразования Лапласа и метода двухмасштабной сходимости при усреднении принадлежали А.С. Шамаеву.

В работе [4] автором был исследован спектр интегродифференциального уравнения, описывающего одномерные колебания вязкоупругого материала с памятью; постановка задачи и формулировка идеи об отсутствии у спектра бесконечной не вещественной части принадлежали А.С. Шамаеву.

В работах [5, 7–9] автором были получены одномерные усредненные уравнения акустики для слоистых сред с диссипацией, исследована структура спектров одномерных собственных колебаний усредненных сред и установлена их зависимость от направления распространения собственных колебаний; физическое обоснование указанной зависимости было дано А.С. Шамаевым и совместно с ним был проведен анализ результатов.

В работах [13–15, 21] автором были выведены формулы для расчета приближенных значений комплексных амплитуд отраженных и прошедших волн на границах однородных сред и слоистых сред с диссипацией и системы уравнений для расчета их точных значений, а также численно исследована погрешность приближенных формул; идея использования усредненных моделей слоистых сред для вывода приближенных формул и постановка задачи о численном исследовании влияния числа слоев на точность этих формул были предложены А.С. Шамаевым.

В работе [20] автором были получены трансцендентные уравнения, корни которых являются точками спектра одномерных собственных колебаний слоистой среды с диссипацией, и установлено отсутствие сходимости по Хаусдорфу допредельных спектров к усредненному спектру; идея матричного подхода для вывода трансцендентных уравнений и формулировка задачи о существовании/отсутствии указанной сходимости спектров по Хаусдорфу принадлежали А.С. Шамаеву.

В работе [22] автором были выведены трансцендентные уравнения, корни которых являются точками спектра одномерных собственных колебаний слоистого композита, и проведены численные расчеты; идея численного сравнения спектральных характеристик композита и соответствующего ему усредненного материала принадлежала А.С. Шамаеву.

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Шамаеву Алексею Станиславовичу за внимание, ценные идеи, полезные советы и постоянную поддержку, благодаря которым была написана данная работа.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав и списка литературы. Общее количество страниц в диссертации — 272, включая 11 таблиц и 13 рисунков. Список литературы содержит 160 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, приведена информация о степени ее разработанности, сформулированы цель работы и ее научная новизна. Приведена теоретическая и практическая значимость полученных результатов и изложено краткое содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена выводу усредненных уравнений акустики для твердых сред с периодической микроструктурой, состоящих из упругого и вязкоупругого материалов или из двух вязкоупругих материалов. В качестве ячейки периодичности таких двухфазных сред, заполняющих ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, рассматривается куб εY , где $Y = (0, 1)^3$ — единичный куб, а величина ε много меньше линейных размеров области Ω . Подмножества области Ω , заполненные первой и второй фазами, обозначаются через $\Omega_{1\varepsilon}$ и $\Omega_{2\varepsilon}$ соответственно.

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в области Ω , записываются в виде

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \Gamma_{ijkh}^\varepsilon(x, t) * e_{kh}(u^\varepsilon), \quad 1 \leq i, j, k, h \leq 3,$$

где $u^\varepsilon(x, t)$ — вектор перемещений; σ^ε и $e(u^\varepsilon)$ — тензоры напряжений и малых деформаций соответственно; символ $*$ обозначает операцию свертки по переменной t ; $\Gamma^\varepsilon(x, t) = \Gamma(\varepsilon^{-1}x, t)$ — тензор ядер релаксации:

$$\Gamma(y, t) = \delta(t)a(y) + \delta'(t)b(y) - d(y, t), \quad y = \varepsilon^{-1}x.$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, а $a(y)$, $b(y)$ и $d(y, t)$ — тензоры модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации соответственно. Предполагается, что все компоненты этих тензоров Y -периодичны по y и

$$a(y) = a^{(s)}(y), \quad b(y) = b^{(s)}(y), \quad d(y, t) = d^{(s)}(y, t) \quad \text{при } y \in Y_s,$$

где $Y_s \subset Y$: $\varepsilon Y_s = \varepsilon Y \cap \Omega_{s\varepsilon}$, $s = 1, 2$. Если оба тензора $b^{(s)}(y)$ и $d^{(s)}(y, t)$ — нулевые, то s -я фаза считается заполненной упругим материалом (УМ),

в противном случае — вязкоупругим материалом одного из трех типов, а именно: ВУМ-I при $b^{(s)}(y) \neq 0$ и $d^{(s)}(y, t) = 0$; ВУМ-II при $b^{(s)}(y) = 0$ и $d^{(s)}(y, t) \neq 0$; ВУМ-III при $b^{(s)}(y) \neq 0$ и $d^{(s)}(y, t) \neq 0$.

Математическая модель, описывающая колебания двухфазной твердой среды, записывается в следующем виде:

$$\rho^\varepsilon(x) \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i(x, t) \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$[u^\varepsilon]|_{S_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{ij}^\varepsilon n_j]|_{S_\varepsilon} = 0, \quad S_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}, \quad (2)$$

$$u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

где $\rho^\varepsilon(x) = \rho(\varepsilon^{-1}x)$ — плотность среды: $\rho(y) = \rho^{(s)}(y)$ при $y \in Y_s$ ($s = 1, 2$); $f_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, — компоненты вектора объемной силы; $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности S_ε ; квадратные скобки $[\cdot]|_{S_\varepsilon}$ обозначают скачок заключенной в них величины при переходе через S_ε .

Если s -я фаза состоит из упругого материала или вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта (ВУМ-I), то система уравнений акустики (1) в $\Omega_{s\varepsilon} \times (0, T)$ состоит из трех дифференциальных уравнений в частных производных второго или третьего порядков соответственно. Если же s -я фаза состоит из вязкоупругого материала с памятью, а именно, из ВУМ-II или ВУМ-III, то система (1) в $\Omega_{s\varepsilon} \times (0, T)$ состоит из трех интегродифференциальных уравнений в частных производных второго или третьего порядков соответственно.

С помощью преобразования Лапласа и метода двухмасштабной сходимости установлено, что усредненная модель, построенная при $\varepsilon \rightarrow 0$ и соответствующая исходной модели (1)-(3), описывает колебания однородного вязкоупругого материала и имеет следующий вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + f_i(x, t) \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (4)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

где $u(x, t)$ — вектор перемещений, ρ_0 — плотность, σ^0 — тензор напряжений,

$$\rho_0 = \int_Y \rho(y) dy, \quad \sigma_{ij}^0 = \Gamma_{ijkh}^0(t) * e_{kh}(u), \quad (6)$$

$$\Gamma^0(t) = \delta(t)\alpha + \delta'(t)\beta - g(t), \quad \alpha \neq 0. \quad (7)$$

Компоненты тензоров α и β находятся с помощью решений вспомогательных стационарных периодических задач на ячейке Y , а компоненты

тензора $g(t)$ — с помощью решений вспомогательных эволюционных периодических задач на ячейке Y . Более подробно, они вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha_{ijkh} = \int_Y (a_{ijkh}(y) + a_{ijlm}(y)e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm}(y)e_{lm}^y(D^{kh})) dy, \quad (8)$$

$$\beta_{ijkh} = \int_Y (b_{ijkh}(y) + b_{ijlm}(y)e_{lm}^y(Z^{kh})) dy, \quad (9)$$

$$g_{ijkh}(t) = \int_Y (d_{ijkh}(y, t) + d_{ijlm}(y, t)e_{lm}^y(Z^{kh}) + d_{ijlm}(y, t) * e_{lm}^y(W^{kh})) dy - \\ - \int_Y \left(a_{ijlm}(y)e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}(y)e_{lm}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) \right) dy. \quad (10)$$

Здесь вектор-функции $Z^{kh}(y)$ и $D^{kh}(y)$ — решения стационарных периодических задач, а $W^{kh}(y, t)$ — решения эволюционных периодических задач. Выписаны все периодические задачи, как стационарные, так и эволюционные, для трех случаев: 1) при $b^{(1)}(y) \neq 0$, $b^{(2)}(y) \neq 0$; 2) при $b^{(1)}(y) = 0$, $b^{(2)}(y) \neq 0$ или $b^{(1)}(y) \neq 0$, $b^{(2)}(y) = 0$; 3) при $b^{(1)}(y) = b^{(2)}(y) = 0$.

Следует отметить, что тензор $g(t)$ является ненулевым, за исключением отдельных частных случаев. Это означает, что в общем случае для двухфазных твердых сред с диссипацией, обусловленной вязкостью и/или памятью хотя бы одной из их фаз, соответствующие им усредненные среды являются однородными вязкоупругими материалами с памятью, т.е. ВУМ-II или ВУМ-III. Более подробно, если обе фазы исходной среды обладают нулевыми тензорами коэффициентов вязкости $b^{(1)}(y)$ и $b^{(2)}(y)$, то $\beta = 0$ и усредненная среда является ВУМ-II, т.е. обладает только памятью. Для нахождения всех компонентов тензоров α и $g(t)$ по формулам (8) и (10) требуется найти решения $Z^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$ ($k \leq h$) шести стационарных и шести эволюционных периодических задач. Если же хотя бы одна фаза исходной среды обладает ненулевым тензором коэффициентов вязкости, то $\beta \neq 0$ и усредненная среда является ВУМ-III, т.е. обладает как вязкостью, так и памятью. Для нахождения всех компонентов тензоров α , β и $g(t)$ по формулам (8)-(10) требуется найти решения $Z^{kh}(y)$, $D^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$ ($k \leq h$) двенадцати стационарных и шести эволюционных периодических задач. Таким образом, установлено, что для двухфазных сред, состоящих из УМ и ВУМ-II или из двух разных ВУМ-II, усредненными средами являются однородные ВУМ-II, а для остальных двухфазных твердых сред, рассматриваемых в первой главе, — однородные ВУМ-III.

В первой главе также исследован вопрос о близости решений $u^\varepsilon(x, t)$ допредельных задач (1)-(3) к решению $u(x, t)$ усредненной задачи (4), (5)

при малых ε . Доказано, что для всех $t \in [0, T]$ последовательность векторов перемещений $u^\varepsilon(x, t)$ двухфазной твердой среды с диссипацией сильно сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к вектору перемещений $u(x, t)$ усредненной среды в пространстве $(L^2(\Omega))^3$.

Вторая глава посвящена выводу усредненных уравнений акустики для двухфазных смешанных сред с εY -периодической структурой, у которых первая фаза состоит из вязкоупругого материала, а вторая фаза — из вязкой или слабвязкой сжимаемой жидкости. Математическая модель, описывающая колебания таких смешанных сред, записывается в виде начально-краевой задачи (1)-(3), в которой компоненты тензора напряжений σ_{ij}^ε задаются следующим образом:

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh}^{(1)}(\varepsilon^{-1}x)e_{kh}(u^\varepsilon) + b_{ijkh}^{(1)}(\varepsilon^{-1}x)e_{kh}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - d_{ijkh}^{(1)}(\varepsilon^{-1}x, t) * e_{kh}(u^\varepsilon)$$

для вязкоупругой фазы и

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -\delta_{ij}p^\varepsilon + (\zeta_2^\varepsilon\delta_{ij}\delta_{kh} + 2\eta_2^\varepsilon\delta_{ik}\delta_{jh})e_{kh}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right), \quad p^\varepsilon = -\gamma \operatorname{div} u^\varepsilon$$

для жидкой фазы. Здесь $a^{(1)}(y)$, $b^{(1)}(y)$ и $d^{(1)}(y, t)$ — тензоры модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации, компоненты которых Y -периодичны по y ; $b^{(1)}(y) \neq 0$, $d^{(1)}(y, t) = 0$ для ВУМ-I; $b^{(1)}(y) = 0$, $d^{(1)}(y, t) \neq 0$ для ВУМ-II; $b^{(1)}(y) \neq 0$, $d^{(1)}(y, t) \neq 0$ для ВУМ-III; $p^\varepsilon(x, t)$ — давление в жидкости; ζ_2^ε и η_2^ε — коэффициенты вязкости, не зависящие от ε для вязкой жидкости и имеющие порядок ε^2 для слабвязкой жидкости; γ — объемный модуль упругости жидкости: $\gamma = \rho_2 c^2$, где ρ_2 — плотность жидкости, а c — скорость звука в жидкости в состоянии покоя.

Сначала исследуется предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений $u^\varepsilon(x, t)$ начально-краевых задач (1)-(3) в случае, когда вторая фаза состоит из вязкой сжимаемой жидкости (тогда $\zeta_2^\varepsilon = \zeta_2$ и $\eta_2^\varepsilon = \eta_2$). С помощью результатов первой главы выведена соответствующая усредненная модель. Эта модель записывается в виде начально-краевой задачи (4), (5), в которой компоненты тензоров напряжений σ^0 и ядер релаксации $\Gamma^0(t)$ имеют вид (6) и (7) соответственно. При этом компоненты тензоров α , β , $g(t)$ из (7) вычисляются по формулам (8), (9), (10), в которых (а также в упомянутых выше Y -периодических задачах для определения вектор-функций $Z^{kh}(y)$, $D^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$) нужно взять

$$a_{ijkh}^{(2)} = \gamma\delta_{ij}\delta_{kh}, \quad b_{ijkh}^{(2)} = \zeta_2\delta_{ij}\delta_{kh} + \eta_2(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), \quad d_{ijkh}^{(2)}(t) = 0. \quad (11)$$

Следует отметить, что тензоры β и $g(t)$ всегда являются ненулевыми, а значит, усредненная система уравнений акустики (4) состоит из трех

интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Коэффициенты этих уравнений постоянны, а ядра сверток зависят только от времени t , поэтому усредненная модель (4), (5) описывает колебания однородной вязкоупругой среды, обладающей как вязкостью, так и памятью.

Для смешанной среды, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости, точно так же, как и для твердых двухфазных сред из первой главы, последовательность векторов перемещений $u^\varepsilon(x, t)$ сильно сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к вектору перемещений $u(x, t)$ усредненной среды в пространстве $(L^2(\Omega))^3$ для всех $t \in [0, T]$.

Далее исследуется предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений $u^\varepsilon(x, t)$ начально-краевых задач (1)-(3) в случае, когда обе фазы связны в области Ω и вторая фаза состоит из слабовязкой сжимаемой жидкости (тогда $\zeta_2^\varepsilon = \varepsilon^2 \zeta_2$ и $\eta_2^\varepsilon = \varepsilon^2 \eta_2$). С помощью преобразования Лапласа и метода двухмасштабной сходимости при $\varepsilon \rightarrow 0$ построена усредненная модель, описывающая колебания однородной модифицированной среды Био и имеющая следующий вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_2 G_r * \frac{\partial D_i^r}{\partial t} + \Pi G_i = \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + f_i \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta^{(1)} \right) p + \beta^{(2)} * p + \operatorname{div} \left(G_r * \int_0^t D^r(\tau) d\tau \right) + \\ & + \alpha_{ij}^{(1)} e_{ij}(u) + \alpha_{ij}^{(2)} * e_{ij}(u) = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left(G_r * \int_0^t D_j^r(\tau) d\tau \right) \nu_j \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (14)$$

где $\Pi = |Y_2|$ — пористость среды; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор нормали к $\partial\Omega$; $\beta^{(1)} = 0$, если твердая фаза состоит из ВУМ-I или ВУМ-III,

$$\sigma_{ij}^0 = A_{ijkh}^{(1)} e_{kh}(u) + A_{ijkh}^{(2)} e_{kh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - A_{ijkh}^{(3)}(t) * e_{kh}(u) - \alpha_{ij}^{(1)} p - \alpha_{ij}^{(2)}(t) * p,$$

$$G_r(x, t) = f_r(x, t) - \rho_2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial p}{\partial x_r}(x, t), \quad D^r(t) = \int_{Y_2} L^r(y, t) dy.$$

Здесь вектор-функции $L^r(y, t)$, $r = 1, 2, 3$, — решения периодических задач типа Стокса на “жидкой” части Y_2 ячейки Y , а $A^{(2)} = 0$, если твердая фаза состоит из ВУМ-II. Постоянная $\beta^{(1)}$, функция $\beta^{(2)}(t)$, компоненты матриц $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}(t)$ и тензоров $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}(t)$ находятся с помощью решений вспомогательных периодических стационарных и эволюционных задач на

“твердой” части Y_1 куба Y . В работе выписаны вспомогательные периодические задачи на Y_1 для двух случаев: при $b^{(1)}(y) \neq 0$ и при $b^{(1)}(y) = 0$.

Усредненная система уравнений акустики (12), (13) состоит из четырех интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функции $p(x, t)$ и трех компонентов вектор-функции $u(x, t)$. Коэффициенты этих уравнений постоянны, а ядра сверток зависят только от времени t .

Для смешанных сред, состоящих из вязкоупругого материала и слабовязкой жидкости, исследован вопрос о близости вектора перемещений $u^\varepsilon(x, t)$ и давления $p^\varepsilon(x, t)$ к вектору перемещений $u(x, t)$ и давлению $p(x, t)$ усредненной среды при малых ε . Доказано, что если вектор-функции $f(x, t)$, $u(x, t)$ и функция $p(x, t)$ удовлетворяют дополнительным условиям гладкости по x , то для всех $t \in [0, T]$ имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{1\varepsilon}} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^2 dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |p^\varepsilon(x, t) - p(x, t)|^2 dx = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t) - w(x, \varepsilon^{-1}x, t)|^2 dx = 0,$$

$$w(x, y, t) = G_r(x, t) * \int_0^t L^r(y, \tau) d\tau.$$

Тем самым установлено, в частности, что последовательность векторов перемещений $u^\varepsilon(x, t)$ сильно сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к вектору перемещений $u(x, t)$ усредненной среды в пространстве $(L^2(\Omega))^3$ с корректором в виде осциллирующей вектор-функции $w(x, \varepsilon^{-1}x, t)$.

В последнем параграфе второй главы приведены усредненные уравнения акустики для сред, состоящих из частично пористых твердых материалов (УМ или ВУМ) и вязкой или слабовязкой сжимаемой жидкости, заполняющей поры. В частности, получены граничные условия, связывающие усредненные уравнения на границах раздела сплошных твердых материалов и пористых твердых материалов с вязкой или слабовязкой жидкостью, заполняющей поры.

Третья глава посвящена расчету компонентов тензоров ядер релаксации $\Gamma^0(t)$ усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с диссипацией, состоящим из периодически повторяющихся слоев, параллельных плоскости Ox_2x_3 . В качестве одной фазы берется изотропный упругий или вязкоупругий материал (ВУМ-I, ВУМ-II или ВУМ-III), а в качестве другой фазы — изотропный вязкоупругий материал (ВУМ-I, ВУМ-II или ВУМ-III) или вязкая сжимаемая жидкость (ВСЖ). Предполагается, что суммарная толщина любых двух соседних внутренних слоев равна ε , а ячейка периодичности εY содержит один слой толщины εh второй фазы и два слоя одинаковой толщины $\varepsilon(1 - h)/2$ первой фазы (рис. 1).

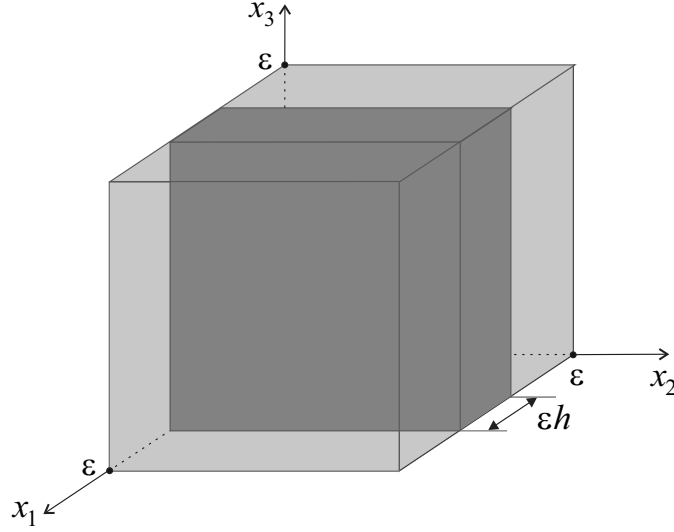


Рис. 1. Ячейка периодичности εY двухфазной слоистой среды

Тензор ядер релаксации для изотропной фазы в $\Omega_{s\varepsilon}$ записывается в виде

$$\Gamma^{(s)}(t) = \delta(t)a^{(s)} + \delta'(t)b^{(s)} - d^{(s)}(t).$$

Если s -я фаза состоит из ВУМ-III, то

$$a_{ijkh}^{(s)} = \lambda_s \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu_s (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \quad (15)$$

$$b_{ijkh}^{(s)} = \zeta_s \delta_{ij} \delta_{kh} + \eta_s (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \quad \zeta_s = \kappa_s - \frac{2}{3} \eta_s, \quad (16)$$

$$d_{ijkh}^{(s)}(t) = - \left(G_{1s}(t) - \frac{1}{3} G_s(t) \right) \delta_{ij} \delta_{kh} - \frac{1}{2} G_s(t) (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \quad (17)$$

где λ_s и μ_s — параметры Ламе; η_s и κ_s — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости; $G_{1s}(t)$ и $G_s(t)$ — регулярные части ядер объемной и сдвиговой релаксации соответственно,

$$G_s(t) = \sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} \exp(-\gamma_n^{(s)} t), \quad G_{1s}(t) = k_s G_s(t), \quad k_s \geq 0, \quad (18)$$

$$1 \leq N_s < \infty, \quad v_n^{(s)}, \gamma_n^{(s)} \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma_i^{(s)} < \gamma_j^{(s)} \quad \text{при } i < j, \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\gamma_n^{(s)}} \leq \begin{cases} \min \left\{ 2\mu_s, \frac{3\lambda_s + 2\mu_s}{3k_s} \right\}, & \text{если } k_s > 0, \\ 2\mu_s, & \text{если } k_s = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Если s -я фаза состоит из УМ, ВУМ-I или ВУМ-II, то компоненты тензора $a^{(s)}$ также заданы формулами (15). При этом для упругой фазы оба

тензора $b^{(s)}$ и $d^{(s)}(t)$ — нулевые, а для вязкоупругой фазы нулевым является только один из них, а именно: если она состоит из ВУМ-I, то $d^{(s)}(t) = 0$, а компоненты тензора $b^{(s)}$ заданы формулами (16); если она состоит из ВУМ-II, то $b^{(s)} = 0$, а компоненты тензора $d^{(s)}(t)$ заданы формулами (17), в которых функции $G_s(t)$ и $G_{1s}(t)$ также удовлетворяют условиям (18)-(20). И, наконец, если s -я фаза состоит из ВСЖ, то компоненты тензоров $a^{(s)}$, $b^{(s)}$ и $d^{(s)}(t)$ определены формулами (11).

Согласно результатам первых двух глав тензор $\Gamma^0(t)$ имеет вид (7) и вычисление его компонентов сводится к вычислению компонентов двух тензоров α и $g(t)$ (в случае, когда оба тензора $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ — нулевые) или трех тензоров α , β и $g(t)$ (в случае, когда хотя бы один из тензоров $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ — ненулевой) по формулам (8)-(10). Компоненты этих тензоров удовлетворяют классическим условиям симметрии и, кроме того, выполнены соотношения

$$\alpha_{2222} = \alpha_{3333}, \quad \alpha_{1122} = \alpha_{1133}, \quad \alpha_{1212} = \alpha_{1313}, \quad \alpha_{2222} - \alpha_{2233} = 2\alpha_{2323}$$

и аналогичные соотношения для тензоров β и $g(t)$, т.е. усредненная среда является трансверсально изотропной. В связи с этим все компоненты тензора $\Gamma^0(t)$ будут известны, если найти формулы для расчета пяти компонентов α_{1111} , α_{2222} , α_{1122} , α_{1212} , α_{2323} тензора α и пяти компонентов каждого тензора β и $g(t)$ с теми же индексами.

Для вывода формул для расчета указанных компонентов тензоров α и β сначала находятся решения периодических стационарных задач на ячейке Y : вектор-функции $Z^{kh}(y)$ и $D^{kh}(y)$ в случае, когда $b^{(1)} \neq 0$, $b^{(2)} \neq 0$ или $b^{(1)} = 0$, $b^{(2)} \neq 0$, и вектор-функции $Z^{kh}(y)$ в случае, когда $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$. Показано, что во всех случаях ненулевые компоненты вектор-функций $Z^{kh}(y)$ и $D^{kh}(y)$ есть кусочно-линейные функции одной пространственной переменной, которые записываются в явном виде.

Для вывода формул для расчета компонентов тензора $g(t)$ с помощью ранее полученных решений стационарных задач находятся решения $W^{kh}(y, t)$ периодических эволюционных задач в трех случаях: 1) при $b^{(1)} \neq 0$, $b^{(2)} \neq 0$; 2) при $b^{(1)} = 0$, $b^{(2)} \neq 0$; 3) при $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$. Установлено, что во всех трех случаях ненулевые компоненты вектор-функций $W^{kh}(y, t)$ представляют собой произведения вышеупомянутых кусочно-линейных функций на функции времени t , которые являются линейными комбинациями M затухающих экспонент, причем в первых двух случаях $M = R_1 N_1 + R_2 N_2 + 1$, а в третьем случае $M = R_1 N_1 + R_2 N_2$ (здесь и далее $R_s = 0$, если s -я фаза состоит из УМ, ВУМ-I или ВСЖ, и $R_s = 1$, если она состоит из ВУМ-II или ВУМ-III). Коэффициенты перед экспонентами находятся с помощью решений систем M линейных уравнений, а их показатели — с помощью решений уравнений (21) и (22), которые выписаны

чуть ниже.

С помощью решений стационарных периодических задач и формул (8), (9) выведены окончательные формулы для расчета компонентов тензоров α и β с индексами $\{1111\}$, $\{2222\}$, $\{1122\}$, $\{1212\}$, $\{2323\}$. В случае, когда $b^{(1)} \neq 0$, $b^{(2)} \neq 0$, они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\alpha_{1111} &= \frac{\langle ab^{-2} \rangle}{\langle b^{-1} \rangle^2}, & \alpha_{2222} &= \langle a \rangle - 2 \langle \lambda \zeta b^{-1} \rangle + \langle \zeta^2 ab^{-2} \rangle + \\ &+ \frac{2 \langle \zeta b^{-1} \rangle (\langle \lambda b^{-1} \rangle - \langle \zeta ab^{-2} \rangle)}{\langle b^{-1} \rangle} + \frac{\langle ab^{-2} \rangle \cdot \langle \zeta b^{-1} \rangle^2}{\langle b^{-1} \rangle^2}, & \alpha_{2323} &= \langle \mu \rangle, \\ \alpha_{1212} &= \frac{\langle \mu \eta^{-2} \rangle}{\langle \eta^{-1} \rangle^2}, & \alpha_{1122} &= \frac{\langle \lambda b^{-1} \rangle - \langle \zeta ab^{-2} \rangle}{\langle b^{-1} \rangle} + \frac{\langle \zeta b^{-1} \rangle \cdot \langle ab^{-2} \rangle}{\langle b^{-1} \rangle^2}, \\ \beta_{1111} &= \frac{1}{\langle b^{-1} \rangle}, & \beta_{2222} &= \langle b \rangle + \frac{\langle \zeta b^{-1} \rangle^2}{\langle b^{-1} \rangle} - \langle \zeta^2 b^{-1} \rangle, \\ \beta_{1122} &= \frac{\langle \zeta b^{-1} \rangle}{\langle b^{-1} \rangle}, & \beta_{1212} &= \frac{1}{\langle \eta^{-1} \rangle}, & \beta_{2323} &= \langle \eta \rangle,\end{aligned}$$

где

$$a(y) = a_{1111}^{(s)}, \quad b(y) = b_s = \zeta_s + 2\eta_s, \quad \lambda(y) = a_{1122}^{(s)}, \quad \mu(y) = a_{1212}^{(s)},$$

$$\zeta(y) = \zeta_s, \quad \eta(y) = \eta_s \quad \text{при } y \in Y_s, \quad s = 1, 2; \quad \langle \cdot \rangle = \int_Y \cdot dy.$$

В случае, когда $b^{(1)} = 0$, $b^{(2)} \neq 0$, указанные компоненты тензоров α и β вычисляются по формулам, полученным из предыдущих после предельного перехода при $\zeta_1 \rightarrow 0$ и $\eta_1 \rightarrow 0$. Следует отметить, что для этого случая тензор β является вырожденным и имеет только два отличных от нуля компонента:

$$\beta_{2222} = \beta_{3333} = \frac{h(b_2^2 - \zeta_2^2)}{b_2}.$$

В случае, когда $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$, тензор β является нулевым, а компоненты тензора α принимают вид

$$\begin{aligned}\alpha_{1111} &= \frac{1}{\langle a^{-1} \rangle}, & \alpha_{2222} &= \langle a \rangle + \frac{\langle \zeta a^{-1} \rangle^2}{\langle a^{-1} \rangle} - \langle \lambda^2 a^{-1} \rangle, \\ \alpha_{1122} &= \frac{\langle \lambda a^{-1} \rangle}{\langle a^{-1} \rangle}, & \alpha_{1212} &= \frac{1}{\langle \mu^{-1} \rangle}, & \alpha_{2323} &= \langle \mu \rangle.\end{aligned}$$

С помощью решений эволюционных периодических задач и формул (10) выведены формулы для расчета компонентов тензора регулярных частей ядер релаксации $g(t)$ усредненной среды. Они имеют следующий вид:

$$g_{11jj}(t) = \sum_{m=1}^M hc_m^{(1)} w_m^{(j)} e^{-\xi_m t}, \quad j = 1, 2; \quad g_{1212}(t) = \sum_{m=1}^M hc_m^{(3)} w_m^{(3)} e^{-\tau_m t},$$

$$g_{2222}(t) = \sum_{m=1}^M hc_m^{(2)} w_m^{(2)} e^{-\xi_m t} + \sum_{s=1}^2 \frac{R_s |Y_s| (2k_s + 1/3)}{k_s + 2/3} \sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} e^{-\gamma_n^{(s)} t},$$

$$g_{2323}(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 R_s |Y_s| \sum_{n=1}^{N_s} v_n^{(s)} e^{-\gamma_n^{(s)} t},$$

где $|Y_1| = 1 - h$, $|Y_2| = h$,

$$c_m^{(1)} = a_2 - a_1 - (b_2 - b_1) \xi_m + \sum_{s=1}^2 R_s \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s + 2/3) v_n^{(s)}}{\xi_m - \gamma_n^{(s)}},$$

$$c_m^{(2)} = a_4 - a_3 - (\zeta_2 - \zeta_1) \xi_m + \sum_{s=1}^2 R_s \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s (k_s - 1/3) v_n^{(s)}}{\xi_m - \gamma_n^{(s)}},$$

$$c_m^{(3)} = a_6 - a_5 - (\eta_2 - \eta_1) \tau_m + \sum_{s=1}^2 R_s \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(-1)^s v_n^{(s)}}{\tau_m - \gamma_n^{(s)}},$$

$$a_s = a_{1111}^{(s)}, \quad a_{s+2} = a_{1122}^{(s)}, \quad a_{s+4} = a_{1212}^{(s)}, \quad s = 1, 2.$$

Здесь ξ_1, \dots, ξ_M и τ_1, \dots, τ_M — упорядоченные по возрастанию корни уравнений

$$b_{12} \xi - a_{12} = \sum_{s=1}^2 R_s |Y_{3-s}| \left(k_s + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\xi - \gamma_n^{(s)}}, \quad (21)$$

$$a_{12} = a_1 h + a_2 (1 - h), \quad b_{12} = b_1 h + b_2 (1 - h)$$

и

$$\eta_{12} \tau - a_{56} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 R_s |Y_{3-s}| \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\tau - \gamma_n^{(s)}}, \quad (22)$$

$$a_{56} = a_5 h + a_6 (1 - h), \quad \eta_{12} = \eta_1 h + \eta_2 (1 - h)$$

соответственно, а $w_1^{(j)}, \dots, w_M^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, — решения трех систем M линейных уравнений. В работе эти системы выписаны для случая, когда $b^{(1)} + b^{(2)} = 0$ (это соответствует средам, состоящим из УМ и ВУМ-II или из двух разных ВУМ-II), и для случая, когда $b^{(1)} + b^{(2)} \neq 0$ (это соответствует

всем остальным рассматриваемым в третьей главе слоистым средам).

Уравнения (21) и (22) равносильны алгебраическим уравнениям степени M и при небольших M их корни легко находятся. В частности, если $R_1 = R_2 = 0$ или если $R_1 N_1 + R_2 N_2 = 1$ и $b^{(1)} + b^{(2)} = 0$, то каждое из этих уравнений имеет единственный корень. В общем случае приведены оценки, которым удовлетворяют корни уравнений (21) и (22), упрощающие их поиск в случае больших чисел N_1 и N_2 .

В четвертой главе исследуются спектры одномерных собственных колебаний изотропных вязкоупругих материалов (ВУМ-I,II,III), а также двухфазных слоистых и соответствующих им усредненных сред, рассмотренных в третьей главе.

Для определения и описания спектров одномерных собственных колебаний изотропных вязкоупругих материалов, занимающих неограниченную полосу $0 < x_1 < L$, сначала приводится математическая модель, описывающая их одномерные колебания вдоль оси Ox_1 . Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= A \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial t} - R_0 g_0(t) * \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x_1, t), \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, \quad u(x_1, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, 0) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где ρ — плотность; $u(x_1, t)$ — смещение точки; $f(x_1, t)$ — внешняя сила, направленная вдоль оси Ox_1 ; $R_0 = 0$ для ВУМ-I и $R_0 = 1$ для ВУМ-II,III; $A > 0$; $B = 0$ для ВУМ-II и $B > 0$ для ВУМ-I,III,

$$A = \lambda_0 + 2\mu_0, \quad B = \zeta_0 + 2\eta_0, \quad g_0(t) = \sum_{n=1}^N q_n \exp(-\gamma_n t),$$

$$q_n = (k_0 + 2/3) v_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad k_0 = \frac{G_0(t)}{G_{01}(t)} = \text{const} \geq 0.$$

Здесь λ_0 и μ_0 — параметры Ламе; ζ_0 и η_0 — коэффициенты вязкости; $G_0(t)$ и $G_{01}(t)$ — регулярные части ядер сдвиговой и объемной релаксации; v_n и γ_n удовлетворяют условиям (19) и (20), в которых $v_n^{(s)}$, $\gamma_n^{(s)}$, μ_s , λ_s , k_s , N_s следует заменить на v_n , γ_n , μ_0 , λ_0 , k_0 , N соответственно. В частности, $\zeta_0 = \eta_0 = 0$ для ВУМ-II.

После применения преобразования Лапласа $u(x_1, t) \rightarrow u_\lambda(x_1)$ задача (23) при $f(x_1, t) \equiv 0$ записывается в виде

$$\rho \lambda^2 u_\lambda = \left(A + B\lambda - R_0 \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\lambda + \gamma_n} \right) \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x_1^2}, \quad u_\lambda(0) = u_\lambda(L) = 0. \quad (24)$$

Под спектром одномерных собственных колебаний, распространяющихся в вязкоупругом материале вдоль оси Ox_1 , понимается спектр S_0 задачи (24), т.е. множество всех комплексных значений λ , при которых эта задача имеет нетривиальные решения $u_\lambda(x_1)$: $S_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : u_\lambda(x_1) \neq 0\}$. При этом множество всех положительных мнимых частей точек спектра S_0 представляет собой спектр F_0 собственных частот одномерных колебаний вязкоупругого материала вдоль оси Ox_1 , т.е. $F_0 = \{\omega : \omega = \text{Im } \lambda > 0, \lambda \in S_0\}$.

Показано, что для ВУМ-I

$$S_0 = \{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{2k}\}_{k=1}^{\infty},$$

где

$$\lambda_{1k,2k} = \frac{\pi^2 k^2 B}{2\rho L^2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho L^2 A}{\pi^2 k^2 B^2}} \right),$$

а для ВУМ-II и ВУМ-III

$$S_0 = \{\lambda_{1k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \dots \cup \{\lambda_{(N+1)k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_{(N+2)k}\}_{k=1}^{\infty},$$

где $\lambda_{1k}, \dots, \lambda_{(N+2)k}$ — корни уравнений

$$\lambda^2 + BC_k \lambda + AC_k = \sum_{n=1}^N \frac{C_k q_n}{\lambda + \gamma_n} \quad \left(C_k = \frac{\pi^2 k^2}{\rho L^2} \right)$$

и $\lambda_{jk} \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, N$) для всех $k \in \mathbb{N}$. При этом для ВУМ-II все элементы последовательностей $\{\lambda_{(N+1)k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{(N+2)k}\}_{k=1}^{\infty}$ являются комплексно-сопряженными собственными значениями, кроме, возможно, их конечного числа. Для ВУМ-III ситуация противоположна, а именно: все элементы этих двух последовательностей являются вещественными собственными значениями, кроме, возможно, их конечного числа. Тем самым обнаружено качественное различие в структуре спектра S_0 для ВУМ-II и ВУМ-I,III: для ВУМ-II спектр S_0 состоит из бесконечного множества вещественных и бесконечного множества комплексно-сопряженных собственных значений, а для ВУМ-I и ВУМ-III он состоит из бесконечного множества вещественных и не более конечного числа комплексно-сопряженных собственных значений. В частности, для ВУМ-II множество F_0 собственных частот является бесконечным, а для ВУМ-I и ВУМ-III — конечным (в частности, оно может быть пустым).

Для ВУМ-I и ВУМ-III исследована зависимость числа k_0 элементов множества F_0 от толщины полосы L . Установлено, что уменьшение (увеличение) толщины L приводит в целом к уменьшению (соответственно увеличению) числа k_0 . В частности, существует значение L_0 такое, что множество F_0 является пустым для всех $L \leq L_0$. Для ВУМ-I это значение

равно $\pi B/(2\sqrt{\rho A})$, а для ВУМ-III при $N = 1$ оно вычисляется с помощью наибольшего положительного корня вспомогательного кубического уравнения.

Исследованы спектры одномерных собственных колебаний вдоль оси Ox_1 усредненных сред, занимающих полосу $0 < x_1 < L$ и соответствующих слоистым двухфазным средам, рассмотренным в третьей главе, а также отличающихся от них лишь расположением слоев по отношению к координатным плоскостям (рис. 2).

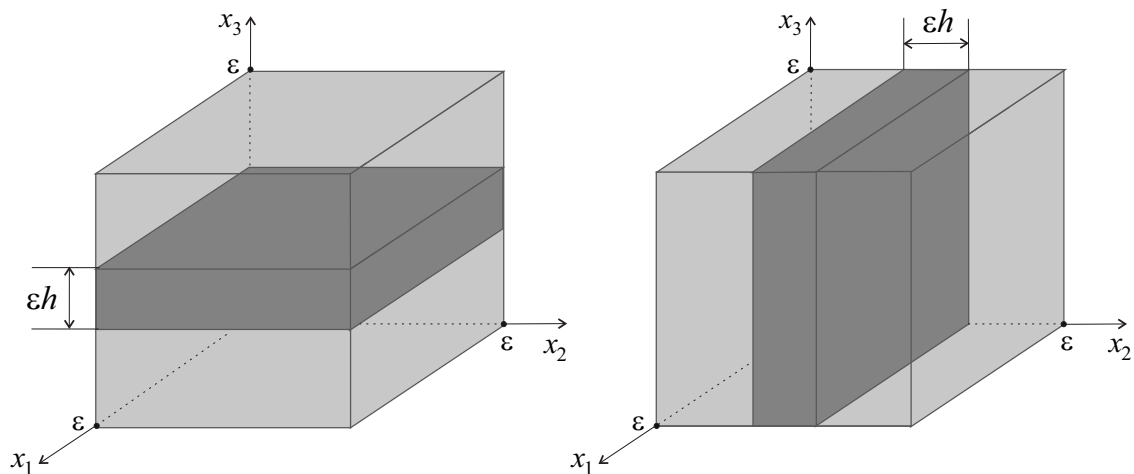


Рис. 2. Модели двухфазных слоистых сред, слои которых параллельны плоскости Ox_1x_2 или плоскости Ox_1x_3

Для описания структуры указанных спектров применяются результаты, полученные при исследовании спектра задачи (24). Согласно этим результатам, если слои исходной среды параллельны плоскости Ox_2x_3 , то спектр S_1 представляет собой объединение корней уравнений

$$\lambda^2 + \beta_1 C_k \lambda + \alpha_1 C_k = C_k \sum_{m=1}^M \frac{d_m}{\lambda + \xi_m}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (25)$$

а если слои исходной среды параллельны плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3 , то спектр S_2 — объединение корней уравнений

$$\lambda^2 + \beta_2 C_k \lambda + \alpha_2 C_k = C_k \left(\sum_{m=1}^M \frac{p_m}{\lambda + \xi_m} + \sum_{s=1}^2 R_s \sum_{n=1}^{N_s} \frac{k_{2+s} v_n^{(s)}}{\lambda + \gamma_n^{(s)}} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$\alpha_i = \alpha_{iiii}, \quad \beta_i = \beta_{iiii}, \quad d_m = hc_m^{(1)} w_m^{(1)}, \quad p_m = hc_m^{(2)} w_m^{(2)},$$

$$k_3 = \frac{(1-h)(2k_1 + 1/3)}{k_1 + 2/3}, \quad k_4 = \frac{h(2k_2 + 1/3)}{k_2 + 2/3}, \quad C_k = \frac{\pi^2 k^2}{\rho_0 L^2}$$

(формулы для расчета α_{iiii} , β_{iiii} , ξ_m , $w_m^{(i)}$, $c_m^{(i)}$ приведены в третьей главе).

Проведен детальный анализ структуры спектров S_1 и S_2 для усредненных сред, соответствующих всем рассмотренным выше двухфазным слоистым средам. В частности, установлено, что если обе фазы слоистой среды обладают ненулевыми тензорами коэффициентов вязкости, то оба спектра S_1 и S_2 являются вещественными, кроме, возможно, конечного числа их точек. Если только одна фаза слоистой среды обладает ненулевым тензором коэффициентов вязкости, то структуры спектров S_1 и S_2 качественно отличаются друг от друга: спектр S_1 вместе с вещественной частью содержит бесконечное множество комплексно-сопряженных точек, в то время как спектр S_2 является вещественным, кроме, возможно, конечного числа его точек. Если же обе фазы слоистой среды обладают нулевыми тензорами коэффициентов вязкости, то оба спектра S_1 и S_2 вместе с вещественной частью содержат бесконечное множество комплексно-сопряженных точек.

Исследован спектр одномерных собственных колебаний двухфазных слоистых сред с диссипацией, рассмотренных в третьей главе, которые занимают полосу $0 < x_1 < L$ и состоят из M слоев толщины $\varepsilon(1 - h)$ первой фазы и M слоев толщины εh второй фазы. Установлено, что спектр S_ε собственных колебаний, распространяющихся перпендикулярно слоям таких сред, представляет собой объединение корней M трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} (1 + K_\lambda) (-\exp[-\varepsilon(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})] + \exp[\varepsilon(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})]) + \\ & + \frac{1}{\lambda} (1 - K_\lambda) (-\exp[-\varepsilon(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})] + \exp[\varepsilon(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})]) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \left(2 + K_\lambda + \frac{1}{K_\lambda}\right) (\exp[-\varepsilon(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})] + \exp[\varepsilon(M_{1\lambda} + M_{2\lambda})]) + \\ & + \left(2 - K_\lambda - \frac{1}{K_\lambda}\right) (\exp[-\varepsilon(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})] + \exp[\varepsilon(M_{1\lambda} - M_{2\lambda})]) = \\ & = 8 \cos \frac{\pi k}{M}, \quad k = 1, \dots, M - 1, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$K_\lambda = \sqrt{\frac{\rho_1 A_{1\lambda}}{\rho_2 A_{2\lambda}}}, \quad M_{1\lambda} = \lambda(1 - h) \sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1\lambda}}}, \quad M_{2\lambda} = \lambda h \sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2\lambda}}},$$

$$A_{s\lambda} = a_s + b_s \lambda - R_s \left(k_s + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{N_s} \frac{v_n^{(s)}}{\lambda + \gamma_n^{(s)}}, \quad s = 1, 2.$$

Показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ спектр S_ε сходится по Хаусдорфу к объединению спектра S_1 , состоящего из корней уравнений (25), и множества

$V = \{-\xi_1, \dots, -\xi_M\}$, состоящего из точек, в которых обращается в нуль знаменатель одной из дробей в правых частях этих уравнений. Более подробно, справедливы следующие утверждения:

- (i) для любого $\lambda \in S_1$ и для любого $\theta \in V$ найдутся последовательности $\lambda_{1\varepsilon} \in S_\varepsilon$ и $\lambda_{2\varepsilon} \in S_\varepsilon$ такие, что $\lambda_{1\varepsilon} \rightarrow \lambda$ и $\lambda_{2\varepsilon} \rightarrow \theta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (ii) если $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ — последовательность корней уравнения (26) и $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0 < \infty$, то $\lambda_0 \in V$; если $\lambda_\varepsilon \in S_\varepsilon$ — последовательность корней одного из уравнений (27) и $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0 < \infty$, то $\lambda_0 \in S_1$.

Установленная сходимость по Хаусдорфу означает, в частности, что для многослойных сред с диссипацией при численном поиске точек спектра S_ε в качестве начальных приближений следует брать как точки спектра S_1 , так и точки множества V .

В конце четвертой главы приводится численное сравнение точек множеств S_ε и $S_1 \cup V$ для трех образцов слоистого композита, отличающихся друг от друга только числом слоев и величиной периода: для первого образца принимается $M = 10$ и $\varepsilon = 0.014$ м; для второго — $M = 14$ и $\varepsilon = 0.01$ м; для третьего — $M = 28$ и $\varepsilon = 0.005$ м. Предполагается, что слои параллельны плоскости Ox_2x_3 и имеют одинаковую толщину $\varepsilon/2$ (при этом $h = 0.5$) и следующие числовые характеристики: $\rho_1 = 5500$ кг/м³, $\rho_2 = 2500$ кг/м³, $\lambda_1 = 9.8 \cdot 10^9$ Па, $\lambda_2 = 5.5 \cdot 10^8$ Па, $\mu_1 = 8.5 \cdot 10^9$ Па, $\mu_2 = 3.8 \cdot 10^8$ Па, $N_2 = 1$, $k_2 = 0$, $v_1^{(2)} = 3 \cdot 10^{11}$ Па · с⁻¹, $\gamma_1^{(2)} = 400$ с⁻¹.

Спектр S_1 собственных колебаний, распространяющихся в усредненном материале вдоль оси Ox_1 , есть объединение корней уравнений (25), которые в данном случае сводятся к кубическим уравнениям

$$\lambda^3 + \xi_1 \lambda^2 + \alpha_1 C_k \lambda + (\alpha_1 \xi_1 - d_1) C_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

где $\alpha_1 = 2.4979 \cdot 10^9$ Па, $d_1 = 3.6359 \cdot 10^{11}$ Па · с⁻¹, $\xi_1 = 392.8851$ с⁻¹. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ уравнение (28) имеет один вещественный $\lambda_{1k}^{(0)}$ и два комплексно-сопряженных корня $A_k^{(0)} \pm i\omega_k^{(0)}$. В таблице 1 приведены значения $\lambda_{1k}^{(0)}$ и $A_k^{(0)}$, вычисленные с точностью до 0.0001 с⁻¹, и собственные частоты колебаний $\omega_k^{(0)}$ усредненной среды, вычисленные с точностью до 0.1 с⁻¹, для $k = 1, \dots, 5$.

При численном поиске точек спектра S_ε в качестве начальных приближений к корням уравнений (26), (27) используются значение $-\xi_1$, а также корни $\lambda_{1k}^{(0)}$ и $A_k^{(0)} \pm i\omega_k^{(0)}$ уравнения (28). Вычисления показывают, что относительные погрешности начальных приближений $-\xi_1$ и $\lambda_{1k}^{(0)}$ не превышают $2.6 \cdot 10^{-6}$ % и $4.1 \cdot 10^{-5}$ % соответственно. Относительные погрешности

	$\lambda_{1k}^{(0)}, \text{c}^{-1}$	$A_k^{(0)}, \text{c}^{-1}$	$\omega_k^{(0)}, \text{c}^{-1}$
$k = 1$	-247.3566	-72.7643	17731.7
$k = 2$	-247.3353	-72.7749	35465.2
$k = 3$	-247.3314	-72.7769	53198.3
$k = 4$	-247.3300	-72.7775	70931.3
$k = 5$	-247.3294	-72.7779	88664.2

Таблица 1. Результаты расчета точек $\lambda_{1k}^{(0)}$ и $A_k^{(0)} + i\omega_k^{(0)}$ спектра S_1

$\Delta A_k^{(M)}$ и $\Delta \omega_k^{(M)}$ значений $A_k^{(0)}$ и $\omega_k^{(0)}$, принимаемых в качестве приближенных значений $A_k^{(M)}$ и $\omega_k^{(M)}$ для корней $A_k^{(M)} \pm i\omega_k^{(M)}$ уравнений (27), приведены в таблицах 2 и 3.

M	$A_k^{(M)}, \text{c}^{-1}$			$\Delta A_k^{(M)}, \%$		
	10	14	28	10	14	28
$k = 1$	-72.7643	-72.7825	-72.7688	0.049	0.025	0.006
$k = 2$	-72.7749	-72.8481	-72.7931	0.197	0.100	0.025
$k = 3$	-72.7769	-72.9422	-72.8180	0.446	0.227	0.056
$k = 4$	-72.7775	-72.0729	-72.8507	0.796	0.404	0.100
$k = 5$	-72.7779	-72.2419	-72.8924	1.244	0.634	0.157

Таблица 2. Вещественные части точек $A_k^{(M)} + i\omega_k^{(M)}$ спектра S_ε и относительные погрешности $\Delta A_k^{(M)}$

Анализ результатов вычислений, приведенных в таблицах 2 и 3, показывает, что при фиксированном k погрешность начальных приближений $A_k^{(0)} \pm i\omega_k^{(0)}$ к точкам $A_k^{(M)} \pm i\omega_k^{(M)}$ спектра S_ε достаточно быстро убывает с увеличением числа M . Кроме того, из таблицы 3 видно, что чем большее число слоев содержится в выбранном образце слоистого композита, тем медленнее уменьшается расстояние между “соседними” собственными частотами $\omega_{k+1}^{(M)}$ и $\omega_k^{(M)}$ при увеличении номера k .

В пятой главе исследуется процесс отражения и прохождения плоской звуковой волны $u_0(x_1, t)$ единичной амплитуды и частоты ω , распространяющейся вдоль оси Ox_1 со стороны отрицательных x_1 , на границах однородных сжимаемых сред и слоистых двухфазных сред с диссипацией, состоящих из тех же фаз, что и среды из третьей главы. Границы раздела слоев предполагаются параллельными или перпендикулярными фронту

M	$\omega_k^{(M)}, \text{c}^{-1}$			$\Delta\omega_k^{(M)}, \%$		
	10	14	28	10	14	28
$k = 1$	17701.6	17716.4	17727.9	0.170	0.086	0.021
$k = 2$	35220.6	35341.7	35434.5	0.694	0.349	0.087
$k = 3$	52351.3	52775.9	53094.5	1.618	0.800	0.196
$k = 4$	68849.2	69911.4	70684.2	3.024	1.459	0.350
$k = 5$	84400.1	86624.2	88178.8	5.052	2.355	0.550

Таблица 3. Мнимые части точек $A_k^{(M)} + i\omega_k^{(M)}$ спектра S_ε и относительные погрешности $\Delta\omega_k^{(M)}$

волны, а полупространство $x_1 < 0$ считается заполненным однородной сжимаемой средой с плотностью ρ и скоростью распространения продольной волны c .

При исследовании распространяющихся в слоистых средах звуковых волн, длина которых много больше величины периода ε , используются усредненные модели слоистых сред, выведенные в третьей главе. Рассматриваются по отдельности два случая.

В первом случае слоистая двухфазная среда занимает полупространство $x_1 > 0$. С помощью замены исходной среды на соответствующую ей усредненную среду и условий непрерывности перемещений и напряжений на границе $x_1 = 0$ выведены формулы для вычисления приближенных значений амплитуд и начальных фаз колебаний волны, отраженной от границы $x_1 = 0$, и волны, прошедшей через эту границу. Если приближенные значения амплитуд отраженной и прошедшей волн обозначить через $B_1(\omega)$ и $B_2(\omega)$, а их начальных фаз колебаний — через $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$, то эти формулы записываются в следующем виде:

$$B_1(\omega) = \sqrt{\frac{\rho_0|C(\omega)| - Z\sqrt{2\rho_0(|C(\omega)| + C_1(\omega))} + Z^2}{\rho_0|C(\omega)| + Z\sqrt{2\rho_0(|C(\omega)| + C_1(\omega))} + Z^2}},$$

$$B_2(\omega) = \frac{2Z}{\sqrt{\rho_0|C(\omega)| + Z\sqrt{2\rho_0(|C(\omega)| + C_1(\omega))} + Z^2}},$$

$$\varphi_1(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{если } |C(\omega)| = \frac{Z^2}{\rho_0}, \\ K(\omega) + \arctg \frac{Z\sqrt{2\rho_0(|C(\omega)| - C_1(\omega))}}{\rho_0|C(\omega)| - Z^2}, & \text{если } |C(\omega)| \neq \frac{Z^2}{\rho_0}, \end{cases}$$

$$\varphi_2(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\rho_0 (|C(\omega)| - C_1(\omega))}}{\sqrt{\rho_0 (|C(\omega)| + C_1(\omega)) + Z\sqrt{2}}}.$$

Здесь $K(\omega) = 0$, если $\rho_0|C(\omega)| < Z^2$; $K(\omega) = -\pi$, если $\rho_0|C(\omega)| > Z^2$; $Z = \rho c$ — импеданс продольной волны в среде, занимающей полупространство $x_1 < 0$; $C(\omega)$ — комплексный модуль усредненной среды:

$$C(\omega) = C_1(\omega) + iC_2(\omega),$$

где $C_1(\omega)$ — модуль накопления, $C_2(\omega)$ — модуль потерь,

$$C_1(\omega) = \alpha_k - \sum_{n=1}^N \frac{q_n \nu_n}{\nu_n^2 + \omega^2}, \quad C_2(\omega) = \omega \left(\beta_k + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\nu_n^2 + \omega^2} \right).$$

Здесь для слоев, параллельных фронту волны u_0 (т.е. плоскости Ox_2x_3),

$$k = 1, \quad N = M, \quad q_n = d_n, \quad \nu_n = \xi_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

а для слоев, перпендикулярных фронту волны u_0 (т.е. параллельных плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3),

$$k = 2, \quad N = M + R_1N_1 + R_2N_2, \quad q_n = p_n, \quad \nu_n = \xi_n, \quad n = 1, \dots, M,$$

$$\text{при } R_1 = 1: \quad q_{M+n} = k_3 v_n^{(1)}, \quad \nu_{M+n} = \gamma_n^{(1)}, \quad n = 1, \dots, N_1,$$

$$\text{при } R_2 = 1: \quad q_{M+R_1N_1+n} = k_4 v_n^{(2)}, \quad \nu_{M+R_1N_1+n} = \gamma_n^{(2)}, \quad n = 1, \dots, N_2$$

(см. обозначения выше).

Во втором случае слоистая двухфазная среда занимает неограниченную полосу $0 < x_1 < L$, а полупространство $x_1 > L$ занято однородной сжимаемой средой с плотностью ρ_3 и скоростью распространения продольной волны c_3 . С помощью усредненной модели слоистой среды и условий непрерывности перемещений и напряжений на границах $x_1 = 0$ и $x_1 = L$ выведены формулы для расчета приближенных значений $D_1(\omega)$ и $D_4(\omega)$ комплексных амплитуд двух волн: волны, отраженной от границы $x_1 = 0$, и волны, прошедшей через границу $x_1 = L$. Эти формулы имеют следующий вид:

$$D_1(\omega) = \frac{-(\eta(\omega) - Z)(\eta(\omega) + Z_3) + (\eta(\omega) + Z)(\eta(\omega) - Z_3)e^{-2b_0(\omega)L}}{(\eta(\omega) + Z)(\eta(\omega) + Z_3) - (\eta(\omega) - Z)(\eta(\omega) - Z_3)e^{-2b_0(\omega)L}},$$

$$D_4(\omega) = \frac{4Z\eta(\omega)e^{-\beta_0(\omega)L}}{(\eta(\omega) + Z)(\eta(\omega) + Z_3) - (\eta(\omega) - Z)(\eta(\omega) - Z_3)e^{-2b_0(\omega)L}}, \quad (29)$$

где $\eta(\omega)$ и $Z_3 = \rho_3 c_3$ — импедансы продольной волны в усредненной среде,

занимающей полосу $0 < x_1 < L$, и однородной сжимаемой среде, занимающей полупространство $x_1 > L$, соответственно,

$$\eta(\omega) = \sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| + C_1(\omega))} + i\sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| - C_1(\omega))},$$

$$b_0(\omega) = \frac{\omega}{|C(\omega)|} \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| - C_1(\omega))} + i\sqrt{\frac{\rho_0}{2} (|C(\omega)| + C_1(\omega))} \right).$$

С помощью формулы (29) численно исследована частотная зависимость приближенных значений $I(\omega) = 10 \lg(Z^{-1}Z_3|D_4(\omega)|^2)$ изменений уровня интенсивности звука при прохождении его через полосу $0 < x_1 < L$ толщины $L = 0.14$ м слоистого композита, физические параметры которого были выписаны выше (см. первый образец, для которого $M = 10$, $\varepsilon = 0.014$ м). Границы слоев композита предполагаются параллельными одной из координатных плоскостей, а среда вне полосы $0 < x_1 < L$ считается заполненной воздухом, т.е. $\rho = \rho_3 = 1.3$ кг/м³, $c = c_3 = 330$ м/с.

Так как тензор коэффициентов вязкости β усредненного материала — нулевой, то для применения формулы (29) требуется рассчитать следующие его параметры: ρ_0 , α_1 , α_2 , q_n , ν_n ($n = 1, \dots, N$). Согласно вычислениям, $\rho_0 = 4000$ кг/м³. Для слоев, параллельных плоскости Ox_2x_3 , $\alpha_1 = 2.4979 \times 10^9$ Па, $q_1 = 3.6359 \times 10^{11}$ Па · с⁻¹, $\nu_1 = 392.8851$ с⁻¹ ($N = 1$). Для слоев, параллельных плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3 , $\alpha_2 = 1.2533 \times 10^{10}$ Па, $q_1 = 2.9219 \times 10^9$ Па · с⁻¹, $q_2 = 7.5 \times 10^{10}$ Па · с⁻¹, $\nu_1 = 392.8851$ с⁻¹, $\nu_2 = 400$ с⁻¹ ($N = 2$).

Для исследования частотной зависимости $I(\omega)$ берется частотный диапазон $D_1 = [1 \text{ Гц}, 30 \text{ кГц}]$. Вычисления показывают, что длины волн являются монотонно убывающими функциями частоты ω и при $\omega = 30$ кГц они больше 0.15 м. Таким образом, при исследовании волн с частотами из D_1 применение формулы (29) для расчета приближенного значения комплексной амплитуды волны, прошедшей через все 20 слоев композита, вполне обосновано, поскольку длины таких волн можно считать много больше величины периода $\varepsilon = 0.014$ м.

На рис. 3 и 4 представлены графики функции $I(\omega)$ для диапазонов частот 1–1000 Гц и 1–30 кГц: сплошная линия 1 (2) соответствует прохождению звука через полосу $0 < x_1 < L$ композита, слой которого параллельны (соответственно перпендикулярны) фронту волны. Для сравнения на этих же рисунках штриховой линией изображен график изменения уровня интенсивности звука (с тем же обозначением $I(\omega)$) при прохождении его через полосу $0 < x_1 < L$ сплошной упругой фазы композита, а пунктирной линией — через полосу $0 < x_1 < L$ сплошной вязкоупругой фазы композита. На

рис. 3 сплошные линии 1 и 2 совпадают, так как для частотного диапазона 1–1000 Гц различие между значениями функции $I(\omega)$ для композитов, отличающихся друг от друга только расположением слоев по отношению к координатным плоскостям, составляет менее 0.04 дБ.

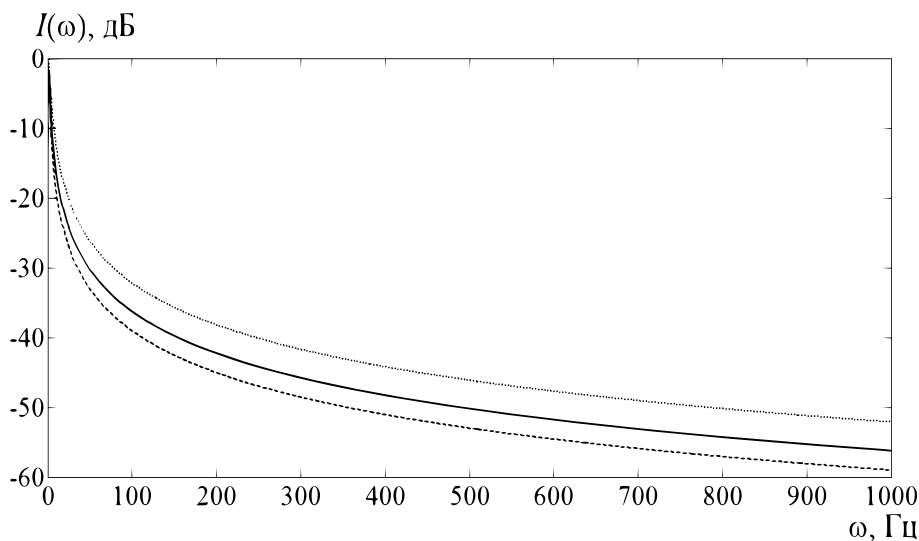


Рис. 3. График функции $I(\omega)$ в диапазоне частот 1–1000 Гц

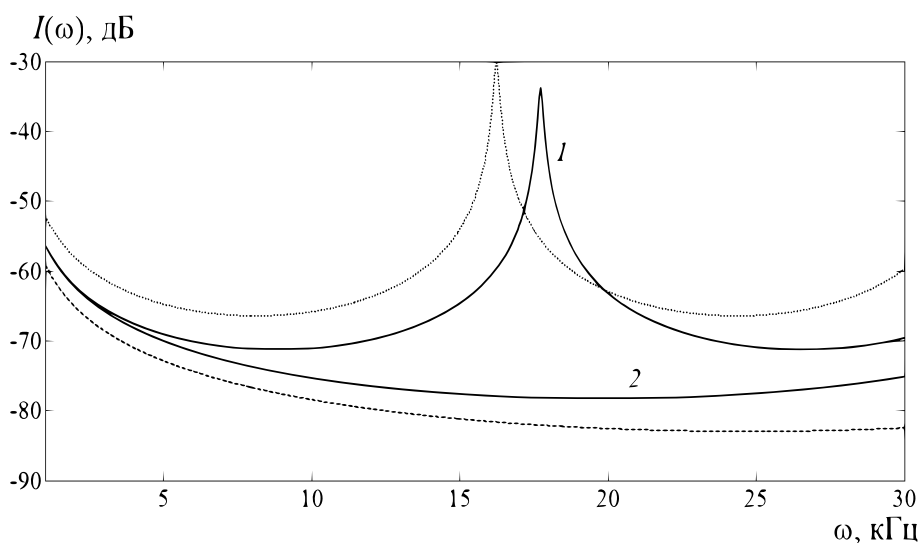


Рис. 4. График функции $I(\omega)$ в диапазоне частот 1–30 кГц

Как видно из рис. 3 и 4, функция $I(\omega)$ достигает локального максимума на отрезке D_1 для двух сред: композита, слои которого параллельны фронту волны, и сплошного вязкоупругого материала. Согласно расчетам, для сплошного вязкоупругого материала максимум достигается при частоте 16242.5 Гц, равной наименьшей собственной частоте его одномерных колебаний, а для композита — при частоте 17731.7 Гц, равной наименьшей собственной частоте одномерных колебаний соответствующего ему усредненного материала (см. табл. 1).

Для слоистой среды, занимающей полосу $0 < x_1 < L$ и состоящей из M слоев первой фазы и M слоев второй фазы, параллельных фронту падающей волны $u_0(x_1, t)$, выведена система из $4M + 2$ линейных уравнений для расчета точных значений $U_1(\omega)$ и $U_{4M+2}(\omega)$ комплексных амплитуд волны, отраженной от границы $x_1 = 0$, и волны, прошедшей через все $2M$ слоя. Для вывода этой системы были использованы условия непрерывности перемещений и напряжений на внешних границах $x_1 = 0$ и $x_1 = L$, а также на внутренних границах, разделяющих слои друг от друга. Полученная система дала возможность, в частности, численно исследовать зависимость от числа слоев относительных погрешностей

$$\Delta_1^{(M)}(\omega) = \frac{||U_1(\omega)| - |D_1(\omega)||}{|U_1(\omega)|}, \quad \Delta_2^{(M)}(\omega) = \frac{||U_{4M+2}(\omega)| - |D_4(\omega)||}{|U_4(\omega)|}$$

приближенных значений $|D_1(\omega)|$ и $|D_4(\omega)|$ амплитуд $|U_1(\omega)|$ и $|U_{4M+2}(\omega)|$ соответственно.

В качестве примера численно исследована функция $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ при $M = 10$, $M = 14$ и $M = 28$ в частотном диапазоне $D_1 = [1 \text{ Гц}, 30 \text{ кГц}]$ для трех образцов слоистого композита, числовые характеристики которых были приведены ранее. Непосредственные вычисления показали, что наибольшие значения функция $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ принимает вблизи собственных частот $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_1^{(M)}$ одномерных колебаний усредненного материала и слоистого композита (см. табл. 1 и 3). Это объясняется тем, что при этих значениях частот функции $|D_4(\omega)|$ и $|U_{4M+2}(\omega)|$ имеют “резкие” максимумы, т.е. их значения довольно быстро меняются вблизи точек максимума. С целью уточнения поведения функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ вблизи точек $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_1^{(M)}$ выделяется частотный диапазон $Q_1 = [17 \text{ кГц}, 18.8 \text{ кГц}]$. На рис. 5 изображен график функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ при $\omega \in Q_1$: кривая 1 соответствует $M = 10$, кривая 2 — $M = 14$, а кривая 3 — $M = 28$.

Численно установлено, что значения относительной погрешности $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ для $\omega \in [1 \text{ Гц}, 1 \text{ кГц}]$ не превышают 0.0014%, 0.0008% и 0.00018% при $M = 10$, $M = 14$ и $M = 28$ соответственно, а для $\omega \in [1 \text{ кГц}, 14 \text{ кГц}]$ — 0.2%, 0.1% и 0.25% при $M = 10$, $M = 14$ и $M = 28$ соответственно. Построены также графики функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ для частотных диапазонов $[14 \text{ кГц}, 17 \text{ кГц}]$ и $[18.8 \text{ кГц}, 30 \text{ кГц}]$, из которых, в частности, видно, что для частот из этих диапазонов значения $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ не превышают 3.6%, 2% и 0.5% при $M = 10$, $M = 14$ и $M = 28$ соответственно.

Проведенное численное исследование показало, что увеличение числа слоев композита приводит в целом к достаточно быстрому уменьшению относительной погрешности приближенного значения $|D_4(\omega)|$ амплитуды $|U_{4M+2}(\omega)|$ прошедшей волны во всем частотном диапазоне D_1 .

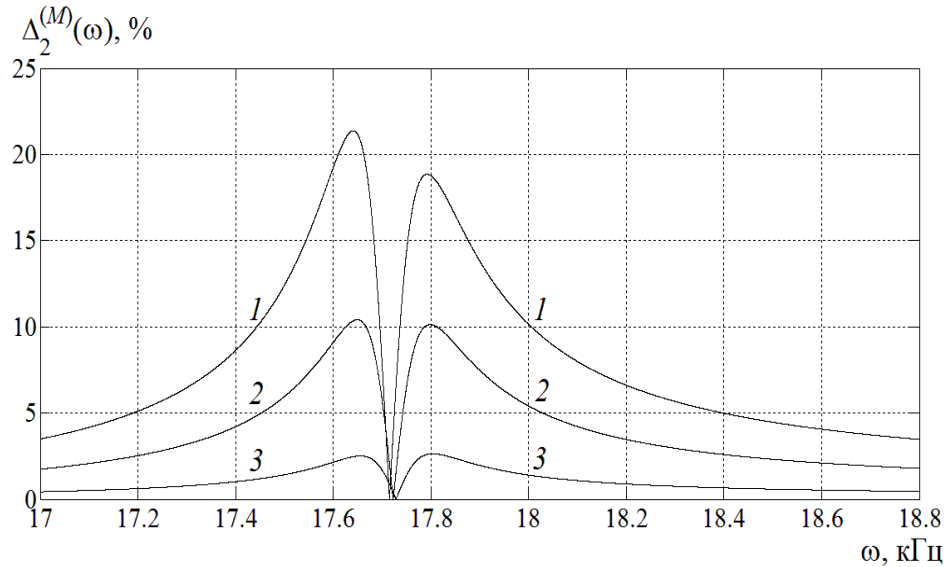


Рис. 5. График функции $\Delta_2^{(M)}(\omega)$ для частот $\omega \in Q_1$

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в работе, отражающие ее научную новизну.

Основные результаты и выводы

1. Выведены усредненные уравнения акустики для твердых сред с периодической микроструктурой, состоящих из вязкоупругих материалов или из упругого и вязкоупругого материалов. В качестве вязкоупругих материалов рассмотрены вязкоупругие материалы, обладающие вязкостью и/или памятью. Показано, что усредненные уравнения являются интегродифференциальными и описывают колебания однородных вязкоупругих материалов с памятью. Выписаны вспомогательные стационарные и эволюционные периодические задачи для расчета компонентов тензоров ядер релаксации усредненных вязкоупругих материалов.

2. Выведены усредненные уравнения акустики для смешанных сред с периодической микроструктурой, состоящих из вязкоупругого материала с вязкостью и/или памятью и сжимаемой вязкой или слабовязкой жидкости. Установлено, что усредненные уравнения являются интегродифференциальными и в случае вязкой жидкости описывают колебания однородной вязкоупругой среды, обладающей как вязкостью, так и памятью, а в случае слабовязкой жидкости — колебания модифицированной среды Био. Выписаны вспомогательные стационарные и эволюционные периодические задачи, с помощью которых находятся коэффициенты и ядра сверток усредненных уравнений.

3. Исследован вопрос о сходимости последовательностей решений исходных начально-краевых задач, описывающих колебания микронеоднородных твердых и смешанных сред из пп. 1 и 2, к решениям начально-краевых

задач, описывающих колебания соответствующих усредненных сред, при неограниченном уменьшении величины периода. Доказано, что для твердых сред и смешанных сред с вязкой жидкой фазой решения усредненных задач есть сильные L^2 -пределы последовательностей решений допределельных (исходных) задач. Для смешанных сред со слабовязкой жидкой фазой установлена сильная сходимости в пространстве L^2 последовательностей решений допределельных задач к решениям усредненных задач с корректорами в виде осциллирующих вектор-функций, явный вид которых дается через решения вспомогательных задач на ячейке периодичности.

4. Получены усредненные уравнения акустики для сред с периодической микроструктурой, состоящих из частично пористого твердого материала и сжимаемой вязкой или слабовязкой жидкости, заполняющей поры. В частности, выведены граничные условия, связывающие эти уравнения на границе раздела двух сред: сплошного твердого материала и смешанной среды, состоящей из пористого твердого материала и жидкости.

5. Выведены формулы для расчета всех компонентов тензоров ядер релаксации усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с периодической микроструктурой. В качестве одной фазы этих сред был взят изотропный упругий или вязкоупругий материал, а в качестве другой фазы — изотропный вязкоупругий материал или вязкая сжимаемая жидкость. Для вывода указанных формул были решены вспомогательные периодические задачи: как стационарные, так и эволюционные.

6. Исследована структура спектров одномерных собственных колебаний усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с диссипацией из п. 5. Установлено, что спектр собственных колебаний, направление которых перпендикулярно или параллельно слоям исходной среды, представляет собой объединение корней дробно-рациональных уравнений. Показано, что спектр одномерных собственных колебаний усредненной среды является вещественным, за исключением, возможно, конечного числа его точек, если выполнено одно из следующих двух условий: 1) обе фазы слоистой среды обладают вязкостью; 2) только одна фаза слоистой среды обладает вязкостью и при этом собственные колебания направлены параллельно слоям. Если же ни одно из этих двух условий не выполнено, то спектр одномерных собственных колебаний усредненной среды, кроме вещественной части, содержит бесконечное множество невещественных точек.

7. Для двухфазных слоистых сред с диссипацией установлено, что спектры собственных колебаний, распространяющихся перпендикулярно их слоям, представляют собой объединение корней трансцендентных уравнений. Доказано, что при неограниченном уменьшении величины периода

указанные спектры сходятся по Хаусдорфу к объединению спектров одномерных собственных колебаний соответствующих усредненных сред и множеств, состоящих из точек, в которых знаменатели упомянутых в п. 5 дробно-рациональных уравнений обращаются в нуль. Проведено численное сравнение спектральных характеристик двухфазного слоистого композита и соответствующего ему усредненного материала. Численно подтверждено, что увеличение числа слоев композита приводит к сближению точек спектров одномерных собственных колебаний композита и усредненного материала.

8. Для плоских звуковых волн, нормально падающих на границы двухфазных слоистых сред с диссипацией из п. 5, занимающих полупространство или неограниченную полосу, выведены приближенные формулы для расчета комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн. Для этого была использована замена исходных слоистых сред на соответствующие им усредненные среды. Получена также система линейных уравнений для расчета точных значений комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн в случае, когда слоистые среды состоят из конечного числа слоев, параллельных фронту падающей волны. Проведено численное сравнение точного и приближенного значений амплитуды прошедшей волны для двухфазного слоистого композита. Численно исследовано влияние числа слоев на границы применимости приближенных формул и, в частности, численно выявлен резкий рост относительной погрешности приближенного значения амплитуды для волн, частоты которых близки к собственным частотам слоистого композита или усредненного материала.

Список цитируемой литературы

- [1] *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Инерционные и диссипативные свойства пористой среды, заполненной вязкой жидкостью // Известия РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 109–119.
- [2] *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
- [3] *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990. 311 с.
- [4] *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984. 336 с.
- [5] *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
- [6] *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1944. Т. 8. № 4. С. 133–150.

- [7] *Auriault J.-L.* Poroelastic media // In “Homogenization and Porous Media” (ed. U. Hornung). Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, Berlin. 1997. P. 163–182.
- [8] *Burridge R., Keller J.B.* Poroelasticity equations derived from microstructure // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. P. 1140–1146.
- [9] *Levy T.* Propagation waves in a fluid-saturated porous elastic solid // Intern. J. Engrg. Sci. 1979. V. 17. P. 1005–1014.
- [10] *Nguetseng G.* Asimptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 6. P. 1394–1414.
- [11] *Космодемьянский Д.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред // Известия РАН. МТТ. 2009. № 6. С. 75–114.
- [12] *Мейрманов А.М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. мат. ж. 2007. Т. 48. № 3. С. 645–667.
- [13] *Clopeau Th., Ferrin J. L., Gilbert R. P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed, Part II // Math. and Comput. Modelling. 2003. V. 33. P. 821–841.
- [14] *Sanchez-Hubert J.* Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture // Math. Methods Appl. Sci. 1980. № 2. P. 158–190.
- [15] *Gilbert R.P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I // Nonlinear Analysis. 2000. Т. 40. № 1. P. 185–212.
- [16] *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
- [17] *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Матем. сборник. 2000. Т. 191, № 7. С. 31–72.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в Перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus:

- [1] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с вязкой жидкостью // Доклады АН. 2011. Т. 436, № 2. С. 199–202.
- [2] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью // Известия РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 92–103.

- [3] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для пористого вязкоупругого материала с долговременной памятью, заполненного вязкой жидкостью // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1174–1186.
- [4] *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* On the spectrum of an integro-differential equation arising in viscoelasticity theory // Journal of Mathematical Sciences. 2012. Vol. 181, No 5. P. 751–754.
- [5] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний композита, состоящего из слоев упругого и вязкоупругого материалов // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 4. С. 124–134.
- [6] *Шумилова В.В.* Об усреднении задачи вязкоупругости с долговременной памятью // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 441–454.
- [7] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре собственных колебаний в среде из слоев упругого материала и жидкости // Доклады АН. 2013. Т. 448, № 1. С. 43–46.
- [8] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Журнал выч. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 2. С. 282–290.
- [9] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Спектр одномерных колебаний в комбинированной слоистой среде, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости // Известия РАН. МЖГ. 2013. № 1. С. 17–25.
- [10] *Shumilova V.V.* Spectrum of one-dimensional vibrations of a layered medium consisting of a Kelvin-Voigt material and a viscous incompressible fluid // Журн. Сиб. фед. ун-та. Сер. «Математика и физика». 2013. Т. 6, № 3. С. 349–356.
- [11] *Shumilova V.V.* Averaging of acoustic equation for partially perforated viscoelastic material with channels filled by a liquid // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 190, No 1. P. 194–208.
- [12] *Shumilova V.V.* Spectral analysis of integro-differential equations in viscoelasticity theory // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 196, No 3. P. 434–440.
- [13] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Отражение плоской акустической волны от границы раздела упругого материала и слоистой упруго-жидкой среды // Известия РАН. МЖГ. 2014. № 6. С. 45–53.
- [14] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Прохождение плоской звуковой волны через композит из упругих и вязкоупругих слоев // Доклады АН. 2015. Т. 463, № 1. С. 45–48.

- [15] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Прохождение плоской звуковой волны через слоистый композит с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // Акуст. журнал. 2015. Т. 61, № 1. С. 10–20.
- [16] *Шумилова В.В.* Отражение плоской звуковой волны от границы гетерогенной среды из слоев упругого и вязкоупругого материалов // Журнал выч. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1208–1220.
- [17] *Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для среды из вязкоупругого материала и слабвязкой сжимаемой жидкости // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 4. С. 556–560.
- [18] *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Homogenization of acoustic equations for a partially perforated elastic material with slightly viscous fluid // Журн. Сиб. фед. ун-та. Сер. «Математика и физика». 2015. Т. 8, № 3. С. 356–370.
- [19] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений состояния для гетерогенной среды, состоящей из слоев двух ползучих материалов // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2016. Т. 295. С. 229–240.
- [20] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2016. Т. 295. С. 218–228.
- [21] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Прохождение плоской звуковой волны через композит из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Известия РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 32–44.
- [22] *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Calculation of natural frequencies and damping coefficients of a multi-layered composite using homogenization theory // IFAC PapersOnLine. 2018. V. 51. № 2. P. 126–131.

Статьи в других научных изданиях:

- [23] *Шумилова В.В., Шамаев А.С.* О спектре одномерных колебаний в периодической комбинированной слоистой среде // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 1882–1883.
- [24] *Шумилова В.В.* К вопросу об отражении акустических волн от границы упругого материала и слоистой упруго-жидкой среды // Сборник научных трудов “Актуальные вопросы машиноведения”, Минск: ОИМ НАН Беларуси. 2013. Вып. 2. С. 214–216.

Материалы докладов на научных конференциях:

- [25] *Шумилова В.В.* Об усреднении уравнений акустики для пористых вязкоупругих материалов, заполненных вязкой жидкостью // Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная 110-ой годовщине со дня рождения И.Г. Петровского: Сборник тезисов. М.: Изд-во МГУ и ООО “ИНТУИТ.РУ”, 2011. С. 397–398.
- [26] *Шумилова В.В.* Об усреднении уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с жидкостью // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов. М.: МИАН, 2011. С. 225.
- [27] *Шумилова В.В., Шамаев А.С.* О спектре одномерных колебаний в периодической комбинированной слоистой среде // Современные проблемы механики. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков: Тезисы докладов. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. С. 213–214.
- [28] *Шумилова В.В.* О спектре усредненных моделей для слоистой комбинированной среды // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: Тезисы докладов. М.: МИАН, 2012. С. 182.
- [29] *Shumilova V.V.* On the spectrum of one-dimensional oscillations of layered viscoelastic materials // International conference in honor of Vladimir A. Marchenko’s 90th birthday: Book of abstracts. Kharkiv: B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU, 2012. P. 100.
- [30] *Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкой жидкости // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов. М.: МИАН, 2013. С. 243–244.
- [31] *Шумилова В.В.* Эффективные модели нестареющих вязкоупругих композитов // Крымская международная математическая конференция: Сборник тезисов. Т. 3. Симферополь: изд-во КНЦ НАНУ, 2013. С. 79.
- [32] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усредненные модели гетерогенных сред и их спектральные свойства // Международная конференция “Спектральная теория и дифференциальные уравнения”, посвященная 100-летию Б.М. Левитана: Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ и ООО “ИНТУИТ.РУ”, 2014. С. 143–144.

- [33] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Прохождение плоской звуковой волны через слой композита с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // Международная конференция “Современные проблемы вычислительной математики и математической физики”: Тезисы докладов. М.: МАКС-Пресс, 2014. С. 208.
- [34] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Отражение плоской звуковой волны от границы слоистой гетерогенной среды с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник докладов. Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 4166–4168.
- [35] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Расчет собственных частот колебаний многослойной упруго-жидкой среды с помощью ее усредненной модели // Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Аэрокосмические технологии. М.: МФТИ, 2017. С. 24–26.