

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А. Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

на правах рукописи

МАХОВСКАЯ ЮЛИЯ ЮРЬЕВНА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ АДГЕЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

01.02.04 механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2017

Оглавление

Введение.....	7
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ АДГЕЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ.....	20
1.1. Адгезионное взаимодействие между жесткими телами.....	20
1.2. Адгезионное взаимодействие гладких упругих тел.....	23
1.2.1. Упрощенные модели.....	24
1.2.2. Самосогласованный подход.....	27
1.2.3. Капиллярная адгезия.....	31
1.3. Моделирование адгезионного взаимодействия шероховатых поверхностей.....	34
1.3.1. Контакт шероховатых поверхностей без учета адгезии.....	34
1.3.2. Адгезия в контакте шероховатых поверхностей.....	37
1.4. Диссипация энергии в адгезионном контакте упругих тел.....	39
1.4.1. Гистерезис при сближении и разведении поверхностей упругих тел.....	39
1.4.2. Моделирование адгезионного механизма силы трения скольжения.....	42
1.4.3. Моделирование адгезионного сопротивления при качении упругих тел.....	44
1.5. Моделирование адгезии в контакте скольжения вязкоупругих тел.....	45
1.5.1. Контактные задачи о скольжении вязкоупругих тел с постоянной скоростью.....	45
1.5.2. Учет адгезионного притяжения в задачах о скольжении вязкоупругих тел.....	48
Глава 2. АДГЕЗИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ.....	49
2.1. Общий подход к решению задач об адгезионном взаимодействии упругих тел.....	49
2.1.1. Постановка задачи.....	49

2.1.2. Случай контакта поверхностей.....	52
2.1.3. Случай разделенных поверхностей.....	62
2.2. Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии.....	63
2.2.1. Постановка задачи.....	63
2.2.2. Решение контактной задачи.....	67
2.2.3. Получение упрощенных решений.....	76
2.2.4. Результаты расчетов.....	79
2.3. Молекулярная адгезия при взаимодействии упругих тел.....	90
2.3.1. Обобщение модели Можи-Дагдейла на случай формы тел, описываемой степенной функцией.....	91
2.3.2. Потенциал межмолекулярного взаимодействия произвольного вида.....	97
2.4. Выводы по главе 2.....	106
Глава 3. ДИСКРЕТНЫЙ КОНТАКТ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ АДГЕЗИИ.....	109
3.1. Контактное взаимодействие периодической системы штампов с упругим полупространством при наличии адгезии.....	109
3.1.1. Постановка задачи.....	109
3.1.2. Применение метода локализации.....	112
3.1.3. Вывод основных соотношений.....	114
3.1.4. Анализ контактных характеристик.....	118
3.2. Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии.....	128
3.2.1. Сочетание континуального и дискретного подхода.....	128
3.2.2. Постановка задачи.....	129
3.2.3. Расчет зависимостей фактической площади контакта и сближения шероховатого слоя от номинального давления.....	134
3.2.4. Расчет эффективной работы адгезии для шероховатых поверхностей.....	137

3.2.5. Некоторые результаты расчета контактных характеристик на макроуровне.....	143
3.3. Выводы по Главе 3.....	146
Глава 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ И АДГЕЗИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СИЛЫ ТРЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ТЕЛ.....	149
4.1. Диссипация энергии при сближении и удалении упругих тел при наличии адгезии.....	149
4.1.1. Анализ зависимости нагрузки от расстояния между телами.....	149
4.1.2. Диссипация энергии при сближении-разведении параболоидов вращения.....	155
4.1.3. Использование модели Винклера.....	158
4.1.4. Влияние формы выступа на диссипацию энергии.....	161
4.2. Моделирование адгезионной составляющей силы трения в контакте скольжения шероховатых поверхностей.....	163
4.2.1. Взаимное тангенциальное перемещение двух выступов.....	163
4.2.2. Скольжение двух шероховатых поверхностей.....	167
4.2.3. Пример расчета силы трения.....	169
4.3. Моделирование адгезионной составляющей силы трения при качении шероховатого цилиндра.....	170
4.3.1. Постановка задачи для шероховатого цилиндра.....	170
4.3.2. Сведение к задаче для отдельного выступа.....	172
4.3.3. Решение задачи для отдельного выступа.....	175
4.3.4. Решение для шероховатого цилиндра.....	178
4.3.5. Анализ контактных характеристик.....	180
4.3.6. Расчет сопротивления качению.....	183
4.4. Выводы по Главе 4.....	186
Глава 5. СКОЛЬЖЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ АДГЕЗИИ.....	188

5.1. Скольжение цилиндрического штампа по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии.....	188
5.1.1. Постановка задачи для цилиндрического штампа.....	188
5.1.2. Метод решения контактной задачи.....	192
5.1.3. Случай упругого полупространства.....	197
5.1.4. Влияние молекулярной адгезии на контактные характеристики.....	199
5.1.5. Капиллярная адгезия.....	206
5.2. Скольжение сферического штампа по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии.....	211
5.2.1. Постановка задачи для сферического штампа.....	212
5.2.2. Решение трехмерной задачи методом полос.....	214
5.2.3. Капиллярная адгезия при скольжении сферического индентора.....	216
5.3. Скольжение индентора с двумерной волнистостью по поверхности вязкоупругого основания при наличии адгезии.....	218
5.3.1. Постановка задачи для индентора с двумерной волнистостью..	219
5.3.2. Решение задачи при различных режимах заполнения зазора.....	220
5.3.3. Анализ контактных характеристик при разных режимах заполнения зазора.....	226
5.3.4. Влияние адгезии на силу трения на разных масштабных уровнях.....	230
5.4. Скольжение индентора с трехмерной волнистостью по поверхности вязкоупругого основания при наличии адгезии.....	232
5.4.1. Постановка задачи для индентора с трехмерной волнистостью	232
5.4.2. Применение метода полос.....	234
5.4.3. Анализ контактных характеристик.....	237
5.4.4. Сравнение результатов расчета для случаев одного выступа и волнистой поверхности.....	247

5.4.5. Скольжение волнистого индентора в случае насыщенного контакта поверхностей.....	251
5.5. Сопоставление с экспериментальными результатами.....	259
5.6. Выводы по Главе 5.....	263
Заключение.....	266
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	269

Введение

В основе механики контактного взаимодействия, являющейся разделом механики деформируемого твердого тела, лежит решение задачи о контакте двух упругих тел с искривленными границами, полученное Г. Герцем в 1882 г. Постановка этой задачи предполагает наличие сжимающих напряжений внутри области контакта тел и нулевых – на свободной от нагружения поверхности; при этом ставится условие равенства нулю напряжений на границе области контакта. Реальные тела, однако, обладают поверхностной энергией, которая приводит к возникновению сил адгезионного притяжения между ними и, следовательно, растягивающих напряжений как внутри области контакта, так и вне ее.

Адгезионные силы имеют молекулярную природу, при обычных условиях взаимодействия макроскопических тел они малы по величине, и при постановке контактных задач ими можно пренебречь. Но в определенных условиях, например, когда размеры взаимодействующих тел и действующие на них внешние силы невелики, адгезионное притяжение может оказывать значительное влияние на напряженно-деформированное состояние. Интерес к этой теме возник во второй половине XX в., по мере развития и совершенствования микротехники, когда влияние адгезионного взаимодействия на работу сопряжений стало реальной проблемой для инженеров.

Первая модель для описания адгезионного взаимодействия в контакте двух упругих сфер была предложена К. Джонсоном и его соавторами в 1971 г. и получила название ДКР по первым буквам фамилий авторов работы (Джонсон, Кендалл, Робертс). Они рассмотрели контактную задачу для двух упругих сфер без трения в классической герцевской постановке, но отказались от условия равенства нулю контактного давления на границе области контакта, при этом учли изменение поверхностной энергии при вступлении тел в контакт. В результате получилось решение задачи с растягивающими напряжениями внутри области контакта (по ее краям) и

нулевыми – вне области контакта, при этом максимальные сжимающие напряжения в контакте оказывались выше, чем они были бы без учета адгезионного взаимодействия. В 1975 г. Б. В. Дерягиным была предложена альтернативная теория адгезии для двух упругих тел, которая получила название ДМТ (Дерягин, Муллер, Топоров). В этой теории учитывались растягивающие напряжения, вызванные адгезионными силами, вне области контакта, но полагалось, что они не влияют на распределение напряжений внутри области контакта. В 1977 Д. Тейбор показал, что обе данные теории адекватно описывают адгезионный контакт в двух различных случаях: ДКР пригодна для мягких сфер относительно большого радиуса, а ДМТ – для жестких сфер малого радиуса. Тейбор ввел параметр, связывающий между собой упругие и поверхностные свойства и приведенный радиус взаимодействующих сфер и показал, что теории ДКР и ДМТ отвечают противоположным предельным случаям, когда этот параметр стремится к нулю и к бесконечности, соответственно.

В 1992 г. Д. Можи рассмотрел задачу, в которой одновременно учитывались и силы адгезионного притяжения вне области контакта, и их влияние на распределение контактного давления. Он представил зависимость удельной силы адгезии от величины зазора вне области контакта с помощью модели Дагдейла: сила адгезии равна постоянной величине при условии, что величина зазора не превышает заданного значения. Теория Можи-Дагдейла представляет собой аналитическое решение, зависящее от параметра Тейбора; при стремлении этого параметра к нулю и бесконечности она совпадает с теориями ДКР и ДМТ, соответственно.

Преимуществом классических теорий ДКР и ДМТ являются простые аналитические соотношения для силы отрыва – так называют приложенную внешнюю силу, при которой адгезионный контакт разрывается, и которая может быть определена экспериментально для различных пар материалов. Однако, эти теории непригодны для расчета напряженно-деформированного состояния в приповерхностных слоях материалов. Даже теория Можи-

Дагдейла, учитывающая взаимное влияние сил адгезии и контактных деформаций, является достаточно грубым приближением, так как в реальности удельная сила адгезионного притяжения между поверхностями не является константой, а постепенно затухает с увеличением размера зазора между поверхностями.

Поэтому в конце прошлого века стали появляться работы, в которых контактная задача об адгезионном взаимодействии упругих тел решалась численно на основе точного представления зависимости удельной силы адгезии от величины зазора, в частности, заданной в виде потенциала Леннард-Джонса, который описывает ван-дер-ваальсовское притяжение между двумя плоскими поверхностями. По мере развития численных методов в настоящее время решается все больше контактных задач об адгезионном взаимодействии для тел с различными свойствами и различной поверхностной геометрией. Недостатком этих методов, однако, является необходимость численного решения интегральных уравнений механики контактного взаимодействия для расчета распределения контактного давления и других контактных характеристик.

Помимо молекулярного взаимодействия поверхностей, причиной адгезионного притяжения между ними могут быть микроскопические мениски жидкости, находящиеся в зазоре и «стягивающие» между собой поверхности. В этом случае говорят о капиллярной адгезии. В обычных условиях большинство поверхностей покрыто тонкими пленками воды, конденсированной из воздуха, поэтому явление капиллярной адгезии очень распространено. Подобно молекулярным силам, капиллярные силы адгезии малы по величине, однако в случаях очень гладких поверхностей и в сопряжениях, работающих при малых нагрузках либо в бесконтактном режиме (например, при взаимодействии диска с головкой считывающего устройства) эти силы могут приводить к серьезным проблемам и даже приводить к поломке устройств. Влияние капиллярных эффектов на

напряженно-деформированное состояние контактирующих тел до настоящего времени мало изучено.

Еще одним допущением, лежащим в основе классического решения Герца, является предположение об идеальной гладкости взаимодействующих тел. Реальные же поверхности обладают микрорельефом в виде волнистости или шероховатости, что приводит к дискретному характеру контактирования. Силы адгезии при взаимодействии шероховатых поверхностей могут быть очень слабыми либо вообще не проявляться. Это связано, в частности, с большим разбросом неровностей по высоте. При взаимодействии таких поверхностей вступление более высоких выступов в контакт приводит к возникновению упругих сил отталкивания, по сравнению с которыми адгезионные силы притяжения оказываются незначительны. Такое поведение шероховатых поверхностей с учетом различных высот неровностей исследовалось К. Фуллером и Д. Тейбором (1975) с помощью модели ДКР и Д. Мажи (1996) с использованием модели ДМТ. Взаимное влияние неровностей при этом не учитывалось. Было показано, что адгезионные силы достигают заметных величин только в контакте достаточно гладких поверхностей. Тем не менее, микрогеометрия этих поверхностей играет большую роль, поскольку молекулярные силы взаимодействия между поверхностями определяются геометрией зазора.

Методы механики деформируемого твердого тела, в частности механики контактного взаимодействия, используются для аналитического исследования проблем трибологии – науки о трении и изнашивании поверхностей. Одной из главных задач этой науки является изучение диссипации энергии при фрикционном взаимодействии. Согласно молекулярно-механической теории трения, развитой в работах Ф. Боудена и Д. Тейбора, а также И. В. Крагельского в 50-х годах прошлого века, существует два основных источника диссипации энергии при трении поверхностей. Соответственно этому, выделяют две основных составляющих силы трения.

Первую составляющую силы трения называют адгезионной; она связана с образованием и разрывом адгезионных связей при взаимном перемещении поверхностей. Механизм образования этих связей существенно зависит от свойств взаимодействующих тел и условий трения, поэтому единой теории, описывающей адгезионную составляющую силы трения, на настоящий момент не существует. Представляет интерес построение модели, связывающей величину адгезионной составляющей силы трения с упругими свойствами взаимодействующих тел и характеристиками их поверхностной шероховатости.

Другую составляющую силы трения называют механической или деформационной. Она связана с диссипацией энергии, возникающей при циклическом деформировании контактирующих тел при скольжении. Этот механизм диссипации энергии играет значительную роль при трении эластомерных материалов. К. Грош в 1962 г. впервые связал трение резин с диссипацией энергии в приповерхностных слоях материала.

Поскольку в идеально упругом теле диссипации энергии при циклическом деформировании не происходит, для моделирования деформационной составляющей силы трения используют модели несовершенно упругих тел, в частности, вязкоупругих. Контактные задачи о скольжении для вязкоупругих тел рассматривались различными авторами: А.В.Манжировым, Дж.Дж.Калкером, И.Г.Горячевой и др. В работах И.Г.Горячевой предложен метод расчета деформационной составляющей сил трения скольжения и качения и исследована зависимость силы трения от свойств взаимодействующих тел, условий нагружения и скорости скольжения.

В трибологии адгезионная и деформационная компоненты силы трения считаются независимыми друг от друга. Но ряд экспериментальных результатов показывает, что соотношение между составляющими силы трения зависит от условий нагружения, механических свойств контактирующих тел и других характеристик. Постановка и решение

контактных задач о скольжении вязкоупругих тел с учетом адгезионного притяжения между ними дает возможность проанализировать влияние сил адгезии на деформационную составляющую силы трения.

Актуальность темы диссертации связана с широким распространением приборов и устройств, в которых контактирующие поверхности характеризуются высокой степенью гладкости и малыми размерами, а действующие на них нагрузки невелики. При разработке и оценке работоспособности таких сопряжений традиционные модели контактного взаимодействия, предполагающие только сжимающие напряжения на контактной поверхности и нулевые - на свободной поверхности, оказываются недостаточно точными. Возникает необходимость построения моделей, учитывающих эффекты адгезионного взаимодействия между поверхностями. Эти эффекты определяются влиянием множества факторов, включая геометрические, механические и физические свойства поверхностных слоев взаимодействующих тел, а также тонких поверхностных пленок, способных собираться в мениски, в которых действуют капиллярные силы.

Несмотря на высокую степень гладкости поверхностей в таких сопряжениях, их микрогеометрия, обусловленная естественной шероховатостью или искусственно нанесенным рельефом, является существенным фактором, приводящим к дискретному характеру контактирования. Учет формы поверхностного рельефа особенно важен для моделирования адгезионного взаимодействия, поскольку адгезионные силы зависят от величины зазора между поверхностями, которая складывается из начальной геометрии зазора и деформации границ взаимодействующих тел. Изучение роли параметров микрогеометрии (формы выступов, плотности их расположения, распределения по высоте) при контактном взаимодействии поверхностей представляет большой практический интерес, позволяя, в частности, создавать поверхности с заданными свойствами.

Изучение механизмов диссипации энергии при трении поверхностей является одной из фундаментальных задач трибологии. Силы адгезионного притяжения приводят к диссипации энергии при образовании и разрыве элементарных контактов. Кроме того, адгезия влияет на деформационную (механическую) составляющую силы трения за счет своего влияния на поле контактных напряжений и деформаций. Построение моделей, описывающих адгезионную (молекулярную) составляющую силы трения, а также влияние адгезии на деформационную составляющую силы трения, позволяет рассчитывать силу трения и диссипацию энергии и управлять этими величинами в зависимости от условий взаимодействия и требований, предъявляемых к сопряжению.

Целью работы является развитие направления механики контактного взаимодействия для деформируемых тел с учетом адгезионного притяжения, что включает в себя следующие задачи:

- развитие общего подхода к решению задач об адгезионном взаимодействии осесимметричных упругих тел;
- постановка и решение контактных задач о капиллярной и молекулярной адгезии упругих тел, а также об адгезии в дискретном контакте упругих тел;
- расчет потери энергии при циклическом подводе-отводе упругих тел и исследование влияния на эту величину механических и поверхностных свойств взаимодействующих тел;
- разработка моделей для расчета адгезионной составляющей силы трения на основе анализа потери энергии при образовании и разрыве контактов между поверхностными неровностями;
- постановка и решение контактных задач о скольжении отдельной неровности и регулярной волнистой поверхности по поверхности вязкоупругого тела при наличии адгезии;

- анализ влияния параметров адгезии, геометрии поверхностей, механических свойств взаимодействующих тел, а также условий контактирования (нагрузки и скорости относительного перемещения поверхностей) на контактные характеристики (распределение контактных давлений, размеры и расположение пятен контакта и т.д.) и деформационную составляющую силы трения.

Методы исследования. В работе использовались методы механики контактного взаимодействия и математического анализа. Задача об адгезии осесимметричных упругих тел решалась на основе кусочно-постоянного представления зависимости удельной силы адгезии от зазора между поверхностями и последующего применения метода разложений в ряды. Задача о дискретном контакте упругих тел при наличии адгезии решалась с использованием метода локализации, предложенном И.Г.Горячевой. Задача о скольжении цилиндра по поверхности вязкоупругого основания при наличии адгезии решалась методом сведения к задаче Римана-Гильберта. Все перечисленные задачи позволили получить распределение давлений и перемещений границы деформируемого тела в аналитическом виде, при этом потребовалось применить методы численного решения систем алгебраических уравнений и численного интегрирования для определения границ областей контакта и адгезионного взаимодействия. При решении задач о скольжении сферического выступа и регулярной поверхности по вязкоупругому основанию применялся метод разбиения области взаимодействия на полосы, при этом решение плоской задачи в каждой полосе строилось аналитически.

Научная новизна работы. В работе получены следующие новые результаты:

1. Предложен новый подход к решению контактных задач с учетом адгезии, основанный на представлении зависимости удельной

силы адгезии от величины зазора в виде кусочно-постоянной функции и позволяющий анализировать контактные характеристики во всем диапазоне изменения параметров упругости и адгезии.

2. Даны постановки и решения ряда новых задач механики контактного взаимодействия для упругих тел с учетом адгезионного взаимодействия различной природы – молекулярной и капиллярной, а также задачи о дискретном контакте упругих тел при наличии адгезии.

3. Впервые проведен расчет и анализ величины диссипации энергии, возникающей вследствие адгезионного притяжения при циклическом подводе и отводе упругих тел.

4. Предложены новые модели для расчета адгезионной составляющей трения качения и скольжения, основанные на расчете потери энергии при образовании и разрыве контактов между неровностями двух поверхностей.

5. Впервые дана постановка и получено решение контактной задачи о скольжении жесткого цилиндра по поверхности вязкоупругого полупространства при наличии адгезии.

6. Впервые проведен анализ влияния адгезионного взаимодействия на деформационную составляющую силы трения при скольжении единичной неровности и поверхности с регулярным рельефом по вязкоупругому телу.

Достоверность и обоснованность результатов. Результаты получены с использованием известных методов механики деформируемого твердого тела и математического анализа. Некоторые решения получены аналитически, их достоверность обеспечивается корректной постановкой задач и аккуратным использованием аналитических методов. Достоверность результатов расчетов подтверждается сравнением полученных решений с известными аналитическими решениями и численными результатами в

предельных случаях. Некоторые из полученных результатов сопоставлены с экспериментальными данными.

Практическая значимость работы. Результаты диссертации используются при решении фундаментальных вопросов трибологии, таких как определение адгезионной и деформационной составляющих силы трения.

Полученные результаты используются также для решения прикладных задач, в частности, при расчете силы трения эластомеров в различных условиях взаимодействия и при обработке результатов измерений свойств поверхности, проведенных методом атомной силовой микроскопии. Результаты диссертации также могут также служить основой для расчета контактных характеристик сопряжений, используемых в микроэлектронике и микромашинах, моделирования адгезии в биологических системах.

Апробация работы. Основные результаты диссертации опубликованы в 40 печатных работах, из них 17 - в журналах, рекомендованных ВАК, и международных рецензируемых журналах. Результаты работы были предметом более чем 20 докладов на российских и международных научных конференциях, таких как:

5th and 9th EUROMECH Solid Mechanics conference (2003, Thessaloniki, Greece, 2015, Madrid, Spain)

21st and 23rd International Congress on Theoretical and Applied Mechanics (2004, Warsaw, Poland, 2012, Beijing, China)

III World Tribology Congress (2005, Washington DC, USA)

Международный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвященный памяти А.А.Ильюшина «Упругость и неупругость» (2006, 2011, 2016, Москва)

X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (2011, Нижний Новгород)

Результаты диссертационной работы также докладывались и обсуждались на семинаре по механике сплошной среды им. Л.А.Галина ИПМех РАН и семинаре по механике твердого тела НИИ Механики МГУ.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

В **Главе 1** представлен обзор литературы, посвященной моделированию адгезионного взаимодействия деформируемых тел, включая работы, опубликованные по этой теме соискателем.

Глава 2 посвящена решению задач об адгезионном взаимодействии осесимметричных упругих тел. В п.2.1 дана постановка контактной задачи для упругого полупространства и индентора, форма которого описывается степенной функцией, при наличии пригрузки вне области контакта, заданной в виде кусочно-постоянной функции. Получены аналитические выражения для контактного давления, упругого перемещения границы полупространства вне области контакта, нагрузки, действующей на штамп, и внедрения штампа в упругое полупространство. В п. 2.2. рассмотрена задача о капиллярной адгезии при взаимодействии осесимметричного штампа и упругого полупространства, стянутого мениском жидкости. Проведен анализ влияния поверхностного натяжения жидкости и объема мениска на распределение контактного давления и другие контактные характеристики. В п.2.3 решение контактной задачи, полученное в п.2.1, применено для исследования роли молекулярной адгезии при взаимодействии осесимметричных упругих тел. Проведено сравнение полученных результатов с результатами известных упрощенных моделей адгезионного взаимодействия.

В **Главе 3** исследуется влияние адгезии на характеристики дискретного контакта упругих тел. В п. 3.1 дана постановка контактной задачи для системы периодически расположенных одинаковых штампов, форма которых описывается степенной функцией. Исследуются два вида адгезионного взаимодействия. В первом случае предполагается, что поверхность

полупространства покрыта пленкой жидкости заданной толщины, которая при взаимодействии со штампами собирается в одинаковые мениски вокруг каждого из них (капиллярная адгезия). Во втором случае штампы и полупространство испытывают молекулярное притяжение друг к другу. Полученное решение используется для анализа влияния параметров шероховатости (формы выступов и плотности их расположения) на напряжения и перемещения на поверхности контакта и другие контактные характеристики. В п. 3.2 полученное решение периодической контактной задачи для случая молекулярной адгезии используется для моделирования контакта шероховатых упругих тел с плоской номинальной поверхностью. Результаты использованы для исследования влияния микрогеометрических параметров шероховатости одновременно с макрогеометрическими номинальными параметрами тел на характеристики их контактного взаимодействия

В **Главе 4** проведен расчет диссипации энергии при подводе и отводе упругих тел, испытывающих адгезионное притяжение, и предложены модели для расчета адгезионной составляющей силы трения. В п.4.1 исследуется гистерезис при подводе и отводе упругих тел при наличии адгезии. Этот гистерезис следует из неоднозначной зависимости нагрузки от расстояния между телами, которая имеет место при определенных условиях адгезионного взаимодействия упругих тел. Исследована величина диссипации энергии в цикле подвода-отвода упругих тел в зависимости от поверхностных свойств взаимодействующих тел, поверхностного натяжения жидкости и объема мениска. В п. 4.2 и 4.3 предложены модели для расчета адгезионной составляющей силы в процессе скольжения и качения шероховатых поверхностей. Потеря энергии на трение при взаимном перемещении шероховатых тел рассчитывается как сумма потерь энергии при образовании и разрыве элементарных адгезионных контактов между выступами. Приведены примеры расчета зависимости адгезионной составляющей силы трения от параметров шероховатости и поверхностных

свойств взаимодействующих тел. Получены аналитические выражения для силы трения в предельных случаях, соответствующих известным упрощенным моделям адгезионного взаимодействия.

В **Главе 5** представлены теоретические модели, учитывающие эффект адгезионного притяжения поверхностей при скольжении единичного выступа и регулярной волнистой поверхности по вязкоупругому основанию. В п.5.1 даны постановка и решение контактной задачи о скольжении жесткого цилиндра по поверхности вязкоупругого полупространства при наличии адгезионного притяжения. Исследованы распределение контактного давления, размер и положение области контакта и деформационная сила сопротивления движению цилиндра в зависимости от адгезионных свойств поверхностей, механических характеристик полупространства и скорости скольжения цилиндра. В п. 5.2 - 5.5 предложены модели скольжения отдельной сферической неровности и тела с регулярным рельефом по поверхности. Исследовано совместное влияние параметров микрогеометрии контактирующих поверхностей, поверхностных свойств и несовершенной упругости взаимодействующих тел на характеристики контактного взаимодействия. В п.5.6 проведено сопоставление некоторых результатов с экспериментальными данными для деформационной составляющей силы трения эластомеров.

В заключении изложены основные результаты диссертации.

Количество страниц в диссертации – 286, в том числе иллюстраций – 91, таблиц – 1.

Выражаю сердечную благодарность академику Ирине Георгиевне Горячевой за руководство, помощь и поддержку, без которых эта работа не была бы написана.

Посвящаю эту работу светлой памяти моих родителей – Юрия Степановича и Галины Ильиничны Маховских.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ АДГЕЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Механика контактного взаимодействия является основой для расчета жесткости, силы трения и динамических эффектов в контакте деформируемых твердых тел [3, 11, 13, 21, 41]. Одно из направлений этой науки посвящено исследованию контактного взаимодействия при наличии адгезии.

1.1. Адгезионное взаимодействие между жесткими телами

Адгезией (от лат. *adhaesio* – прилипание, сцепление) называют притяжение и прилипание друг к другу поверхностей твердых тел, вызванное действием межмолекулярных сил.

Межмолекулярное взаимодействие впервые было учтено Ван-дер-Ваальсом в 1873 году в уравнении состояния, описывающем свойства неидеальных газов и жидкостей. Величина межмолекулярных сил намного меньше, чем значения внутримолекулярных (химических) сил, поэтому их сложно обнаружить и измерить экспериментально. Долгое время усилия были направлены в основном на изучение межмолекулярного взаимодействия в жидкостях, модели адгезионного контакта твердых тел стали появляться только в 30-х годах XX века. В 1937 году Лондоном было дано теоретическое объяснение дисперсионных сил притяжения, которые в большинстве случаев дают наибольший вклад в ван-дер-ваальсово взаимодействие. Феноменологическое соотношение между потенциалом межмолекулярного взаимодействия и расстоянием было предложено Леннард-Джонсом в 1924 году [47, 145] в предположении, что сила

взаимодействия между двумя молекулами зависит от расстояния между ними и направлена вдоль соединяющей их прямой:

$$U_0(r) = -\frac{A_1}{r^6} + \frac{A_2}{r^{12}} \quad (1.1)$$

где r - расстояние между центрами взаимодействующих частиц, A_1 и A_2 - некоторые постоянные. Первое слагаемое в выражении (1.1) соответствует притяжению частиц, а второе – отталкиванию.

Потенциал взаимодействия $U_a(z)$ между двумя полупространствами с параллельными границами в зависимости от расстояния между ними z может быть определен из (1.1) путем двойного интегрирования [90, 129]:

$$U_a(z) = -\frac{4w_a}{3} \left(\left(\frac{z_0}{z} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{z_0}{z} \right)^8 \right) \quad (1.2)$$

откуда адгезионное давления $p_a(z)$, действующее на поверхности, находится как [153]:

$$p_a(z) = -\frac{8w_a}{3z_0} \left(\left(\frac{z_0}{z} \right)^3 - \left(\frac{z_0}{z} \right)^9 \right) \quad (1.3)$$

где z_0 - равновесное расстояние между поверхностями, при котором сила взаимодействия равна нулю: $p_a(z_0) = 0$. Величина w_a называется удельной работой адгезии; она количественно характеризует адгезионные свойства двух поверхностей и определяется как работа на единице площади, необходимая для того, чтобы раздвинуть две поверхности от равновесного расстояния z_0 до бесконечности:

$$w_a = \int_{z_0}^{\infty} p_a(z) dz \quad (1.4)$$

Если поверхностные энергии образующихся после разведения свободных поверхностей равны γ_1 и γ_2 , а γ_{12} - энергия поверхности раздела, то удельная работа адгезии равна

$$w_a = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}$$

В случае двух одинаковых поверхностей с поверхностными энергиями γ удельная работа адгезии равна $w_a = 2\gamma$.

Зависимость адгезионного давления от расстояния между поверхностями $p_a(z)$ (1.3) показана на рис. 1.1 (кривая 1). При величинах зазора, меньших равновесного расстояния, т.е. $z < z_0$, давление p_a положительно, что соответствует отталкиванию поверхностей. При $z > z_0$ имеет место адгезионное притяжение поверхностей, и адгезионное давление p_a отрицательно; его абсолютная величина достигает максимума при некоторой величине зазора, а при дальнейшем увеличении z стремится к нулю.

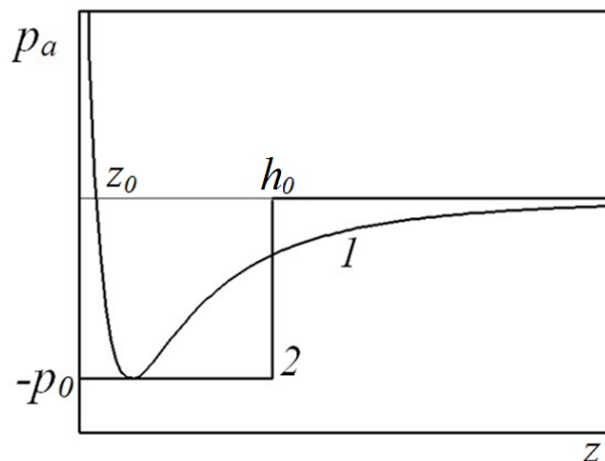


Рис.1.1. Зависимость силы молекулярного взаимодействия от величины зазора между двумя плоскими параллельными поверхностями.

Расчет силы межмолекулярного притяжения между двумя макроскопическими жесткими сферами, находящимися в контакте, частицы

которых взаимодействуют по закону вида (1.1), был впервые проведен Брэдли [98]:

$$F = 2\pi w_a R \quad (1.5)$$

где R - приведенный радиус двух взаимодействующих сфер: $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$, а также Дерягиным [36, 110], которым была получена формула для адгезионного притяжения двух жестких сфер, находящихся на расстоянии z друг от друга:

$$F(z) = 2\pi R U_a(z) \quad (1.6)$$

Соотношение (1.6) содержит потенциал адгезионного взаимодействия $U_a(z)$ между двумя плоскими параллельными поверхностями. Такой подход, не требующий суммирования по всем точкам двух тел, а учитывающий только взаимодействие между двумя противоположащими участками поверхности, в дальнейшем получил название аппроксимации Дерягина. В случае точечного контакта двух жестких сфер соотношения (1.5) и (1.6) совпадают.

В 1950-х годах Дерягиным и Абрикосовой были проведены первые эксперименты по определению межмолекулярных сил взаимодействия твердых тел [38]. Была измерена зависимость силы притяжения между поверхностями кварцевой пластинки и стеклянных линз различного радиуса в зависимости от расстояния между ними и исследована применимость соотношения (1.6) для описания этих зависимостей. Тейбор и Уинтертон [183] измерили силы межмолекулярного притяжения между двумя скрещенными под углом 90 градусов стеклянными цилиндрами, покрытыми слюдяной оболочкой, в зависимости от расстояния между ними.

1.2. Адгезионное взаимодействие гладких упругих тел

Контактная задача Герца в классической постановке описывает взаимодействие двух упругих тел и учитывает только сжимающие

напряжения внутри области контакта. При этом распределение контактных давлений имеет вид «колокола» - достигает максимума в центре и равно нулю по краям (рис.1.2, а). Для случая контакта двух упругих сфер с приведенным радиусом R и приведенным модулем упругости E^* , распределение герцевского контактного давления имеет вид [11, 41]

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (1.7)$$

где $p_0 = 2aE^* / (\pi R)$, a - радиус площадки контакта.

В конце 1960-х годов было проведено экспериментальное определение площадки контакта между двумя резиновыми сферами при малых нагрузках [142]. В этих опытах было показано, что площадка контакта существует при нулевой внешней нагрузке, а при малых нагрузках ее величина превосходит величину площадки контакта, предсказанную теорией Герца. Эти и другие экспериментальные результаты показали, что адгезионные силы не только действуют между поверхностями макроскопических твердых тел, но и заметно влияют на их контактное деформирование при малых нагрузках. Таким образом, возникла необходимость в построении новых моделей контактного взаимодействия, которые принимают во внимание адгезионное притяжение.

1.2.1. Упрощенные модели

В 1971 г. Джонсон, Кендалл и Робертс предложили модель контактного взаимодействия для двух осесимметричных упругих тел с учетом адгезии [41, 142]. Эта модель, получившая название модели или теории ДКР, основана на расчете баланса энергии с учетом изменения как упругой энергии при контактном деформировании взаимодействующих тел, так и их поверхностной энергии при изменении площади контакта. Предполагается,

что межмолекулярные силы действуют внутри области контакта, распределение контактного давления при этом имеет вид [41]:

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} + p'_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} \quad (1.8)$$

Первое слагаемое (1.8) представляет собой герцевское распределение давлений в осесимметричном контакте упругих тел (1.6), т.е. соответствует силам отталкивания в контакте. Второе слагаемое соответствует адгезионным (притягивающим) силам, при этом величина p'_0 является отрицательной и определяется из условия баланса энергии при изменении радиуса площадки контакта. Распределение контактного давления, соответствующее модели ДКР (1.8), схематично показано на рис. 1.2, б.

Примерно в то же время Дерягиным, Муллером и Топоровым была предложена другая модель контактного взаимодействия с учетом адгезии, которая получила название ДМТ [40, 111]. Согласно этой модели, межмолекулярные силы действуют в некоторой области, окружающей область контакта поверхностей, и их величина зависит от величины зазора между поверхностями в соответствии с соотношением (1.3). При этом внутри области контакта распределение давлений совпадает с герцевским (1.7). Распределение давления, соответствующее случаю ДМТ, показано на рис. 1.2, в. Как и ДКР, модель ДМТ представляет собой обобщение герцевской модели осесимметричного контакта на случай присутствия адгезионных сил.

Как было показано Тейбором [184], обе упрощенные модели адекватно описывают адгезионный контакт в двух различных предельных случаях.

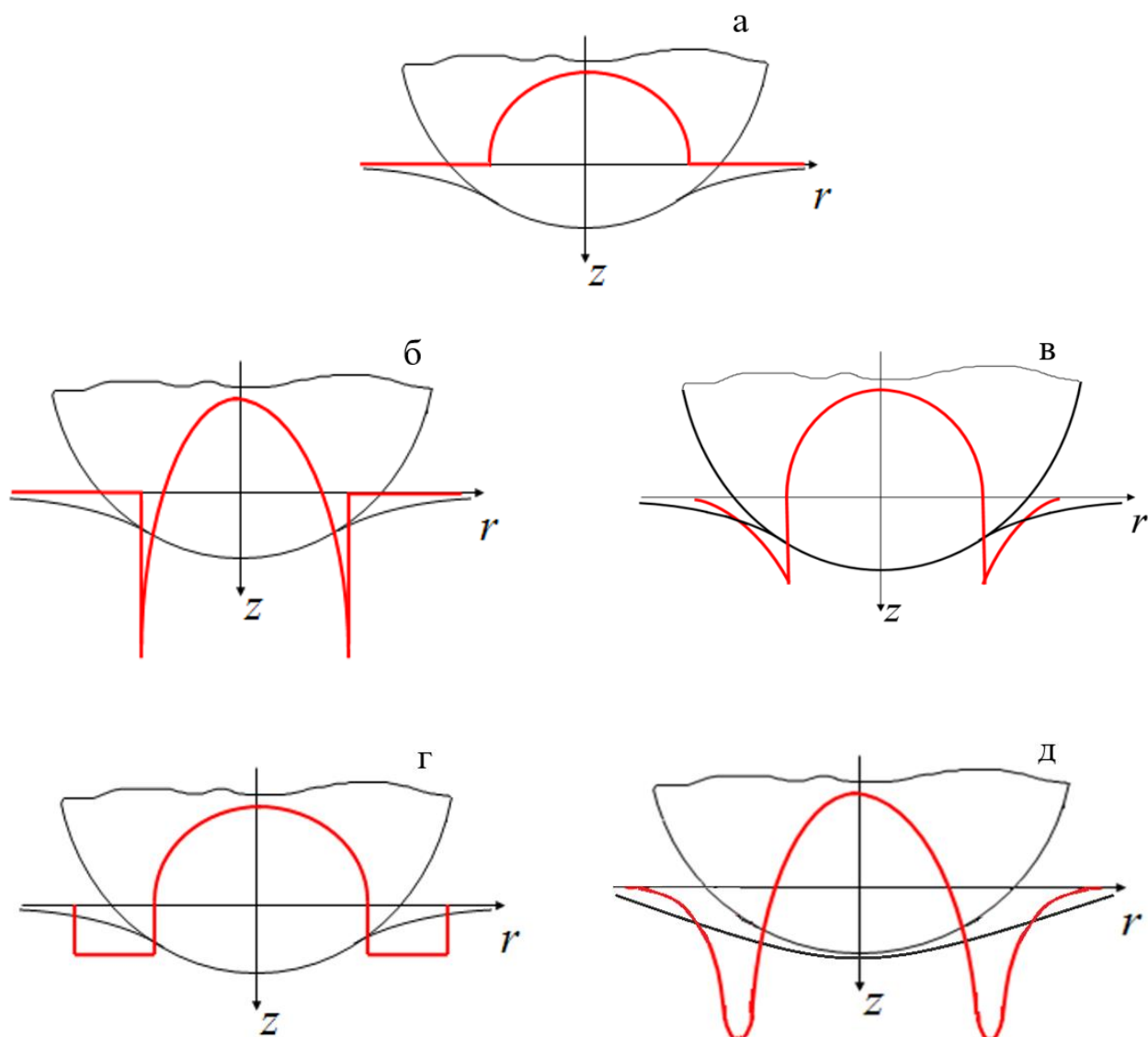


Рис. 1.2. Схемы контакта штампа с упругим полупространством для моделей Герца (а), ДКР (б), ДМТ (в), Можи-Дагдейла (г) и для самосогласованного подхода, при котором поверхности не соприкасаются (д).

Тейбор ввел параметр, связывающий между собой упругие и поверхностные свойства и приведенный радиус взаимодействующих сфер:

$$\mu_T = \left(\frac{R w_a^2}{E^* z_0^3} \right)^{1/3} \quad (1.9)$$

При $\mu_T \ll 1$ (относительно твердые шары малых радиусов с низкой поверхностной энергией) применима теория ДМТ, а при $\mu_T \gg 1$ (мягкие

материалы, большие значения радиуса и поверхностной энергии) – теория ДКР.

В дальнейшем в работах Бородича [91, 92] модель ДКР обобщена на случай, когда форма штампа описывается степенной функцией. Модель ДКР для случая анизотропных тел представлена в [85, 93]. Предложена приближенная версия модели ДКР для эллиптического контакта [141]. Вдавливание конуса в упругое полупространство с учетом полного сцепления изучено в [5]. В работах [45, 49] на основе подхода, аналогичного модели ДКР, разработан вариационный метод решения задач об адгезионном контакте упругих тел.

Преимуществом упрощенных моделей ДКР и ДМТ является простота соотношений, а недостатком – то, что их невозможно использовать во всем диапазоне параметров упругости и адгезии.

1.2.2. Самосогласованный подход

Для более строгого решения задач об адгезионном контакте с учетом упругих деформаций контактирующих тел был развит самосогласованный подход, в основе которого лежит расчет упругих деформаций границ контактирующих тел и, соответственно, формы зазора между ними, таким образом, чтобы обеспечить равенство деформационных и молекулярных сил на этих границах. Одним из направлений развития самосогласованного метода для решения задач об адгезионном взаимодействии деформируемых тел стал подход, предложенный Дерягиным, в котором предполагается наличие области контакта между взаимодействующими телами. При этом внутри области контакта задаются граничные условия на перемещения, а вне этой области – граничные условия на нормальное напряжение, которые определяются потенциалом адгезионного взаимодействия.

Первое численное решение задачи об адгезионном взаимодействии упругих тел в рамках самосогласованного подхода для потенциала Леннард-

Джонса было получено в 1980 году Муллером, Ющенко и Дерягиным [166]. Авторы этой работы использовали параметр, аналогичный параметру Тейбора (1.9) и подтвердили вычислениями непрерывное стремление полученного решения к решениям ДМТ и ДКР при стремлении этого параметра к нулю и к бесконечности, соответственно. Было показано [167], что эти два предельных случая не зависят от точной формы потенциала адгезионного взаимодействия. Численное решение этой же задачи с большим количеством расчетов получено в [84], а также позже в [113,114].

На основе самосогласованного подхода были развиты и аналитические модели, использующие аппроксимации адгезионного давления, действующего вне области контакта поверхностей, заданными функциями. В частности, построены решения для адгезионного контакта сферы с упругим полупространством для случаев, когда зависимость адгезионного давления от зазора аппроксимируется линейной и экспоненциальной функциями [89]. Предложено решение для адгезионного контакта упругих сфер, построенное как сумма двух герцевских решений [125].

Среди таких моделей особого внимания заслуживает модель, предложенная в 1992 г. Можи [151] с использованием известного в механике разрушения приближения Дагдейла. В этой модели сила адгезионного притяжения поверхностей на единицу площади описывается соотношением (рис. 1.1., кривая 2):

$$p_a(z) = \begin{cases} -p_0, & 0 < z \leq h_0 \\ 0, & z > h_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Поскольку эта модель развита в рамках самосогласованного подхода, распределение контактного давления и радиус площадки контакта в ней отличаются от герцевских: на них оказывают влияние адгезионные силы, действующие вне области контакта. При этом эпюра контактного давления имеет вид, схематично показанный на рис. 1.2, г. Удельная работа адгезии w_a определяется в этом случае как

$$w_a = \int_0^{\infty} p_a(z) dz = p_0 h_0 \quad (1.11)$$

Для случая контакта сферического штампа с упругим полупространством Можи получил аналитическое решение [151] и показал, что, в отличие от классических моделей ДКР и ДМТ, это решение применимо для тел любой жесткости и при произвольных параметрах, характеризующих силы адгезии. Для расчетов он использовал параметризацию, в которой решение зависит только от двух параметров – параметра нагрузки и параметра адгезии λ , который аналогичен параметру Тейбора μ_T (1.9). В работе [139] была предложена «карта адгезии», с помощью которой можно выбрать подходящую модель для описания взаимодействия упругих сфер при заданных величинах параметров нагрузки и адгезии: ДКР, ДМТ или Можи-Дагдейла, а также модель Герца для случаев, когда влияние адгезии на контактные характеристики несущественно.

Описанные выше классические теории адгезии ДКР, ДМТ, а также модель Можи-Дагдейла широко применяются для экспериментального изучения различных явлений, связанных с молекулярной адгезией. В частности, на основе этих моделей предложен метод экспериментального определения удельной работы адгезии и контактного модуля упругости [94, 95]. Была предложена модель адгезионного взаимодействия на основе анализа экспериментальных данных зависимости силы взаимодействия от расстояния между телами [48].

Обобщение модели Можи-Дагдейла на случай штампа, форма которого описывается степенной функцией произвольной четной степени, было построено Горячевой и Маховской [24], позже на его основе было получено решение для кусочно-постоянной аппроксимации адгезионного потенциала произвольной формы [25, 27, 61]. Решение было получено как для случая непосредственного контакта поверхностей, так и для случая разделенных поверхностей, которые притягиваются посредством адгезионных сил, что позволило проанализировать контактные характеристики во всем диапазоне

внешней нагрузки. Женгом и др. [192, 193] модель Можи-Дагдейла была обобщена на случай взаимодействия с упругим полупространством осесимметричного штампа, форма которого описывается функцией произвольной степени. В работе [108] модель Можи-Дагдейла использовалась для описания адгезии при взаимодействии двух конформных поверхностей, содержащих канавку.

Другой вариант самосогласованного подхода основан на допущении, что зазор между контактирующими телами существует всегда, т.е., поверхности не соприкасаются (рис.1.2, д), при этом в качестве граничного условия задается давление вида (1.3), которое может определять как притяжение, так и отталкивание поверхностей в зависимости от величины зазора [131]. Задача в такой постановке впервые была решена численно Гринвудом [124]. Подобный подход использовался авторами работы [136] для расчета ассиметричного адгезионного контакта, а также Солдатенковым [70] для решения задачи об адгезионном контакте методом итераций. Им было получено решение без использования аппроксимации Дерягина, в котором учитывалось взаимодействие не только молекул, находящихся на границе взаимодействующих тел, но и действие молекул в подповерхностном слое [71], включая случай адгезионного контакта тел с покрытиями [72].

Все перечисленные выше модели, построенные для описания адгезионного взаимодействия упругих тел, используют в качестве входных параметров характеристики их адгезионного взаимодействия, в частности, удельную работу адгезии w_a , которая определяется величинами поверхностной энергии взаимодействующих тел (1.4). Для определения поверхностной энергии твердых тел развиваются теоретические и экспериментальные методы [12, 57]. Метод вычисления поверхностной энергии на основе термодинамических представлений с учетом переходного слоя, формирующегося в адгезионном контакте, предложен в работах Шоркина, Фроленковой и др. [80, 81].

В целом интерес и количество исследований в области поверхностных явлений возрастает по мере миниатюризации техники. Одновременно с исследованием адгезионного взаимодействия поверхностей развиваются и другие направления исследований поверхностных явлений. В частности, эффекты, связанные с фазовыми и химическими превращениями на границе раздела деформируемых сред изучаются в работах Фрейдина [56].

1.2.3. Капиллярная адгезия

В жидкостях межмолекулярные силы приводят к таким известным поверхностным явлениям, как смачивание, образование менисков и капель. Пленки жидкости, покрывающие поверхности твердых тел, под действием поверхностных сил могут образовывать мениски, стягивающие между собой взаимодействующие поверхности; это приводит к появлению капиллярной адгезии [134].

Исследование капиллярной адгезии имеет большое количество практических приложений, в частности, в механике порошковых материалов [44], биологических систем [86, 109, 130], при взаимодействии диска с головкой считывающего устройства [147, 185], в микромеханических системах [149].

Согласно формуле Лапласа, давление под искривленной поверхностью жидкости в мениске меньше атмосферного на величину

$$p_0 = \gamma_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.12)$$

где γ_0 - поверхностное натяжение жидкости, а R_1, R_2 — радиусы кривизны мениска в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Эти радиусы определяются геометрией взаимодействующих поверхностей, расстоянием между ними, а также краевыми углами смачивания θ_1, θ_2 .

Пусть две упругие сферы контактируют по области $r \leq a$, а в кольцевой области $a \leq r \leq b$ находится мениск (рис. 1.3). Между сферами действуют две капиллярные силы: сила, связанная с поверхностным натяжением пленки жидкости на внешней границе мениска $r = b$:

$$F_s = 2\pi b\gamma_0(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \quad (1.13)$$

и сила, вызванная действием лапласовского давления (1.12) в кольцевой области, занятой мениском $a \leq r \leq b$:

$$F_L = \pi(b^2 - a^2)p_0 \quad (1.14)$$

Полная сила взаимодействия между сферами является суммой капиллярных сил притяжения (1.13), (1.14) и упругой силы отталкивания, возникающей в области контакта, при этом размеры областей контакта и мениска, a и b , определяются в результате решения контактной задачи с учетом действия сил капиллярной адгезии. Такая постановка задачи представляет собой аналог самосогласованного подхода для случая капиллярной адгезии. При этом необходимо дополнительно рассчитать радиусы кривизны мениска и его объем с учетом того, что эти величины зависят от деформации взаимодействующих тел, а на напряженно-деформированное состояние, в свою очередь, влияет капиллярное давление в мениске. Решить такую задачу в общем случае аналитически невозможно, поэтому используются модели, основанные на тех или иных предположениях.

Упрощенные модели капиллярной адгезии между жесткими телами предлагались в [117, 150, 174]. Расчет силы капиллярного притяжения между двумя жесткими сферами в зависимости от расстояния между ними проводился в [155, 169, 177] с учетом точной геометрии задачи, включая расчет объема жидкости в мениске и условие его сохранения при изменении расстояния между телами.

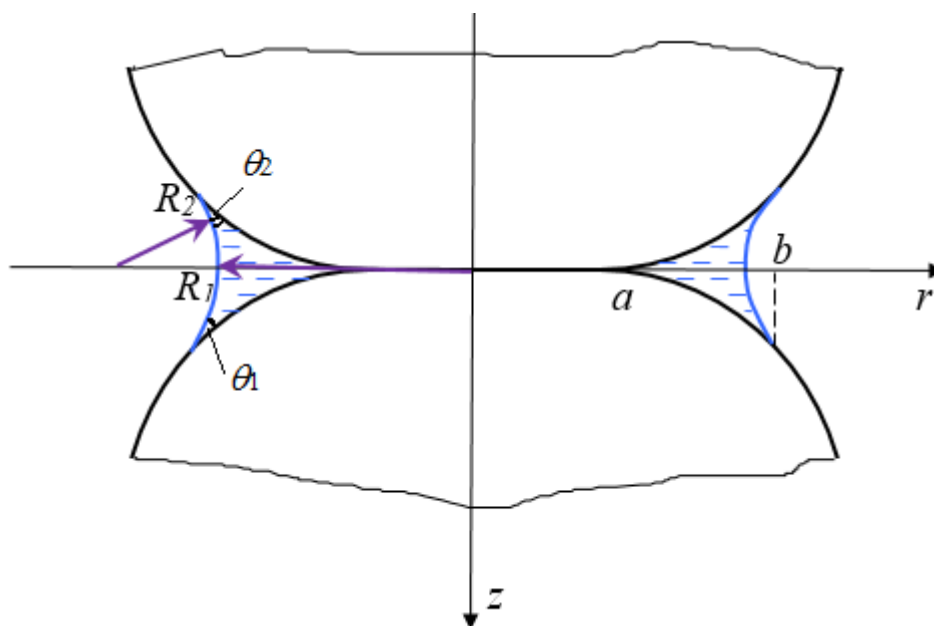


Рис. 1.3. Схема взаимодействия двух сфер при наличии капиллярной адгезии.

В работе Ужеговой, Свисткова и Гаришина [75] предложена модель взаимодействия зонда атомно-силового микроскопа с пленкой жидкости, покрывающей поверхность образца, принимающая во внимание действие гравитационных сил в жидкой среде.

Расчет сил капиллярной адгезии между шероховатыми поверхностями был проведен Чижиком [77] с учетом упругости выступов в предположении, что давление жидкости не влияет на изменение их формы. В работе Можи и Готье-Мануэля [152] решение, полученное для задачи об адгезии сухих поверхностей, обобщено на случай взаимодействия сферического штампа с упругим полупространством при наличии мениска жидкости, при этом не учитывалось сохранение объема жидкости в мениске при нагружении штампа. Это решение было получено в предположении полного смачивания рассматриваемых поверхностей, т.е. при нулевом значении силы поверхностного натяжения (1.13). Решение контактной задачи с учетом капиллярной адгезии при заданном количестве жидкости в мениске было построено Горячевой и Маховской [23, 148] в предположении полного смачивания для случая штампа, форма которого описывается степенной функцией четной степени. В работе [112] контактная задача при наличии

мениска рассматривалась в плоской постановке, сохранение объема жидкости не учитывалось, но при этом более строго учитывалась форма мениска и принималась во внимание сила натяжения жидкости (1.13). Был построен ряд численных решений задач о взаимодействии упругих тел при наличии мениска (например, [99, 190]).

1.3. Моделирование адгезионного взаимодействия шероховатых поверхностей

Поскольку силы адгезионного притяжения зависят от величины зазора между телами, очень важно при постановке контактных задач учитывать точную геометрию этого зазора, в частности, принимать во внимание микрошероховатость, которой обладает большинство реальных поверхностей.

1.3.1. Контакт шероховатых поверхностей без учета адгезии

Влиянию поверхностной шероховатости на контактные характеристики посвящено большое количество теоретических исследований. В общем случае шероховатой поверхности произвольной формы контактные характеристики определяются путем решения смешанной задачи для системы областей контакта с неизвестными границами, количество которых тоже неизвестно. Решение такой задачи возможно лишь численными методами и является очень сложным, поэтому для определения контактных характеристик шероховатых поверхностей разрабатывались упрощенные модели, в которых реальная шероховатость заменяется некоторой модельной поверхностью с определенными стандартными параметрами микрогеометрии: средний радиус кривизны вершин неровностей, их средний наклон, распределение по высоте и т.д.

Первую модель чисто упругого контакта шероховатых тел разработал Журавлев [43], который рассматривал линейное распределение высот вершин неровностей. Арчард [83] предложил модель множественного контакта вершин неровностей, в которой каждая вершина имеет сферическую форму. Этот подход был развит в работах Гринвуда и Вильямсона [127] и Демкина [35], в которых принято гауссовское распределение высот. К недостаткам этих моделей относится предположение, что внедрение каждой неровности определяется действующей на нее нагрузкой, т.е., не учитывается взаимное влияние неровностей, которое может оказаться существенным при высоких плотностях контакта. Пространственные задачи для системы штампов цилиндрической и сферической формы с учетом их взаимного влияния рассмотрены в работах Горячевой и Добычина [21], что позволило исследовать влияние плотности контакта на контактные характеристики.

Другой подход к моделированию шероховатой поверхности состоит в решении периодических контактных задач. Этот подход позволяет получить решение задачи в замкнутом виде и проанализировать влияние параметров шероховатости (формы выступов, их высотного распределения, плотности расположения выступов) на контактные характеристики. Основы этого подхода заложены в работах Штаермана [78] и Вестергаарда [187], в которых исследована плоская периодическая контактная задача, а также Кузнецова и Гороховского [53, 54], рассмотревших решение периодической контактной задачи с учетом сил трения и давших анализ напряженно-деформированного состояния приповерхностных слоев. В [41] рассмотрена пространственная периодическая задача для поверхности, имеющей синусоидальную волнистость в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Решение этих задач позволило исследовать эффект взаимного влияния отдельных пятен контакта.

Получают развитие также подходы к решению контактных задач для шероховатых тел с заданной номинальной геометрией на макроуровне. Один из возможных подходов состоит в том, чтобы заменить действие

поверхностной шероховатости влиянием поверхностного слоя, сцепленного с основанием, с заданной податливостью. Иными словами, поверхностная шероховатость рассматривается как поверхностный слой с механическими характеристиками, отличными от объемных свойств материала тел [2, 8, 15, 51, 67, 96, 119]. Получены условия [15, 119], при которых для определения распределения контактных давлений на макроуровне (контакт макротел с известной макроформой и заданными параметрами поверхностной шероховатости) можно использовать метод сведения задачи к решению интегрального уравнения, используемый для исследования контакта тел с идеально гладкими поверхностями. При этом податливость поверхностного слоя описывается функцией дополнительного смещения, зависящей только от параметров микрогеометрии и номинального давления в окрестности рассматриваемой точки.

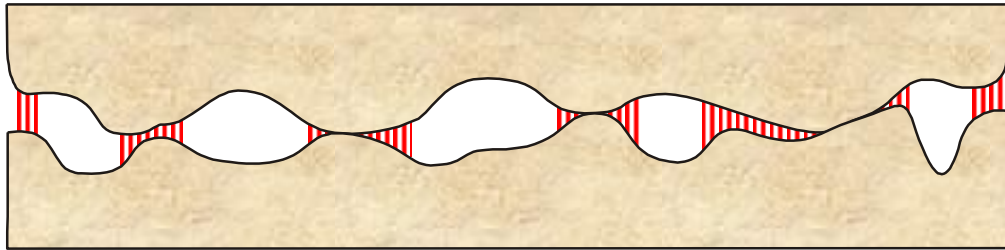


Рис. 1.4. Схема контактирования шероховатых поверхностей при наличии адгезии.

Пространственная периодическая контактная задача для системы инденторов произвольной формы и упругого полупространства рассмотрена в работе Горячевой [16]. Для решения этой задачи предложен метод, основанный на замене действия выступов номинальным давлением вне некоторой области (метод локализации). Показано, что этот метод эффективен для анализа влияния параметров шероховатости на контактные характеристики и напряженно-деформированное состояние взаимодействующих тел.

1.3.2. Адгезия в контакте шероховатых поверхностей

Когда шероховатые поверхности контактируют при наличии адгезии, вокруг каждого пятна контакта имеется область адгезионного взаимодействия (рис.1.4). Для решения контактных задач для шероховатых тел с учетом адгезии необходимо комбинировать модели, разработанные для решения адгезионного контакта гладких тел, с методами, используемыми для решения задач о шероховатом контакте.

Модели контакта шероховатых упругих тел с учетом адгезии были разработаны Джонсоном для экспоненциального распределения высот [137] и Фуллером и Тейбором для гауссовского распределения [116]; эти модели основаны на использовании приближенной модели ДКР для каждой неровности шероховатого тела. Причина, почему шероховатые поверхности могут иметь незначительную адгезию, хотя отдельные вершины неровностей слипаются, была объяснена Джонсоном, Фуллером и Тейбором: это связано с большим разбросом неровностей по высоте. При взаимодействии таких поверхностей вступление более высоких выступов в контакт приводит к возникновению упругих сил отталкивания, по сравнению с которыми адгезионные силы притяжения оказываются незначительны.

Обобщение модели ДМТ на случай шероховатого тела с заданным распределением высот неровностей дано в книге Можи [153]. В работе Морроу [160] предложенный Фуллером и Тейбором метод описания шероховатого контакта использован совместно с моделью адгезии Можи-Дагдейла, решение также получено в предельных случаях при стремлении параметра Тейбора (1.9) к нулю и бесконечности, соответственно. Шероховатость на разных масштабах длины рассматривалась с использованием фрактального представления Саху, Перссоном и др. [170, 171, 180], а также Поповым [173] с использованием метода сокращения размерности. Перссоном была представлена модель капиллярной адгезии

между шероховатыми поверхностями [172]. Во всех перечисленных работах не учитывалось влияние поверхностных неровностей друг на друга.

Аналитическое решение плоской контактной задачи о взаимодействии волнистой поверхности с периодическим рельефом и упругого полупространства было получено в [132] с применением модели Можидагдейла и с учетом взаимного влияния поверхностных неровностей. Решения аналогичной плоской задачи об адгезионном контакте для волнистой поверхности были построены численно Адамсом и Ву [82, 188] для потенциалов Можидагдейла и Леннарда-Джонса, соответственно. Плоская задача об адгезионном контакте поверхностей, шероховатость которых представлена периодической системой канавок, а адгезия описывается моделью Можидагдейла, была решена Чумаком [107].

Взаимное влияние отдельных пятен контакта для трехмерной контактной задачи об адгезионном взаимодействии упругого полупространства с периодической системой неровностей было учтено Маховской [58] на основе использования метода локализации [16], решение было получено для случаев как молекулярной, так и капиллярной адгезии.

В последнее десятилетие развиваются также подходы к исследованию адгезии шероховатых упругих тел с достаточно произвольной номинальной геометрией [123, 146, 153, 175, 176]. Предложена модель [105], в которой гауссовское распределение высот неровностей применяется для расчета зазора между поверхностями в потенциале Леннарда-Джонса; эта модель не учитывает податливость неровностей.

Модели адгезии упругих тел с регулярной шероховатостью, позволяющие рассматривать контакт тел с произвольной номинальной геометрией, были построены Галановым и др. [9, 118]. В этих моделях шероховатость тел моделируется нелинейным слоем Винклера-Фусса, который воспринимает не только сжатие, но и растяжение. Проведен расчет упругого адгезионного контакта для тел различной номинальной геометрии, при этом податливость поверхностного слоя рассчитывались на основании

решения задачи множественного контакта с учетом сил молекулярного притяжения поверхностей и взаимного влияния неровностей [10, 62].

1.4. Диссипация энергии в адгезионном контакте упругих тел

1.4.1. Гистерезис при сближении и разведении поверхностей упругих тел

Экспериментальные зависимости между приложенной нормальной силой и расстоянием между поверхностями, полученные с помощью атомно-силового микроскопа [135, 156] и адгезиометра [34, 161], свидетельствуют о том, что в адгезионном контакте имеет место гистерезис, который наблюдается даже для очень гладких и однородных поверхностей, так что его нельзя объяснить смятием поверхностной шероховатости или химической неоднородностью. Примеры полученных зависимостей силы от расстояния между телами приведены на рис.1.5, где кривые 1 соответствуют подводу поверхностей, 2 – отводу.

Природу этого гистерезиса связывают с различными механизмами, в частности, с изменением ориентации поверхностных молекул, приводящим к изменению поверхностной энергии в результате контакта тел [103, 104].

Результаты моделирования подтверждают возможность гистерезиса в адгезионном контакте упругих тел. Гринвуд [14] впервые обратил внимание на неоднозначность полученных численным методом зависимостей нагрузки от сближения двух упругих сфер, взаимодействующих посредством потенциала Леннард-Джонса. Он указал, что при подводе друг к другу двух упругих сфер должно происходить скачкообразное вступление в контакт, а при отводе – скачкообразный выход из контакта, при этом кривые, по которым происходит подвод и отвод, могут отличаться – т.е. имеет место гистерезис.

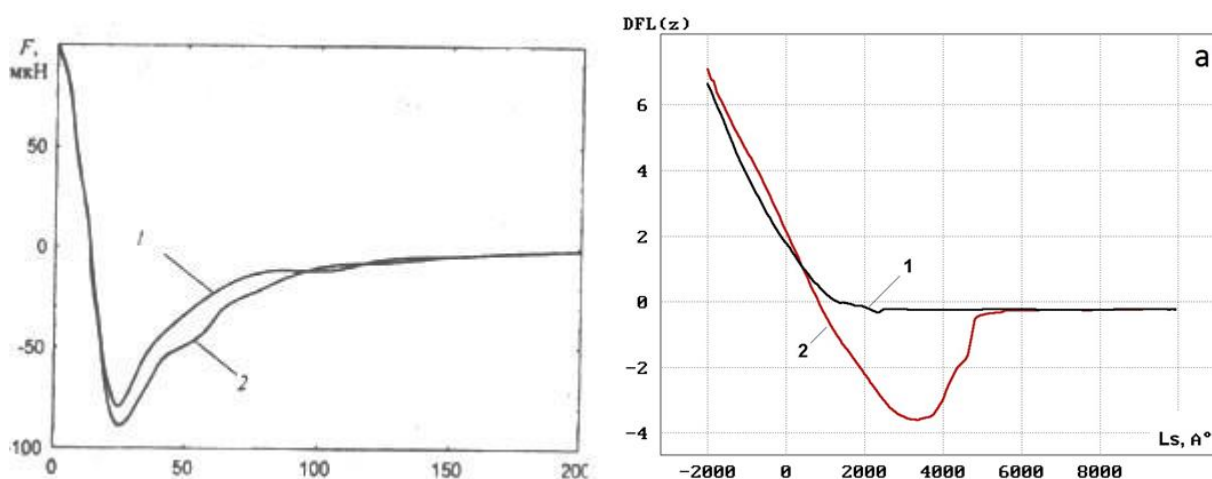


Рис. 1.5. Экспериментальные кривые сила-расстояние для кремниевого образца, полученные с помощью контактного адгезиометра [34] и для резинового образца, полученные на АСМ [64].

Петля гистерезиса в зависимости нагрузки от сближения, полученная Гринвудом, приведена на рис. 1.6. Когда тела отдаляются друг от друга, взаимодействие идет по нижней ветви, и происходит скачок из точки В в точку В'. При сближении тел взаимодействие происходит по верхней ветви, и скачок имеет место из точки Е в точку Е'. Если устройство имеет конечную жесткость, то скачки будут происходить из точки D в точку D' и из точки С в точку С', соответственно. Такой гистерезис имеет место, если сближение и разведение тел производить при контролируемом расстоянии между ними. В опыте, в котором контролируется нормальная нагрузка, при разведении тел разрыв контакта происходит в точке минимума нагрузки – точке А. Соответствующая точке А величина нагрузки называется силой отрыва.

Расчет силы отрыва. Сила отрыва (иногда ее называют силой адгезии) - это важная характеристика поверхностного взаимодействия, которую можно получить экспериментально. Классические упрощенные теории адгезии ДКР и ДМТ дают простые соотношения для силы отрыва, зависящие только от приведенного радиуса и поверхностной энергии взаимодействующих тел, и не зависящие от их упругих характеристик, что

является следствием выбранной формы тел (описываемой квадратичной функцией) [88] и упрощенным характером используемых моделей.

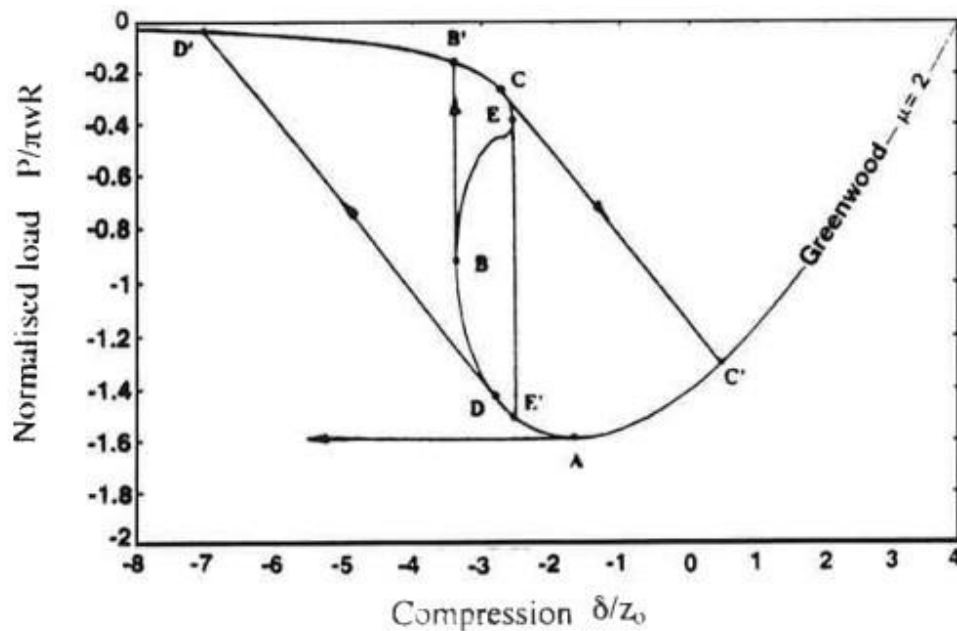


Рис.1.6. Зависимость нагрузки от сближения при адгезионном взаимодействии упругих сфер, полученная Гринвудом [14, 140].

Сила отрыва в рамках модели Можи-Дагдейла для произвольного значения параметра адгезии была рассчитана в [151]. В [140] расчет силы отрыва был проведен для случая адгезионного взаимодействия шероховатых поверхностей, содержащих одинаковые неровности со стандартным распределением высот, взаимодействующим по упрощенным моделям ДКР и ДМТ; при этом взаимное влияние неровностей не учитывалось. В [24] расчет силы отрыва проведен для модели Можи-Дагдейла для тел различной формы, описываемой степенной функцией четной степени.

Расчет гистерезисных потерь. Следует отметить, что, хотя упрощенные модели ДКР и ДМТ позволяют получить соотношения для силы отрыва, они не описывают гистерезиса при адгезионном подводе и отводе тел, т.к. кривые зависимостей нагрузки от сближения в этих моделях

являются однозначными. Модель Можи-Дагдейла позволяет получить неоднозначные кривые и петлю гистерезиса, если дополнить эту модель соотношениями для случая отсутствия контакта между поверхностями [24]. Площадь петли гистерезиса, величина которой равна диссипации энергии при сближении и разведении поверхностей, была рассчитана в работе Горячевой и Маховской [24], включая случай капиллярной адгезии.

Оценка диссипации энергии при сближении и удалении упругих тел на основе расчета интенсивности выделения энергии при разрушении была проведена Женгом [191] для модели адгезии Можи-Дагдейла.

1.4.2. Моделирование адгезионного механизма силы трения скольжения

Согласно молекулярно-механической теории трения, развитой в работах Дерягина, Бодена и Тейбора и Крагельского [6, 37, 50], при фрикционном взаимодействии твердых тел проявляются два основных механизма диссипации энергии и возникают две составляющие силы трения. Первую из них называют адгезионной; она связана с образованием и разрывом молекулярных связей при взаимном перемещении поверхностей. Другую составляющую силы трения называют механической или деформационной. Адгезионная составляющая силы трения, несмотря на свою межмолекулярную природу, может достигать высоких значений при трении твердых тел, в частности, полимеров [162, 163]. При трении на микро- и наномасштабных уровнях нагрузки и шероховатости адгезионная составляющая силы трения становится доминирующей; в этом случае процессы трения и изнашивания определяется молекулярными силами [164, 165]

Согласно классическому подходу в трибологии [6, 50], адгезионная составляющая силы трения представлялась как сила, необходимая для пластического сдвига микроконтактов и зависящая от фактической площади

контакта. Этот подход к моделированию адгезионной силы трения развивался в работах [106, 144, 181].

Развиваются модели адгезионной составляющей силы трения, основанные на рассмотрении физики поверхностных процессов (см., например, [7, 74, 115]), но без учета контактной деформации. Для случая капиллярной адгезии модель расчета силы трения, возникающей за счет образования и разрыва менисков при скольжении жестких волнистых поверхностей, предложена в [76].

В ряде экспериментальных работ было проведено измерение адгезионного гистерезиса в цикле сближение – разведение поверхностей и сравнение этой величины с величиной силы трения скольжения для той же пары поверхностей [102, 179, 189]. Оказалось, что между адгезионным гистерезисом и силой трения наблюдается корреляция.

Еще один подход к описанию адгезионной составляющей силы трения основан на представлении движущегося адгезионного контакта как двух трещин – открывающейся и закрывающейся, при этом расчет силы трения основан на вычислении энергии, затраченной на разрушение [138]. В рамках этого подхода были предложены модели, связывающие адгезионную силу трения с адгезионным гистерезисом для упругих тел: Баркинзом для случая скольжения цилиндра [87] и Карбоне и Мангиаларди для периодической волнистой поверхности [100]. В этих моделях адгезионный гистерезис учитывается за счет разницы в значениях поверхностной энергии перед движущейся зоной контакта и за ней.

Другой подход к учету адгезионного гистерезиса был предложен в работе Горячевой и Маховской в [121], где была представлена модель для расчета адгезионной составляющей силы трения скольжения на основе расчета диссипации энергии при образовании и разрушении адгезионных контактов поверхностных выступов при относительном скольжении двух упругих шероховатых поверхностей. В этом подходе существенно то, что обе поверхности являются шероховатыми, так что в процессе скольжения

происходит циклическое образование и разрушение элементарных контактов между выступами.

1.4.3. Моделирование адгезионного сопротивления при качении упругих тел

Теоретически и экспериментально установлено, что основными источниками сопротивления качению являются: относительное проскальзывание поверхностей в области контакта, возникающее вследствие разницы в кривизнах и механических свойствах контактирующих тел [66, 178]; несовершенная упругость реальных материалов [182]; силы молекулярного сцепления [186].

Молекулярное взаимодействие обкатываемых поверхностей является источником возникновения адгезионной составляющей силы трения. Расчетно-экспериментальная оценка этой составляющей силы трения качения приводится в работе Томлинсона [186] и базируется на предположении, что каждое сближение и удаление молекул сопровождается потерей энергии. Дерягиным [39] было дано объяснение сопротивления перекатыванию притяжением расходящихся участков поверхностей, обусловленным возникающими на них разноименными электрическими зарядами.

В работе [26] в основу оценки адгезионной составляющей силы трения положен механизм диссипации энергии, имеющей место при сближении и удалении неровностей контактирующих шероховатых тел в процессе перекатывания одного тела по поверхности другого.

1.5. Моделирование адгезии в контакте скольжения вязкоупругих тел

1.5.1. Контактные задачи о скольжении вязкоупругих тел с постоянной скоростью

Другая составляющая силы трения, согласно молекулярно-механической теории трения, называется деформационной. При относительном скольжении шероховатых деформируемых тел несовершенная упругость материалов приводит к гистерезисным потерям, которые ведут к возникновению деформационной силы трения. Существование деформационной силы трения было показано в опытах Тейбора и Гроша на резиновых образцах [126, 128, 182]. Результаты этих, а также многих других экспериментальных работ говорят о том, что наряду с адгезией гистерезисные потери, происходящие в приповерхностных слоях взаимодействующих тел, вносят существенный вклад в силу трения.

Для предсказания деформационной силы трения удобно пользоваться моделями выступа заданной формы или периодической системы неровностей, скользящих по поверхности вязкоупругого полупространства, и рассматривать контактные задачи в квазистатической постановке; при этом полагается, что скорость движения достаточно мала (по сравнению со скоростью распространения упругих волн).

Метод решения задачи о движении с постоянной скоростью нагрузки по границе вязкоупругого основания был разработан Работновым [68] и использован при решении задачи о движущемся штампе по границе вязкоупругой полуплоскости.

Первые решения контактных задач о качении с постоянной скоростью цилиндра по границе вязкоупругого тела получены в работах Хантера, Мэй, Морланда, Ивановой [46, 133, 154, 159]. Задача о качении вязкоупругого цилиндра по полупространству из того же материала была рассмотрена

Горячевой [14, 18] с учетом существования в области контакта зон сцепления и скольжения, включая случай чистого скольжения цилиндра. При этом были получены аналитические выражения для нормальных давлений, действующих на площадке контакта и установлен их несимметричный характер. В результате несимметрии распределения давления $p(x)$, действующего на цилиндр со стороны упругого полупространства (рис. 1.7, а), возникает сила T сопротивления движению.

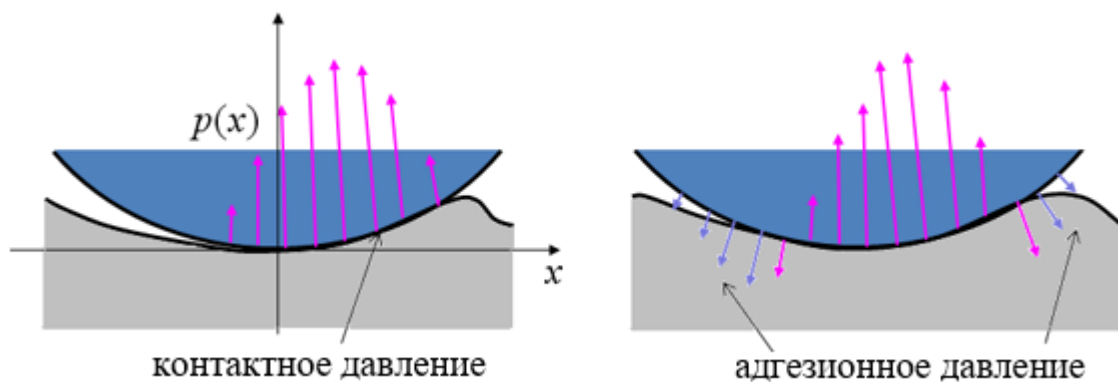


Рис. 1.7. Схема скольжения цилиндра по поверхности вязкоупругого полупространства без учета адгезии (а) и с учетом адгезии (б).

Рассчитать деформационную силу рения в этом случае можно путем интегрирования проекции на горизонтальную ось нормального давления $p(x)$ по области взаимодействия поверхностей:

$$T = \int p(x) \sin[\varphi(x)] dx \quad (1.15)$$

Результаты расчета для деформационной силы трения [18, 21] показали, в частности, что эта сила достигает максимума при некотором значении скорости и стремится к нулю при очень больших и очень малых скоростях скольжения.

Контактные задачи в трехмерной постановке были рассмотрены и решены Александровым, Горячевой, Шептуновым для скольжения отдельного сферического индентора [1] и периодической волнистой поверхности [79] по вязкоупругому полупространству. Ряд численных решений контактных задач о скольжении вязкоупругих тел был получен Насдала, Карбоне, Менга, Путиньяно и др. [101, 157, 168]. Трехмерная задача для одного и для двух скользящих штампов с учетом трения была решена в работах Горячевой, Степанова и Торской [30, 73].

Гистерезисные потери при трении могут иметь место в поверхностных слоях и пленках, покрывающих взаимодействующие тела. Для анализа взаимодействия поверхностей, покрытых тонкими твердыми слоями или пленками, используются решения контактных задач для слоистых сред. В работах Манжирова [3], Калкера и Браата [97, 143], Горячевой [19] решались контактные задачи для тел с вязкоупругими покрытиями, при этом свойства тонких вязкоупругих слоев описывались упрощенными одномерными моделями [52]. Одномерные модели также использовались Горячевой, Садеги и Маховской [22, 120] для моделирования свойств покрытий в контактных задачах о скольжении периодической системы штампов по двухслойному основанию.

С помощью одномерной модели стандартного вязкоупругого основания рядом авторов был проведен расчет контактных характеристик и деформационной составляющей силы трения в задачах о скольжении сферического индентора [63] (включая сравнение с экспериментальными результатами), периодической системы сферических инденторов [55] и периодической волнистой поверхности [65], а также для штампа с угловыми точками [69].

1.5.2. Учет адгезионного притяжения в задачах о скольжении вязкоупругих тел

Адгезионные силы, действующие в зазоре между поверхностями, могут оказывать существенное влияние на деформационную силу трения. Так, при скольжении индентора по вязкоупругому основанию силы адгезии, действующие вне области контакта, влияют на распределение контактного давления (рис. 1.7, б) и, соответственно, на величину деформационной силы трения (1.15).

Задача о скольжении цилиндра по вязкоупругому основанию с учетом сил адгезионного притяжения вблизи области контактного взаимодействия была рассмотрена Маховской [59] в плоской постановке, при этом для описания адгезии в рамках самосогласованного подхода использовалась модель Можи-Дагдейла (1.10)-(1.11). Было показано, в частности, что учет адгезионного взаимодействия поверхностей приводит к увеличению деформационной силы трения. Задачи о скольжении сферического индентора [20] и волнистой поверхности [28, 29, 60, 65, 122] по поверхности вязкоупругого тела при наличии адгезии решались с использованием одномерных моделей вязкоупругого основания, при этом в задаче для сферического индентора [20] учитывалась разница в значениях поверхностной энергии перед движущейся зоной контакта и за ней.

Глава 2. АДГЕЗИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

В этой главе представлены модели адгезионного взаимодействия индентора и упругого полупространства, нагруженных нормальной внешней силой. Рассмотрены случаи капиллярной адгезии, вызванной наличием в зазоре мениска жидкости, и адгезии сухих поверхностей, связанной с межмолекулярным притяжением.

2.1. Общий подход к решению задач об адгезионном взаимодействии упругих тел

2.1.1. Постановка задачи

Рассматривается взаимодействие осесимметричного упругого индентора 1 с упругим полупространством 2. (рис 2.1). Ось z цилиндрической системы координат (r, φ, z) направлена вглубь упругого полупространства, плоскость $z = 0$ совпадает с недеформированной поверхностью полупространства. На индентор действует внешняя нормальная сила q .

Форма индентора описывается степенной функцией $f(r) = Ar^s$ произвольной степени $s \geq 1$. Предполагается, что трение между индентором и полупространством отсутствует, т.е. тангенциальные напряжения и перемещения на границе $z = 0$ равны нулю. Поскольку индентор имеет осесимметричную форму, нормальные упругие перемещения границ индентора u_{z1} и полупространства u_{z2} , а также контактное давление p при $z = 0$ являются функциями только радиальной координаты r .

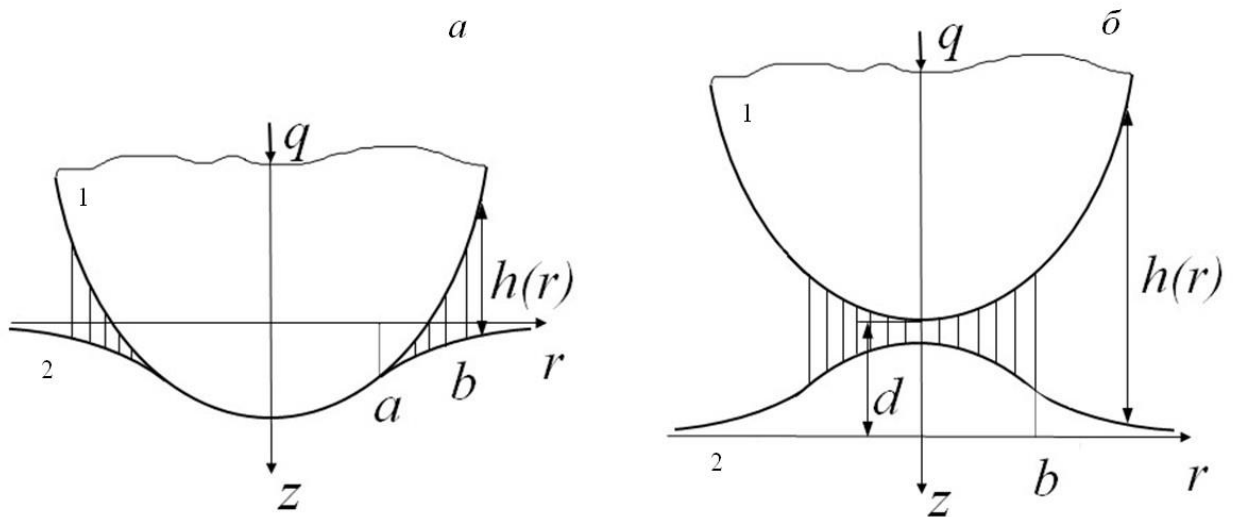


Рис. 2.1. Схема взаимодействия индентора с упругим полупространством при наличии адгезии в случае контакта (а) и при отсутствии контакта (б).

Величина зазора h между поверхностями индентора и полупространства определяется выражением

$$h(r) = f(r) + u_z(r) + d, \quad (2.1)$$

где $u_z(r) = u_{z1}(r) + u_{z2}(r)$ — суммарное нормальное смещение поверхностей взаимодействующих тел за счет их деформирования, d — изменение расстояния между двумя фиксированными точками индентора и полупространства, расположенными на оси симметрии взаимодействующих тел и удаленными от контактной поверхности в результате деформирования тел. В дальнейшем будем называть величину d расстоянием между телами.

Поверхности индентора и полупространства испытывают взаимное притяжение, которое задается отрицательным по величине адгезионным давлением $-p_a(r)$. В зависимости от величины зазора в начале координат $h(0)$ возможны два режима взаимодействия:

1. *Контакт поверхностей* имеет место по круговой области $r \leq a$ (рис. 2.1, а), в этой области выполняется соотношение $h(0) = 0$. При этом адгезионное давление $-p_a$ действует по кольцевой области

$a < r \leq b$ вне области контакта. В случае контакта поверхностей расстояние между телами d может быть как положительным, так и отрицательным.

2. *Случай разделенных поверхностей* имеет место при $h(0) > 0$, при этом область контакта отсутствует, а поверхности индентора и полупространства взаимодействуют только посредством адгезионного притяжения $-p_a$, действующего в круговой области $0 \leq r \leq b$. В этом случае расстояние d всегда положительно (рис. 2.1, б).

Таким образом, условия на границе $z = 0$ имеют вид

$$u_z(r) = -f(r) - d, \quad 0 < r \leq a \quad (2.2)$$

$$p(r) = -p_a(r), \quad a \leq r \leq b \quad (2.3)$$

При $r > b$ поверхность считается свободной от нагружения, т.е., $p(r) = 0$

Адгезионное давление $p_a(r)$ имеет вид кусочно-постоянной функции:

$$p_a(r) = \begin{cases} p_1, & b_0 \leq r < b_1 \\ p_2, & b_1 \leq r < b_2 \\ \dots & \dots \\ p_N, & b_{N-1} \leq r < b_N \end{cases} \quad (2.4)$$

где точки с координатами b_i ($i = 0, \dots, N$) представляют собой разбиение отрезка $a \leq r \leq b$, т.е., выполняется условие $b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{N-1} \leq b_N$, p_i ($i = 0, \dots, N$) — произвольные величины давления, заданные на соответствующих отрезках разбиения. При этом $b_0 = a$ в случае контакта и $b_0 = 0$ в случае разделенных поверхностей, а $b_N = b$.

В силу гладкости индентора при $r > a$ на границе области контакта выполняется условие непрерывности давления:

$$p(a) = -p_1 \quad (2.5)$$

Упругие смещения $u_z(r)$ связаны с давлением $p(r)$ на границе упругого полупространства известным соотношением для осесимметричной контактной задачи [11]

$$u_z(r) = \frac{4}{\pi E^*} \int_0^b p(r') \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'}, \quad 0 \leq r \leq b \quad (2.6)$$

где $\mathbf{K}(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, E^* — приведенный модуль упругости взаимодействующих тел:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2},$$

E_i и ν_i ($i=1,2$) — соответственно, модули Юнга и коэффициенты Пуассона индентора и полупространства. Кроме того, выполняется условие равновесия для внешней нормальной силы q , действующей на индентор

$$q = 2\pi \int_0^b r p(r) dr \quad (2.7)$$

Вследствие наличия адгезионного притяжения сила q может быть как положительной, так и отрицательной.

2.1.2. Случай контакта поверхностей

Введем функцию $p_*(r)$ в области контакта $0 \leq r \leq a$ такую, что

$$p(r) = p_*(r) - p_1 \quad (2.8)$$

Тогда для функции $p_*(r)$ выполняется условие

$$p_*(a) = 0 \quad (2.9)$$

С использованием условий (2.2) и (2.3) и выражений (2.4), (2.8), соотношение (2.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} u_z(r) - \sum_{k=1}^N (p_{k+1} - p_k) \int_0^{b_k} \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r'dr'}{r+r'} = \\ = \frac{4}{\pi E^*} \int_0^a p_*(r') \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r'dr'}{r+r'} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь и далее считается, что $p_{N+1} = 0$. Значение интеграла в левой части (2.10) известно [41]:

$$\frac{4}{\pi E^*} \int_0^c \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r'dr'}{r+r'} = \frac{4}{\pi E^*} \begin{cases} c \mathbf{E} \left(\frac{r}{c} \right), & r \leq c \\ r \left[\mathbf{E} \left(\frac{c}{r} \right) - \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right) \mathbf{K} \left(\frac{c}{r} \right) \right], & r > c \end{cases} \quad (2.11)$$

где $\mathbf{E}(x)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Из соотношения (2.10) с учетом значения интеграла (2.11) и условия контактирования (2.2) следует интегральное уравнение относительно функции $p_*(r)$

$$\frac{4}{\pi E^*} \int_0^a p_*(r') \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r'dr'}{r+r'} = -f_*(r) - d, \quad r \leq a \quad (2.12)$$

где функция $f_*(r)$ определяется соотношением

$$f_*(r) = f(r) + \frac{4}{\pi E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) \int_0^{b_i} \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r'dr'}{r+r'}$$

В области контакта $r \leq a$ это соотношение в силу (2.11) преобразуется к виду:

$$f_*(r) = f(r) + \frac{4}{\pi E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \mathbf{E} \left(\frac{r}{b_i} \right) \quad (2.13)$$

Условие равновесия (2.7) при этом принимает вид

$$q + \pi a^2 p_1 + \pi \sum_{i=1}^N p_i (b_i^2 - b_{i-1}^2) = 2\pi \int_0^a r p_*(r) dr \quad (2.14)$$

Поскольку для функции $p_*(r)$ выполняется условие (2.9) то интегральное уравнение (2.12) можно рассматривать как аналог интегрального уравнения контактной задачи о внедрении в упругое полупространство осесимметричного штампа заданной формы $f_*(r)$ (2.13) при действии на него силы, описываемой выражением в правой части выражения (2.14). При этом правая часть (2.10) при $a < r \leq b$ определяет упругие перемещения $u(r)$ вне области контакта.

Воспользуемся полученным в [42] решением задачи о внедрении осесимметричного штампа заданной формы $f_*(r)$ в упругое полупространство, на основании которого из соотношений (2.12)-(2.14) с учетом (2.8) получим следующие выражения для нормального давления в области контакта

$$p(r) = \frac{E^* a^2}{\pi} \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \int_{r/a}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 a^2 - r^2}} \Delta f_*(axy) dx dy - p_1, \quad r \leq a \quad (2.15)$$

и суммарного упругого перемещения границ взаимодействующих поверхностей в области адгезии

$$u_z(r) = -\frac{2a}{\pi} \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 a^2}} \frac{\partial}{\partial x} (xd + xf_*(axy)) dx dy + \frac{4}{\pi E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) \int_0^{b_i} \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'}, \quad a < r \leq b, \quad (2.16)$$

а также следующее условие для определения расстояния между телами d :

$$\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\partial}{\partial y} (dy + yf_*(ay)) dy = 0 \quad (2.17)$$

Воспользовавшись формулой, полученной Галиным [11] для силы, прижимающей осесимметричный штамп, и учитывая (2.13), будем иметь

$$q = 2E^* \int_0^a \Delta f_*(r) r \sqrt{a^2 - r^2} dr - \pi p_1 b^2 \quad (2.18)$$

Разлагая эллиптические интегралы в ряд и учитывая, что $f(r) = Ar^s$, преобразуем выражение (2.13) к следующему виду

$$f_*(r) = Ar^s - \frac{2}{E^*} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^2 \frac{1}{2m-1} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{2m} - 1 \right) (p_{i+1} - p_i) b_i \quad (2.19)$$

Для определения искомых функций нормального давления $p(r)$ и смещения $u_z(r)$, а также расстояния между телами d и нагрузки q , необходимо подставить выражение (2.19) в соотношения (2.15)-(2.18).

Начнем с определения величин d и q . Подставляя (2.19) в (2.17), получим условие для определения расстояния между телами d в следующем виде

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{\pi} \left(\frac{2}{E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \mathbf{E} \left(\frac{r}{b_i} \right) + d \right) + \frac{2(s+1)Aa^{s+1}}{\pi} \int_0^1 \frac{y^{s+1}}{\sqrt{1-y^2}} dy - \\ & - \frac{4a}{\pi E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \mathbf{E} \left(\frac{r}{b_i} \right) \int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^{2m+1}}{\sqrt{1-y^2}} \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^2 \frac{2m+1}{2m-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2m} dy = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Принимая во внимание значение интеграла [33]

$$\int_0^1 \frac{y^{s+1}}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(s/2 + 1/2)}{\Gamma(s/2 + 1)}, \quad (2.21)$$

и известное значение ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} x^{2m} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.22)$$

а также значение ряда, которое можно получить из (2.22) почленным интегрированием

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{x^{2m}}{2m-1} = 1 - \sqrt{1-x^2} \quad (2.23)$$

находим соотношение для расстояния между поверхностями

$$d = -Aa^s 2^{s-2} s \frac{\Gamma(s/2)^2}{\Gamma(s)} - \frac{2}{E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \sqrt{1 - \frac{a^2}{b_i^2}}, \quad (2.24)$$

Подставляя (2.19) в (2.18), найдем выражение для нормальной силы, действующей на индентор:

$$q = 2E^* A s^2 \int_0^a r^{s-1} \sqrt{a^2 - r^2} dr - 16 \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^2 \frac{m^2}{2m-1} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{2m-1} \sqrt{a^2 - r^2} dr - \pi p_1 b^2 \quad (2.25)$$

Воспользуемся значением интеграла [33]

$$\int_0^a r^{s-1} \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi} 2^{1-s} a^{s+1}}{s+1} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s/2)^2} \quad (2.26)$$

Почленно интегрируя ряд, полученный из (2.22),

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!} x^{2m} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2.27)$$

находим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!} \frac{x^{2m-1}}{2m+1} = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin x \quad (2.28)$$

С учетом (2.26) и (2.28), из (2.25) получим окончательное выражение для нагрузки, приложенной к индентору

$$q = E^* A a^{s+1} 2^{s-1} \frac{s^2}{s+1} \frac{\Gamma(s/2)^2}{\Gamma(s)} + 2 \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i^2 \left(\arccos \frac{a}{b_i} + \frac{a}{b_i} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b_i}\right)^2} \right) \quad (2.29)$$

Соотношения для расстояния между телами (2.24) и нагрузки (2.29) при отсутствии адгезии, т.е., при $p_i = 0, i = 1, \dots, N$, совпадают с соотношениями, полученными Л.А. Галиным [11] для задачи о вдавливании без трения осесимметричного штампа. Уравнения (2.24), (2.29) задают зависимость между силой и расстоянием для индентора, форма которого описывается функцией $f(r) = Ar^s$ при произвольном $s > 1$, в том числе нецелом.

Теперь определим функции контактного давления $p(r)$ и смещения поверхностей $u_z(r)$ вне области контакта. Подставляя (2.19) в (2.15) и принимая во внимание значение интеграла (2.21), получим для контактного давления выражение

$$p(r) = \frac{E^* A a^s}{\sqrt{\pi}} \frac{s^2 \Gamma(s/2)}{\Gamma(s/2 + 1/2)} \int_{r/a}^1 \frac{x^{s-1} dx}{\sqrt{x^2 a^2 - r^2}} - \frac{2a}{\pi} \sum_{i=1}^N (p_{i-1} - p_i) \int_{r/a}^1 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{ax}{b_i}\right)^{2m-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 a^2 - r^2}} - p_1, \quad r \leq a \quad (2.30)$$

С учетом значения ряда (2.22) соотношение (2.30) принимает вид:

$$\begin{aligned}
p(r) &= \frac{E^* A a^s}{\sqrt{\pi}} \frac{s^2 \Gamma(s/2)}{\Gamma(s/2 + 1/2)} \int_{r/a}^1 \frac{x^{s-1} dx}{\sqrt{x^2 a^2 - r^2}} - \\
&- \frac{2a^2}{\pi} \sum_{i=1}^N (p_{i-1} - p_i) \int_{r/a}^1 \frac{x dx}{\sqrt{b_i^2 - x^2 a^2} \sqrt{x^2 a^2 - r^2}} - p_1, \quad r \leq a
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Интеграл во втором слагаемом (2.31) можно взять, в результате чего получим

$$\begin{aligned}
p(r) &= \frac{E^* A a^s}{\sqrt{\pi}} \frac{s^2 \Gamma(s/2)}{\Gamma(s/2 + 1/2)} \int_{r/a}^1 \frac{x^{s-1} dx}{\sqrt{x^2 a^2 - r^2}} + \\
&+ \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) \operatorname{arcctg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b_i^2 - a^2}}, \quad r \leq a
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Принимая во внимание (2.16) и (2.19), получим для $u_z(r)$ при $a < r \leq b$ следующее выражение

$$\begin{aligned}
u_z(r) &= -\frac{2a}{\pi} \left(\frac{2}{E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i + d \right) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 - a^2 x^2}} - \\
&- \frac{2(s+1) A a^{s+1}}{\pi} \int_0^1 \frac{y^{s+1}}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 \frac{x^s}{\sqrt{r^2 - x^2 a^2}} dx dy + \\
&+ \frac{4a}{\pi E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{y^{2m+1}}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^2 \frac{2m-1}{2m+1} \left(\frac{ax}{b_i} \right)^{2m} \frac{dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 a^2}} + \\
&+ \frac{4}{\pi E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) \int_0^{b_i} \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Воспользуемся значением интеграла (2.21), а также значением суммы, которое получается из (2.22) почленным интегрированием

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{x^{2m}}{2m-1} = 1 - \sqrt{1-x^2} \tag{2.34}$$

Кроме того, используем значение интеграла [33]

$$\frac{a}{b} \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - x^2}}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - x^2}} dx = \begin{cases} \mathbf{E}\left(\arcsin \frac{a}{r}, \frac{r}{b}\right), & a < r \leq b \\ \frac{r}{b} \left[\mathbf{E}\left(\arcsin \frac{a}{b}, \frac{b}{r}\right) - \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right) \mathbf{F}\left(\arcsin \frac{a}{b}, \frac{b}{r}\right) \right], & r > b \end{cases} \quad (2.35)$$

Тогда выражение (2.33) преобразуется для $b_{k-1} \leq r \leq b_k$ к виду:

$$\begin{aligned} u_z(r) = & -\frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i + d \right) \arcsin \frac{a}{r} - \\ & - \frac{(s+1) A a^{s+1} \Gamma(s/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(s/2 + 1)} \int_0^1 \frac{x^s}{\sqrt{r^2 - x^2 a^2}} dx + \\ & + \frac{4r}{\pi E^*} \sum_{i=1}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) \left\{ \mathbf{E}\left(\frac{b_i}{r}\right) - \mathbf{E}\left(\arcsin \frac{a}{b_i}, \frac{b_i}{r}\right) - \right. \\ & - \left. \left(1 - \frac{b_i^2}{r^2}\right) \left[\mathbf{K}\left(\frac{b_i}{r}\right) - \mathbf{F}\left(\arcsin \frac{a}{b_i}, \frac{b_i}{r}\right) \right] \right\} + \\ & + \frac{4}{\pi E^*} \sum_{i=k}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \left[\mathbf{E}\left(\frac{r}{b_i}\right) - \mathbf{E}\left(\arcsin \frac{a}{r}, \frac{r}{b_i}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Полученные выражения для контактного давления (2.32) и смещения поверхностей (2.36) содержат интегралы, которые не берутся аналитически для произвольного положительного s . Однако, значения этих выражений можно получить в замкнутом виде для целых положительных s . Рассмотрим отдельно случаи четной и нечетной степени.

Форма индентора описывается степенной функцией с четной степенью $f(r) = Ar^{2n}$, т.е., $s = 2n$, где n - целое положительное число.

Значение следующего интеграла было получено И.Я.Штаерманом методом последовательного интегрирования по частям [78]:

$$\int_{r/a}^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^2 - (r/a)^2}} dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \sum_{j=1}^n \frac{(2j-3)!!}{(2j-2)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2(n-j)} \quad (2.37)$$

с учетом (2.37) соотношение (2.32) для контактного давления принимает вид

$$p(r) = \frac{AE^* a^{2n-1}}{\pi} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \sum_{j=1}^n \frac{(2j-3)!!}{(2j-2)!!} \left(\frac{r}{a} \right)^{2(n-j)} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b_i^2 - a^2}}, \quad r \leq a \quad (2.38)$$

Воспользуемся значением интеграла, которое получено методом последовательного интегрирования по частям, аналогично тому, как было получено в [78] выражение (2.37):

$$\int_0^1 \frac{x^{2m} dx}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2m} \left[\arcsin \frac{a}{r} - \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1} \sum_{j=1}^m \frac{(2j-2)!!}{(2j-1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2j} \right], \quad (2.39)$$

И преобразуем соотношение (2.36) для упругого смещения при $b_{k-1} \leq r \leq b_k$ к виду:

$$u_z(r) = -\frac{2}{\pi} \left(d + Ar^{2n} + \frac{2}{E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \right) \arcsin \frac{a}{r} +$$

$$+ \frac{2Ar^{2n}}{\pi} \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} \sum_{j=1}^n \frac{(2j-2)!!}{(2j-1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2j} +$$

$$+ \frac{4r}{\pi E^*} \sum_{i=1}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) \left\{ \mathbf{E} \left(\frac{b_i}{r} \right) - \mathbf{E} \left(\arcsin \frac{a}{b_i}, \frac{b_i}{r} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{b_i^2}{r^2} \right) \left[\mathbf{K} \left(\frac{b_i}{r} \right) - \mathbf{F} \left(\arcsin \frac{a}{b_i}, \frac{b_i}{r} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{4}{\pi E^*} \sum_{i=k}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \left[\mathbf{E} \left(\frac{r}{b_i} \right) - \mathbf{E} \left(\arcsin \frac{a}{r}, \frac{r}{b_i} \right) \right] \quad (2.40)$$

Форма индентора описывается степенной функцией с нечетной степенью $f(r) = Ar^{2l+1}$, т.е., $s = 2l + 1$, где $l = 0, 1, 2, \dots$.

Используя метод, которым были получены значения интегралов (2.37) и (2.39), получим аналогичные соотношения для случая $s = 2l + 1$:

$$\int_{r/a}^1 \frac{x^{2l} dx}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}} =$$

$$= \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} \left[\text{Arch}\left(\frac{a}{r}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \sum_{j=1}^l \frac{(2j-2)!!}{(2j-1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2j} \right], \quad (2.41)$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2l+1} dx}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{(2l)!!}{(2l+1)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} \left[\left(\frac{r}{a} + \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}\right)^{-1} - \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1} \sum_{j=1}^l \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2j} \right], \quad (2.42)$$

Тогда соотношение (2.32) для контактного давления принимает вид

$$p(r) = \frac{AE^* r^{2l}}{\pi} \left[\frac{(2l+1)!!}{(2l)!!} \right]^2 \left[\text{Arch}\left(\frac{a}{r}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \sum_{j=1}^l \frac{(2j-2)!!}{(2j-1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2j} \right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) \text{arcctg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b_i^2 - a^2}}, \quad r \leq a \quad (2.43)$$

С учетом (2.21) соотношение (2.36) для упругого смещения поверхностей взаимодействующих тел при $b_{k-1} \leq r \leq b_k$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
u_z(r) = & -\frac{2}{\pi} \left(d + \frac{2}{E^*} \sum_{i=1}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \right) \arcsin \frac{a}{r} - \frac{Aar^{2l} \sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{r}{a} + \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} \right)^{-1} + \\
& + \frac{Aar^{2l} \sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1} \sum_{j=1}^l \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \left(\frac{a}{r} \right)^{2j} + \\
& + \frac{4r}{\pi E^*} \sum_{i=1}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) \left\{ \mathbf{E} \left(\frac{b_i}{r} \right) - \mathbf{E} \left(\arcsin \frac{a}{b_i}, \frac{b_i}{r} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \left(1 - \frac{b_i^2}{r^2} \right) \left[\mathbf{K} \left(\frac{b_i}{r} \right) - \mathbf{F} \left(\arcsin \frac{a}{b_i}, \frac{b_i}{r} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{4}{\pi E^*} \sum_{i=k}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \left[\mathbf{E} \left(\frac{r}{b_i} \right) - \mathbf{E} \left(\arcsin \frac{a}{r}, \frac{r}{b_i} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.44}$$

2.1.3. Случай разделенных поверхностей

В этом случае непосредственный контакт поверхностей отсутствует, а в области $0 \leq r \leq b$ действует адгезионное давление, представленное кусочно-постоянной функцией (2.4). Подставляя условие (2.3) при $0 \leq r \leq b$ в соотношение (2.6) получим для упругого смещения при $b_{k-1} \leq r \leq b_k$:

$$\begin{aligned}
u_z(r) = & \frac{4r}{\pi E^*} \sum_{i=1}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) \left[\mathbf{E} \left(\frac{b_i}{r} \right) - \left(1 - \frac{b_i^2}{r^2} \right) \mathbf{K} \left(\frac{b_i}{r} \right) \right] + \\
& + \frac{4}{\pi E^*} \sum_{i=k}^N (p_{i+1} - p_i) b_i \mathbf{E} \left(\frac{r}{b_i} \right)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Сила, действующая на индентор (2.7) в этом случае определяется суммой:

$$q = -\pi \sum_{j=1}^N p_j (b_j^2 - b_{j-1}^2) \tag{2.46}$$

Расстояние между поверхностями в этом случае определяется величиной зазора $h(r)$ при $r = 0$:

$$d = h(0) - \frac{2}{E^*} \sum_{j=1}^N (p_{j+1} - p_j) b_j \quad (2.47)$$

Для определения величины расстояния между телами d , соответствующего касанию поверхностей в одной точке, необходимо в соотношении (2.47) положить $h(0) = 0$.

2.2. Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии

2.2.1. Постановка задачи

Полученное в разделе 2.1 решение осесимметричной контактной задачи при наличии адгезионного давления, действующего вне области контакта, можно применить для построения модели капиллярной адгезии, когда взаимодействующие поверхности притягиваются друг к другу за счет капиллярного «мостика» или мениска.

Рассматривается взаимодействие осесимметричного жесткого штампа с упругим полупространством при наличии в зазоре жидкости, образующей мениск. Форма штампа описывается степенной функцией $f(r) = Ar^{2n}$, где n — целое число. К штампу приложена внешняя сила q (рис.2.2).

Величина зазора $h(r)$ между контактирующими телами определяется выражением (2.1). Если $h(0) > 0$, поверхности штампа и полупространства разделены мениском и не контактируют друг с другом (рис. 2.2, а). Если $h(0) = 0$, имеет место контакт поверхностей по области $\Omega_c = \{r \leq a\}$ (рис. 2.2, б), включая точечный контакт при $a = 0$. При этом жидкость занимает область

$$\Omega_f = \begin{cases} 0 \leq r \leq b, & h(0) > 0 \\ a < r \leq b, & h(0) = 0 \end{cases}$$

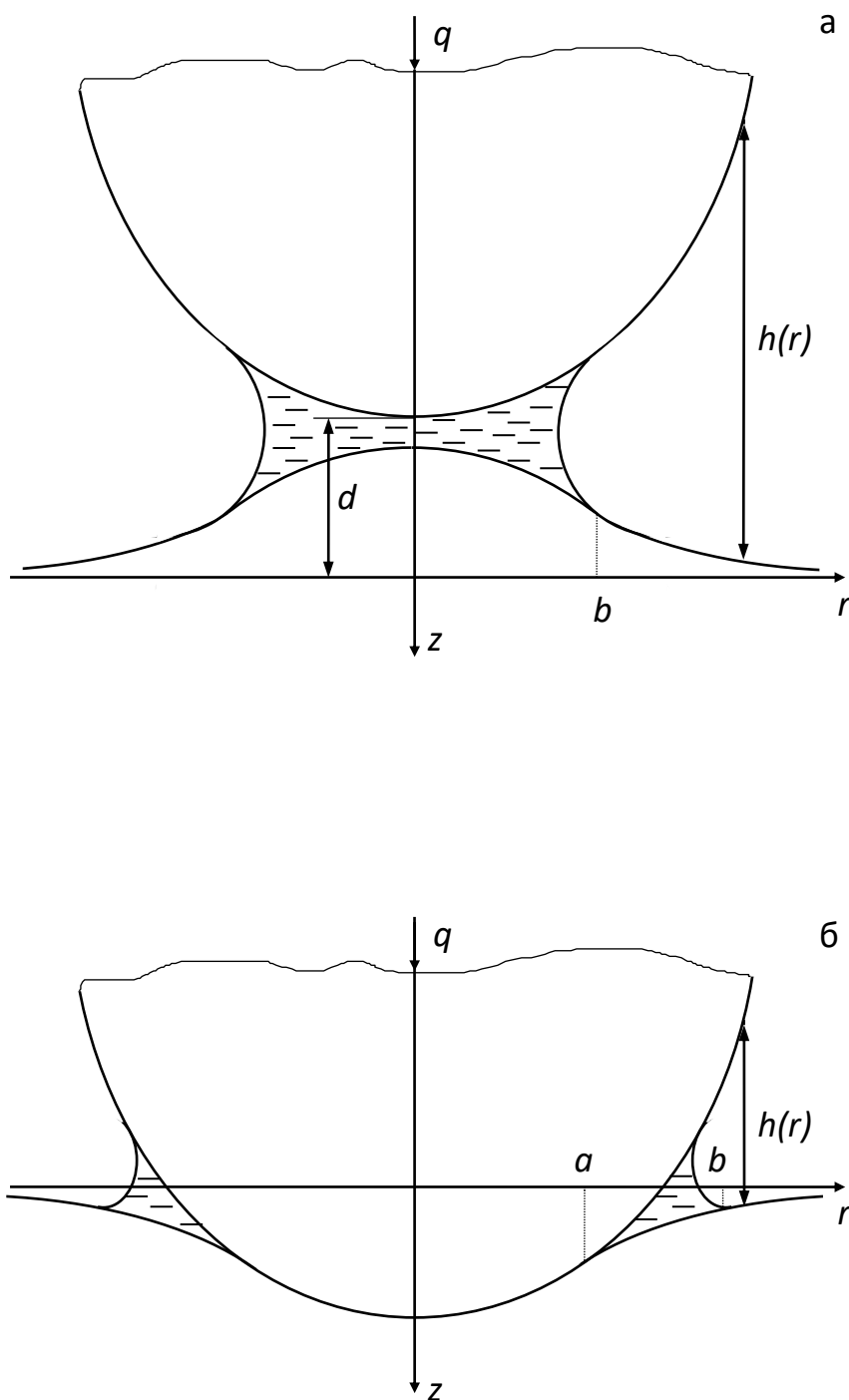


Рис. 2.2. Схема взаимодействия штампа с упругим полупространством при наличии капиллярной адгезии при отсутствии контакта (а) и в случае контакта (б)

Давление под искривленной поверхностью жидкости в мениске меньше атмосферного на величину p_0 , которая определяется формулой Лапласа (1.12). Таким образом, поверхность полупространства нагружена

равномерным давлением $p_{atm} - p_0$ в области Ω_f , занимаемой жидкостью. Предполагая, что углы смачивания жидкостью поверхностей взаимодействующих θ_1, θ_2 тел равны нулю и штамп обладает достаточно пологой формой, т.е. выполняется условие $f'(b) \ll 1$, имеем для радиусов кривизны мениска выражения

$$R_1 \approx \frac{h(b)}{2}, \quad R_2 \approx b.$$

Кроме того, предполагается, что $h(b) \ll b$. В результате из формулы Лапласа (1.12) следует выражение для капиллярного давления:

$$p_0 = \frac{2\gamma_0}{h(b)}. \quad (2.48)$$

где γ_0 - поверхностное натяжение жидкости в мениске.

Кроме того, на упругое полупространство по кругу $r = b$ действует также сила натяжения пленки жидкости (1.13), которая в силу сделанного выше предположения о равенстве нулю краевого угла смачивания жидкостью полупространства, имеет вид

$$F_s = -2\pi b\gamma_0$$

и направлена по касательной к границе упругого полупространства. Простые оценки показывают, что эта сила много меньше силы F_L , обусловленной давлением Лапласа. Если поверхности разделены мениском ($h(0) > 0$), имеем $F_L = -\pi b^2 p_0$, откуда следует

$$\frac{F_s}{F_L} = \frac{h(b)}{b} \ll 1.$$

В случае контакта поверхностей ($h(0) = 0$), получаем $F_L = -\pi(b^2 - a^2)p_0$ и, следовательно,

$$\frac{F_s}{F_L} = \frac{bh(b)}{b^2 - a^2} \approx f'(b) \ll 1.$$

В дальнейшем силой F_s будем пренебрегать. Полагая атмосферное давление равным нулю, получим для нормального давления $p(r)$ на границе упругого полупространства условие

$$p(r) = -p_0, \quad (2.49)$$

удовлетворяющееся в области Ω_f , занятой жидкостью. В области Ω_c выполняется условие контактирования

$$h(r) = 0. \quad (2.50)$$

В силу гладкости поверхности штампа, имеем также соотношение

$$p(a) = -p_0. \quad (2.51)$$

Упругие смещения $u_z(r)$ связаны с давлением $p(r)$ на границе упругого полупространства соотношением (2.6), где $E^* = E / (1 - \nu^2)$, E и ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого полупространства, соответственно. Объем жидкости в мениске v_0 связан с геометрией зазора соотношением

$$v_0 = \iint_{\Omega_f} rh(r) drd\varphi \quad (2.52)$$

Условие равновесия для штампа имеет вид (2.7).

Заданными считаются следующие величины: параметры A и n , характеризующие форму штампа; поверхностное натяжение жидкости γ_0 ; упругие характеристики полупространства ν and E ; нагрузка q и объем жидкости V . Следующие величины должны быть определены в результате решения задачи: давление $p(r)$ в области контакта Ω_c ; радиус этой

области a ; упругие смещения $u(r)$ полупространства в области Ω_f , занятой жидкостью; внешний радиус b этой области; величина давления в жидкости p_0 ; величина зазора $h(r)$ и расстояние d между взаимодействующими телами.

Поставленная таким образом контактная задача совпадает с задачей, рассмотренной в разделе 2.1, для частного случая, когда адгезионное взаимодействие описывается функцией в форме одной ступеньки, т.е., в соотношении (2.4) $N=1$, $p_1 = p_0$, $b_1 = b$. Для определения неизвестных величин a и b служат условие (2.48), следующее из формулы Лапласа, и условие сохранения объема жидкости (2.52).

2.2.2. Решение контактной задачи

Поверхности, разделенные мениском ($h(0) > 0$). В этом случае решение задачи определяется уравнениями (2.45)-(2.47) при $N=1$, $p_1 = p_0$, $b_1 = b$ и условиями (2.48), (2.52). Условие постоянства объема жидкости (2.52) в случае разделенных поверхностей имеет вид:

$$v_0 = 2\pi \int_0^b rh(r)dr$$

Из соотношений (2.6) и (2.11) следует выражение для упругого перемещения границы полупространства:

$$u_z(r) = -\frac{4(1-\nu^2)p_0}{\pi E} \begin{cases} b\mathbf{E}\left(\frac{r}{b}\right), & r \leq b \\ r \left[\mathbf{E}\left(\frac{b}{r}\right) - \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right) \mathbf{K}\left(\frac{b}{r}\right) \right], & r > b \end{cases} \quad (2.53)$$

Подставляя соотношение (2.53) в выражение для зазора (2.1) и учитывая вид функции $f(r) = Ar^{2n}$, описывающей форму штампа, получим для величины зазора $h(r)$ соотношение

$$h(r) = d - \frac{4(1-\nu^2)p_0}{\pi E} b \mathbf{E}\left(\frac{r}{b}\right) + Ar^{2n} \quad (2.54)$$

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{D}, \quad P = \frac{1-\nu^2}{\pi E} p, \quad Q = \frac{(1-\nu^2)}{\pi ED^2} q, \\ U_z &= \frac{u_z}{D}, \quad \delta = \frac{d}{D}, \quad \beta = \frac{b}{D}, \quad V_0 = \frac{v_0}{D^3}, \quad K = \frac{(1-\nu^2)\gamma_0}{\pi ED}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где $D = A^{-1/(2n-1)}$ — характерный размер штампа. Переходя к безразмерным величинам в соотношениях (2.45)–(2.47) и (2.53) и используя полученное выражение для величины зазора (2.54), приходим к системе уравнений

$$P_0(\delta - 4P_0\beta + \beta^{2n}) = 2K, \quad (2.56)$$

$$V_0 = \pi\delta\beta^2 - \frac{16\pi}{3}P_0\beta^3 + \frac{\pi}{n+1}\beta^{2n+2}. \quad (2.57)$$

$$Q = -\pi\beta^2 P_0, \quad (2.58)$$

$$U_z(\rho) = -4P_0 \begin{cases} \beta \mathbf{E}\left(\frac{\rho}{\beta}\right), & \rho \leq \beta \\ \rho \left[\mathbf{E}\left(\frac{\beta}{\rho}\right) - \left(1 - \left(\frac{\beta}{\rho}\right)^2\right) \mathbf{K}\left(\frac{\beta}{\rho}\right) \right], & \rho > \beta \end{cases} \quad (2.59)$$

Четыре уравнения системы (2.56)–(2.59) содержат три неизвестных безразмерных величины: давление в жидкости P_0 ; внешний радиус β области, занятой мениском; расстояние δ между взаимодействующими телами; а также неизвестную функцию $U_z(\rho)$, определяющую упругие

смещения границы полупространства как внутри области, занятой мениском, так и вне ее.

Решая уравнения (2.56) и (2.57) относительно параметров P_0 и δ , получим

$$P_0 = \frac{3}{8\beta} \left(\sqrt{\kappa^2 + \frac{32}{3} \beta K} - \kappa \right), \quad (2.60)$$

$$\delta = \frac{16}{3} P_0 \beta - \beta^{2n} + \kappa, \quad (2.61)$$

где

$$\kappa = \frac{n\beta^{2n}}{n+1} + \frac{V_0}{\pi\beta^2}.$$

В решении (2.60) квадратного уравнения выбран знак “+” перед знаком радикала, исходя из условия $P_0 = 0$, которое должно удовлетворяться при $K = 0$, что следует из физического смысла задачи: капиллярное давление равно нулю при нулевом поверхностном натяжении жидкости.

Подставляя выражение для P_0 (2.60) в соотношение для безразмерной нагрузки (2.58), получим уравнение, численное решение которого позволяет определить безразмерный радиус β области, занятой мениском. После этого неизвестная функция $U_z(\rho)$ и величины P_0 и δ определяются соотношениями (2.59), (2.60) и (2.61) соответственно. При этом безразмерные величины нагрузки Q , объема жидкости в мениске V_0 и параметров K и n (2.55) считаются заданными.

Полученное решение применимо только в случае, когда непосредственный контакт между поверхностями штампа и полупространства отсутствует. Это имеет место при $\beta \leq \beta^*$. Величина β^* соответствует случаю точечного контакта поверхностей ($h(0) = 0$, $a = 0$).

Для определения величины β^* , положим $h(0) = 0$ в выражении (2.54) и исключим безразмерную величину расстояния δ из полученного соотношения и уравнений (2.54) и (2.57). В результате получим следующую систему уравнений для определения параметров β^* и P_0^* , соответствующих случаю точечного контакта

$$P_0^* = \frac{(\beta^*)^{2n} - \sqrt{(\beta^*)^{4n} - 16\beta^*(2-\pi)K}}{4\beta^*(2-\pi)}, \quad (2.62)$$

$$V_0 = 2\pi(\beta^*)^3 P_0^* \left(\pi - \frac{8}{3} \right) + \frac{\pi(\beta^*)^{2n+2}}{n+1}. \quad (2.63)$$

Полученная система уравнений (2.62), (2.63) приводится к одному уравнению для определения параметра β^* , которое решается численно.

Контакт поверхностей ($h(0) = 0$). В этом случае решение задачи определяется следующими соотношениями. Из (2.24) для расстояния между поверхностями при $s = 2n$, $N = 1$, $p_1 = p_0$ и $b_1 = b$ имеем

$$d = -\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} Aa^{2n} + \frac{2(1-\nu^2)p_0b}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad (2.64)$$

Таким же образом из (2.29) для силы, действующей на штамп, получим

$$q = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{4EAna^{2n+1}}{1-\nu^2} - p_0b^2 \left[\pi - 2\arcsin \frac{a}{b} + 2\frac{a}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \right] \quad (2.65)$$

Аналогично из соотношения (2.38) для контактного давления при $N = 1$, $p_1 = p_0$ и $b_1 = b$ имеем

$$p(r) = \frac{AEa^{2n-1}}{\pi(1-\nu^2)} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2(n-k)} - p_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b^2 - a^2}} \right), \quad r \leq a \quad (2.66)$$

И из соотношения (2.40) для перемещения границы упругого полупространства вне области контакта получим

$$u_z(r) = \frac{2}{\pi} (Ar^{2n} - d) \operatorname{arcsin} \frac{a}{r} + \frac{2Ar^{2n}}{\pi} \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2k} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{4(1-\nu^2)p_0b}{\pi E} \left\{ \mathbf{E}\left(\frac{r}{b}\right) - \mathbf{E}\left(\operatorname{arcsin} \frac{a}{r}, \frac{r}{b}\right) \right\}, \quad a < r \leq b \\ \frac{4(1-\nu^2)p_0r}{\pi E} \left\{ \mathbf{E}\left(\frac{b}{r}\right) - \mathbf{E}\left(\operatorname{arcsin} \frac{a}{b}, \frac{b}{r}\right) - \right. \\ \left. - \left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 \right] \left[\mathbf{K}\left(\frac{b}{r}\right) - \mathbf{F}\left(\operatorname{arcsin} \frac{a}{b}, \frac{b}{r}\right) \right] \right\}, \quad r > b \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Преобразуем формулу для величины зазора (2.1), подставив в нее (2.64) и (2.67). Тогда получим для величины зазора $h(r)$ следующее выражение

$$h(r) = \left(Ar^{2n} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} Aa^{2n} \frac{2(1-\nu^2)p_0b}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsin} \frac{a}{r} \right) + \frac{2Ar^{2n}}{\pi} \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2k} - \frac{4(1-\nu^2)p_0b}{\pi E} \left[\mathbf{E}\left(\frac{r}{b}\right) - \mathbf{E}\left(\operatorname{arcsin} \frac{a}{r}, \frac{r}{b}\right) \right] \right) \quad (2.68)$$

С учетом (2.68) условие (2.48), следующее из формулы Лапласа, можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& -\frac{2Aa^{2n}}{\pi} \left\{ \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} - \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \right] \left(\arcsin \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left(\frac{b}{a}\right)^{2(n-k)} \right\} p_0 + \\
& + \frac{4(1-\nu^2)b}{\pi E} \left\{ 1 - \frac{a}{b} + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \left(\arcsin \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} \right) \right\} p_0^2 + 2\gamma_0 = 0
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Подставим (2.68) в соотношение для объема мениска (2.52), которое в случае контакта поверхностей принимает вид:

$$v_0 = 2\pi \int_a^b rh(r)dr$$

и возьмем интеграл, используя следующие формулы [33]

$$\int_a^b r \mathbf{E} \left(\frac{r}{b} \right) dr = \frac{b^2}{3} (2 + \chi),$$

$$\int_a^b r \mathbf{E} \left(\arcsin \frac{a}{r}, \frac{r}{b} \right) dr = \frac{b^2}{3} \left(\frac{3a}{b} - \frac{a^3}{b^3} + \chi \right),$$

где

$$\chi = - \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \mathbf{E} \left(\frac{a}{b} \right) + \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \mathbf{K} \left(\frac{a}{b} \right),$$

а также формулу (2.26) и следующее значение интеграла, полученное с помощью интегрирования по частям,

$$\begin{aligned}
\int_a^b r^{2n+1} \arcsin \frac{a}{r} dr &= \frac{b^{2n+2}}{2n+2} \left[\arcsin \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+2} + \right. \\
& \left. + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{a}{b}\right)^{2(n-k)} \right]
\end{aligned}$$

В результате, для объема жидкости в мениске получим

$$\begin{aligned}
 v_0 = 2Aa^{2n+2} & \left\{ \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \left[\frac{(2n)!!(2n-1)}{(2n+1)!!} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \left(\frac{b}{a}\right)^{2(n-k)} \right] + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} - \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \frac{1}{n+1} \right] \left(\arcsin \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} \right) \right\} - \\
 & - \frac{4(1-\nu^2)p_0b^3}{3E} \left[4 - 3\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 3\sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \left(\arcsin \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Таким образом, исследование поставленной задачи сводится к решению системы нелинейных уравнений (2.65), (2.69), (2.70) относительно неизвестных a , b и p_0 , после чего выражения (2.66), (2.67) и (2.64) позволяют определить распределение давлений в контакте, смещения границы упругого полупространства и расстояние между штампом и упругим полупространством.

Используем безразмерные величины (2.55), а также параметр

$$c = \frac{a}{b}, \quad (2.71)$$

характеризующий отношение внутреннего и внешнего радиусов области, занятой жидкости.

Решая квадратное уравнение (2.69) относительно p_0 и переходя к безразмерным величинам, получим

$$P_0 = \frac{B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4B_1K}}{2B_1}, \quad (2.72)$$

где

$$B_1 = 2\beta \left\{ 1 - c + \sqrt{1 - c^2} \left(\arcsin c - \frac{\pi}{2} \right) \right\},$$

$$B_2 = \frac{\beta^{2n}}{\pi} \left\{ \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} c^{2n} - 1 \right) \left(\arcsin c - \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{1-c^2} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} c^{2k-1} \right\}$$

(знак “-” перед знаком радикала выбран потому, что при $K = 0$ должно выполняться условие $P_0 = 0$, следующее из физического смысла задачи)

Уравнение (2.70) с учетом (2.55), (2.71) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} V_0 = 2\beta^{2n+2} & \left\{ \frac{(2n)!!(2n-1)}{(2n+1)!!} c^{2n+2} \sqrt{1-c^2} + \frac{\sqrt{1-c^2}}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} c^{2k+1} + \right. \\ & \left. - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} c^{2n} - \frac{1}{n+1} \right] \arccos c \right\} - \\ & - \frac{4\pi}{3} P_0 \beta^3 \left[4 - 3c - c^3 - 3\sqrt{1-c^2} \arccos c \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

Подставляя (2.72) в (2.73), получим уравнение, содержащее неизвестные β и c . Это уравнение решалось численно относительно β при заданных c , затем согласно (2.72) определялось безразмерное давление в жидкости P_0 . После этого остальные безразмерные характеристики задачи находились из следующих соотношений, полученных согласно выражениям (2.66), (2.67), (2.64) и (2.65) с учетом (2.55), (2.71)

$$\begin{aligned} P(\rho) = \frac{(\beta c)^{2n-1}}{\pi^2} & \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \sqrt{1-\rho^2} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \rho^{2(n-k)} - \\ & - P_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} c \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-c^2}} \right), \quad \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$U_z(r) = \frac{2}{\pi} \left((\rho\beta c)^{2n} + \delta \right) \arcsin \frac{1}{\rho} + \frac{2(\beta\rho)^{2n}}{\pi} \sqrt{\rho^2 - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \rho^{2(n-k)} -$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 4(P_0\beta \left\{ \mathbf{E}(c\rho) - \mathbf{E}\left(\arcsin \frac{1}{\rho}, c\rho\right) \right\}), & 1 < \rho \leq \frac{1}{c} \\ 4P_0\rho\beta c \left\{ \mathbf{E}\left(\frac{1}{\rho c}\right) - \mathbf{E}\left(\arcsin c, \frac{1}{\rho c}\right) - \right. \\ \left. - \left[1 - \left(\frac{1}{\rho c}\right)^2 \right] \left[\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho c}\right) - \mathbf{F}\left(\arcsin c, \frac{1}{\rho c}\right) \right] \right\}, & \rho > \frac{1}{c} \end{array} \right. \quad (2.75)$$

$$\delta = -\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} (\beta c)^{2n} + 2\pi P_0\beta \sqrt{1-c^2} \quad (2.76)$$

$$Q = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{4n(\beta c)^{2n+1}}{\pi} - 2P_0\beta^2 (\arccos c + c\sqrt{1-c^2}) \quad (2.77)$$

Последнее соотношение служит для определения нагрузки Q , соответствующей выбранному значению C . Если задана величина нагрузки Q , неизвестные величины β и C могут быть определены на основании решения системы уравнений (2.73) и (2.77).

Заметим, что случай $c=0$ соответствует контакту поверхностей штампа и полупространства в одной точке. Полагая $c=0$ в соотношениях (2.72) и (2.73), получим выражения, совпадающие с (2.62) и (2.63) соответственно.

Таким образом, решение задачи сводится к численному решению нелинейного алгебраического уравнения или системы из двух уравнений. При $\beta \leq \beta^*$ (поверхности, разделенные мениском) решение задачи задается соотношениями (2.56)–(2.59), а при $\beta > \beta^*$ (контакт поверхностей) — соотношениями (2.72)–(2.77). В случае точечного контакта $\beta = \beta^*$ результаты совпадают, т.е., полученное решение непрерывно.

2.2.3. Получение упрощенных решений

Предположение малости деформаций полупространства вне области контакта. Если пренебречь упругими деформациями полупространства вне области контакта по сравнению с формой штампа, т.е., считать, что $|u(r) - u(a)| \ll |f(r) - f(a)|$ для $r \geq a$, то условия (2.48) и (2.52) для случая контакта поверхностей приводятся к более простому виду:

$$P_0 = \frac{2K}{\beta^{2n}(1 - \gamma^{2n})}, \quad (2.78)$$

$$\beta = \left[\frac{V_0(n+1)}{\pi(1 - (n+1)\gamma^{2n} + n\gamma^{2n+2})} \right]^{\frac{1}{2n+2}} \quad (2.79)$$

Соотношения (2.78), (2.79) совместно с (2.74)-(2.77) дают аналитическое решение задачи в параметрическом виде для случая контакта поверхностей.

Использование модели Винклера. Решение задачи значительно упрощается, если для описания упругих свойств полупространства используется модель упругого основания Винклера. В этом случае уравнение (2.6), связывающие нормальные смещения и давления на границе упругого полупространства, заменяется простым линейным соотношением

$$u_z(r) = kp(r). \quad (2.80)$$

Остальные соотношения, выписанные при постановке задачи, остаются справедливыми.

Сначала рассмотрим случай, когда поверхности разделены жидкостью, $h(0) > 0$. После несложных преобразований получим решение задачи в виде

$$P_0 = \frac{2K}{\kappa}, \quad (2.81)$$

$$\delta = P_0 - \beta^{2n} + \kappa, \quad (2.82)$$

$$Q = -\pi\beta^2 P_0. \quad (2.83)$$

Здесь и далее при описании модели Винклера использованы безразмерные параметры $P_0 = kp_0 A^{1/(2n-1)}$, $Q = kqA^{3/(2n-1)}$, и $K = k\gamma_0 A^{2/(2n-1)}$. Остальные безразмерные величины определяются согласно (2.55), (2.71).

Теперь рассмотрим случай контакта поверхностей, $h(0) = 0$. В этом случае решение задачи после преобразований приводится к виду

$$V_0 = \pi\beta^{2n+2} \left(\frac{1 + nc^{2n+2}}{n+1} - c^{2n} \right), \quad (2.84)$$

$$P_0 = \frac{2K}{\beta^{2n}(1-c^{2n})}, \quad (2.85)$$

$$Q = -\pi \left(\beta^2 P_0 - \frac{n(c\beta)^{2n+2}}{n+1} \right), \quad (2.86)$$

$$\delta = P_0 - (c\beta)^{2n}. \quad (2.87)$$

Полученная система из четырех уравнений (2.84)–(2.87) содержит четыре неизвестных параметра: величина давления в жидкости P_0 , отношение внутреннего и внешнего радиусов области мениска C , внешний радиус области мениска β и расстояние δ между телами. Видно, что первые три уравнения (2.84)–(2.86) системы независимы от уравнения (2.87) и могут быть приведены к одному уравнению относительно параметра C . В общем случае штампа произвольной формы ($n > 1$) это уравнение решается численно.

При $n = 1$, то есть для штампа параболической формы ($f(r) = Ar^2$), система уравнений (2.84)–(2.87) решается аналитически

$$P_0 = K \sqrt{\frac{2\pi}{V_0}}, \quad \beta^2 = \sqrt{\frac{2V_0}{\pi}} \left(1 + \frac{K\pi}{V_0} \right) - 2 \left(\frac{Q}{\pi} + \frac{\pi K^2}{V_0} + 2K \right)^{1/2},$$

$$c^2 = 1 - \sqrt{\frac{2V_0}{\pi}} \beta^{-2}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2V_0}{\pi}} \left(1 + \frac{K\pi}{V_0} \right) - \beta^2.$$

В случае точечного контакта штампа и упругого основания Винклера соответствующий радиус β^* области, занятой мениском жидкости, определяется на основании соотношений (2.1) при $h(0) = 0$, (2.80) и (2.82). В результате имеем

$$\beta^* = \left(\frac{(n+1)V_0}{\pi} \right)^{1/(2n+2)}. \quad (2.88)$$

Таким образом, при $\beta \leq \beta^*$ (поверхности, разделенные жидкостью) использование модели Винклера дает решение в виде (2.81)–(2.83). При $\beta > \beta^*$ (контакт поверхностей) соответствующее решение имеет вид (2.84)–(2.87). При $\beta = \beta^*$ (точечный контакт) эти решения совпадают.

Случай жесткого полупространства. Соотношение (2.80) при $k = 0$, т.е. $u_z(r) = 0$, описывает жесткое полупространство. Полагая $u_z(r) = 0$ в соотношениях (2.1), (2.49), (2.51), (2.6) и (2.52) получим решение

$$\delta = -\beta^{2n} + \kappa, \quad (2.89)$$

$$\frac{qA^{1/(2n-1)}}{\gamma_0} = -\frac{2\pi\beta^2}{\kappa}, \quad (2.90)$$

описывающее взаимодействие жестких штампа и полупространства при наличии капиллярной адгезии.

2.2.4. Результаты расчетов

Численное решение задачи строилось при различных значениях следующих безразмерных параметров: K , зависящего от поверхностного натяжения жидкости и упругих свойств полупространства, V , определяемого объемом жидкости в мениске и геометрией штампа, Q , характеризующего приложенную к штампу нагрузку, а также n , описывающего форму штампа. При этом исследовались безразмерные функции контактного давления $P(\rho)$ и смещений границы упругого полупространства $U_z(\rho)$, а также безразмерные величины давления в жидкости P_0 , радиуса области контакта α , внешнего радиуса β кольцевой области, занятой жидкостью, и расстояния между телами δ .

Для реальных поверхностей со средним радиусом вершин выступов 0.12 мм и эффективным модулем упругости 75.6 ГПа, покрытых пленками воды толщиной 1 – 100 нм с поверхностным натяжением 0.07 Н/м (данные из работы [185], относящиеся к стеклянным дискам с углеродным покрытием, взаимодействующим с магнитной головкой во влажной атмосфере) безразмерный объем жидкости V_0 в мениске вокруг каждого выступа составляет в среднем 10^{-6} – 10^{-4} , а параметр K имеет порядок 10^{-9} . Эти оценки получены в предположении параболической формы выступов ($n=1$). Для более мягких тел (модуль упругости порядка нескольких ГПа) параметр K составляет примерно 10^{-5} – 10^{-4} . При численных расчетах использованы значения параметров, близкие к указанным диапазонам.

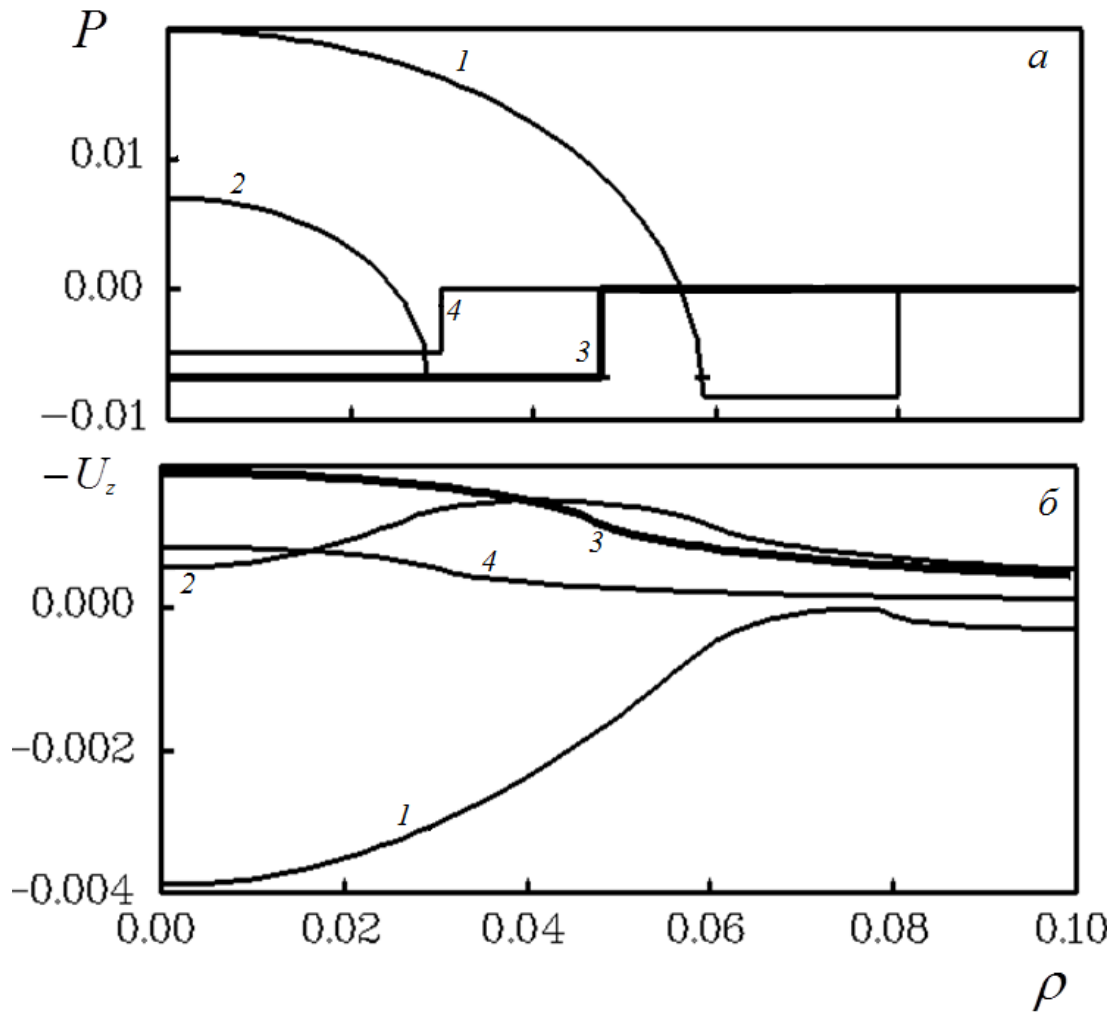


Рис. 2.3. Распределения безразмерных давлений $P(\rho)$ на границе упругого полупространства (а) и форма границы полупространства $-U_z(\rho)$ (б) при различных безразмерных нагрузках Q

На рис. 2.3 представлены распределения давлений на границе полупространства $P(\rho)$ и упругих смещений $-U_z(\rho)$ при различных значениях безразмерной нагрузки: $Q = 4.05 \cdot 10^{-5}$ (кривые 1), $Q = -1.35 \cdot 10^{-5}$ (кривые 2), $Q = -4.74 \cdot 10^{-5}$ (кривые 3), и $Q = -5.23 \cdot 10^{-5}$ (кривые 5). Данные результаты получены для $n = 1$, $K = 10^{-4}$ и $V_0 = 10^{-4}$. Кривые 1 и 2 соответствуют контакту штампа с полупространством, кривые 4 — поверхностям, разделенным мениском. Кривые 3 (жирные линии) построены для случая точечного контакта, т. е. $\beta = \beta^*$.

Результаты, представленные на рис. 2.3,а показывают, что контактные давления $P(\rho)$ являются отрицательными в определенной области (по краям области контакта). Это означает, что на указанных участках действуют давления, меньшие по величине атмосферного. По мере того, как нагрузка Q уменьшается и становится отрицательной, область отрицательных давлений увеличивается. Начиная с некоторого значения Q , давления становятся отрицательными во всей области контакта (кривая 3). Видно также, что при уменьшении нагрузки Q величины контактных давлений, абсолютная величина давления в жидкости P_0 и размер области контакта Ω_c уменьшаются.

Рис. 2.3,б, иллюстрирующий форму упругого полупространства при различных нагрузках, показывает, что наличие мениска приводит к существенному искривлению границы упругого полупространства. На внешней границе $\rho = \beta$ кольцевой области Ω_f , занятой жидкостью, имеет место разрыв производной от формы поверхности упругого полупространства.

На рис. 2.4 приведены графики зависимости радиуса области контакта α и ширины кольцевой области, занятой жидкостью ($\beta - \alpha$) от нагрузки Q для случая $n = 1$ при $K = 2 \times 10^{-4}$ (кривые 1) и $K = 10^{-4}$ (кривые 2). Сплошные линии соответствуют значению $V_0 = 10^{-4}$, штриховые — $V_0 = 2 \times 10^{-4}$. Представленные зависимости позволяют заключить, что величины области контакта и внедрения штампа отличны от нуля при некоторых отрицательных нагрузках и превосходят по величине соответствующие решению задачи Герца (при отсутствии адгезии) при положительных нагрузках. Этот эффект тем заметнее, чем больше параметр K . Увеличение объема жидкости приводит к уменьшению области контакта, при этом кольцо жидкости становится шире.

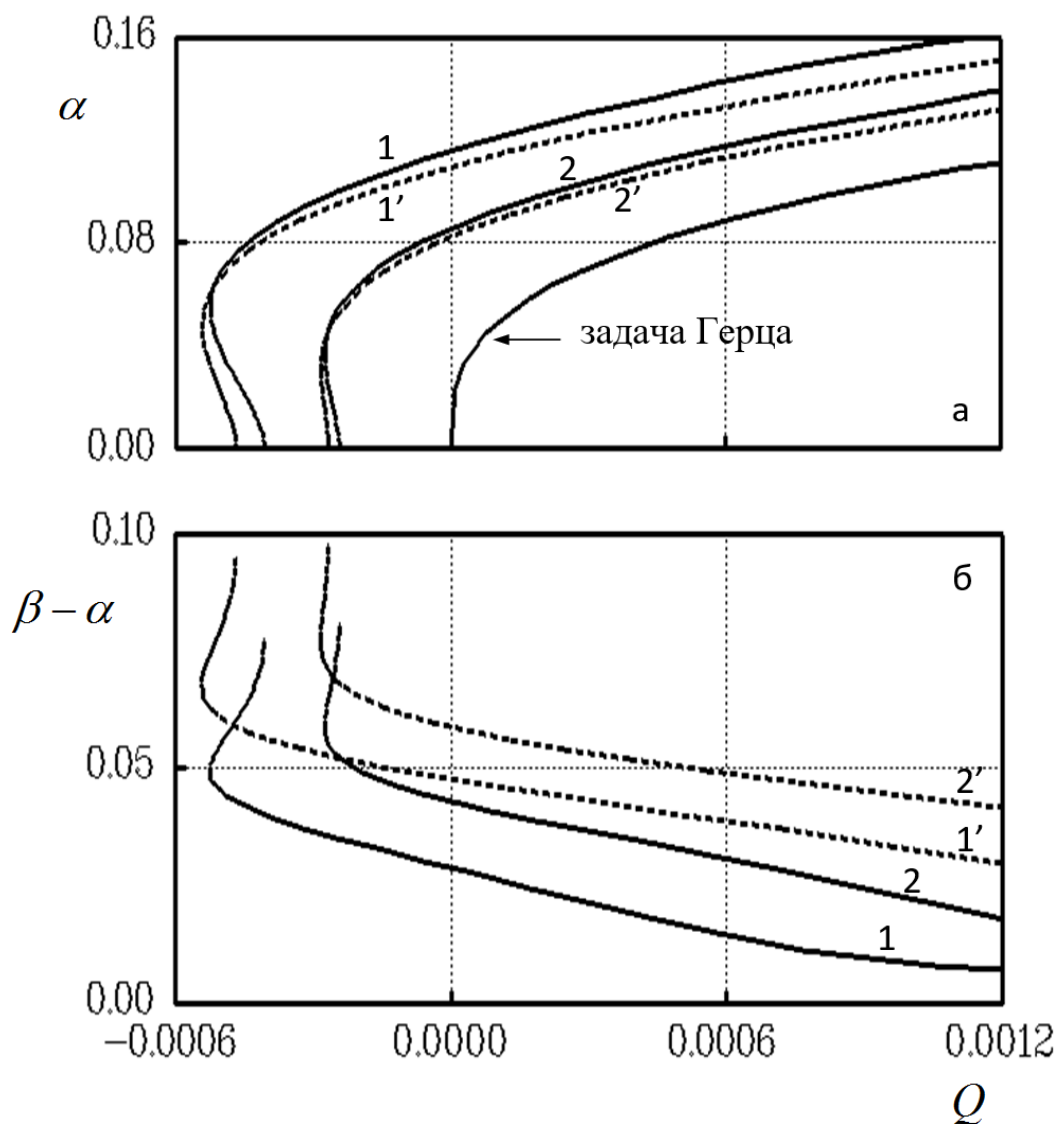


Рис. 2.4. Зависимости безразмерного радиуса α области контакта (а) и ширины $\beta - \alpha$ кольцевой области, занятой жидкостью (б) от нагрузки Q

Характерной особенностью данных, а также представленных ниже графиков является неоднозначность определения контактных характеристик в определенной области отрицательных значений нагрузки.

Зависимости безразмерной нагрузки Q и величины давления в жидкости P_0 от расстояния между телами δ приведены на рис. 2.5, а и б соответственно. Кривые 1,2 соответствуют безразмерной величине объема жидкости в мениске $V = 10^{-5}$, кривые 1',2' — величине $V = 5 \cdot 10^{-5}$. Кривые 1,1' получены при $K = 4 \cdot 10^{-5}$, кривые 2,2' — при $K = 8 \cdot 10^{-5}$.

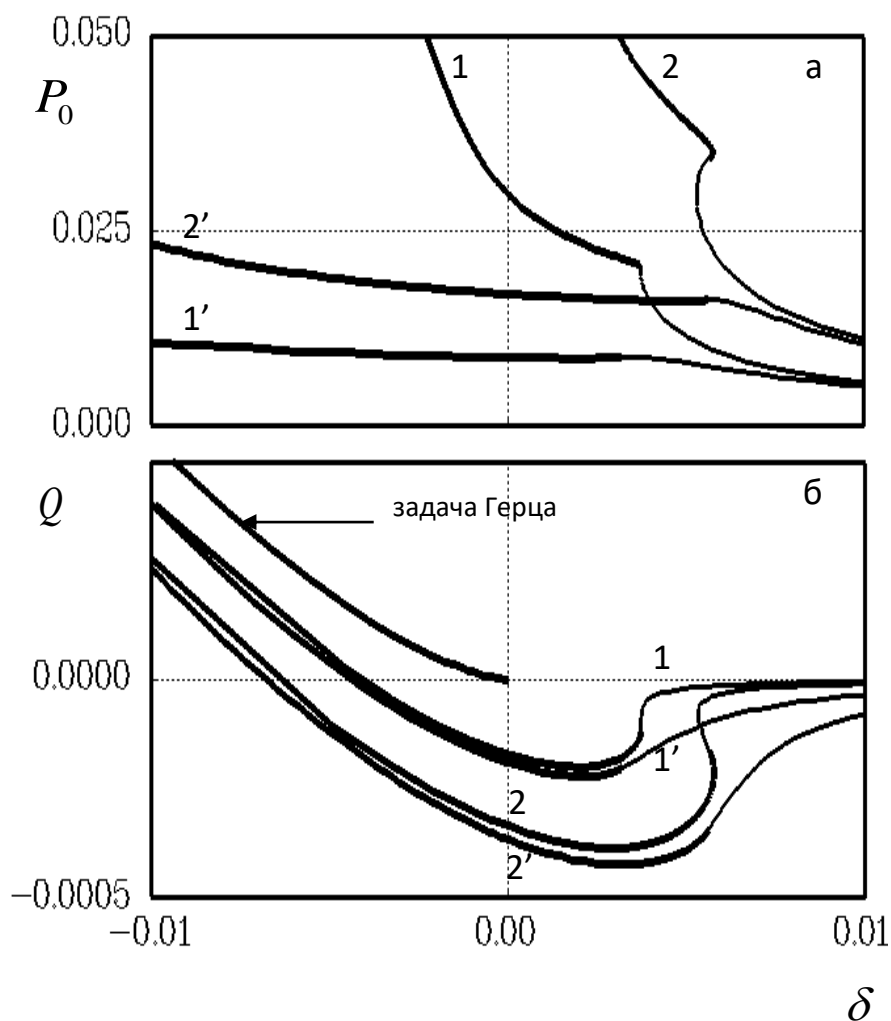


Рис. 2.5. Зависимости абсолютной величины давления в жидкости P_0 (а) и безразмерной нагрузки Q (б) от расстояния между телами δ при различных объемах V_0 жидкости в мениске и параметра K

Отдельной кривой показано решение, соответствующее значению $K = 0$, т.е. контакту при отсутствии адгезии (решению задачи Герца). Здесь и далее толстые участки кривых соответствуют контакту поверхностей, а тонкие участки — поверхностям, разделенным мениском.

Увеличение параметра K , что соответствует уменьшению модуля упругости полупространства или увеличению поверхностного натяжения жидкости, приводит к увеличению абсолютной величины давления в жидкости P_0 , а также абсолютной величины отрицательных нагрузок Q , при которых контакт еще существует. При увеличении объема жидкости V_0

абсолютная величина давления в жидкости P_0 резко уменьшается, особенно в случае контакта поверхностей. Зависимость нагрузки Q от расстояния δ между телами имеет точку минимума. Кроме того, при некоторых значениях параметров (при достаточно малом безразмерном объеме V_0 жидкости в мениске) эта зависимость оказывается неоднозначной.

Влияние формы штампа. Представленные выше результаты получены для случая, когда штамп имеет форму параболоида вращения ($n = 1$). Такая форма штампов наиболее часто используется при моделировании неровностей на поверхности шероховатых тел. Тем не менее, полученные соотношения позволяют построить решение задачи для штампа, форма которого описывается степенной функцией $f(r) = Ar^{2n}$ произвольной степени $2n$. Ниже проведено сравнение результатов, полученных для двух форм штампа: $f(r) = Ar^2$ ($n = 1$, параболоид вращения) и $f(r) = Ar^4$ ($n = 2$).

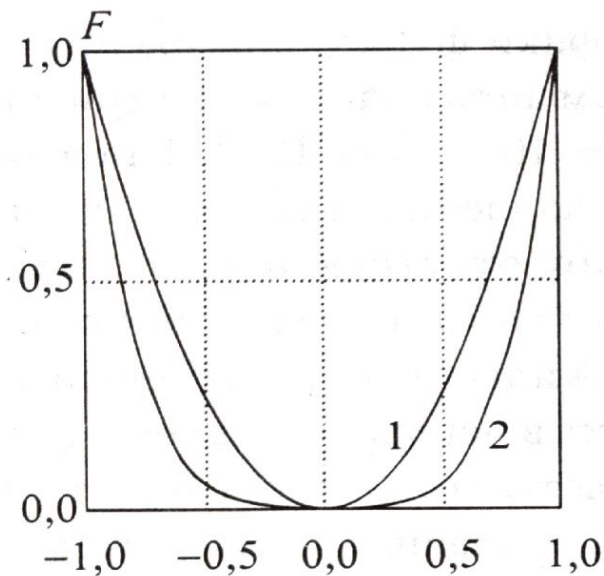


Рис. 2.6. Профили штампа $F(\rho)$ при $n = 1$ и $n = 2$

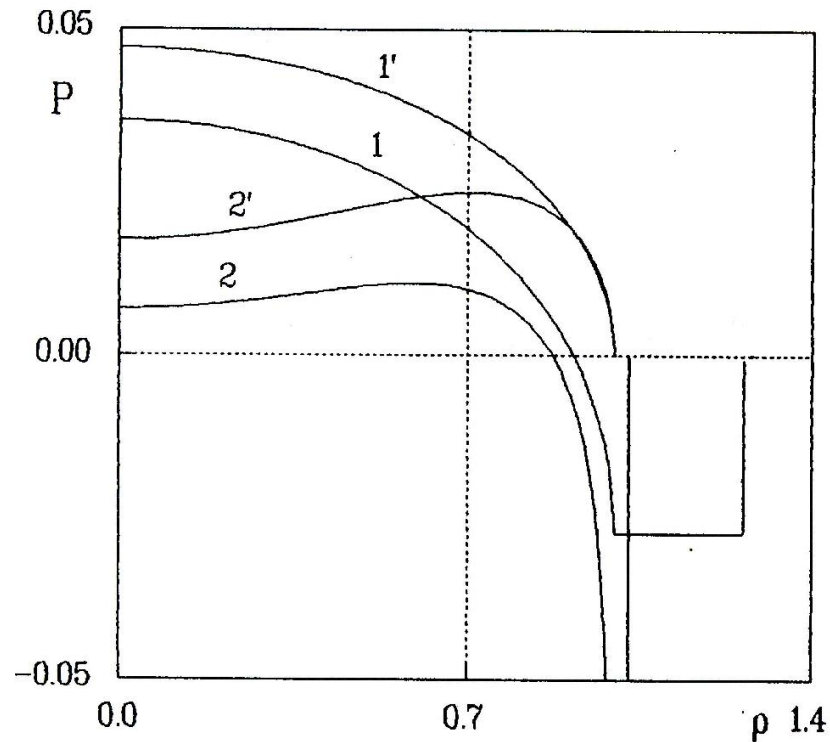


Рис. 2.7. Распределения контактных давлений $P(\rho)$ для двух различных форм штампа: $n=1$ и $n=2$ (для кривой 2 $p_0 = -2.05$)

Безразмерные профили этих штампов $F(\rho) = \rho^{2n}$ показаны на рис. 2.6 кривыми 1 ($n=1$) и 2 ($n=2$).

На рис. 2.7 представлены графики функции безразмерного давления в контакте для двух различных форм штампа, а именно: $n=1$ (кривая 1) и $n=2$ (кривая 2), при $Q=0$, $K=10^{-4}$, $V_0=10^{-4}$. Кривые 1', 2' соответствуют распределениям давлений для тех же величин радиуса области контакта a при отсутствии жидкости. Сравнение зависимостей свидетельствует о том, что при одной и той же площади контакта давления под штампом при наличии мениска меньше, чем при сухом контакте. Форма штампа существенно влияет на эпюру распределения давлений, а также ширину кольцевой области, занятой жидкостью. Результаты показывают, что чем более пологой является форма вершины штампа (с увеличением n), тем

больше абсолютная величина капиллярного давления в жидкости P_0 и меньше относительная толщина кольца жидкости $\frac{b}{a}$. Это объясняется тем, что для штампов с более плоской вершиной величина зазора $h(r)$ меньше, а значит, согласно соотношению (2.48), капиллярное давление в жидкости больше.

Графики зависимости параметра $Q/K = qA^{2n-1} / \gamma_0$, определяемого нормальной нагрузкой на штамп q и поверхностным натяжением жидкости γ_0 , от расстояния δ между телами приведены на рис. 2.8 для значения объема жидкости в мениске $V_0 = 10^{-3}$. Рис. 2.8, а соответствует $n = 1$ (штамп в форме параболоида вращения) и $K = 10^{-3}$. Рис. 2.8, б соответствует $n = 2$ и $K = 10^{-4}$. Сравнение результатов, полученных для различных форм штампов, позволяет заключить, что чем более пологой является форма вершины штампа (т.е., чем больше параметр n), тем сильнее проявляются эффекты, связанные с наличием мениска.

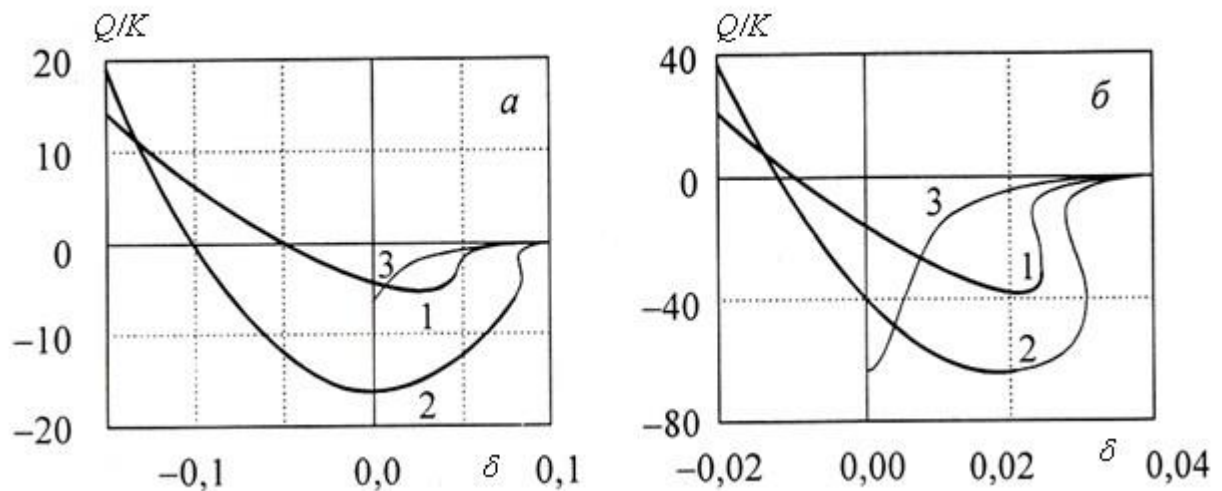


Рис. 2.8. Зависимость параметра Q/K от расстояния δ между телами при $n = 1$ (а) и $n = 2$ (б). Кривые 1 соответствуют модели упругого полупространства, 2 — модели Винклера, 3 — жесткому основанию.

Зависимости, приведенные на рис. 2.8, позволяют также сравнить результаты, полученные при использовании упрощенных моделей для описания упругих свойств полупространства. Кривые 1 на этих рисунках построены в соответствии с точными соотношениями (2.58)–(2.61) и (2.72)–(2.77) для упругого полупространства, а кривые 2 получены с помощью соотношений (2.81)–(2.87) для упрощенной модели Винклеровского основания. Кривые 3 соответствуют соотношениям (2.89) и (2.90), описывающих взаимодействие жестких штампа и основания. Результаты показывают, что учет упругости взаимодействующих тел существенно влияет на поведение исследуемых характеристик. В частности, именно учет упругости приводит к неоднозначной и немонотонной зависимости нагрузки от расстояния между телами. Зависимости, полученные с помощью модели Винклера, качественно соответствуют результатам, рассчитанным по точным соотношениям. Однако количественно эти результаты расходятся, особенно при больших величинах параметра K .

Анализ показывает также, что модель Винклера позволяет получить качественно верные зависимости нагрузки Q от расстояния δ между телами для различных форм штампа (т.е., различных n). Но в случае $n > 1$ модель Винклера дает качественно неверные результаты для некоторых других характеристик, например, зависимости капиллярного давления в жидкости P_0 от расстояния между телами δ .

На рис. 2.9 изображены зависимости безразмерного радиуса области контакта α от безразмерной силы Q (а) и силы Q от безразмерного расстояния между телами δ (б) при $n=1$, $V_0 = 10^{-4}$ и $K = 2 \cdot 10^{-4}$ (кривые 1 и 1'), $K = 10^{-4}$ (кривые 2 и 2'), $K = 10^{-5}$ (кривые 3, 3'). Сплошные линии соответствуют решению задачи в случае контакта поверхностей для точной модели упругого основания и рассчитаны по соотношениям (2.72)–(2.77).

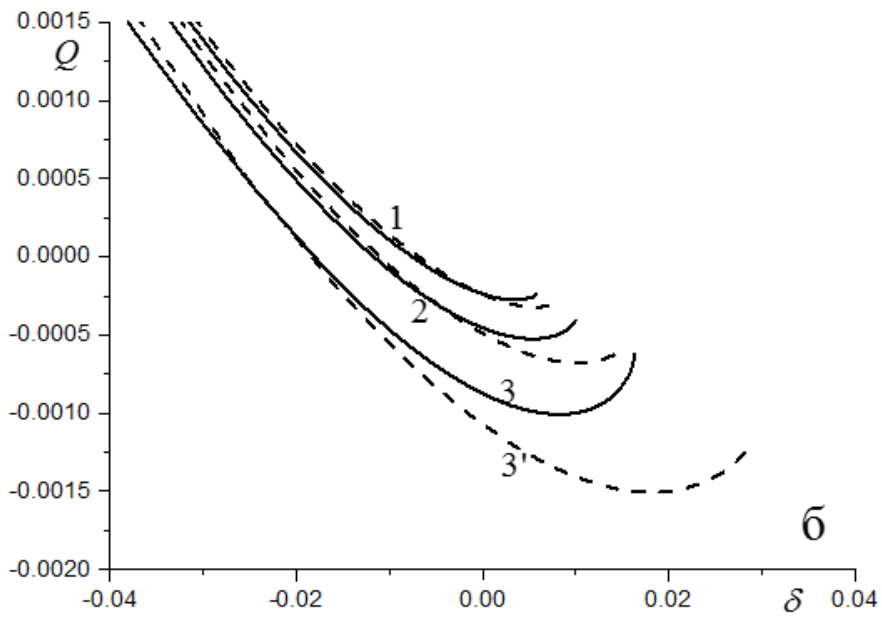
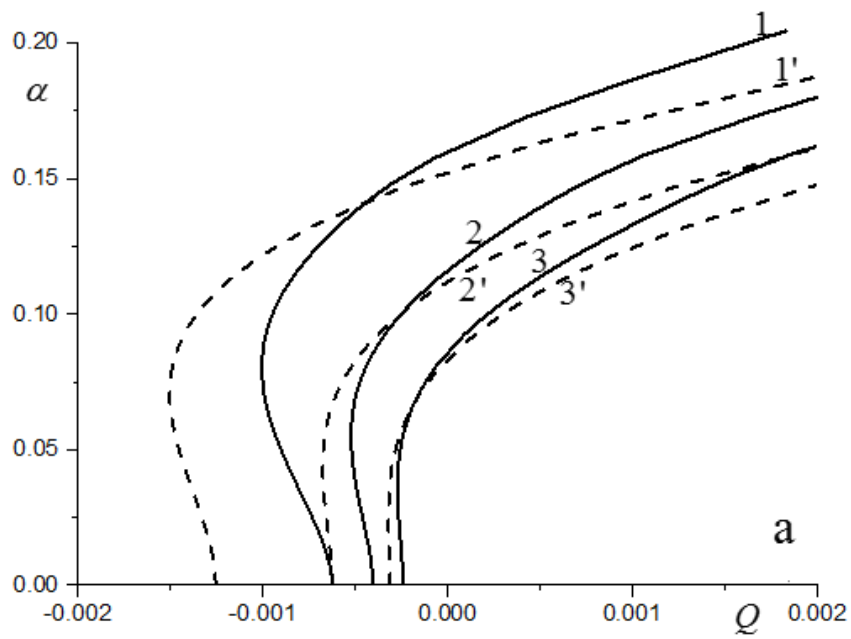


Рис. 2.9. Зависимость радиуса области контакта от нагрузки (а) и нагрузки от расстояния между телами (б). Сплошные кривые – модель упругого основания, пунктирные – упрощенная модель.

Пунктирными линиями изображены результаты, полученные с использованием упрощенных соотношений (2.78), (2.79) в предположении малости деформаций упругого полупространства вне области контакта со штампом. Результаты показывают, что при упрощенном подходе (2.78), (2.79) давление в мениске P_0 не зависит от внешней нагрузки и может существенно отличаться от давления, рассчитанного по точной модели, особенно при больших значениях нагрузки Q . С другой стороны, при больших значениях нагрузки адгезия перестает существенно влиять на контактные характеристики, и результаты становятся близки к решению задачи Герца. Результаты показывают, что упрощенный подход (2.78), (2.79) дает значительную ошибку при описании давлений на границе упругого полупространства и размера области контакта, однако он позволяет достаточно адекватно описывать зависимость нагрузки от расстояния между поверхностями при достаточно малых значениях параметра K , т.е. в случае достаточно жесткого полупространства.

Расчеты согласно упрощенному подходу (2.78), (2.79), проведенные при $n > 1$ показывают значительное не только количественное, но и качественное расхождение с результатами, полученными согласно точной модели упругого полупространства. В частности, расчеты по упрощенным соотношениям показывают, что давление в мениске P_0 всегда уменьшается с увеличением силы Q . В результатах же, полученных по точным соотношениям, такое уменьшение имеет место лишь при достаточно малых Q , а затем происходит увеличение P_0 с возрастанием нагрузки.

Таким образом, упрощенный подход (2.78), (2.79), предполагающий малость деформаций границы упругого полупространства вне области контакта, применим для случая параболического штампа $n = 1$, относительно жесткого полупространства и относительно большого размера мениска. Этот подход является аналогом модели ДМТ (Дерягина-Муллера-Топорова) [111, 40] для случая капиллярной адгезии. Подробнее о применимости

упрощенных моделей при описании зависимости нагрузки от расстояния между телами при адгезионном взаимодействии будет рассказано в Главе 4.

В заключение отметим, что результаты, полученные в данном разделе для взаимодействия штампа с упругим полупространством при наличии мениска жидкости, распространяются и на случай, когда оба взаимодействующих тела являются упругими. Для этого величину $\frac{1-\nu^2}{E}$, характеризующую упругие свойства полупространства, необходимо заменить на приведенный модуль упругости взаимодействующих тел $1/E^* = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$. При этом функцию $f(r)$ следует рассматривать как сумму $f(r) = f_1(r) + f_2(r)$, где функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$ описывают формы поверхности двух взаимодействующих тел.

2.3. Молекулярная адгезия при взаимодействии упругих тел

Другим примером применения полученного в разделе 2.1 решения контактной задачи при наличии пригрузки в виде адгезионного давления является случай молекулярной адгезии, когда взаимодействующие поверхности притягиваются друг к другу за счет межмолекулярных сил.

При постановке задачи о молекулярной адгезии будем придерживаться аппроксимации Дерягина [40], согласно которой между поверхностями существует площадка контакта, а вне этой площадки между противоположащими точками поверхностей действует сила, равная по величине силе взаимодействия между двумя плоскопараллельными поверхностями. Эта сила зависит от величины зазора между поверхностями и имеет вид, например, (1.3), следующий из межмолекулярного потенциала Леннард-Джонса (1.1).

2.3.1. Обобщение модели Можи-Дагдейла на случай формы тел, описываемой степенной функцией

Рассмотрим взаимодействие двух упругих тел, обладающих поверхностной энергией. Полагаем, что тела осесимметричны и форма их поверхности описывается степенной функцией четной степени

$$f(r) = f_1(r) + f_2(r) = Ar^{2n} \quad (2.93)$$

Тела прижаты друг к другу внешней силой q . Величина зазора между поверхностями $h(r)$ определяется выражением (2.1).

Чтобы учесть молекулярное притяжение взаимодействующих тел, рассмотрим область

$$\Omega_a = \begin{cases} 0 \leq r \leq b, & h(0) > 0 \\ a \leq r \leq b, & h(0) = 0 \end{cases} \quad (2.94)$$

где b — некоторое расстояние, $b \geq a$. Будем считать, что внутри этой области к взаимодействующим поверхностям приложено постоянное отрицательное давление $-p_0$, обусловленное их адгезионным притяжением.

Следовательно, имеем контактную задачу с граничными условиями

$$p(r) = -p_0, \quad r \in \Omega_a; \quad h(r) = 0, \quad r \in \Omega_c \quad (2.95)$$

Последнее условие представляет собой условие контактирования и имеет место только в случае контакта поверхностей ($h(0) = 0$). В отсутствие контакта поверхностей ($h(0) > 0$) второе условие (2.95) не входит в систему уравнений, описывающих задачу.

Кроме того, во всех случаях выполняется условие равновесия

$$q = 2\pi \int_0^b rp(r)dr \quad (2.96)$$

Необходимо также задать условия для определения величин p_0 и b , которые характеризуют адгезионные свойства поверхностей. Для этого

рассмотрим потенциал молекулярного взаимодействия поверхностей в форме Леннарда–Джонса (рис. 1.1, кривая 1). Следуя модели Можи-Дагдейла [151], аппроксимируем эту зависимость кусочно-постоянной функцией в форме ступеньки. Эта функция иллюстрируется кривой 2 на рис. 1.1. Тогда величина $-p_0$ имеет смысл высоты этой ступеньки, а максимальная величина зазора, при которой адгезионное взаимодействие еще имеет место, равна $h(b) = h_0$. Удельная работа адгезии w_a взаимодействующих поверхностей определяется соотношением (1.11), из которого следует условие для определения b :

$$h(b) = \frac{w_a}{p_0} \quad (2.97)$$

Характеристики адгезионного взаимодействия w_a и p_0 считаются заданными.

Итак, задача об адгезии сухих поверхностей определяется системой уравнений (2.93)–(2.97), которую следует дополнить соотношением (2.6), связывающим упругие перемещения с нормальными давлениями на границе упругого полупространства для случая осесимметричного нагружения. Если положить $w_a = 2\gamma_0$, то представленная система уравнений совпадет по форме с уравнениями для задачи о капиллярной адгезии, представленной в п. 2.2.1. Отличие постановки задачи об адгезии сухих поверхностей заключается в том, что величина адгезионного давления p_0 считается заданной и условие сохранения объема жидкости (2.52) не входит в систему уравнений.

Задача решается с помощью метода, изложенного в разделе 2.1 применительно к случаю, когда кусочно-постоянная аппроксимация адгезионного давления содержит только одну ступеньку. В случае отсутствия контакта, используя соотношения (2.45)–(2.47) для частного случая $N=1$, получим решение задачи в виде

$$h(r) = d - \frac{4p_0}{\pi E^*} b E \left(\frac{r}{b} \right) + A r^{2n} \quad (2.98)$$

$$p_0 \left(d - \frac{4p_0 b}{\pi E^*} + A b^{2n} \right) = w_a \quad (2.99)$$

$$q = -\pi b^2 p_0 \quad (2.100)$$

Соотношения (2.99) и (2.100) позволяют определить силу q , приложенную к телам, и расстояние между ними d как функции величины b , представляющей собой радиус области, в которой действует адгезионное давление $-p_0$. Величина зазора $h(r)$ между взаимодействующими телами при этом определяются выражением (2.98).

Полученное решение применимо при $b \leq b^*$. Величина b^* соответствует состоянию, при котором поверхности соприкасаются в одной точке ($h(0) = 0$). Из равенства (2.98) при условии $h(0) = 0$ и (2.99) получим уравнение для определения b^*

$$\frac{2(\pi - 2)p_0 b}{\pi E^*} + A b^{2n} = \frac{w_a}{p_0} \quad (2.101)$$

В случае контакта поверхностей применение метода, изложенного в разделе 2.1 позволяет получить следующие соотношения:

для силы, приложенной к взаимодействующим телам

$$q = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} 4E^* A n a^{2n+1} - 2p_0 b^2 \left(\phi + c \sqrt{1-c^2} \right), \quad c = \frac{a}{b} \quad (2.102)$$

для расстояния между телами

$$d = -\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} A a^{2n} + \frac{2p_0 b}{E^*} \sqrt{1-c^2} \quad (2.103)$$

а также уравнение, связывающее радиус a области контакта и внешний радиус b области, по которой действует адгезионное давление $-p_0$

$$\frac{2Aa^{2n}}{\pi} \left\{ \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{c^{2n}} \right] \phi + \sqrt{\frac{1}{c^2} - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} c^{-2(n-k)} \right\} p_0 +$$

$$+ \frac{4b}{\pi E^*} \left\{ 1 - c - \sqrt{1 - c^2} \phi \right\} p_0^2 + w_a = 0, \quad \phi = \arccos c \quad (2.104)$$

При заданной величине b это уравнение решается численно относительно a , после чего, согласно соотношениям (2.102) и (2.103), определяются сила q , действующая на тела, и расстояние между ними d . При этом контактные давления $p(r)$ и упругие смещения $u(r)$ границ взаимодействующих тел вне области контакта определяются выражениями (2.66) и (2.67), соответственно.

Заметим, что уравнение (2.104) при $a=0$ совпадает с уравнением (2.101) для определения величины b^* , соответствующей точечному контакту поверхностей.

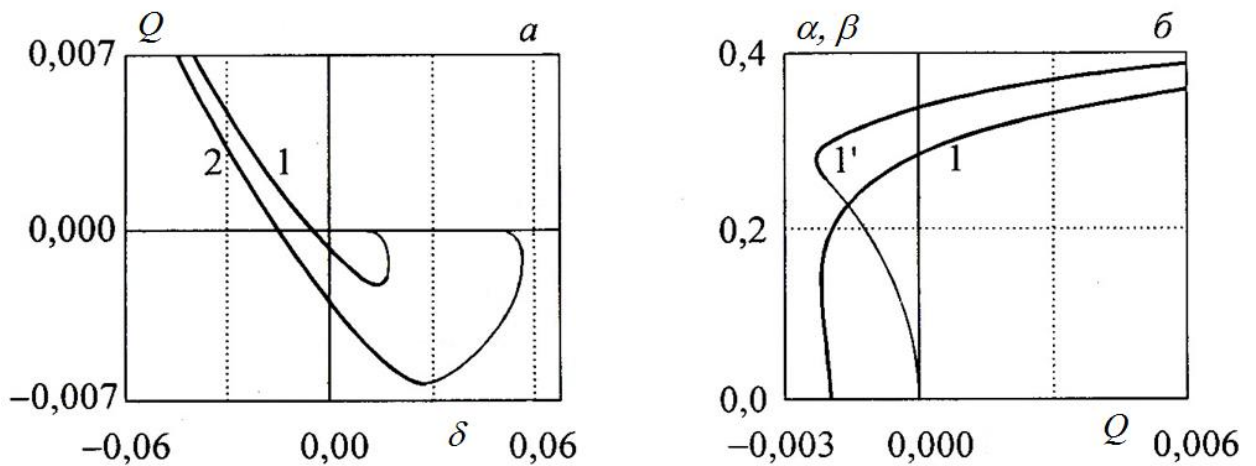


Рис. 2.10. Зависимость безразмерной нагрузки от расстояния между телами (а) и безразмерных радиусов областей контакта α и адгезии β области от безразмерной нагрузки (б)

Таким образом, решение задачи об адгезии, описываемой моделью Можи-Дагдейла, определяется соотношениями (2.98) - (2.100) при отсутствии контакта ($b < b^*$) и соотношениями (2.102)–(2.104), (2.66) и (2.67) при наличии контакта поверхностей ($b > b^*$), а величина b^* находится из уравнения (2.101). При этом заданными величинами считаются параметры A и n , определяющие форму поверхностей, приведенный модуль упругости E^* и характеристики адгезионного взаимодействия поверхностей p_0 и w_a .

На рис. 2.10, а приведены зависимости безразмерной нагрузки $Q = q / (\pi D^2 E^*)$ от безразмерного расстояния между телами $\delta = d / D$ ($D = A^{-1/(2n-1)}$ — характерный размер взаимодействующих тел) при $n = 2$ (форма взаимодействующих тел описывается функцией $f(r) = Ar^4$) и $E^* / p_0 = 1$. Толстые линии соответствуют контакту поверхностей, а тонкие — отсутствию контакта. Кривые 1 и 2 построены для двух различных значений безразмерной удельной работы адгезии $w_a / (p_0 D) = 1$ и $w_a / (p_0 D) = 2$ соответственно. Результаты показывают, что чем больше поверхностная энергия взаимодействующих тел, тем большие отрицательные нагрузки может выдержать адгезионный контакт.

На рис. 2.10, б представлены зависимости безразмерных радиусов областей контакта $\alpha = a / D$ и адгезии $\beta = b / D$ от безразмерной нагрузки Q . Приведенные графики построены при $n = 2$ и значениях параметров $w_a / (\pi D E^*) = 10^{-4}$, $p_0 / (\pi E^*) = 10^{-2}$, характеризующих соотношение адгезионных и упругих свойств взаимодействующих тел. Толстые линии соответствуют контакту поверхностей, тонкий участок кривой — отсутствию контакта. Результаты показывают, что молекулярное притяжение поверхностей приводит к увеличению размера области контакта по сравнению с решением задачи Герца, а также существованием контакта в некоторой области отрицательных нагрузок. При этом в области отрицательных нагрузок радиус области контакта, внешний радиус области

адгезионного притяжения и другие характеристики определены неоднозначно.

Анализ решения задачи показал, что наличие адгезии, связанной с молекулярным взаимодействием поверхностей, приводит к эффектам, которые аналогичны эффектам капиллярной адгезии: появление отрицательных давлений в контакте, увеличение размера области контакта, неоднозначность определения контактных характеристик в области отрицательных нагрузок. Кроме того, зависимость нагрузки, действующей на тела, от расстояния между ними оказывается немонотонной и неоднозначной. Это иллюстрируется на рис. 2.10,а, где приведены графики безразмерной нагрузки от расстояния между телами. При этом, в отличие от случая капиллярной адгезии неоднозначность зависимости нагрузки от расстояния имеет место при всех значениях параметров.

Полученное решение позволяет также исследовать влияние формы штампа на форму зависимости нагрузки от расстояния между телами. Примеры таких зависимостей приведены на рис. 2.12,а, где построены графики безразмерной нагрузки $q/(p_0 D^2)$ в зависимости от безразмерного расстояния $\delta = d/D$. Графики построены при следующих значениях безразмерных параметров: $E^*/p_0 = 1$ и $w_a/(p_0 D) = 10^{-6}$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют выступам различной формы: $n = 1, 2$ и 3. Соответствующая функция формы, $f(r) = f_1(r) + f_2(r) = Ar^{2n}$, показана на рис. 2.12,б для $n = 1, 2$ и 3 (кривые 1, 2 и 3).

Заметим, что решение задачи об адгезии сухих поверхностей в аналогичной постановке для случая взаимодействия штампа в форме параболоида вращения ($n = 1$) с упругим полупространством получено ранее Д. Можи [151]. Это решение, построенное только для случая контакта поверхностей, также указывает на немонотонность и неоднозначность зависимости нагрузки от расстояния между телами.

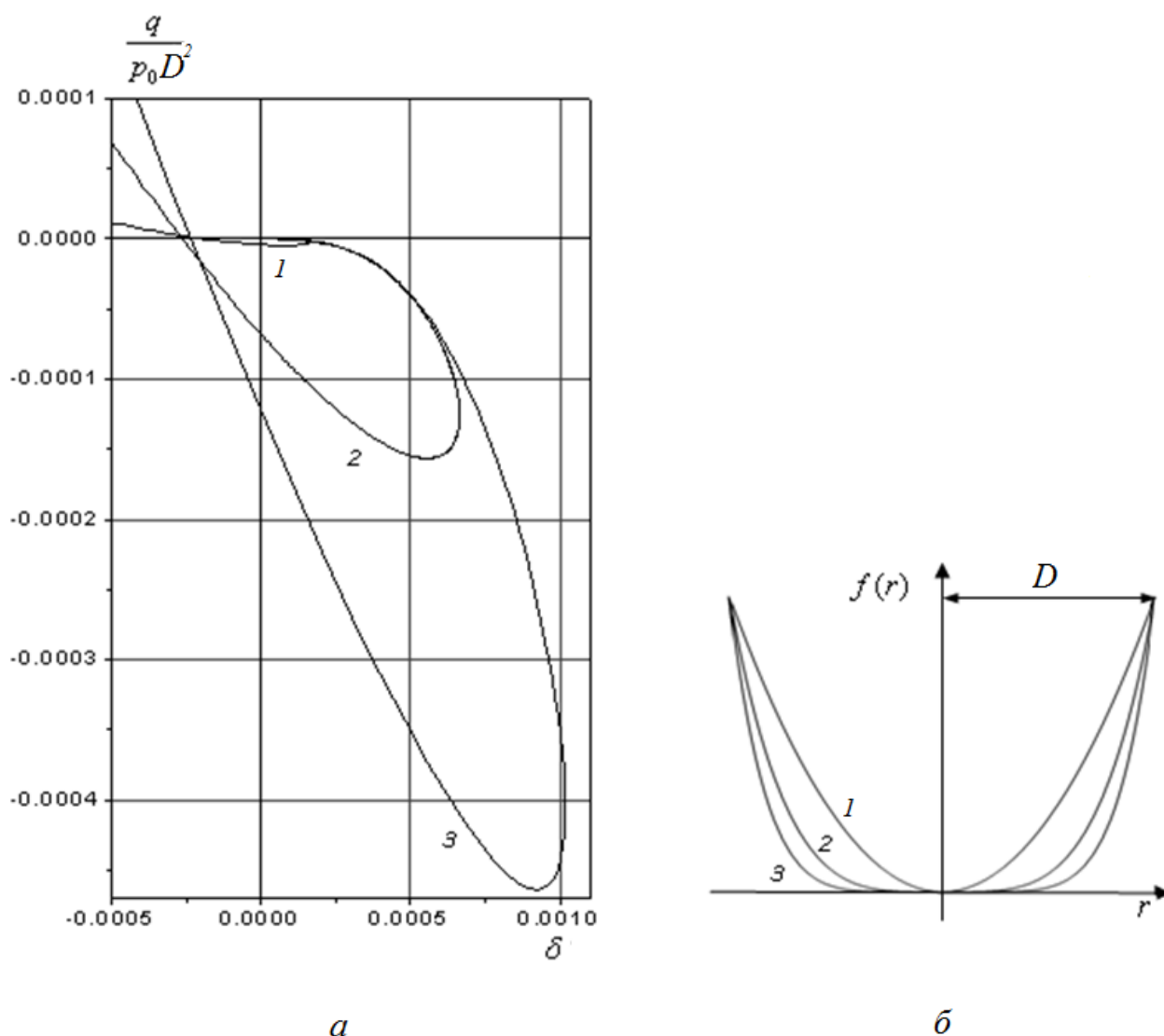


Рис. 2.11. Зависимости нагрузки от расстояния для выступов различной формы (а) и соответствующие профили выступов (б).

2.3.2. Потенциал межмолекулярного взаимодействия произвольного вида

Рассмотрим более общий случай, когда зависимость адгезионного давления p_a , действующего вне области контакта поверхностей, от величины расстояния между поверхностями не является константой, а описывается произвольной функцией. Например, функцией (1.3), следующей из потенциала межмолекулярного взаимодействия Леннард-Джонса. Эта функция $p_a(z)$ стремится к бесконечности при стремлении расстояния z к

нулю (рис.1.1, кривая 1). Это объясняется тем, что при определенной величине расстояния z поверхности вступают в контакт и дальнейшее сближение между ними становится невозможно. Следуя подходу, предложенному Мози [151,153], будем считать, что убывающая с увеличением z часть зависимости $p_a(z)$ соответствует действию упругих сил, а возрастающая – адгезионных. Таким образом, контакт соответствует точкам $z \leq z_m$, где z_m - расстояние, при котором зависимость $p_a(z)$ достигает минимума. При $z > z_m$ контакт между поверхностями отсутствует, и действует адгезионное притяжение.

Постановка задачи о взаимодействии двух осесимметричных упругих тел при наличии между ними адгезионного притяжения, заданного кусочно-постоянной функцией $p_a(r)$, представлена в разделе 2.1.1. На рис. 2.12 показана схема такого контактирования в случае штампа, форма которого описывается степенной функцией $f(r) = Ar^s$, и упругого полупространства, а также показан пример распределения контактного давления для такой задачи.

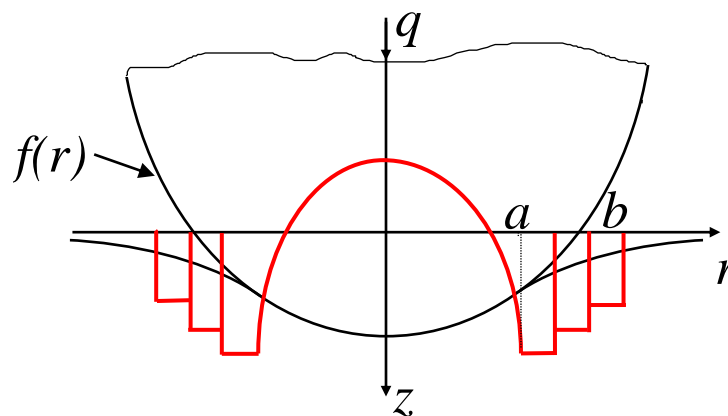


Рис. 2.12. Схема контактирования штампа с полупространством в случае молекулярного притяжения, заданного кусочно-постоянной функцией.

Решение этой контактной задачи получено в разделе 2.1.2 для случая контакта поверхностей и в 2.1.3 для случая разделенных поверхностей. Для того, чтобы применить это решение к случаю молекулярной адгезии,

необходимо заметить, что зависимость адгезионного давления от радиальной координаты, $p_a(r)$, на самом деле неизвестна, и, соответственно, неизвестной является кусочно-постоянная функция (2.4). Известной и заданной зависимостью, которая определяется физическим законом молекулярного взаимодействия поверхностей, является зависимость адгезионного давления от зазора между поверхностями h . Величина зазора, в свою очередь, является функцией радиальной координаты r и, согласно (2.1), зависит от упругих перемещений поверхностей взаимодействующих тел $u(r)$. Таким образом, зависимость $p_a(r)$ определяется через функцию зазора:

$$p_a(r) \equiv p_a(h(r)) \quad (2.105)$$

Полученные соотношения позволяют при заданном законе адгезионного взаимодействия $p_a(h)$ находить решение контактной задачи, в частности, зависимость силы q от расстояния d между телами. Для этого задается разбиение b_j , $j=1, \dots, N$ области адгезионного взаимодействия $a \leq r \leq b$, а величины p_j считаются неизвестными. Определяя упругие перемещения $u(r)$ вне области контакта согласно (2.45) при отсутствии контакта или согласно (2.40) и (2.44) в случае контакта, можно выразить величины зазора в точках b_j , используя выражение (2.1). После этого величины адгезионного давления p_j определяются из системы N алгебраических уравнений

$$p_j = p_a(h(b_{j-1})), \quad j=1, \dots, N \quad (2.106)$$

которая решается методом Ньютона. Дополнительными уравнениями для определения координат границ a и b областей контакта и адгезионного взаимодействия служат условие непрерывности давления на границе области контакта $p(a) = p_1$ (в случае контакта, когда $a > 0$) и соотношение (2.7) для заданной внешней нагрузки.

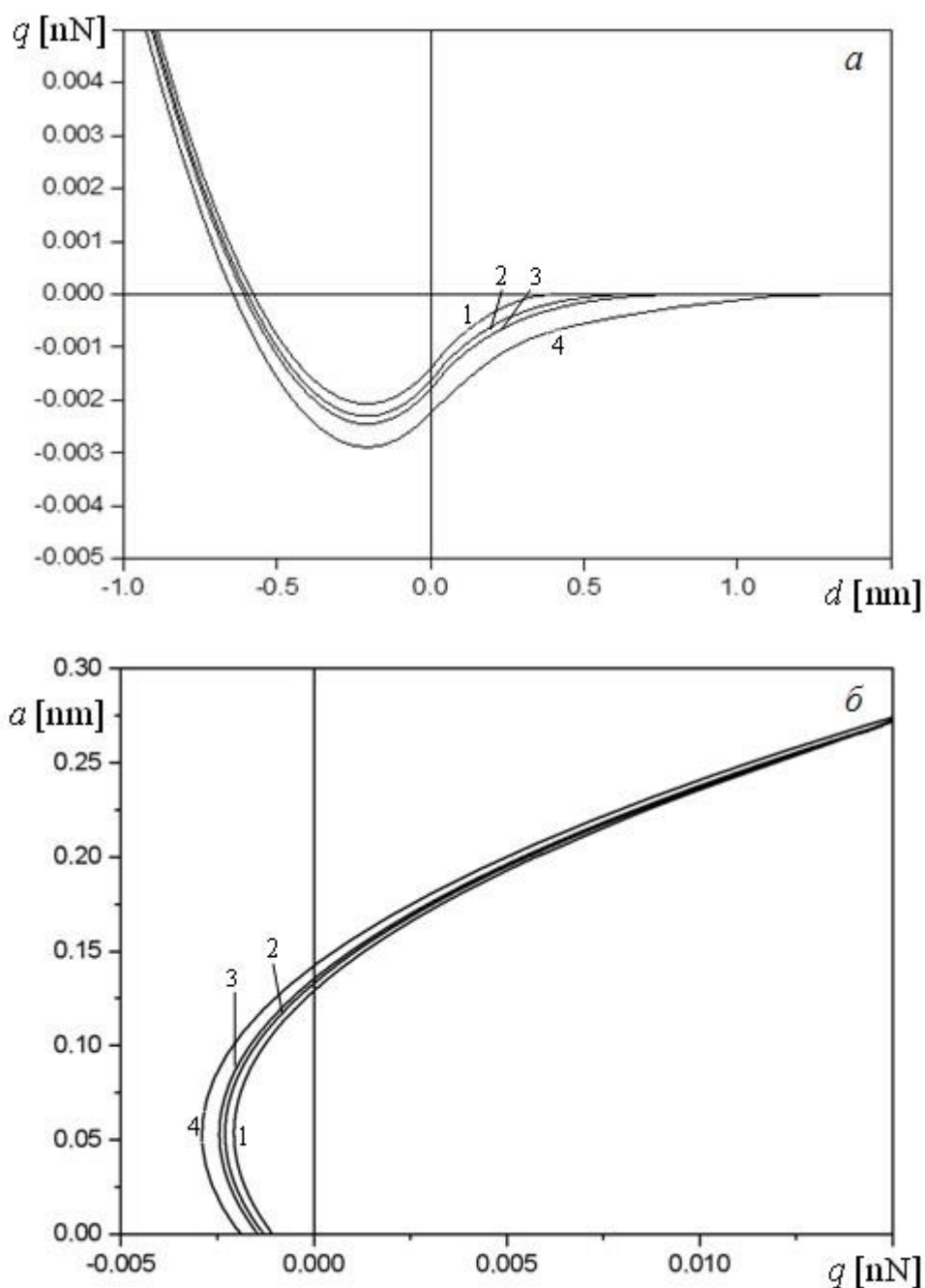


Рис. 2.13. Зависимости силы взаимодействия от расстояния между телами (а) и радиуса области контакта от силы взаимодействия (б) для случая индентора конической формы.

На рис.2.13 представлены зависимости силы q от расстояния d между телами (рис.2.13,а) и радиуса области контакта a от действующей между поверхностями силы q (рис 2.13, б). Результаты получены для случая индентора конической формы $f(r) = Ar$ ($n = 0.5$) с углом раствора конуса

40° и для приведенного модуля упругости взаимодействующих тел $E^* = 50$ МПа. Параметры функции адгезионного взаимодействия (1.3) взяты следующими: удельная работа адгезии $w_a = 0.008$ Дж/м², равновесное расстояние $z_0 = 0.5$ нм. Кривые 1, 2, 3 и 4 построены для разного количества ступенек в кусочно-постоянной аппроксимации функции адгезионного взаимодействия: $N = 1, 3, 5, 20$. Результаты показывают, что представленные зависимости для различных значений N подобны качественно, однако различаются количественно: использование модели Можи-Дагдейла (кривые 1) дает существенно заниженные величины силы адгезии и размера области контакта по сравнению с более точной аппроксимацией молекулярного потенциала (кривые 4).

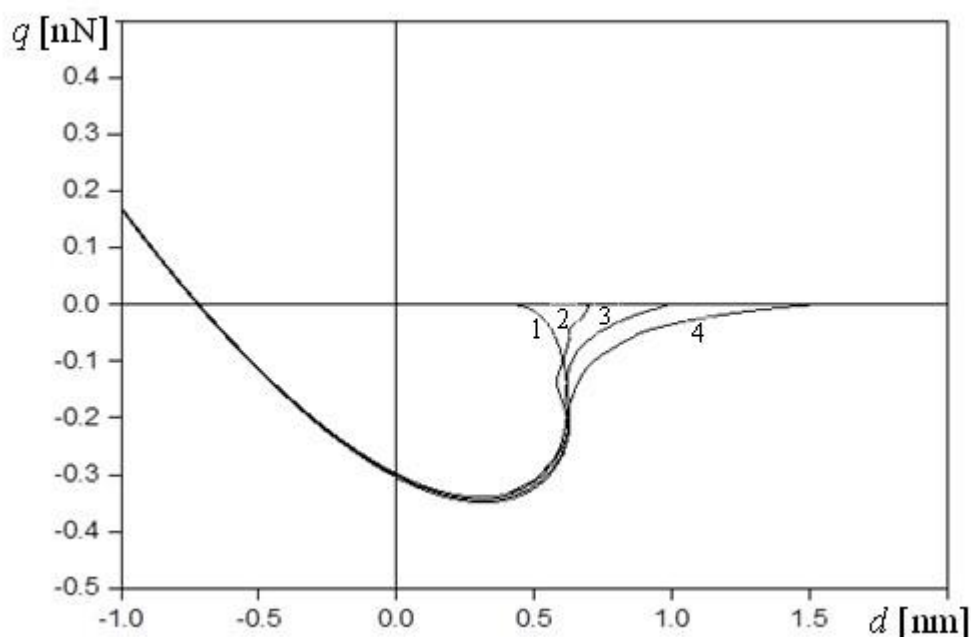


Рис. 2.14. Зависимость силы от расстояния между телами для случая индентора параболической формы.

На рис. 2.14 показаны зависимости силы от расстояния между телами для случая параболического индентора $f(r) = Ar^2$ ($s = 2$) с радиусом закругления вершины 10 нм. Результаты получены при тех же величинах

приведенного модуля упругости и параметров потенциала адгезионного взаимодействия, что и результаты, приведенные на рис. 3. Кривые 1, 2, 3 и 4 построены для разного количества ступенек в аппроксимации: $N = 1, 3, 5, 20$.

Результаты показывают, что в случае параболического индентора модель Можи-Даглейла (кривая 1) также дает заниженные величины для силы адгезии, однако разница по сравнению с более точными аппроксимациями молекулярного потенциала (кривые 2, 3 и 4) незначительна при нагрузках, соответствующих контакту поверхностей. При отсутствии контакта (область больших расстояний d между поверхностями) кривые существенно отличаются для аппроксимаций с различным числом N . Заметим, что наличие адгезии приводит к неоднозначной зависимости между силой q и расстоянием d между телами, что, в свою очередь, означает, что при циклическом подводе индентора к полупространству и отводе от него имеет место гистерезис.

Результаты, представленные на рис.2.14, свидетельствуют, что размер петли этого гистерезиса существенно зависит от количества ступенек N , используемых при кусочно-постоянной аппроксимации адгезионного потенциала. Так, использование модели Мажи-Дагдейла с $N=1$ и модели с $N=3$ дают завышенный размер петли гистерезиса и, соответственно, будут давать завышенную величину при расчете диссипации энергии при циклическом сближении-удалении поверхностей.

На рис. 2.15 представлены зависимости силы от расстояния между поверхностями для случая индентора, форма которого описывается степенной функцией третьей степени $f(r) = Ar^3$ ($s=3$) при $A = 10^{-9} \text{ м}^{-2}$. Приведенный модуль упругости взаимодействующих тел равен $E^* = 10^2 \text{ МПа}$ (рис.2.19, а) и $E^* = 10^4 \text{ МПа}$ (рис.2.19, б). Параметры адгезионного потенциала равны $w_a = 8 \times 10^{-5} \text{ Дж/м}^2$, $z_0 = 0.5 \text{ нм}$.

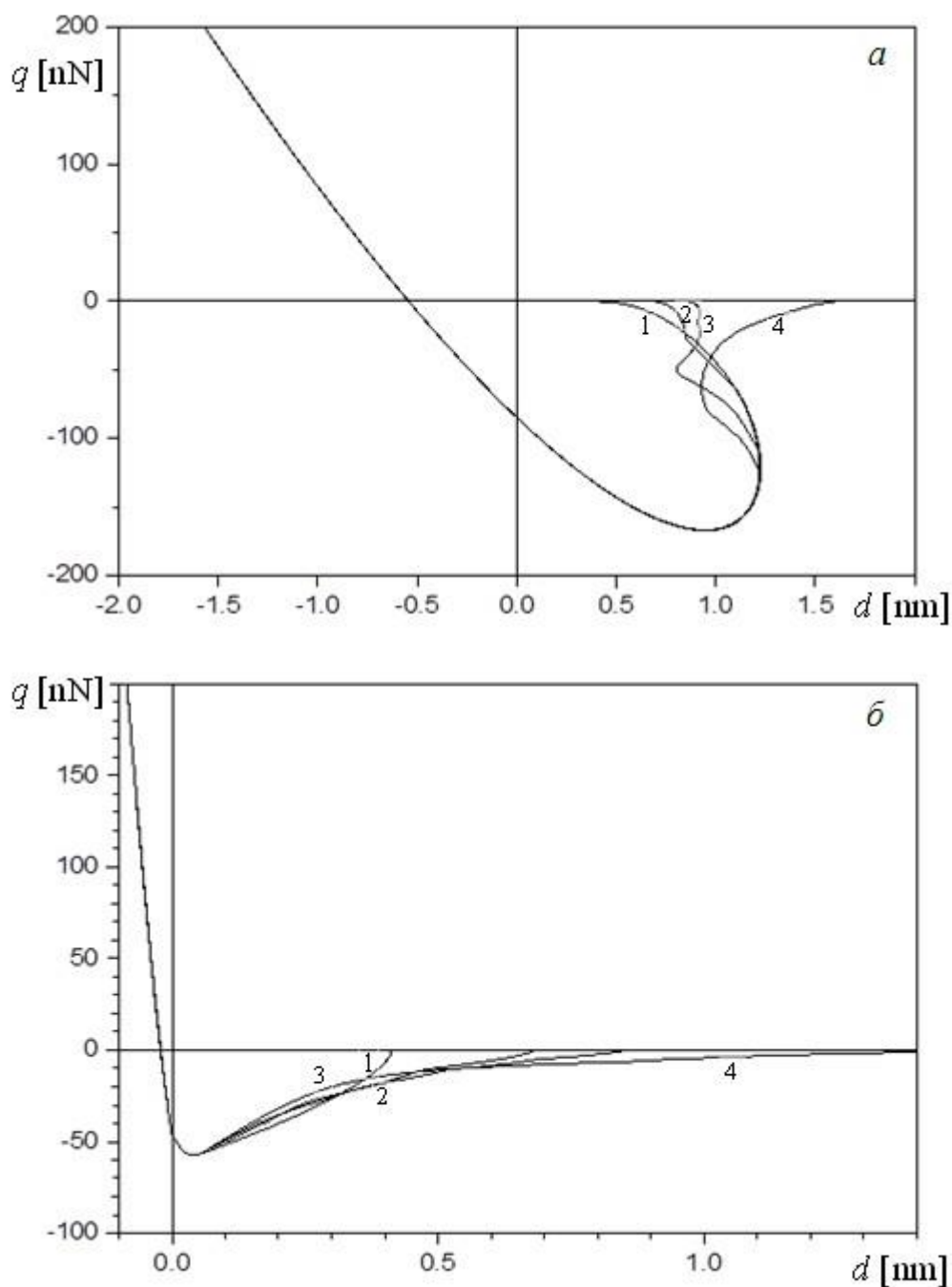


Рис. 2.15. Зависимость силы от расстояния между поверхностями для случая индентора, форма которого описывается степенной функцией третьей степени.

Результаты показывают, что для индентора, форма которого описывается функцией третьей степени, влияние количества ступеней аппроксимации N еще менее заметно в случае контакта, однако это влияние остается существенным в случае разделенных поверхностей. Случай,

представленный на рис. 2.15, а, соответствует более мягким поверхностям, когда влияние адгезии более выражено и имеет место значительный гистерезис при подводе и отводе поверхностей. Случай на рис. 2.15, б соответствует более жестким взаимодействующим телам и отсутствию адгезионного гистерезиса. Как и в случае параболического индентора, здесь использование упрощенных моделей с одной или несколькими ступенями приводит к завышенной оценке величины гистерезиса и диссипации энергии в цикле сближение-удаление поверхностей.

На рис 2.16 представлены зависимости силы от расстояния между телами (рис.2.16, а) и радиуса области контакта от силы взаимодействия (рис 2.16, б) для случая параболического индентора ($s = 2$) с радиусом закругления вершины 10 нм при $E^* = 10^2$ МПа.

В качестве закона адгезионного взаимодействия брались линейная зависимость (кривая 1):

$$p_a(h) = p_0(1 - h/h_0), \quad (2.107)$$

экспоненциальная зависимость (кривая 2):

$$p_a = p_0 \exp(-kh) \quad (2.108)$$

и зависимость Леннарда-Джонса (кривая 3), заданная соотношением (1.3) с параметрами $w_a = 0.008$ Дж/м², $z_0 = 0.5$ нм. Параметры p_0 , h_0 и k в выражениях (2.107) и (2.108) подбирались таким образом, чтобы для этих трех функций совпадали максимальная величина адгезионного давления p_a и величина удельной работы адгезии

$$w_a = \int_0^{\infty} p_a(h) dh \quad (2.109)$$

Все три функции аппроксимировались кусочно-постоянными зависимостями с числом отрезков в разбиении $N=20$.

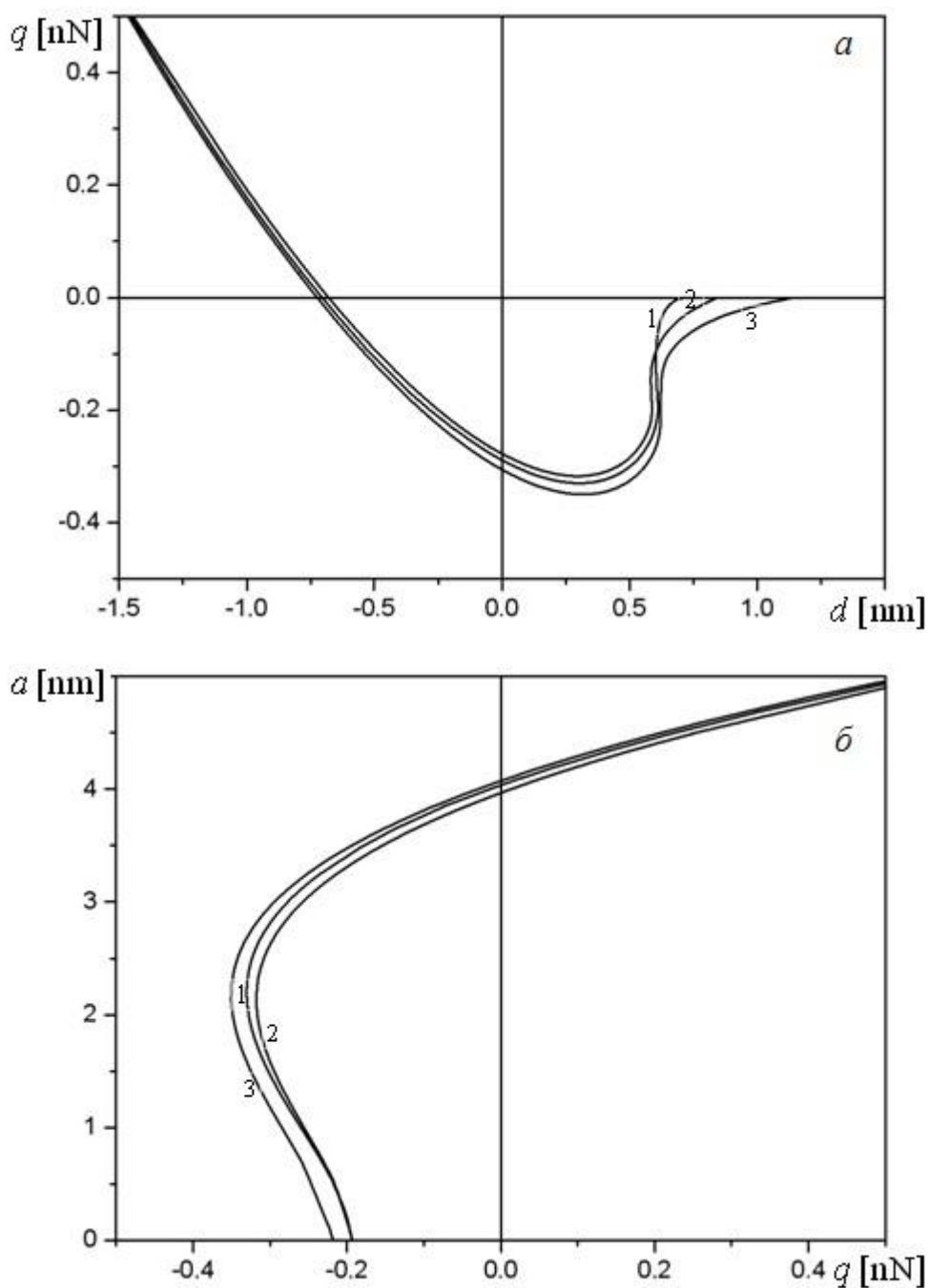


Рис. 2.16. Зависимости силы взаимодействия от расстояния между телами (а) и радиуса области контакта от силы взаимодействия (б) для трех разных видов зависимости адгезионного давления от зазора.

Представленные результаты показывают, что выбранная форма адгезионного потенциала не оказывает большого влияния на кривые подвода-отвода, особенно в области контакта поверхностей, при условии, что максимальное адгезионное давление и удельная энергия адгезии (2.109) у них

совпадают. Заметим, что линейная зависимость (2.107) приводит к более удобной для расчета линейной системе уравнений, поэтому ею можно пользоваться в качестве аппроксимации для потенциала Леннард-Джонса.

2.4. Выводы по главе 2

Даны постановка и решение задачи о контакте без трения упругого полупространства с осесимметричным штампом, форма которого описывается степенной функцией произвольной степени $s \geq 1$, при наличии вне области контакта пригрузки, задаваемой кусочно-постоянной функцией. Получены аналитические выражения для контактного давления и упругих перемещений поверхностей вне области контакта, а также для внешней нормальной нагрузки и расстояния между телами.

Полученное решение использовано для моделирования контактного взаимодействия упругих тел при наличии адгезии различной природы. Для случая капиллярной адгезии, когда притяжение поверхностей вызвано наличием в зазоре между ними мениска, проведен расчет контактных характеристик, таких как контактные давления, размеры областей контакта и мениска, упругие перемещения поверхностей от количества жидкости в зазоре, ее поверхностного натяжения, упругих постоянных тел и их формы.

Проведен расчет контактных характеристик для случая молекулярной адгезии, когда зависимость силы адгезии от величины зазора между поверхностями задана в форме различных функций, в том числе в форме потенциала Леннард-Джонса. Проведено сравнение результатов, полученных при разных значениях числа ступеней N в кусочно-постоянной аппроксимации этого потенциала, в том числе при $N=1$, что соответствует известной модели Можи-Дагдейла.

Анализ полученных результатов дает возможность сделать следующие выводы:

- Адгезионные силы существенно влияют на контактные

характеристики при взаимодействии упругих тел. В частности, наличие адгезии как капиллярной, так и молекулярной природы, приводит к появлению в контакте давлений, меньших атмосферного, искривлению поверхностей взаимодействующих тел вне области контакта, увеличению размера области контакта и существованию контакта в некотором диапазоне отрицательных нагрузок.

- В случае капиллярной адгезии, чем меньше объем v_0 жидкости в мениске и чем больше ее поверхностное натяжение γ_0 , тем сильнее проявляется влияние мениска на контактные характеристики. Влияние и капиллярной, и молекулярной адгезии твозрастает для более податливых взаимодействующих тел (с уменьшением приведенного модуля E^*) и более пологих форм их поверхности (с увеличением показателя степени в функции формы s).
- Радиус области контакта a , давление в жидкости p_0 в случае капиллярной адгезии и другие величины неоднозначно определены в некоторой области отрицательных значений нагрузки q . Зависимости нагрузки q от расстояния d между телами является немонотонной и, в некотором диапазоне значений параметров, неоднозначной. Только одновременный учет упругости взаимодействующих тел и сил адгезионного притяжения приводит к немонотонности и неоднозначности зависимости нагрузки от расстояния между телами.
- Использование модели Винклера для описания упругих свойств взаимодействующих тел позволяет качественно верно описать зависимость нагрузки от расстояния между телами для случая капиллярной адгезии. Для некоторых других характеристик в случае достаточно пологих форм взаимодействующих поверхностей модель Винклера дает качественно неверные результаты.
- Модель Можи-Дагдейла, аппроксимирующая зависимость адгезионного (молекулярного) давления от величины зазора между

поверхностями постоянной величиной, может служить для описания процесса подвода и отвода для инденторов параболической формы и форм, описываемых функциями более высокого порядка ($s \geq 1$) в области контакта индентора и полупространства. В случае разделенных поверхностей, взаимодействующих только посредством сил адгезии, аппроксимация с малым количеством ступеней, в том числе модель Можи-Дагдейла, приводит к значительной ошибке, в том числе к завышенному размеру петли адгезионного гистерезиса. В случае индентора конической формы использование модели Можи-Дагдейла приводит к заметной погрешности в том числе и в случае контакта поверхностей.

- Сравнение результатов расчетов, полученных с помощью функции Леннарда-Джонса, а также линейной и экспоненциальной функций показало, что конкретная форма адгезионного потенциала не оказывает большого влияния на зависимость нагрузки q от расстояния d между взаимодействующими телами, при условии, что максимальное адгезионное давление и удельная энергия адгезии у них совпадают.

Глава 3. ДИСКРЕТНЫЙ КОНТАКТ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ АДГЕЗИИ

В данной главе исследуется роль поверхностной шероховатости при взаимодействии упругих тел с учетом адгезии различной природы – капиллярной и молекулярной. С этой целью рассматривается контакт между системой периодически расположенных штампов и упругим полупространством при наличии адгезии. Поверхности взаимодействуют под действием внешней нагрузки, направленной по нормали к упругому полупространству.

3.1. Контактирование периодической системы штампов с упругим полупространством при наличии адгезии

3.1.1. Постановка задачи

Рассматривается взаимодействие упругого полупространства с периодической системой осесимметричных штампов, расположенных в узлах гексагональной решетки с шагом l (рис. 3.1, а).

Пусть начало локальной цилиндрической системы координат (r, z, ϕ) совпадает с точкой, в которой недеформированное полупространство соприкасается с одним из штампов. Ось z направлена вглубь полупространства. В данной системе координат форма каждого штампа описывается функцией $f(r) = Ar^{2n}$, где n — целое число.

К каждому штампу приложена нормальная сила q . Будем считать распределение нормальных давлений и упругих смещений полупространства в окрестности каждого штампа осесимметричным. Величину зазора между контактирующими поверхностями представим в виде

$$h(r) = f(r) - f(a) + u_z(r) - u_z(a), \quad (3.1)$$

где a — радиус области контакта каждого штампа с полупространством.

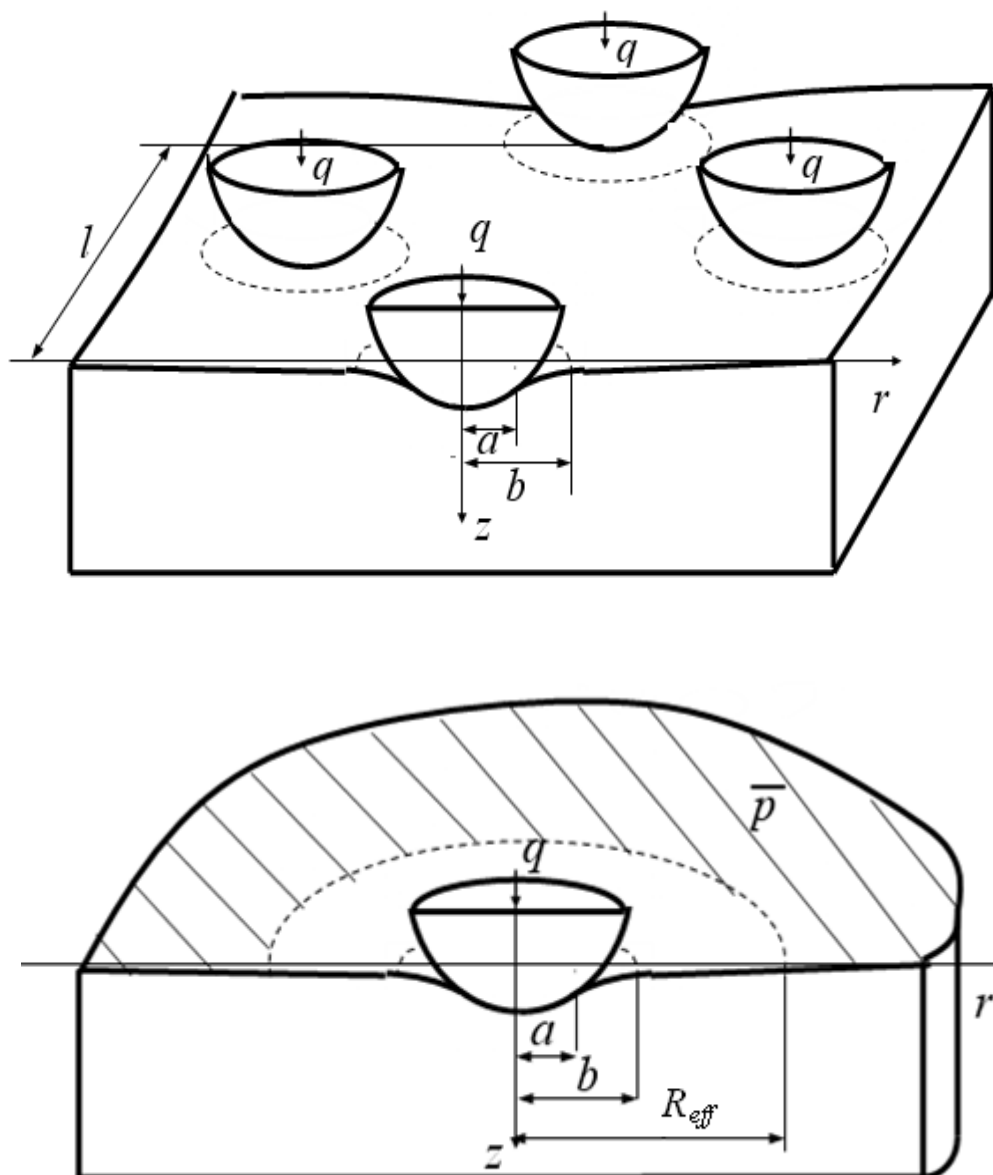


Рис. 3.1. Схема взаимодействия периодической системы штампов с упругим полупространством (а). Применение метода локализации (б)

Для того, чтобы учесть адгезионное взаимодействие, вводится отрицательное давление $-p_0$, действующее на полупространство в кольце $a < r \leq b$ вокруг каждого штампа. Будем рассматривать два вида адгезионного взаимодействия.

Молекулярная адгезия сухих поверхностей. Для описания адгезионного взаимодействия тел, обладающих поверхностной энергией, используем модель (1.10). Согласно этой модели, сила молекулярного притяжения поверхностей на единицу площади аппроксимируется кусочно-постоянной функцией с числом отрезков в разбиении $N=1$. Адгезионное взаимодействие между одним индентором и полупространством для случая этой модели рассмотрено в Главе 2 (п. 2.3.1). Удельная работа адгезии w_a взаимодействующих поверхностей определяется в этом случае соотношением (2.97), где величины w_a и p_0 считаются заданными.

Таким образом, в задаче об адгезии сухих поверхностей требуется по заданным значениям периода l , нагрузки q , удельной работы адгезии w_a , адгезионного давления p_0 и функции $f(r)$, описывающей форму штампов, определить давления в контакте $p(r)$ ($r \leq a$), смещения границы упругого полупространства вне области контакта $u_z(r)$, и размеры a и b кольцевых областей, в которых действует адгезионное давление $-p_0$.

Капиллярная адгезия. Пусть поверхность полупространства до взаимодействия покрыта тонким слоем жидкости толщины h_1 . Предполагается, что при взаимодействии со штампами вся жидкость стягивается в мениски, окружающие области контакта. Тогда объем жидкости в каждом мениске будет равен

$$v = \frac{\sqrt{3}l^2 h_1}{2} \quad (3.2)$$

В этом случае кольцевая область $a < r \leq b$ вокруг каждого штампа занята жидкостью. Равномерное давление $-p_0$, действующее на поверхность

упругого полупространства в этой области, представляет собой капиллярное давление под искривленной поверхностью жидкости и определяется формулой Лапласа (1.12). В Главе 2 (п. 2.2.1) показано, что если угол смачивания равен нулю и $b/D \ll 1$ ($D = A^{-1/(2n-1)}$ — характерный размер штампов), то это выражение приводится к виду (2.48).

Вводя обозначение $w_0 = 2\gamma_0$, получим выражение, совпадающее по форме с (2.97), где величина p_0 является неизвестной. Для объема жидкости v_0 в каждом мениске имеем соотношение

$$v_0 = \int_0^{2\pi} \int_a^b rh(r) dr d\phi \quad (3.3)$$

Итак, в задаче о капиллярной адгезии по заданным величинам периода l , нагрузки q , поверхностного натяжения жидкости γ_0 , толщины пленки жидкости h_1 и функции $f(r)$, описывающей форму штампов, необходимо определить функции контактного давления $p(r)$ ($r \leq a$), упругого смещения границы полупространства $u_z(r)$ ($a < r \leq b$), размеры a и b кольцевых областей, занятых менисками жидкости и абсолютную величину давления в жидкости p_0 .

3.1.2. Применение метода локализации

Для решения поставленных задач воспользуемся методом локализации [16]. Согласно этому методу, для определения напряженно-деформированного состояния вблизи отдельного пятна контакта учитываются реальные условия контактирования на ближайших пятнах контакта, а влияние остальных пятен заменяется действием осредненного по поверхности давления.

Рассмотрим простейший случай, в котором учитывается взаимодействие с полупространством одного штампа при наличии пригрузки

в виде равномерного давления \bar{p} , действующего в области $r \geq R_{eff}$ (рис. 3.1, б).

Аналогичное приближение для анализа дискретного контакта использовалось в [31, 32], где проводилось сравнение с результатами, полученными при учете реальных условий контактирования для шести пятен контакта, окружающих рассматриваемое пятно контакта. Оказалось, что даже при максимальной плотности контакта ($a/l=0.5$) результаты различаются не более, чем на 8–10%.

Среднее давление \bar{p} рассчитывается по формуле

$$\bar{p} = \frac{2q}{\sqrt{3}l^2}. \quad (3.4)$$

Величина R_{eff} определяется из условия равенства среднего давления в области $r \leq R_{eff}$ и вне ее, т.е., $\bar{p} = \frac{q}{\pi R_{eff}^2}$, откуда с учетом (3.4) получаем

$$R_{eff} = l \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^{1/2}. \quad (3.5)$$

В результате, имеем задачу о нагружении упругого полупространства со следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} u_z(r) &= -f(r) - d, & r \leq a, \\ p(r) &= -p_0, & a \leq r \leq b, \\ p(r) &= 0, & b < r \leq R_{eff}, \\ p(r) &= \bar{p}, & r > R_{eff}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где d — постоянная, равная расстоянию между вершиной штампа и невозмущенной поверхностью полупространства.

Упругие смещения $u_z(r)$ и давления $p(r)$ на границе упругого полупространства связаны соотношением (2.6), где $E^* = E / (1 - \nu^2)$, E — модуль Юнга, а ν — коэффициент Пуассона материала полупространства.

Кроме того, для каждого штампа выполняется условие равновесия (2.7).

Таким образом, решение задачи об адгезии при дискретном контакте сухих поверхностей определяется системой уравнений (2.6), (2.7), (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6), а задачи о капиллярной адгезии в дискретном контакте — системой (2.6), (2.7), (3.1)–(3.3), (3.4)–(3.6).

3.1.3. Вывод основных соотношений

Воспользуемся методом, аналогичным использованному в Главе 2 (п. 2.1.2). Представляя функцию $p(r)$ при $0 \leq r \leq a$ как $p(r) = p_1(r) - p_0$ и используя условия (3.6), преобразуем соотношение (2.6) к виду

$$-f_1(r) - d_a = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^a p_1(r') \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'}, \quad r \leq a \quad (3.7)$$

где

$$f_1(r) = f(r) - \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \left[p_0 b \mathbf{E} \left(\frac{r}{b} \right) + \bar{p} R \mathbf{E} \left(\frac{r}{R_{eff}} \right) \right],$$

и

$$d_a = d + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \bar{p} \int_0^\infty \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'}.$$

Заметим, что расстояние d бесконечно, т.к. полупространство нагружено по бесконечной области. Однако постоянная d_a является конечной величиной, поскольку она представляет собой расстояние между вершиной штампа и границей полупространства, всюду нагруженного

равномерным давлением \bar{p} . Величину d_a будем называть дополнительным перемещением штампа.

Соотношение (3.7) можно рассматривать как уравнение для определения давления $p_1(r)$ под гладким штампом, форма поверхности которого описывается функцией $f_1(r)$, при отсутствии других нагрузок на упругое полупространство. Решая эту задачу с помощью метода разложений в ряды (п. 2.1.2), получим для искомых функций давления и смещения на границе упругого полупространства следующие выражения

$$p(r) = \frac{AEa^{2n-1}}{\pi(1-\nu^2)} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2(n-k)} - p_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b^2 - a^2}} \right) + \frac{2}{\pi} \bar{p} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{R_{eff}^2 - a^2}}, \quad r \leq a \quad (3.8)$$

$$u_z(r) = \frac{2}{\pi} (d_a + Ar^{2n}) \operatorname{arcsin} \frac{a}{r} + \frac{2Ar^{2n}}{\pi} \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2k} - \frac{4(1-\nu^2)\bar{p}R_{eff}}{\pi E} \left[\mathbf{E}\left(\frac{r}{R_{eff}}\right) - \mathbf{E}\left(\operatorname{arcsin} \frac{a}{r}, \frac{r}{R_{eff}}\right) \right] - d + d_a - \frac{4(1-\nu^2)p_0}{\pi E} \left\{ \begin{array}{l} b \left[\mathbf{E}\left(\frac{r}{b}\right) - \mathbf{E}\left(\operatorname{arcsin} \frac{a}{r}, \frac{r}{b}\right) \right], \quad a < r \leq b \\ r \left[\mathbf{E}\left(\frac{b}{r}\right) - \mathbf{E}\left(\operatorname{arcsin} \frac{a}{b}, \frac{b}{r}\right) \right] - \left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 \right] \left[\mathbf{K}\left(\frac{b}{r}\right) - \mathbf{F}\left(\operatorname{arcsin} \frac{a}{b}, \frac{b}{r}\right) \right] \right\}, \quad r > b \quad (3.9)$$

а также для дополнительного перемещения штампа

$$d_a = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} Aa^{2n} + \frac{2(1-\nu^2)p_0b}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} - \frac{2(1-\nu^2)\bar{p}R_{eff}}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_{eff}}\right)^2}. \quad (3.10)$$

Выражение для нормальной нагрузки, действующей на каждый штамп, имеет вид

$$q = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{4EAna^{2n+1}}{1-\nu^2} - 2p_0b^2 \left[\arccos \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \right] + 2\bar{p}R_{eff}^2 \left[\arcsin \frac{a}{R_{eff}} - \frac{a}{R_{eff}} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_{eff}}\right)^2} \right]. \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.14) формулу (3.4) для среднего давления \bar{p} , выразим нагрузку q :

$$q = \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{2\pi EAna^{2n+1}}{1-\nu^2} - \pi p_0b^2 \left[\arccos \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \right]}{\arccos \frac{a}{R_{eff}} + \frac{a}{R_{eff}} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_{eff}}\right)^2}} \quad (3.12)$$

Полученные соотношения (3.8)–(3.12) совместно с выражениями (3.1), (3.2), (3.4), (3.5), определяют решение задачи об адгезии сухих поверхностей. В случае капиллярной адгезии к этим соотношениям добавляется условие (3.3).

С целью определения неизвестных величин a и b преобразуем полученные соотношения. Подставляя смещения $u_z(r)$ из (3.9) в выражение для зазора (3.1) между контактирующими поверхностями, будем иметь

$$h(r) = \left\{ Ar^{2n} - \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} Aa^{2n} - \frac{2(1-\nu^2)p_0b}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{r} \right) + \frac{2Ar^{2n}}{\pi} \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2k} - \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ p_0b \left[\mathbf{E}\left(\frac{r}{b}\right) - \mathbf{E}\left(\arcsin \frac{a}{r}, \frac{r}{b}\right) \right] + \bar{p}R_{eff} \left[\mathbf{E}\left(\frac{r}{R_{eff}}\right) - \mathbf{E}\left(\arcsin \frac{a}{r}, \frac{r}{R_{eff}}\right) \right] \right\} \right\}$$

(3.13)

Учитывая условие на максимальную величину зазора (2.97), из (3.13) при $r=b$ получаем уравнение, которое совместно с соотношением (3.12) служит для определения величин a и b в задаче об адгезии сухих поверхностей.

Для случая капиллярной адгезии, где имеется еще одна неизвестная величина — давление в жидкости p_0 , преобразуем условие постоянства объема жидкости (3.3) с помощью выражения (3.13). В результате для объема жидкости в мениске вокруг каждого штампа имеем

$$\begin{aligned}
 v_0 = & 2Aa^{2n+2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \left[\frac{(2n)!!(2n-1)}{(2n+1)!!} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \left(\frac{b}{a}\right)^{2(n-k)} \right] + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} + \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \frac{1}{n+1} \right] \arccos \frac{a}{b} \right\} - \\
 & - \frac{4(1-\nu^2)p_0 b^3}{3E} \left[4 - 3\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \arccos \frac{a}{b} \right] - \\
 & - \frac{4(1-\nu^2)\bar{p}R_{eff}}{E} \left[(R_{eff}^2 - a^2)\mathbf{K}\left(\frac{a}{R_{eff}}\right) - (R_{eff}^2 + a^2)\mathbf{E}\left(\frac{a}{R_{eff}}\right) - (R_{eff}^2 - b^2)\mathbf{K}\left(\frac{b}{R_{eff}}\right) + \right. \\
 & \left. + (R_{eff}^2 + b^2)\mathbf{E}\left(\frac{b}{R_{eff}}\right) - (b^2 - a^2)\mathbf{K}\left(\frac{a}{b}\right) + (b^2 + a^2)\mathbf{E}\left(\frac{a}{b}\right) - 3ab + \frac{a^3}{b} \right]
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Таким образом, в случае капиллярной адгезии система уравнений (3.12), (3.13) (с учетом (2.48)), (3.14) служит для определения неизвестных величин a , b , и p_0 .

Случай отсутствия контакта. Решение значительно упрощается в случае, когда полупространство не контактирует со штампами, но испытывает к ним адгезионное притяжение. В этом случае на упругое полупространство действует только адгезионное давление $-p_0$ по периодически расположенным круговым областям радиуса b . Полагая $a=0$, из соотношений (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) с учетом (2.6), (2.7) после несложных

преобразований получим следующие выражения для нагрузки и дополнительного перемещения при адгезии сухих поверхностей:

$$q = -\pi p_0 b^2, \quad d_a = -Ab^{2n} + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} p_0 b \left[1 - \frac{b}{R_{eff}} \mathbf{E} \left(\frac{b}{R_{eff}} \right) \right] + \frac{\gamma}{p_0}. \quad (3.15)$$

В случае капиллярной адгезии к этим соотношениям добавляется условие сохранения объема жидкости, полученное из (3.3):

$$v = \pi b^2 \left(\frac{Ab^{2n}}{n+1} + d_a \right) - \frac{8(1-\nu^2)}{3E} p_0 b^2 R_{eff} \left[2 \frac{b}{R_{eff}} + \mathbf{K} \left(\frac{b}{R_{eff}} \right) \left(1 - \frac{b^2}{R_{eff}^2} \right) - \mathbf{E} \left(\frac{b}{R_{eff}} \right) \left(1 + \frac{b^2}{R_{eff}^2} \right) \right]. \quad (3.16)$$

3.1.4. Анализ контактных характеристик

При численном анализе полученных соотношений определялись следующие безразмерные величины: контактное давление $P = p / (\pi E^*)$ ($E^* = E / (1 - \nu^2)$), нормальное смещение границы упругого полупространства $U_z = u_z / D$ ($D = A^{-1/(2n-1)}$), нагрузка на один штамп $Q = q / (\pi E^* D^2)$, дополнительное перемещение штампа $\delta_a = d_a / D$, радиус области контакта $\alpha = a / D$ и внешний радиус $\beta = b / D$ области, в которой действует адгезионное давление. При этом задаваемыми параметрами были число n , определяющее форму штампов, безразмерное расстояние между ними $L = 3^{1/4} l / (\sqrt{2\pi} D) = R_{eff} / D$, а также параметры $K = \gamma_0 / (2\pi E^* D)$ и $P_0 = p_0 / (\pi E^*)$, описывающие поверхностную энергию и упругость полупространства. В случае капиллярной адгезии величина P_0 представляет собой безразмерное давление в жидкости и определяется в ходе решения задачи. Параметр K в этом случае

характеризует поверхностное натяжение жидкости. При этом еще одним задаваемым параметром является безразмерная толщина пленки жидкости $H_1 = h_1 / D$.

Заметим, что решение задачи об адгезионном взаимодействии двух упругих выступов для случая капиллярной и молекулярной адгезии получено в Главе 1. Были исследованы напряженно-деформированное состояние взаимодействующих тел и контактные характеристики в зависимости от упругих характеристик взаимодействующих тел, их формы, поверхностной энергии (или поверхностного натяжения жидкости, образующей мениск), а также объема жидкости в мениске. Поэтому в данной главе изучается главным образом роль шероховатости поверхностей при адгезионном взаимодействии.

В рассматриваемой задаче шероховатость описывается формой выступов и плотностью их расположения, т.е., параметрами n и L . Влияние последнего параметра на параметры адгезионного взаимодействия ранее не изучалось и представляет особый интерес. Полученные решения сравниваются со случаем адгезионного взаимодействия полупространства с одним штампом ($L \rightarrow \infty$).

Молекулярная адгезия сухих поверхностей. На рис. 3.2 представлены распределения контактных давлений P при $K = 0.00005$ и $P_0 = 0.02$ и одной и той же нагрузке $Q = 0.002$, приложенной к одному штампу, для различных форм штампа: $n = 1$ и $n = 2$. Тонкие линии соответствуют безразмерному расстоянию между штампами $L = 0.15$. Толстые кривые построены для случаев единичного штампа ($L \rightarrow \infty$). Результаты показывают, что учет влияния других штампов приводит к уменьшению радиуса области контакта α и внешнего радиуса β области, в которой действует адгезионное давление, при этом максимальное давление в контакте увеличивается.

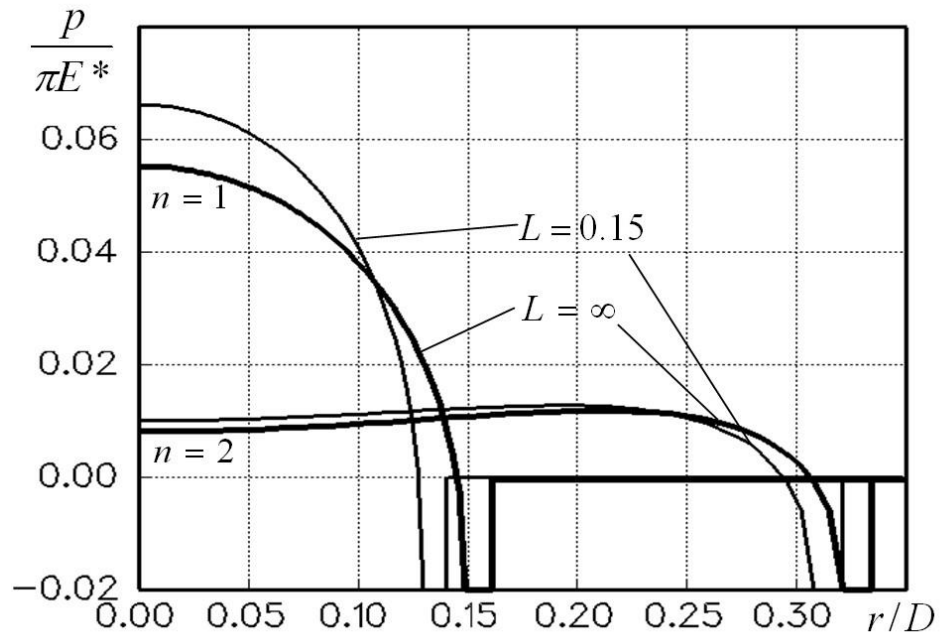


Рис. 3.2. Распределения контактного давления для различных форм штампов в дискретном контакте сухих поверхностей

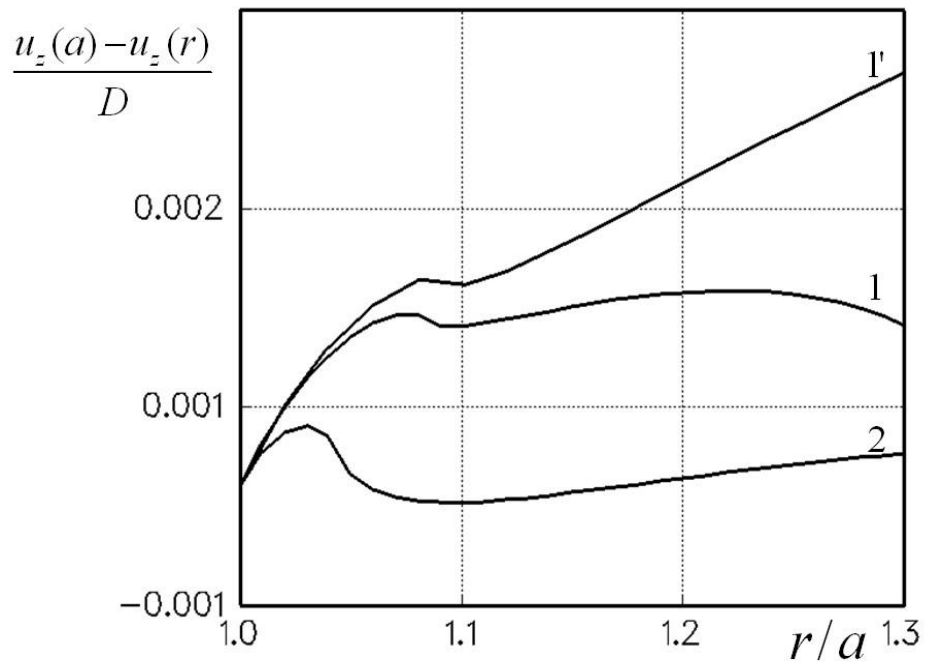


Рис. 3.3. Форма упругого полупространства вне области контакта со штампом в дискретном контакте сухих поверхностей

Рисунок 3.3, на котором приведены графики зависимости $U_z(1) - U_z(\rho)$, $\rho = r/a$, иллюстрируют форму упругого полупространства вне области контакта со штампом при тех же значениях K , P_0 , Q и $n=1$ (кривые 1, 1'), $n=2$ (кривая 2'). Кривая 1 построена при $L=0.2$, кривые 1' и 2' — при $L=0.5$. Видно, что по мере уменьшения расстояния между штампами поверхность полупространства вне штампов прогибается сильнее.

На рис. 3.4 представлены графики контактных характеристик, построенные при $K = 5 \times 10^{-5}$, $P_0 = 0.02$, $n=1$ для различных величин безразмерного расстояния между штампами: $L=0.12$ и $L=0.15$ (кривые 1 и 2, соответственно). Кривые 3 описывают случай единичного штампа ($L \rightarrow \infty$). Зависимости безразмерного радиуса области контакта α от нагрузки на один штамп Q , представленные на рис. 3.4, а, показывают, что при положительных нагрузках уменьшение расстояния между штампами приводит к уменьшению размера области контакта, как и в случае дискретного контакта без адгезии [16]. Однако, в области отрицательных нагрузок, в которой контакт поверхностей еще имеет место, уменьшение расстояния между штампами приводит к увеличению радиуса области контакта α .

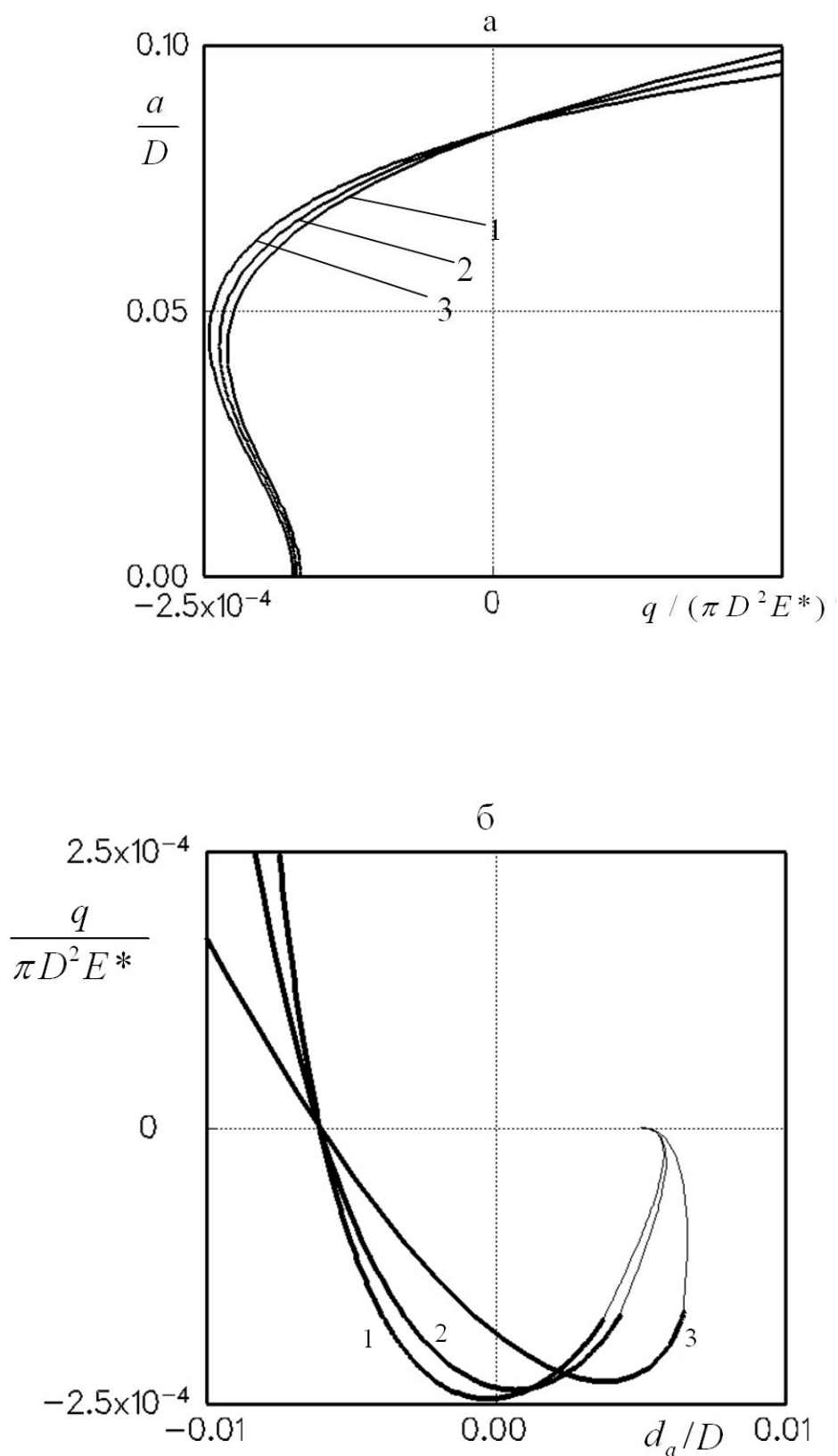


Рис. 3.4. Зависимость безразмерного радиуса области контакта α от нагрузки Q , действующей на один штамп (а) и зависимость нагрузки Q от дополнительного перемещения штампа δ_a (б) при адгезии в дискретном

контакте сухих поверхностей

На рис. 3.4, б приведены зависимости нагрузки Q , действующей на один штамп, от дополнительного перемещения штампа δ_a . Толстые линии соответствуют контакту поверхностей, т.е., рассчитаны по соотношениям (3.8)–(3.10), (3.13). Тонкие соответствуют отсутствию контакта и соотношениям (3.15). Результаты показывают, что зависимость дополнительного перемещения штампа от расстояния между штампами L имеет вид, аналогичный зависимости радиуса области контакта α : при $Q > 0$ с уменьшением L величина δ_a уменьшается, а при $Q < 0$ — возрастает.

Представленные зависимости нагрузки, действующей на один штамп, от дополнительного внедрения этого штампа являются неоднозначными. В предыдущей главе аналогичные зависимости исследовались в случае взаимодействия двух осесимметричных упругих тел и было показано, что указанная неоднозначность приводит к гистерезису в процессе сближения и удаления тел. Другими словами, работа, совершаемая адгезионными силами при сближении тел, не равна работе, необходимой для их разделения, то есть, происходит диссипация энергии. Результаты расчетов показывают, что при уменьшении расстояния между штампами L величина потери энергии уменьшается. Подчеркнем, что в этих расчетах фиксировалась нагрузка Q , приложенная к каждому штампу.

Капиллярная адгезия. На рис. 3.5 представлены распределения давлений P в области взаимодействия каждого штампа с упругим полупространством при $n=1$, $K=5 \times 10^{-5}$, $H_1=10^{-4}$, $Q=10^{-3}$ для различных расстояний между штампами. Кривые 1, 2, и 3 соответствуют $L=0.2$, $L=0.5$ и $L=1$. Вследствие постоянства количества жидкости в зазоре между телами, уменьшение расстояния между штампами означает уменьшение объема жидкости в мениске вокруг каждого штампа, что приводит к резкому возрастанию величины капиллярного давления в жидкости и уменьшению

ширины $\beta - \alpha$ области, занятой жидкостью. При этом контактные давления изменяются незначительно.

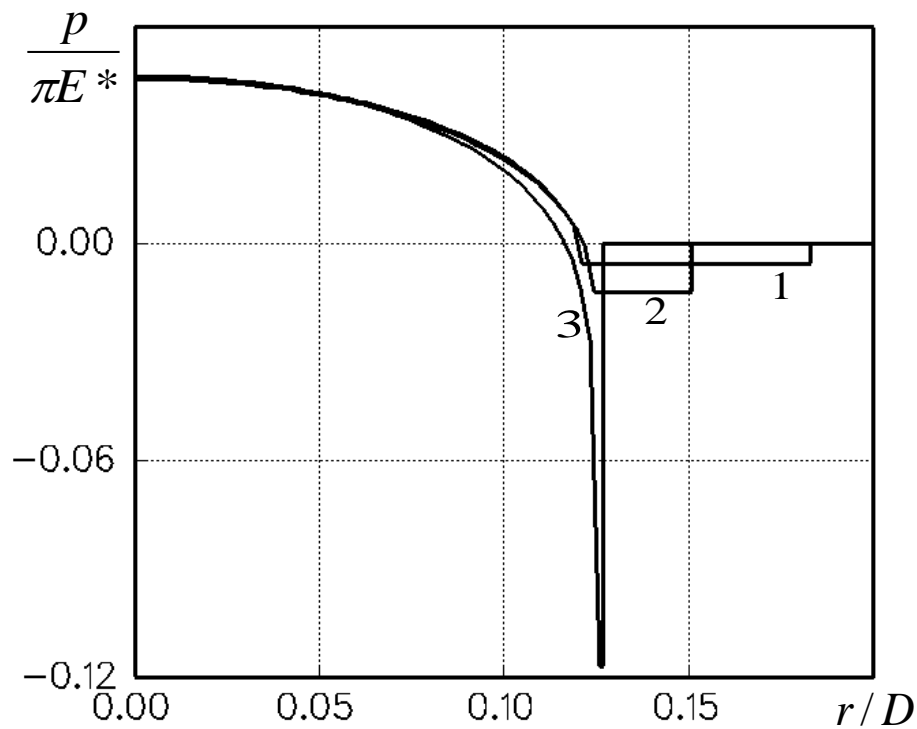


Рис. 3.5. Распределения контактного давления при различных расстояниях между штампами в случае капиллярной адгезии в дискретном контакте упругих тел

Анализируя результаты, представленные на рис. 3.5, можно также заметить, что радиус области контакта α немонотонно зависит от расстояния между неровностями L . Это подтверждается полученными зависимостями α от L (рис. 3.6, а). Кривые 1 и 2 соответствуют тем же значениям n , K и Q , что и для рис. 3.5, и построены для различных значений толщины пленки жидкости: $H_1 = 10^{-4}$ (кривые 1) и $H_1 = 10^{-3}$ (кривые 2). Кривая 3 соответствует контакту без адгезии ($H_1 = 0$). Кривая 1' построены при $H_1 = 10^{-4}$ и отрицательной нагрузке $Q = -10^{-4}$.

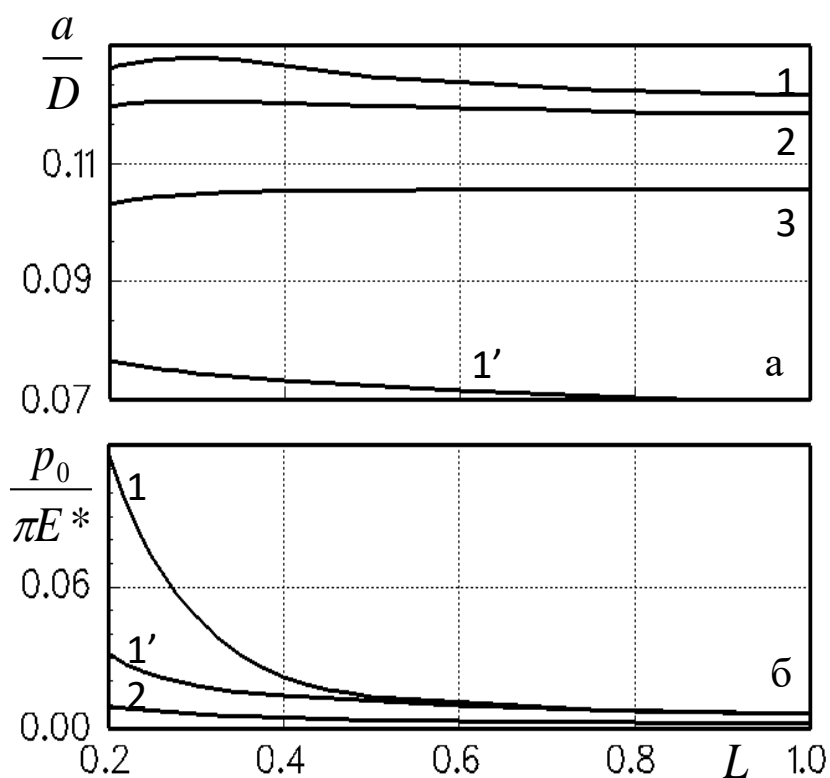


Рис. 3.6. Зависимости безразмерного радиуса области контакта α (а) и абсолютной величины давления в жидкости P_0 (б) от расстояния между неровностями L в случае капиллярной адгезии

Характер зависимостей радиуса области контакта α от расстояния между штампами L , представленных на рис. 3.6, а, объясняется наличием двух механизмов, приводящих к различным эффектам при изменении расстояния L . Во-первых, это взаимное влияние штампов через упругое полупространство. Оно имеет место только при малых значениях L . При $Q > 0$ этот механизм приводит к уменьшению размера области контакта α с уменьшением расстояния L . При $Q < 0$ взаимное влияние приводит к увеличению размера α с уменьшением L . Этот механизм аналогичен взаимному влиянию выступов в случае адгезии сухих поверхностей.

Второй механизм осуществляется только в случае капиллярной адгезии и связан с тем, что при заданной толщине пленки жидкости H_1 увеличение плотности расположения выступов приводит к уменьшению объема

жидкости в мениске вокруг каждого выступа. Вследствие этого размер области контакта α увеличивается с уменьшением расстояния L независимо от знака нагрузки Q .

Таким образом, указанные два механизма оказывают противоположное влияние на размер области контакта при $Q > 0$, что объясняет немонотонный характер кривых 1 и 2 на рис. 3.6, а. При $q < 0$ эти эффекты усиливают друг друга (монотонная зависимость 1'). Для сравнения на рис. 3.6, а приведена зависимость для случая дискретного контакта без учета адгезии (кривая 3).

На рис. 3.6, б приведены зависимости безразмерной величины давления в жидкости P_0 от расстояния между штампами L . Кривые 1, 2, 1' построены при тех же значениях параметров, что и соответствующие кривые на рис. 3.6, а. Видно, что при любых нагрузках величина давления в жидкости P_0 растет с уменьшением расстояния между штампами L . Результаты расчетов показали также, что внешний радиус β области, занятой жидкостью монотонно уменьшается с уменьшением L при любых значениях нагрузки Q . Два последних результата связаны с уменьшением количества жидкости в каждом мениске.

Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 3.6 позволяет заключить, что уменьшение толщины пленки жидкости приводит к увеличению размера области контакта и величины давления в жидкости, а также к более быстрому росту этих величин при уменьшении L .

На рис. 3.7 представлены графики безразмерной нагрузки на один штамп Q в зависимости от дополнительного перемещения штампа d_a при $n=1$, $K=5 \times 10^{-5}$, $H_1=10^{-5}$ и различных расстояниях между штампами: $L=0.2$, $L=0.4$, $L=2$ (кривые 1, 2, 3, соответственно). Толстые линии соответствуют контакту поверхностей и рассчитаны из соотношений (3.10)–(3.12), (3.13), (3.14). Тонкие линии соответствуют отсутствию контакта и построены по соотношениям (3.15), (3.16). Как и при адгезии сухих поверхностей, связанной с межмолекулярным притяжением, полученные

зависимости нагрузки от внедрения имеют неоднозначный характер, однако не при всех значениях параметров. В частности, как следует из представленных результатов, неоднозначность имеет место лишь при достаточно малых расстояниях между штампами L .

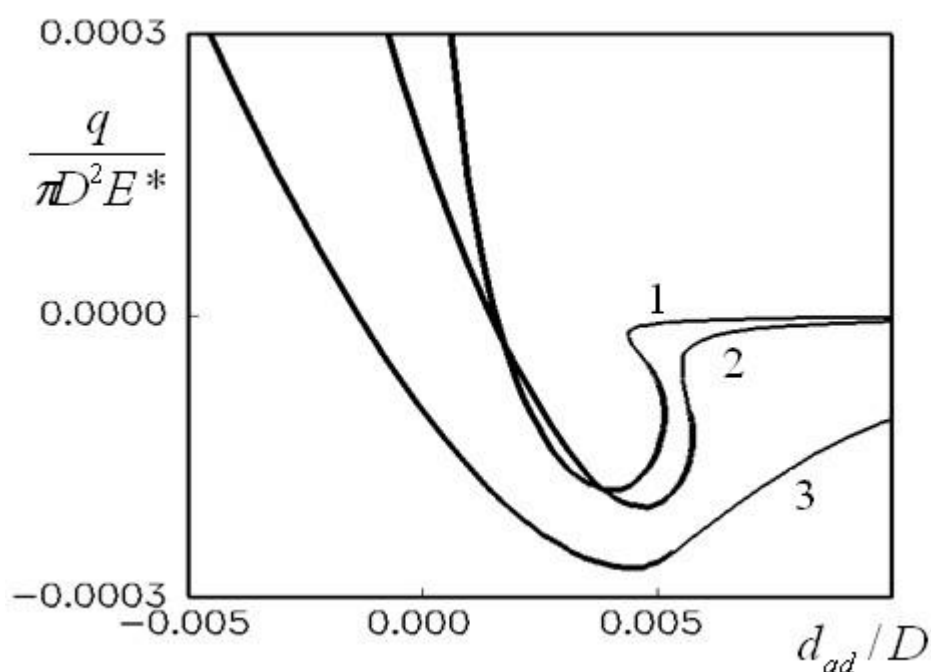


Рис. 3.7. Зависимости безразмерной нагрузки Q , действующей на один штамп, от дополнительного перемещения штампа δ_a при различных расстояниях между штампами L в случае капиллярной адгезии

Как показали проведенные расчеты, форма штампов, определяемая параметром n , оказывает существенное влияние лишь на распределение контактных давлений (см. рис.3.2). Характер остальных зависимостей при изменении n качественно не меняется.

3.2. Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии

3.2.1. Сочетание континуального и дискретного подхода

Рассмотрим контактное взаимодействие двух упругих тел, которые обладают поверхностным микрорельефом. При таком взаимодействии существует два масштаба длины: один из них связан с характерным размером R_a номинальной области контакта Ω , а другой – с характерным размером неровностей и расстояний между ними l_a (рис. 3.8).

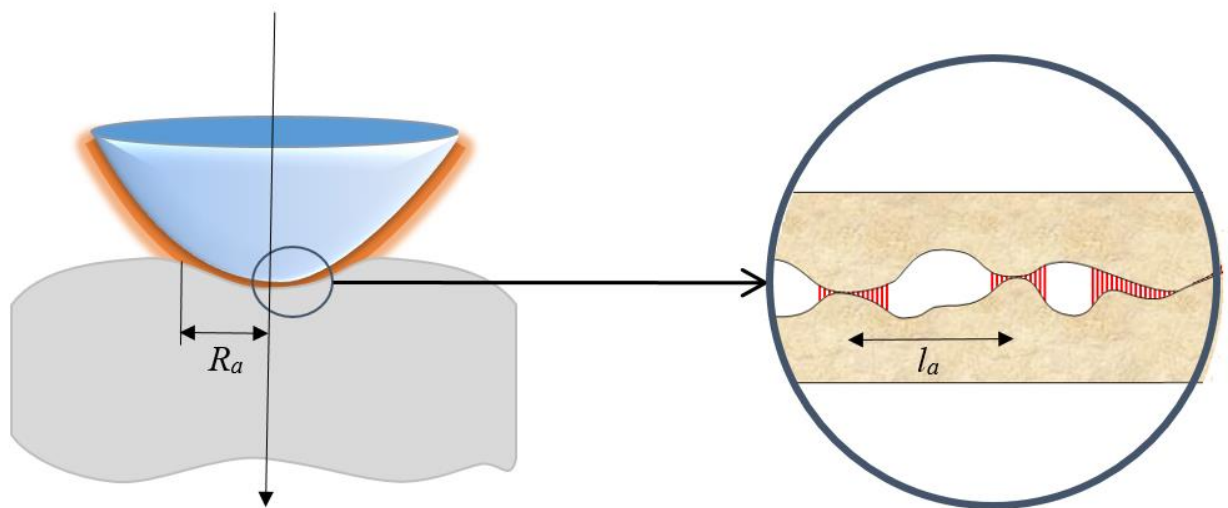


Рис. 3.8. Схема адгезионного взаимодействия на двух масштабных уровнях

Если $l_a \ll R_a$, для определения номинальных (осредненных) контактных давлений $p(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, как показано в [18], можно использовать интегральное уравнение вида:

$$u(\mathbf{x}) = C[p(\mathbf{x})] + \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega, \quad (3.17)$$

в котором $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ - ядро интегрального оператора, связывающего величину $u(\mathbf{x})$ контактных перемещений по нормали к поверхности с номинальными контактными давлениями $p(\mathbf{x})$ в случае контакта тел с идеально гладкими поверхностями (континуальный подход), а $C[p]$ - функция дополнительного смещения. Эта функция зависит только от параметров микрогеометрии и номинального давления в окрестности рассматриваемой точки \mathbf{x} . Методика расчета этой функции, основанная на рассмотрении дискретного контакта поверхностей, обладающих заданной микрогеометрией, изложена в [18] и используется ниже для определения функции дополнительного смещения в случае контакта тел с регулярным микрорельефом с учетом сил молекулярного притяжения. Присоединяя к соотношению (3.17) условия контакта и равновесия, можно получить полную систему уравнений для определения номинальных давлений и зависимости внедрения от нагрузки на макроуровне.

Ниже строится решение задачи о взаимодействии двух номинально плоских поверхностей при наличии на одной из них регулярного рельефа. При этом учитываются такие эффекты, как взаимное влияние микроконтактов при внедрении неровностей в упругое полупространство и адгезионное взаимодействие в зазоре между поверхностями.

3.2.2. Постановка задачи

Рассматривается модель упругого контакта двух номинально плоских поверхностей с регулярной шероховатостью. Известно [137, 153], что контакт двух упругих полупространств, которые ограничены номинально плоскими шероховатыми поверхностями, может быть заменен, без потери общности, контактом шероховатого абсолютно жесткого индентора и упругого полупространства. На фиг. 3.9 в системе координат Oxz показана условная схема контакта для случая регулярной шероховатости жесткого тела и приняты обозначения: d - расстояние между номинальной границей

жесткого тела и границей упругого полупространства $z = 0$; t_a - расстояние между границей адгезионного взаимодействия тел и границей упругого полупространства до его деформации (для $d \geq t_a$ адгезионное взаимодействие отсутствует); t_g - геометрическая толщина шероховатого слоя. Начальное положение номинальной плоской границы индентора соответствует $z = t_a$. Отрицательные значения d соответствуют положению номинальной границы жесткого тела ниже оси x .

Пусть Δ - сближение жесткого тела с полупространством или расстояние, на которое перемещается жесткое тело вдоль оси z при действии номинального давления p . Зависимость $p = p(d)$ характеризует основное механическое свойство шероховатого слоя, образованного шероховатостями контактирующих номинально плоских поверхностей упругих тел: зависимость среднего контактного давления p между телами от расстояния между номинальными плоскостями d . Эта зависимость определяется геометрическими параметрами шероховатости, материалами контактирующих тел и их адгезионными свойствами, и является нелинейной моделью Винклера-Фусса для шероховатого слоя. Иными словами, поверхностная шероховатость рассматривается как поверхностный слой с механическими характеристиками, отличными от объемных свойств материалов взаимодействующих тел.

С учетом сделанных предположений, далее рассматривается модель взаимодействия двух плоских поверхностей, одна из которых является гладкой поверхностью упругого полупространства, а другая - жесткой поверхностью, покрытой жесткими одинаковыми выступами. Предполагается, что расположение выступов имеет периодическую структуру: они расположены в узлах гексагональной решетки с шагом l (рис.3.1, а). Начало локальной цилиндрической системы координат (r, z, ϕ) совпадает с точкой, в которой недеформированное полупространство соприкасается с одним из штампов-выступов. Ось z направлена вглубь

полупространства. В данной системе координат форма штампа описывается функцией $f(r) = r^2/(2R)$, где R - радиус кривизны вершины выступа.

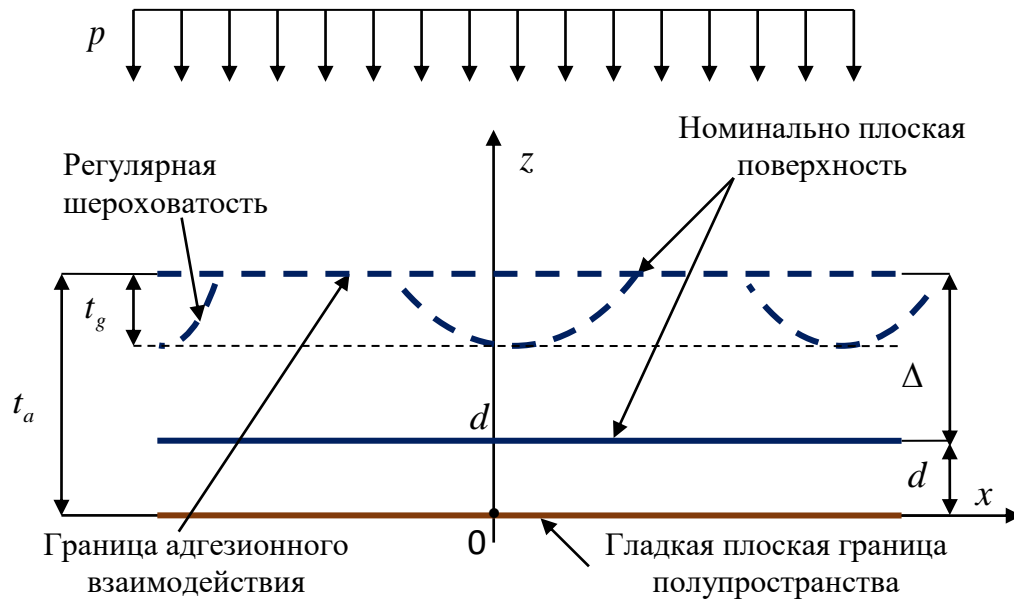


Рис. 3.9. Схема контакта номинально плоской границы жесткого индентора с регулярной шероховатостью и упругого полупространства.

На жесткую поверхность, покрытую выступами, действует номинальное давление p . Распределение нормальных давлений и упругих смещений границы полупространства в окрестности каждого штампа считается осесимметричным. Величина зазора между контактирующими поверхностями в окрестности штампа имеет вид (3.1).

Будем считать, что адгезионное взаимодействие между поверхностями имеет молекулярную природу и описывается моделью Можи-Дагдейла (1.10), (2.97). Величины удельной работы адгезии w_a и адгезионного давления p_o , характеризующие межмолекулярное взаимодействие поверхностей, считаются заданными.

Решение этой задачи для случая дискретного контакта при наличии адгезии получено в п. 3.1.2. Воспользуемся полученными соотношениями.

В случае контакта поверхностей номинальное внешнее давление p и расстояние d (соответствующее величине дополнительного расстояния дополнительного расстояния d_a) между поверхностями определяются соотношениями, следующими из (3.10) и (3.12) при $n=1$:

$$p = \frac{\pi}{\sqrt{3}l^2} \frac{\frac{4E^* a^3}{3R} - 2p_0 b^2 \left(\arccos \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \right)}{\arccos \frac{a}{R_{eff}} + \frac{a}{R_{eff}} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_{eff}}\right)^2}}, \quad (3.18)$$

$$d = -\frac{a^2}{R} + \frac{2p_0 b}{E^*} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} + \frac{2p_0 R_{eff}}{E^*} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_{eff}}\right)^2}. \quad (3.19)$$

Уравнение, связывающее радиус области контакта a с внешним радиусом области адгезионного взаимодействия b , следует из (2.97) и (3.13):

$$h(b) = \left(\frac{b^2}{2R} - \frac{a^2}{R} + \frac{2p_0 b}{E^*} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} - \frac{2p_0 R_{eff}}{E^*} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_{eff}}\right)^2} \right) \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{b} + \quad (3.20)$$

$$+ \frac{a^2}{\pi R} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} - \frac{4p_0}{\pi E^*} (b - a) - \frac{4p_0 R_{eff}}{\pi E^*} \left[\mathbf{E} \left(\frac{b}{R_{eff}} \right) - \mathbf{E} \left(\arcsin \frac{a}{b}, \frac{b}{R_{eff}} \right) \right] = \frac{w_a}{p_0}$$

где использованы обозначения $E^* = E/(1 - \nu^2)$, $R_{eff} = l \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^{1/2}$.

При отсутствии контакта, когда поверхности разделены и взаимодействуют только через адгезионное притяжение, верны соотношения, следующие из (3.15) в частном случае $n=1$:

$$p = -\frac{2\pi p_0 b^2}{\sqrt{3}l^2}, \quad d = -\frac{b^2}{2R} + \frac{4}{\pi E^*} p_0 b \left[1 - \frac{b}{R_{eff}} \mathbf{E} \left(\frac{b}{R_{eff}} \right) \right] + \frac{w_a}{p_0}. \quad (3.21)$$

Для удобства расчетов и представления результатов используется следующая параметризация. Вводится безразмерное среднее давление p^* и безразмерное расстояние между поверхностями d^* согласно соотношениям

$$p^* = \frac{2}{3} \frac{p}{\pi w_a R \eta_s}, \quad d^* = \frac{4}{3} d \left(\frac{E^{*2}}{\pi^2 w_a^2 R} \right)^{1/3}, \quad (3.22)$$

Параметр η_s определяет плотность выступов. В случае гексагональной решетки он равен $\eta_s = \frac{2}{\sqrt{3}l^2}$. Кроме того, вводятся безразмерные радиусы областей контакта и областей адгезионного взаимодействия

$$\alpha_1 = a \left(\frac{E^*}{\pi w_a R^2} \right)^{1/3}, \quad \beta_1 = b \left(\frac{E^*}{\pi w_a R^2} \right)^{1/3} \quad (3.23)$$

и два безразмерных параметра, от которых зависит решение задачи:

$$\lambda = p_0 \left(\frac{9R}{2\pi w_a E^{*2}} \right)^{1/3} \quad (3.24)$$

$$L_1 = l \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{E^*}{\pi w_a R^2} \right)^{1/3} \quad (3.25)$$

Параметр, аналогичный параметру λ , был впервые использован в работе [151], этот параметр определяет характер адгезионного взаимодействия. Для закона адгезионного притяжения Леннард-Джонса (1.3), максимальное по абсолютной адгезионное давление определяется выражением:

$$p_m = \frac{16}{9\sqrt{3}} \frac{w_a}{z_0}$$

Если в используемой модели Можи-Дагдейла принять $p_0 = p_m$, то можно найти связь между используемым в этой работе параметром адгезии λ и параметром Тейбора μ_T (1.9):

$$\lambda = \frac{16}{9^{2/3} 3^{1/2} (2\pi)^{1/3}} \mu_T \approx 1.1 \mu_T \quad (3.26)$$

Параметр L_1 характеризует взаимное влияние выступов: при больших L_1 взаимное влияние выступов мало. Полученное решение применимо, когда $L_1 > \beta$.

3.2.3. Расчет зависимостей фактической площади контакта и сближения шероховатого слоя от номинального давления

Для расчетов использовались соотношения (3.18) - (3.21), позволяющие при заданных значениях параметров λ и L_1 вычислить значения безразмерной фактической площади контакта $A_1 = \pi \alpha_1^2$ и безразмерного расстояния d^* между полупространством и номинальной плоскостью при различных значениях безразмерного номинального давления p^* . Полученные результаты приведены на рис. 3.10. Сплошные линии соответствуют более плотному контакту ($L_1 = 5$), пунктирные – менее плотному, когда взаимное влияние выступов мало ($L_1 = 50$). Приведены зависимости для трех разных значений параметра λ : $\lambda = 0.1$ (кривые 1), $\lambda = 0.5$ (кривые 2) и $\lambda = 2$ (кривые 3).

На рис. 3.10,а показаны зависимости безразмерной фактической площади контакта от номинального давления, а на рис. 3.10,б - зависимости безразмерного номинального давления от безразмерного расстояния между поверхностями.

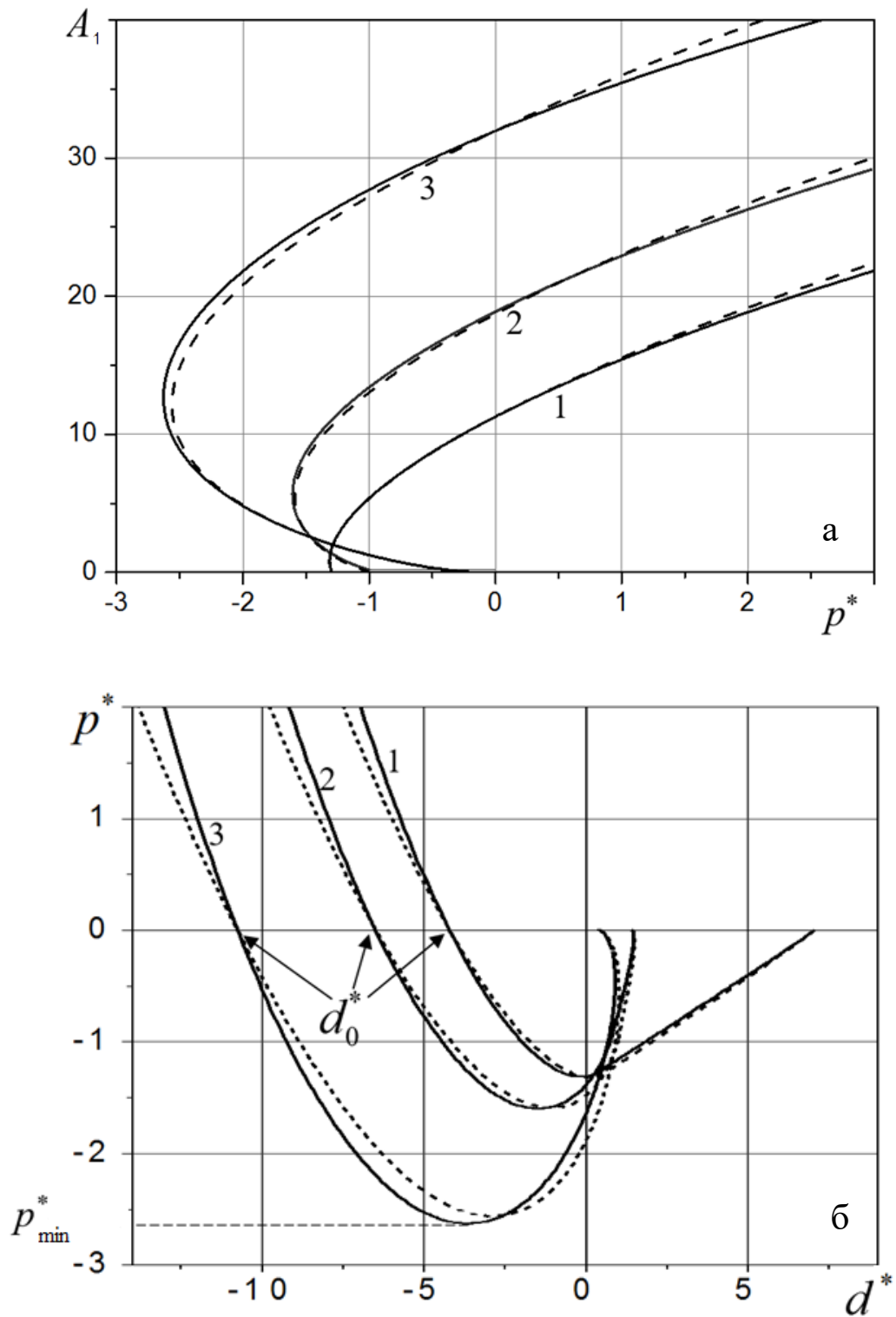


Рис. 3.10. Зависимость безразмерной фактической площади контакта от номинального давления (а) и зависимость номинального давления от безразмерного расстояния между поверхностями (б).

Результаты показывают, что контакт с ненулевой площадью существует не только при положительных (сжимающих) давлениях, но и при

отрицательных, т.е. растягивающих, при этом абсолютная величина растягивающего давления, выдерживаемого адгезионным шероховатым контактом, тем больше, чем выше параметр адгезии λ . Из расчетов следует, что величина параметра адгезии λ оказывает существенное влияние на зависимость номинального давления от расстояния между поверхностями. Влияние параметра шероховатости ρ на результаты незначительно при малых значениях λ ; это влияние становится более заметным при возрастании λ .

Функциональная зависимость номинального давления от расстояния между телами $p^* = p^*(d^*)$ является основной механической характеристикой рассматриваемого шероховатого слоя, которая учитывает силы адгезионного взаимодействия между шероховатыми поверхностями. Величина $d^* = d_0^*$, при которой номинальное контактное давление p^* меняет знак и $p^*(d_0^*) = 0$ (см. рис. 3.10,б), определяет равновесное расстояние между номинально плоскими шероховатыми поверхностями.

Когда поверхности находятся в контакте и номинальное давление начинает уменьшаться, переходя к отрицательным (растягивающим) значениям, при определенной величине давления происходит отрыв поверхностей. Давление отрыва p^*_{\min} соответствует точке минимума на графике зависимости номинального давления от расстояния между поверхностями (рис. 3.10,б).

На рис. 3.11 показаны зависимости абсолютной величины номинального давления отрыва от величины параметра адгезии. Сплошная линия соответствует достаточно плотному расположению выступов ($L_1 = 5$), штриховая – менее плотному ($L_1 = 50$). Результаты расчетов показывают, что увеличение плотности контакта приводит к возрастанию давления отрыва поверхностей, особенно при больших значениях λ . Таким образом, поверхности с более плотным расположением выступов способны удерживать более высокие величины отрицательного (разрывающего контакт) давления.

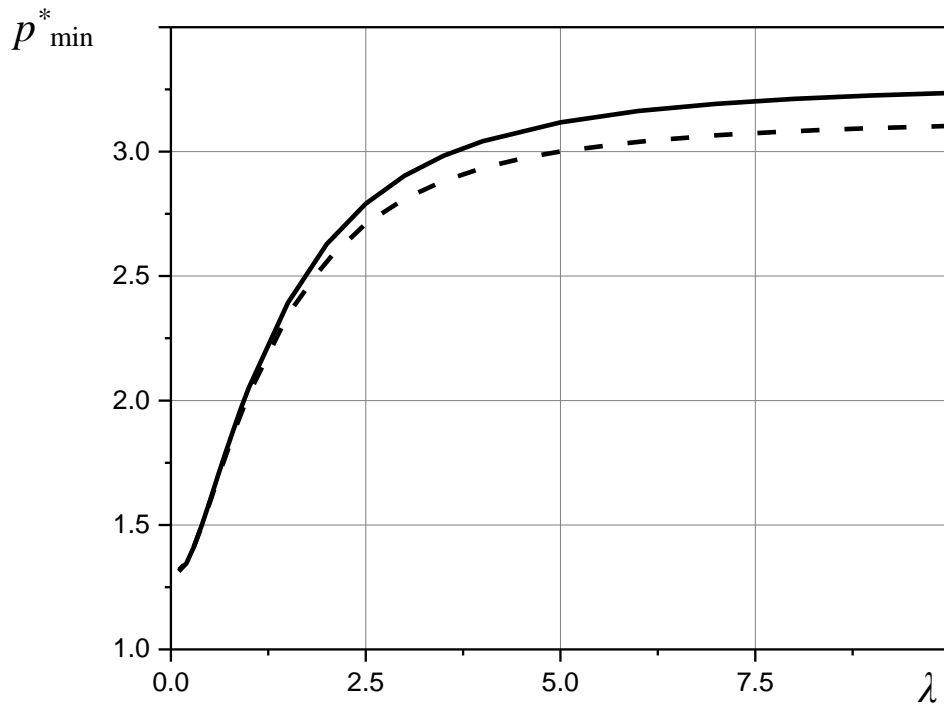


Рис. 3.11. Зависимость номинального давления отрыва от величины параметра адгезии для контакта номинально плоских поверхностей.

3.2.4. Расчет эффективной работы адгезии для шероховатых поверхностей

Аналогично тому, как это делается для гладких плоских поверхностей [137, 153], можно определить удельную работу адгезии w_{rough} для номинально плоских шероховатых поверхностей, которую необходимо затратить для разведения поверхностей от равновесного расстояния $d^* = d_0^*$ до бесконечности:

$$w_{\text{rough}} = -\frac{9}{8} \pi w_a R \eta_s \left(\frac{\pi^2 w_a^2 R}{E^{*2}} \right)^{1/3} \int_{d_0^*}^{\infty} p^*(z) dz = \frac{9}{8} \pi w_a R \eta_s \left(\frac{\pi^2 w_a^2 R}{E^{*2}} \right)^{1/3} w_{\text{rough}}^*, \quad (3.27)$$

Величину w_{rough}^* можно рассматривать как безразмерную удельную работу адгезии. Численно она равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $p^* = p^*(d^*)$ и осью $p^* = 0$ (см. рис. 3.12).

Заметим, что работа, которую необходимо затратить для разведения поверхностей, в общем случае больше работы, производимой адгезионными силами при приближении этих же поверхностей от бесконечности до равновесного расстояния, т.е. имеет место гистерезис. Это следует из неоднозначности кривых зависимости номинального давления от расстояния, которая имеет место при достаточно больших значениях параметра адгезии λ : при разведении поверхностей друг от друга разрыв контакта будет происходить при $d^* = d_1^*$, а при их сближении скачкообразное вступление в контакт происходит при $d^* = d_2^*$ (рис. 3.12). Таким образом, величины эффективной удельной работы адгезии при подводе и при отводе двух шероховатых поверхностей при наличии адгезии будут различными. Разность между величинами работы сил адгезии при подводе и отводе гладких упругих тел в осесимметричном контакте, которая соответствует диссипации энергии при циклическом подводе-отводе тел, будет рассчитана и исследована в Главе 4. Соотношение (3.27), по которому проводится расчет ниже, определяет эффективную удельную работу адгезии при отводе поверхностей.

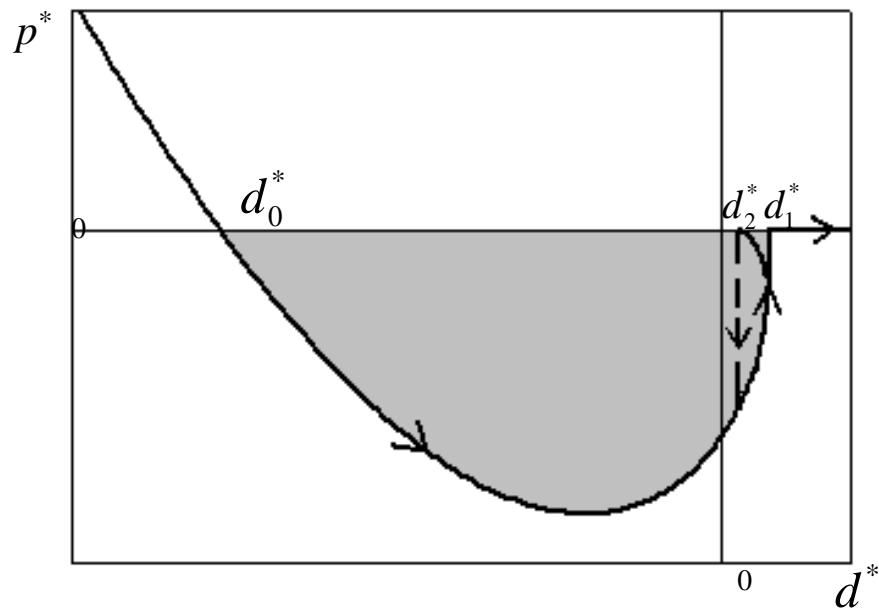


Рис. 3.12. Зависимость безразмерного номинального давления от расстояния между двумя номинально плоскими поверхностями при наличии адгезии.

На рис. 3.13 показана зависимость w_{rough}^* от параметра λ для рассматриваемой модели шероховатого слоя, для которой функция $p^* = p^*(d^*)$ определяется выражениями (3) – (6). Сплошная линия соответствует более плотному расположению выступов $L_1 = 5$, штриховая – $L_1 = 50$. Из результатов расчетов следует, что увеличение плотности контакта приводит к возрастанию удельной работы адгезии, более существенному при больших значениях λ . При увеличении параметра адгезии λ удельная работа адгезии w_{rough}^* сначала уменьшается, достигает минимума, а потом возрастает. Заметим, что при $\lambda \rightarrow 0$ безразмерная ширина области адгезионного взаимодействия $\beta \rightarrow \infty$, поэтому при малых λ перестает соблюдаться условие $L_1 > \beta$ применимости модели, а отдельные области адгезионного взаимодействия вокруг выступов сливаются в одну.

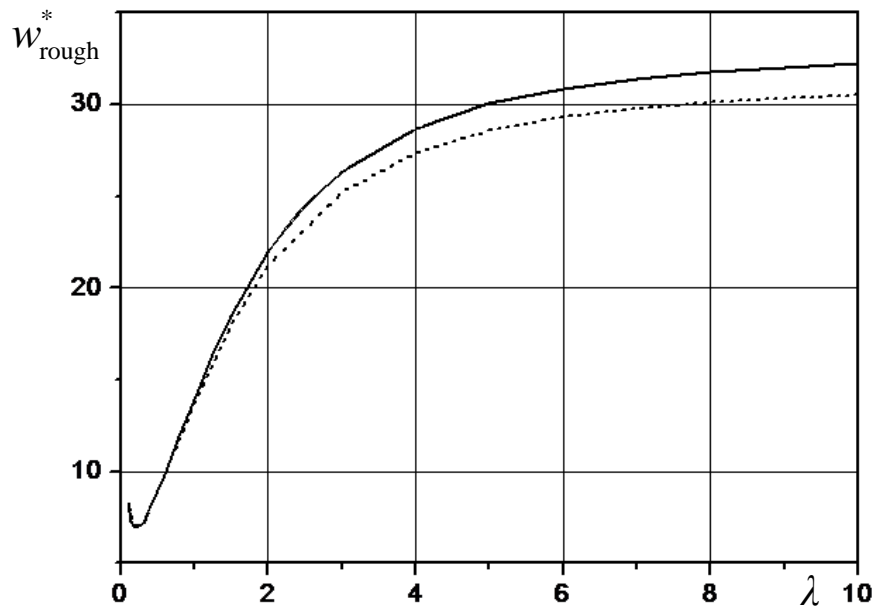


Рис. 3.13. Зависимость эффективной удельной работы адгезии для шероховатых поверхностей от параметра адгезии.

Получить аналитическое выражение для w_{rough}^* в общем случае, для произвольных λ и L_1 , не удастся. Однако это можно сделать в предельных случаях. При $\lambda \rightarrow \infty$ из соотношений (3.18) - (3.20) получим в безразмерном виде параметрическую зависимость номинального давления от расстояния между поверхностями:

$$p^* = \frac{\frac{4\alpha^3}{9} - \frac{2\sqrt{2}\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{3}}{\arccos \frac{\alpha}{L_1} + \frac{\alpha}{L_1} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{L_1^2}}}, \quad (3.28)$$

$$d^* = -\frac{4(\alpha^2 + \sqrt{2\alpha})}{3} + \frac{8}{9\pi L_1} \frac{2\alpha^3 - 3\sqrt{2}\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{\arccos \frac{\alpha}{L_1} + \frac{\alpha}{L_1} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{L_1^2}}} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{L_1^2}}$$

Взять аналитически интеграл для w_{rough}^* в этом случае не удастся, хотя расчеты существенно упрощаются. Подставив (3.28) в (3.27) и вычислив интеграл численно, получим зависимость удельной работы адгезии w_{rough}^* от

плотности расположения неровностей L_1 , представленную на рис. 3.14 и соответствующую случаю $\lambda \rightarrow \infty$.

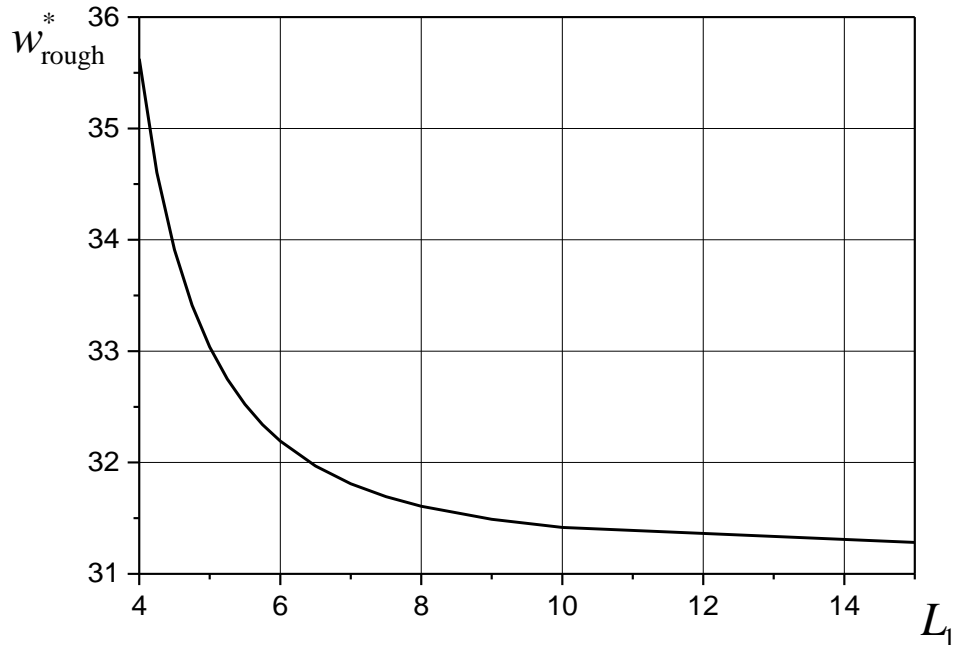


Рис. 3.14. Зависимость безразмерной эффективной удельной работы адгезии от безразмерной плотности расположения неровностей при $\lambda \rightarrow \infty$.

Предельное значение удельной работы адгезии w_{rough}^* в этом случае можно рассчитать аналитически при $L_1 \rightarrow \infty$, т.е., если не учитывать взаимное влияние выступов. Устремляя в соотношениях (4.2) $L_1 \rightarrow \infty$, получим известные выражения [137, 142] для единичного контакта:

$$p^* = \frac{8\alpha^3}{9\pi} - \frac{4\sqrt{2}\alpha^{3/2}}{3}, \quad d^* = -\frac{4\alpha^2}{3} + \frac{4\sqrt{2}\alpha}{3}. \quad (3.29)$$

В этом случае можно также рассчитать значение удельной работы адгезии, взяв интеграл:

$$w_{\text{rough}}^* = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p^*(\alpha) d'_0(\alpha) d\alpha, \quad \text{где } \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{(6\pi)^{2/3}}{2}, \quad (3.30)$$

откуда окончательно получим

$$w_{\text{rough}}^* = \frac{2}{315\pi} (15\pi - 1 + 216\pi^{10/3} 6^{1/3} - 90\pi^{7/3} 6^{1/3}) \approx 31,34. \quad (3.31)$$

Отметим, что параметр адгезии λ , как ранее было показано в [151], в двух предельных случаях ($\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$) приводит к классическим упрощенным моделям адгезии при взаимодействии двух гладких осесимметричных тел. Случай $\lambda \rightarrow 0$ соответствует модели Дерягина, Муллера и Топорова (ДМТ) [40, 111], которая применима для достаточно жестких взаимодействующих тел, когда их контактная деформация мало отличается от герцевского случая. В этой модели учитываются растягивающие напряжения, вызванные адгезионными силами, вне области контакта, но считается, что они не влияют на распределение напряжений внутри области контакта. Другая классическая модель – модель Джонсона-Кендалла-Робертса (ДКР) [41, 142] соответствует предельному случаю $\lambda \rightarrow \infty$ и применима для достаточно мягких тел и относительно высоких величин их поверхностной энергии. В этой модели решение контактной задачи получено с растягивающими напряжениями внутри области контакта (по ее краям) и нулевыми – вне области контакта, при этом максимальные сжимающие напряжения в контакте выше, чем они были бы без учета адгезионного взаимодействия. Подробнее о классических моделях адгезии двух упругих сфер рассказано в Главе 1 (п .1.2.1).

Проведенный анализ показывает, что в случае ДМТ ($\lambda \rightarrow 0$) построенная модель шероховатого адгезионного контакта не применима. Для случая $\lambda \rightarrow \infty$ полученное решение (3.28) является обобщением известных соотношений теории ДКР (3.29) на случай множественного контакта.

Важно отметить, что эффективная удельная работа адгезии для номинально плоских шероховатых поверхностей, определяемая по соотношению (3.27), позволяет проводить приближенную оценку контактных характеристик для адгезионного контакта шероховатых тел, используя соотношения для гладких тел. Такое определение удельной работы адгезии

w_{rough} позволяет использовать все существующие модели адгезионного контакта гладких упругих тел (в частности, изложенные в Главе 2 данной работы) для оценки адгезионных характеристик контакта шероховатых упругих тел [118]. Для этого в таких моделях достаточно заменить удельную работу адгезии для гладких тел w на величину w_{rough} и использовать номинальные размеры шероховатых тел. Недостатком таких оценок является то, что при этом на макроуровне не учитываются деформации (податливость Δ , см. рис.3.9) самого слоя - они учитываются только при определении w_{rough} . Эти деформации существенно влияют на распределение номинальных контактных напряжений, размеры номинальных областей контакта и номинального зазора между телами после их деформации, даже при отсутствии адгезии. Поэтому для более точного расчета характеристик адгезионного контакта шероховатых тел, обладающих заданной макроскопической формой, необходимо использовать метод построения интегральных уравнений на макроуровне с учетом функции дополнительного смещения за счет деформирования шероховатостей, развитый в [17, 18, 21]; при этом податливость поверхностного шероховатого слоя должна описываться соотношениями вида (3.18)-(3.21).

3.2.5. Некоторые результаты расчета контактных характеристик на макроуровне

Зависимость номинального давления от расстояния между поверхностями, определяемая соотношениями (3.18)-(3.21), полностью определяет механические свойства шероховатого слоя, расположенного между контактирующими телами, и позволяет выполнять формулировки контактных задач в обычных терминах контактной механики.

Метод решения интегрального уравнения (3.17) для случая контакта гладкого жесткого штампа и шероховатого упругого полупространства, шероховатость которого заменяется поверхностным слоем со свойствами,

определяемыми соотношениями (3.18)-(3.21), подробно изложена в работе [10], при этом расчеты контактных характеристик на макроуровне выполнены соавторами работы Б.Г.Галановым, И.К.Валеевой и С.М.Ивановым. Расчеты проводились при различных формах взаимодействующих тел на макроуровне и различных параметрах шероховатости L_1 и адгезии λ на микроуровне. Ниже приведены некоторые из полученных результатов.

Форма штампа на макроуровне считается осесимметричной и описывается степенной функцией $f(x) = A|x|^s$, $s \geq 1$.

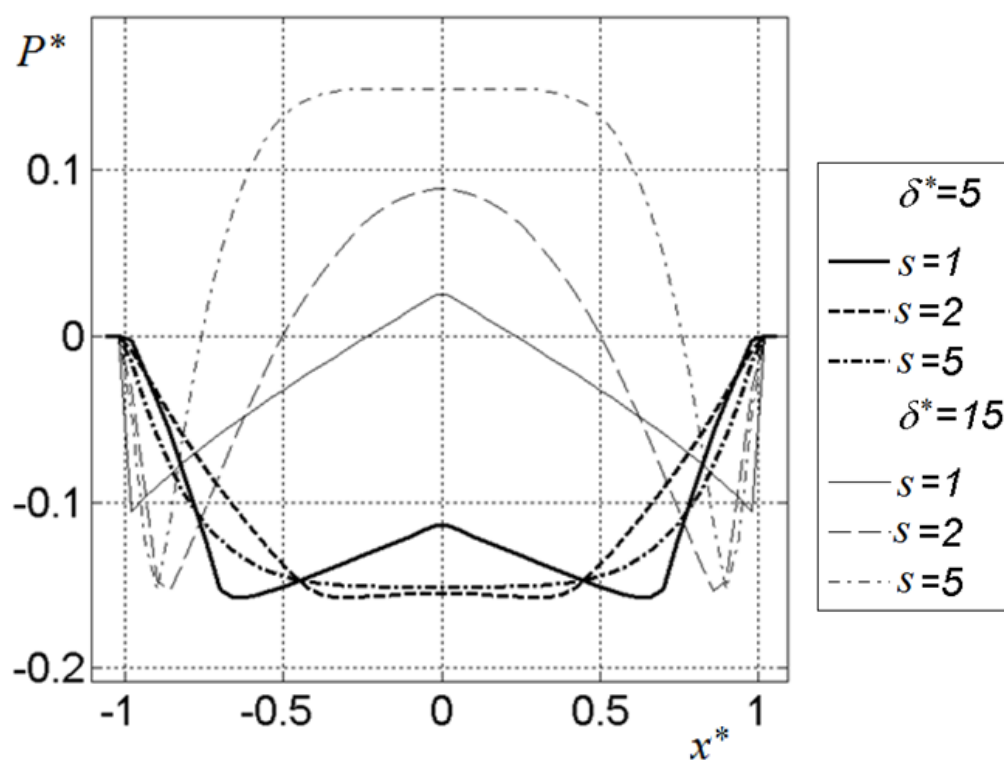


Рис. 3.15. Распределение безразмерного номинального контактного давления для штампов различной формы на макроуровне [10].

На рис. 3.15 показаны распределения номинальных контактных давлений для штампов разной формы на макроуровне - конического $s = 1$, параболического $s = 2$ и при $s = 5$ - и при различных величинах безразмерного сближения тел $\delta^* = 5$ и $\delta^* = 15$. На микроуровне выбраны следующие значения параметров адгезии и шероховатости: $\lambda = 0.1$, $L_1 = 5$.

Результаты показывают, что учет адгезии и шероховатости на микроуровне приводит к существенным изменениям распределения номинального давления: по краям области контакта появляются участки отрицательного давления; эти участки тем шире, чем меньше сближение тел. На распределение контактного давления существенное влияние оказывает не только величина сближения контактирующих тел, но и форма штампа.

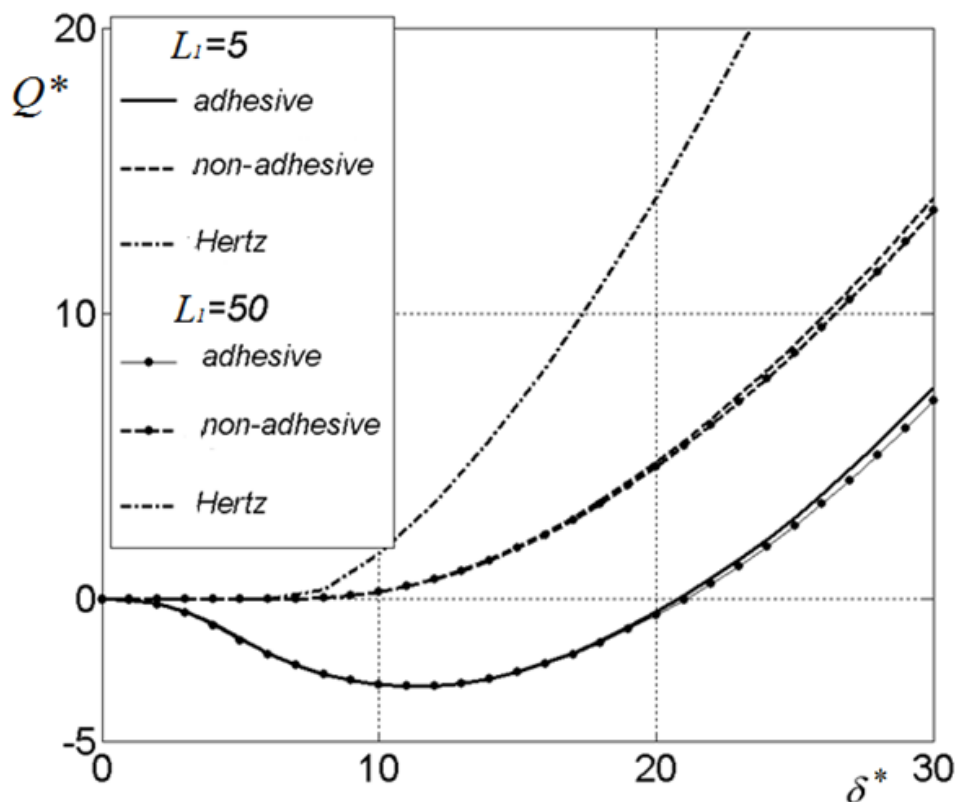


Рис. 3.16. Зависимость безразмерной внешней нагрузки, действующей на штамп, от сближения штампа и полупространства на макроуровне [10].

Полученные результаты существенно зависят не только от величины сближения контактирующих тел и формы штампа, но и от параметра адгезии λ . Учет плотности контакта (величина L_1) оказывает незначительное влияние на них.

На рис. 3.16 показаны графики безразмерной внешней нагрузки от сближения тел при шероховатости с параметрами $L_1 = 5$ и $L_1 = 50$ и

параметре адгезии $\lambda = 0.1$. Для сравнения приведены кривые с такими же параметрами шероховатости, но без учета адгезии (*non-adhesive*) и кривая в случае отсутствия шероховатости, т.е. герцевская зависимость (*Hertz*). При этом полагается, что $s = 2$, штамп имеет параболическую форму. Результаты показывают, что наличие адгезии приводит к немонотонности зависимости нагрузки от расстояния между телами, при этом шероховатый адгезионный контакт способен выдерживать отрицательные нагрузки.

3.3. Выводы по Главе 3

Решение задачи о взаимодействии упругого полупространства с периодической системой штампов при наличии адгезии позволило изучить роль шероховатости при адгезионном взаимодействии упругих тел, а именно, исследовать влияние на контактные характеристики формы выступов и расстояния между ними.

Установлено, что форма выступов, определяемая параметром n , оказывает существенное влияние на распределение контактных давлений в дискретном контакте упругих тел при наличии адгезии. Характер остальных зависимостей при изменении n качественно не меняется.

Взаимное влияние соседних выступов проявляется лишь при достаточно малых расстояниях между ними ($L < 0.5$) в случае адгезии, связанной с молекулярным притяжением поверхностей (адгезии сухих поверхностей). При капиллярной адгезии поверхностей, покрытых пленкой жидкости, взаимное влияние выступов имеет место при любых расстояниях между ними.

Уменьшение расстояния между выступами оказывает различный эффект на контактные характеристики в зависимости от знака приложенной нагрузки.

- *При адгезии сухих поверхностей:* Если сила, действующая на один

выступ, положительна (прижимает взаимодействующие тела друг к другу), то уменьшение расстояния между выступами приводит к увеличению контактных давлений, уменьшению размеров области контакта и области, по которой действует адгезионное притяжение, а также уменьшению дополнительного перемещения выступа. При отрицательной силе (разрывающей взаимодействующие тела) уменьшение расстояния между выступами приводит к противоположным эффектам. Сила, действующая на каждый выступ, неоднозначно зависит от дополнительного внедрения выступа.

- *При капиллярной адгезии:* В случае, когда на каждый выступ действует отрицательная сила, размер области контакта возрастает с уменьшением расстояния между выступами. При положительной приложенной нагрузке размер этой области немонотонно зависит от расстояния между выступами. Кроме того, при уменьшении расстояния между выступами размер менисков уменьшается, а величина давления в них увеличивается независимо от знака приложенной силы. Зависимость силы, действующей на один штамп, от его дополнительного внедрения становится неоднозначной лишь при достаточно близко расположенных выступах.

Полученная при решении контактной задачи зависимость сближения поверхностей от приложенного номинального давления использована для описания податливости поверхностного слоя в модели адгезионного контакта шероховатых тел, обладающих заданной макроскопической формой. Для модели шероховатого поверхностного слоя с регулярной системой выступов проведен расчет безразмерной удельной работы адгезии, которая позволяет проводить приближенную оценку контактных характеристик для адгезионного контакта шероховатых тел, используя соотношения для гладких тел.

Результаты показывают, что параметр адгезии λ существенно влияет на контактные характеристики на макроуровне и величину эффективной удельной работы адгезии, в то время как параметр L_1 , характеризующий

плотность выступов, оказывает заметное влияние только при достаточно больших величинах параметра адгезии λ . В предельном случае достаточно больших значений параметра λ полученные результаты являются обобщением модели ДКР [142] на случай контакта упругих тел с регулярным микрорельефом.

Глава 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ И АДГЕЗИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СИЛЫ ТРЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ТЕЛ

В этой главе рассматривается процесс нормального сближения и разведения поверхностей при наличии адгезии. Проводится расчет потери энергии при циклическом подводе и отводе тел друг от друга. Полученные результаты использованы для моделирования силы трения при тангенциальном перемещении друг относительно друга шероховатых упругих тел (при скольжении и качении).

4.1. Диссипация энергии при сближении и удалении упругих тел при наличии адгезии

4.1.1. Анализ зависимости нагрузки от расстояния между телами

Анализ полученного в Главе 2 решения задачи об адгезионном взаимодействии осесимметричных упругих тел свидетельствует о немонотонной и неоднозначной зависимости силы, действующей на тела, от расстояния между ними. Эти зависимости иллюстрируются на рис. 4.1, где приведены примеры графиков нагрузки от безразмерного расстояния между телами, полученные при $n=2$. Число n определяет форму взаимодействующих тел, которая описывается степенной функцией $f(r) = Ar^{2n}$. Толстые линии соответствуют контакту поверхностей, а тонкие — отсутствию контакта.

Рис. 4.1, а, соответствует случаю молекулярной адгезии, описываемой моделью Можи-Дагдейла, обобщенной на случай формы индентора в виде степенной функции (п. 2.3.1). На этом рисунке представлены графики безразмерной нагрузки $q / (p_0 D^2)$ (здесь и далее $D = (2A)^{-1/(2n-1)}$) от

безразмерного расстояния между телами $\delta = d / D$ при $E^* / p_0 = 1$. Кривые 1 и 2 построены для двух различных значений безразмерной удельной энергии адгезии $w_a / (p_0 D) = 1$ и $w_a / (p_0 D) = 2$ соответственно.

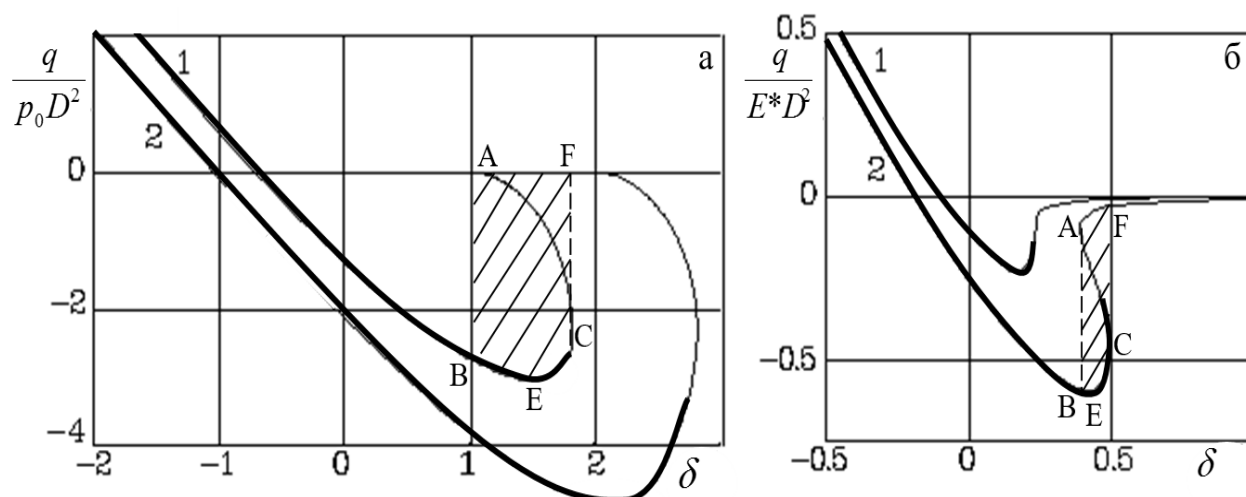


Рис. 4.1. Зависимость нагрузки $q / (\pi D^2 E^*)$ от расстояния между телами $\delta = d / D$ для адгезии сухих поверхностей (а). Зависимость нагрузки $q / (E^* D^2)$ от расстояния δ для случая капиллярной адгезии (б).

На рис. 4.1, б представлены аналогичные зависимости безразмерной нагрузки $q / (E^* D^2)$ от расстояния $\delta = d / D$ для случая капиллярной адгезии при безразмерном объеме жидкости в мениске $v_0 / D^3 = 0.05$. Кривая 1 соответствует значению безразмерного поверхностного натяжения $\gamma_0 / (E^* D) = 0.025$, кривая 2 — значению $\gamma_0 / (E^* D) = 0.05$.

Результаты расчетов показывают, что как в случае молекулярной, так и капиллярной адгезии, зависимости нагрузки от расстояния между поверхностями имеют неоднозначный характер, однако, начиная лишь с некоторого значения безразмерной удельной энергии адгезии $w_a / (p_0 D)$ или безразмерного поверхностного натяжения $\gamma_0 / (E^* D)$, соответственно.

Зависимости, представленные на рис. 4.1, позволяют изучить процессы нормального сближения и разведения поверхностей при наличии адгезии.

Рассмотрим кривую 1 на рис. 4.1, а и кривую 2 на рис. 4.1, б. Если контакт осуществляется при контролируемой (монотонно уменьшаемой) нагрузке q , то при достижении этой нагрузкой минимального значения q_{\min} (точка Е), произойдет скачкообразный отрыв поверхностей в случае как сухих поверхностей, так и капиллярной адгезии при любых значениях параметров. При этом в момент отрыва имеет место контакт поверхностей по конечной области. Если взаимодействие происходит при контролируемом (монотонно увеличиваемом) расстоянии между телами d , то при достижении точки С происходит скачкообразный переход в точку F. И обратно, при уменьшении расстояния d происходит скачок из точки А в точку В. Заметим, что точки А и F всегда соответствуют отсутствию контакта между поверхностями, в то время как точки В и С могут соответствовать как случаю контакта, так и отсутствию контакта поверхностей, в зависимости от значений параметров задачи. Следовательно, возможно скачкообразное разрушение контакта и вступление поверхностей в контакт. Последний процесс иллюстрируется на рис. 4.2 для случая капиллярной адгезии при контакте штампа с упругим полупространством.

Заметим, что в случае капиллярной адгезии циклический процесс сближения и разведения тел, включая скачкообразное вступление их в контакт и выход из контакта, происходят без разрушения мениска. Предположения, при которых была построена модель капиллярной адгезии в Главе 2 (п. 2.2.1) включают ограничения на форму мениска, а именно, что его диаметр (ширина) должен значительно превышать его высоту. Поэтому данную модель нельзя использовать при больших расстояниях между телами, когда мениск становится вытянутым в вертикальном направлении, и она не может описывать разрушение мениска при разведении тел. Модель, учитывающая форму мениска и возможность его разрушения при больших расстояниях между телами, но не учитывающая влияние капиллярного давления на их деформацию, предложена в [77].

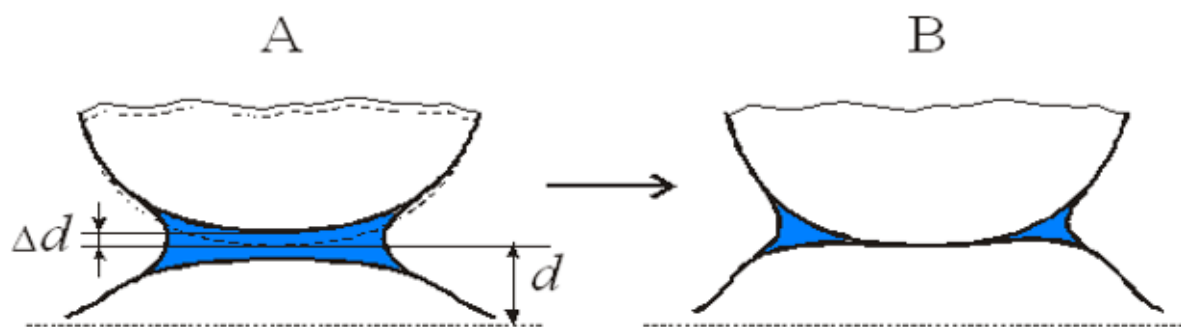


Рис. 4.2. Схема скачкообразного вступления поверхностей в контакт при наличии капиллярной адгезии

Таким образом, из рассмотрения процесса сближения и разведения поверхностей следует, что работа, совершаемая силами адгезии при сближении поверхностей, не равна работе, совершаемой внешней силой при их удалении друг от друга. Соответствующая потеря энергии определяется площадью заштрихованных областей на рис. 4.1

$$\Delta w = \int_{ABCF} q(d) dd \quad (4.1)$$

На основании полученных в Главе 2 зависимостей нагрузки от расстояния между телами проведен расчет величины потери энергии Δw и силы отрыва поверхностей q_{\min} как при капиллярной адгезии, так и для адгезии сухих поверхностей. В случае капиллярной адгезии расчет проводился по соотношениям (2.56)-(2.58) при отсутствии контакта поверхностей и по уравнениям (2.72), (2.73), (2.76), (2.77) при наличии контакта. В случае молекулярной адгезии расчет проводился по соотношениям (2.99), (2.100) при отсутствии контакта и (2.102)-(2.104) при наличии контакта.

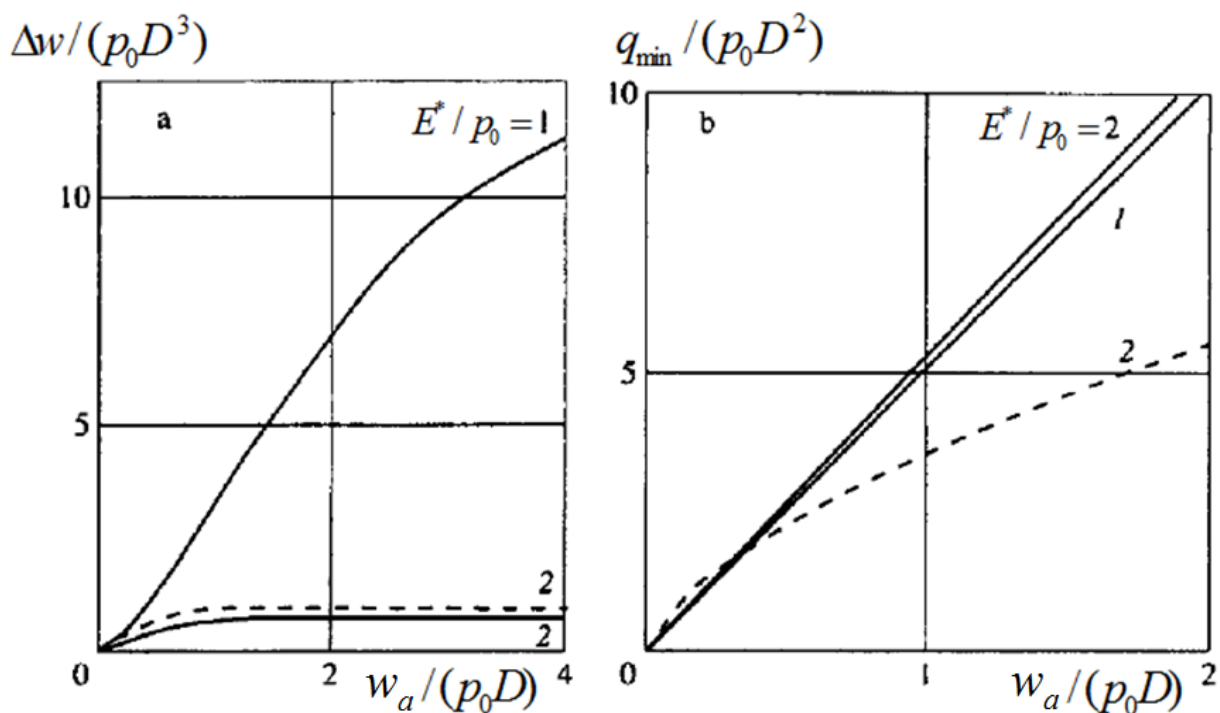


Рис. 4.3. Зависимости безразмерной потери энергии $\Delta w / (p_0 D^3)$ (а) и силы отрыва поверхностей $q_{\min} / (p_0 D^2)$ (б) от безразмерной удельной работы адгезии $w_a / (p_0 D)$ в случае адгезии сухих поверхностей.

Зависимости безразмерной потери энергии $\Delta w / (p_0 D^3)$ и силы отрыва поверхностей $q_{\min} / (p_0 D^2)$ от безразмерной удельной работы адгезии $w_a / (p_0 D)$ представлены на рис. 4.3, а и б, соответственно, для случая молекулярной адгезии (адгезии сухих поверхностей). Сплошные кривые соответствуют $n = 1$, т.е. взаимодействующим телам в форме параболоидов вращения. Результаты показывают, что при увеличении удельной работы адгезии для данной пары поверхностей потеря энергии при их циклическом сближении и разведении увеличивается и при некотором значении $w_a / (p_0 D)$ выходит на постоянную. Потеря энергии $\Delta w / (p_0 D^3)$ больше для меньших значений E^* / p_0 , т.е., для более мягких тел. Сила отрыва $q_{\min} / (p_0 D)$, напротив, увеличивается с увеличением E^* / p_0 . Для сравнения приведены

также зависимости для другой формы взаимодействующих тел ($n=2$) и $E^* / p_0 = 2$ (штриховые кривые).

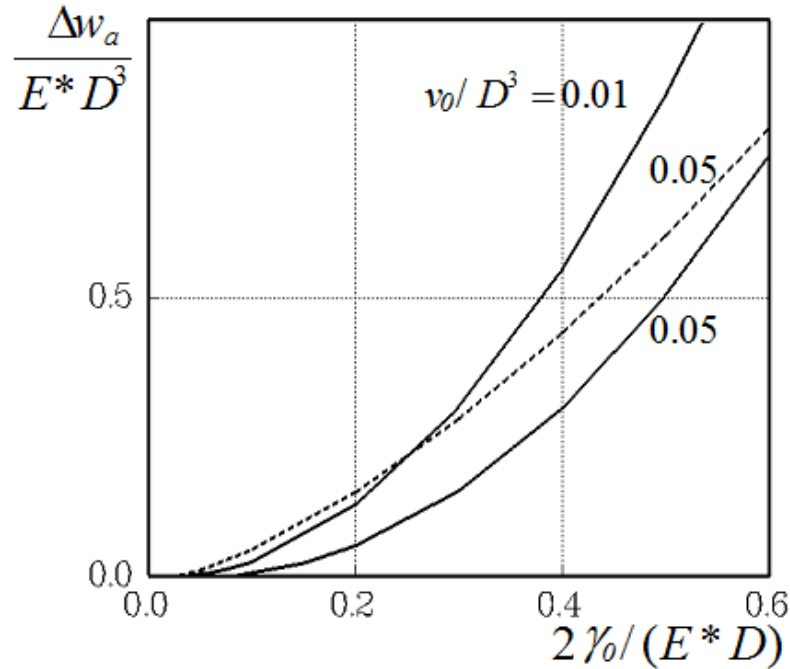


Рис. 4.4. Зависимости безразмерной потери энергии $\Delta w / (E^* D^3)$ от безразмерного поверхностного натяжения $\gamma_0 / (E^* D)$ для случая капиллярной адгезии

На рис. 4.4 приведены зависимости безразмерной величины потери энергии $\Delta w / (E^* D^3)$ от безразмерного поверхностного натяжения $\gamma / (E^* D)$ для случая капиллярной адгезии ($n=1$, сплошные кривые). Анализ решения задачи показал, что потеря энергии отлична от нуля только начиная с некоторого значения безразмерного поверхностного натяжения и возрастает неограниченно при увеличении этого параметра. Кроме того, величина $\Delta w / (E^* D^3)$ тем больше, чем меньше объем жидкости в мениске. Приведена также зависимость для другой формы поверхностей ($n=2$) и $v / D^3 = 0.05$ (штриховая кривая).

4.1.2. Диссипация энергии при сближении-разведении параболоидов вращения

Случай $n=1$ соответствует взаимодействию тел, форма поверхности которых описывается параболической функцией $f(r) = Ar^2$, причем величина $D = (2A)^{-1/(2n-1)}$ имеет смысл их приведенного радиуса: $D = R_1^{-1} + R_2^{-1} = R$. Будем рассматривать случай молекулярной адгезии, то есть, адгезии сухих поверхностей.

Анализ полученного решения задачи об адгезионном взаимодействии сухих поверхностей (2.99), (2.100) и (2.102)-(2.104) показывает, что в этом случае зависимость между безразмерной нагрузкой Q_1 и безразмерным расстоянием между телами δ_1 , определяемыми соотношениями

$$Q_1 = \frac{q}{\pi R w_a}, \quad \delta_1 = d \left(\frac{16E^{*2}}{9\pi^2 w_a^2 R} \right)^{1/3} \quad (4.2)$$

описывается единственным параметром λ (3.24). Такая параметризация для задачи об адгезии между параболоидом вращения и упругим полупространством впервые была использована в работе [151]. Как показано в Главе 3 (соотношение (3.25)), параметр адгезии λ аналогичен и близок по величине параметру Тейбора μ_T (1.9).

Графики зависимости безразмерной силы Q_1 от безразмерного расстояния δ_1 представлены на рис. 4.5,а для $\lambda = 0.1, 0.6$ и 2 (кривые 1, 2 и 3, соответственно). Толстые линии соответствуют случаю контакта поверхностей, а тонкие – отсутствию контакта. Предельный случай $\lambda \rightarrow 0$ соответствует упрощенной модели адгезии ДМТ, а случай $\lambda \rightarrow \infty$ - модели ДКР. Результаты расчетов показывают, что при малых λ зависимость Q_1 от δ_1 становится однозначной (см. рис. 4.5,а, кривая 1). При увеличении параметра λ , увеличивается неоднозначность зависимости нагрузки от

расстояния, и, соответственно, возрастает потеря энергии в цикле сближения и удаления выступов.

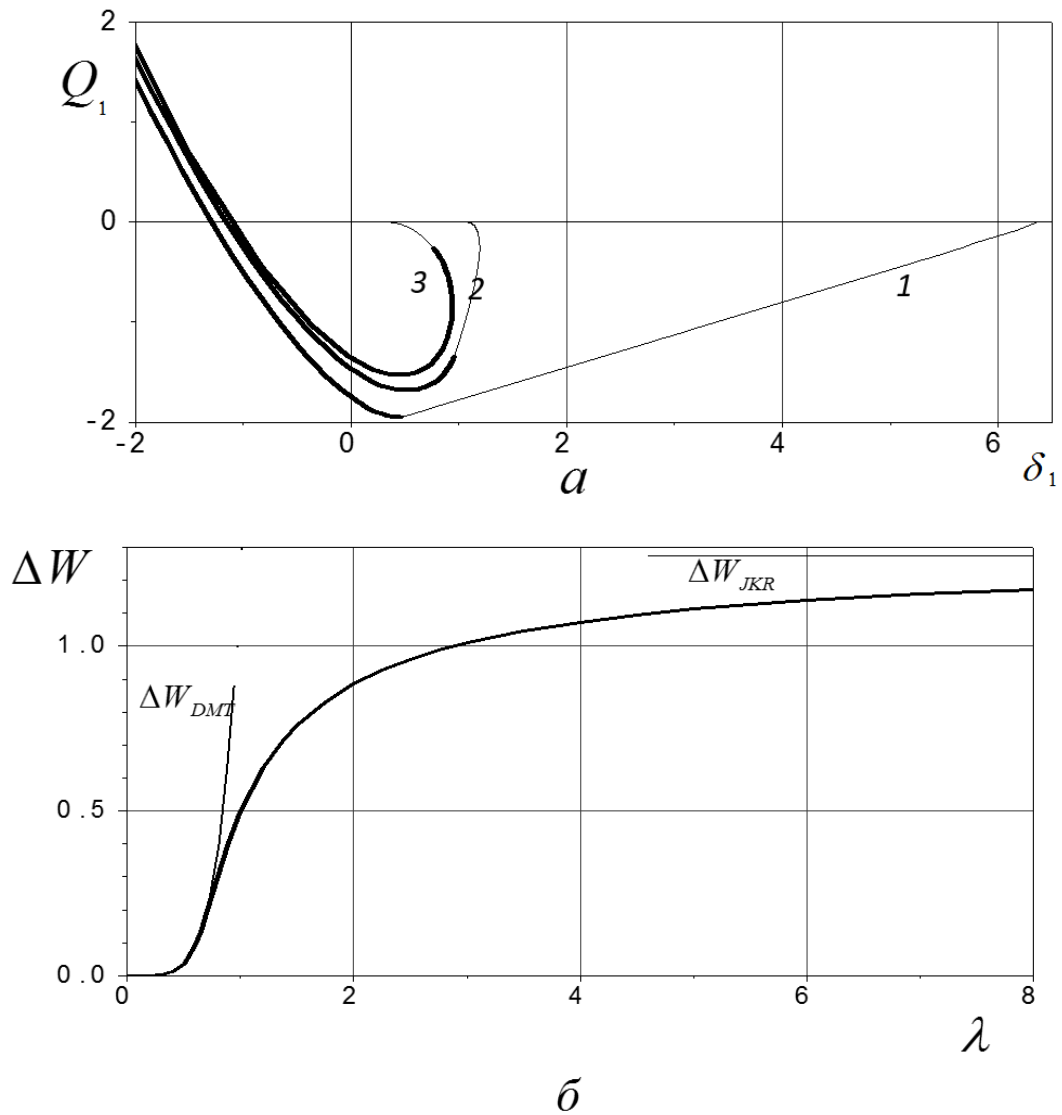


Рис. 4.5. Зависимость безразмерной нагрузки от расстояния (а) и диссипация энергии в цикле сближение-удаление выступов как функция параметра адгезии λ (б). Случай параболических тел.

Этот вывод подтверждается при численном расчете величины безразмерной потери энергии

$$\Delta W = \Delta w \left(\frac{16E^{*2}}{9\pi^5 \gamma^5 R^4} \right)^{1/3} \quad (4.3)$$

как функции параметра λ . График зависимости $\Delta W(\lambda)$ приведен на рис. 4.5,б. При $\lambda \rightarrow 0$, безразмерная потеря энергии ΔW стремится к нулю. При малых значениях λ ($0 \leq \lambda < (9/32)^{1/3}$), как это видно на рис. 4.5,а, петля гистерезиса целиком лежит в области отсутствия контакта (тонкие линии). В этом случае зависимость нагрузки от расстояния задается соотношениями (2.98)-(2.100), или, в безразмерном виде:

$$\delta_1 = \frac{8\lambda}{3\pi} \beta_1 - \frac{\beta_1^2}{2} + \frac{2}{\pi\lambda}, \quad Q_1 = -\frac{1}{2} \pi \lambda \beta_1^2, \quad \beta_1 = b \left(\frac{4E^*}{3\pi w_a R^2} \right) \quad (4.4)$$

Потеря энергии рассчитывается из соотношения:

$$\Delta W_{DMT} = \int_{\beta_1^1}^{\beta_1^2} Q_1(\beta) \delta_1'(\beta) d\beta, \quad \beta_1^1 = \frac{8\lambda}{3\pi}, \quad \beta_1^2 = \frac{16\lambda}{3\pi} \quad (4.5)$$

где функции $Q_1(\beta_1)$ и $\delta_1(\beta_1)$ заданы выражениями (4.4). После взятия интеграла в (4.5), получим следующее соотношение для функции $\Delta W(\lambda)$:

$$\Delta W_{DMT} = \frac{8704}{243\pi^3} \lambda^5 \quad 0 \leq \lambda < (9/32)^{1/3} \approx 0.66 \quad (4.6)$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ петля гистерезиса в зависимости силы от расстояния целиком лежит в области контакта (толстые линии на рис. 4.5). В этом предельном случае, из уравнений (2.102)-(2.104) и (4.2) следует:

$$\delta_1 = -\alpha_1^2 + \frac{2}{3} \sqrt{6\alpha_1}, \quad Q_1 = \alpha_1^3 - \alpha_1 \sqrt{6\alpha_1}, \quad \alpha_1 = a \left(\frac{4E^*}{3\pi\gamma R^2} \right) \quad (4.7)$$

Тогда потеря энергии ΔW , рассчитанная по соотношению

$$\Delta W_{JKR} = \int_{\alpha_1^1}^{\alpha_1^2} Q_1(\alpha) \delta_1'(\alpha) d\alpha, \quad \alpha_1^1 = \frac{1}{6^{1/3}}, \quad \alpha_1^2 = \frac{2}{3^{1/3}} \quad (4.8)$$

где функции $Q_1(\alpha_1)$ и $\delta_1(\alpha_1)$ заданы выражениями (4.7), оказывается постоянной:

$$\Delta W_{JKR} = \frac{3^{1/3}(2^{1/3} + 12)}{15} \approx 1.28 \quad \text{for } \lambda \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

4.1.3. Использование модели Винклера

Решение задачи об адгезионном взаимодействии поверхностей можно существенно упростить, если считать, что упругие свойства взаимодействующих тел описываются моделью Винклера (2.80). В случае капиллярной адгезии решение для модели Винклера получено в разделе 2.2.3. Оно имеет вид (2.84)–(2.87) при контакте поверхностей и (2.81)–(2.83) в отсутствие контакта.

В случае адгезии сухих поверхностей, учитывая соотношение модели Винклера (2.80), из уравнений (2.98)–(2.104) получаем следующие выражения (для простоты рассмотрим случай взаимодействия тел в форме параболоидов вращения, т.е. $n=1$, в этом случае величина R представляет собой приведенный радиус взаимодействующих тел):
при контакте поверхностей, когда $h(0) = 0$:

$$\begin{aligned} p(r) &= -\frac{1}{k} \left(\frac{r^2}{2R} + d \right), \quad r \leq a; & u_z(r) &= -kp_0, \quad a < r \leq b \\ a^2 &= 2R(kp_0 - d), & b^2 &= a^2 + \frac{2Rw_a}{p_0} \\ q &= -2\pi R w_a + \pi \frac{R}{k} (d^2 - k^2 p_0^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

в отсутствие контакта, при $h(0) > 0$:

$$u_{\text{я}}(r) = -kp_0, \quad 0 \leq r \leq b, \quad b^2 = -\frac{q}{\pi p_0} \quad (4.11)$$

$$q = -2\pi R w_a + 2\pi R p_0 (d - kp_0)$$

При точечном контакте, полагая $a = 0$ в (4.10), получаем

$$q = -2\pi R w_a, \quad d = kp_0. \quad (4.12)$$

Полученные решения для модели Винклера определяют зависимость между нагрузкой q и расстоянием между телами d . Если ввести безразмерные переменные Q_1 (первое соотношение (4.2)) и $\delta_w = d(k\gamma)^{-1/2}$, то искомая зависимость будет содержать единственный безразмерный параметр.

Так, в задаче об адгезии сухих поверхностей, используя безразмерный параметр

$$\lambda_w = p_0 (k / w_a)^{1/2}$$

представим последние соотношения (4.10) и (4.11) в виде

$$Q_1 = \begin{cases} \delta_w^2 - 2 - \lambda_w^2, & \delta_w \leq \lambda_w \\ 2(\lambda_w \delta_w - \lambda_w^2 - 1), & \delta_w > \lambda_w \end{cases} \quad (4.13)$$

При $\delta_w \leq \lambda_w$ имеет место контакт поверхностей, а при $\delta_w > \lambda_w$ — отсутствие контакта. Случай $\delta_w = \lambda_w$, $Q_1 = -2$ соответствует точечному контакту.

В случае капиллярной адгезии перейдем в соотношениях (2.81)–(2.83) и (2.84)–(2.87) при $n = 1$ к размерным величинам и выразим расстояние между телами d через величину приложенной нагрузки q . После этого, переходя к безразмерным величинам Q_1 и δ_w и вводя безразмерный параметр

$$\eta_w = \frac{2\pi R k \gamma_0}{v_0}$$

получим

$$\delta_w^2 = \begin{cases} Q_1 + 2 + \eta_w, & \delta_w \leq \eta_w \\ -\frac{1}{\eta_w Q} \frac{(2 + Q_1 - 2Q_1\eta_w - Q_1^2\eta_w/2)^2}{Q_1 + 4}, & \delta_w > \eta_w \end{cases} \quad (4.14)$$

При $\delta_w \leq \eta_w$ поверхности находятся в контакте, а при $\delta_w > \eta_w$ контакт отсутствует. Случай $\delta_w = \eta_w$, $Q_1 = -2$ соответствует точечному контакту поверхностей.

Из полученных соотношений (4.13) и (4.14) следует, что зависимость нагрузки Q_1 , приложенной к телам, от расстояния δ_w между ними является немонотонной и однозначной в случае адгезии сухих поверхностей, а в случае капиллярной адгезии — немонотонной и неоднозначной. Сравнение полученных соотношений с решениями задачи в точной постановке показывает, что модель Винклера дает качественно верную зависимость нагрузки от перемещения лишь при капиллярной адгезии. При адгезии сухих поверхностей эта зависимость качественно соответствует точной только в случае контакта поверхностей.

На основании представленных соотношений между нагрузкой и перемещением получены зависимости безразмерной потери энергии при сближении и удалении поверхностей

$$\Delta W_w = \frac{\Delta w}{\pi R} \left(\frac{1}{k w_a^3} \right)^{1/2}$$

от параметров λ_w и η_w для случаев адгезии сухих поверхностей и капиллярной адгезии соответственно (в случае капиллярной адгезии величину w_a следует заменить на $2\gamma_0$). Эти зависимости представлены на рис. 4.6. В случае адгезии сухих поверхностей функция $\Delta W_w(\lambda_w)$ получена в аналитическом виде

$$\Delta W_w = \begin{cases} \lambda_w^3, & \lambda_w \leq 1 \\ \frac{1}{3} \frac{(\lambda_w^2 - 1)(2\lambda_w^4 + 5\lambda_w^2 - 1)}{\lambda_w^3} + \frac{1}{\lambda_w}, & \lambda_w > 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Как видно из рис.4.6, эта функция близка к функции $\Delta W(\lambda)$, соответствующей точной постановке задачи, лишь при малых значениях λ_w .

В случае капиллярной адгезии зависимость $\Delta W_w(\eta_w)$ качественно напоминает кривую $\Delta W(\eta)$, полученную при решении точной задачи. При этом значение η_w , начиная с которого разность работ ΔW_w становится отличной от нуля, равно $3\sqrt{3}/4$.

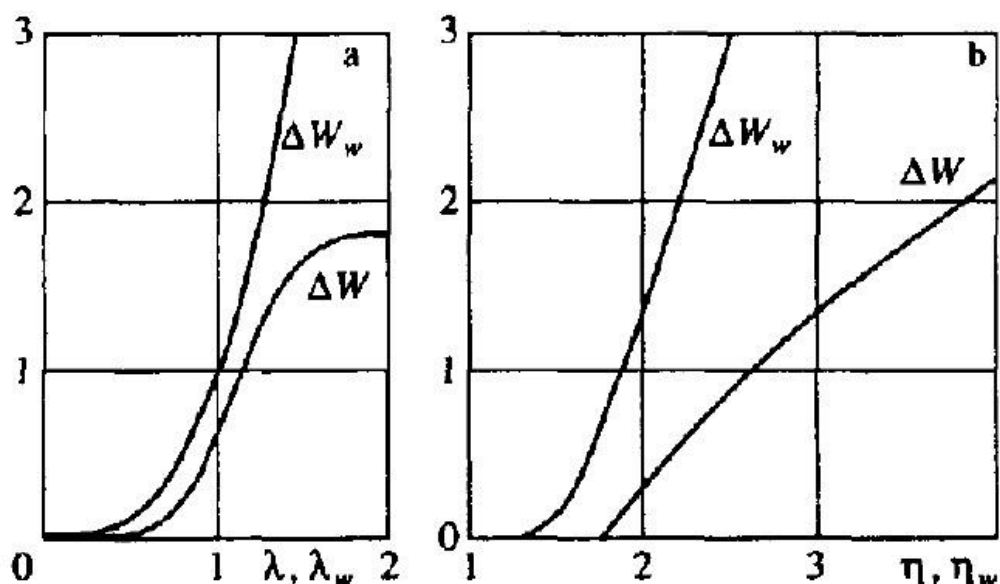


Рис. 4.6. Графики зависимости безразмерной потери энергии от параметра адгезии для модели Винклера в случае молекулярной адгезии (а) и капиллярной адгезии (б).

4.1.4. Влияние формы выступа на диссипацию энергии

В случае $n \neq 1$ (непараболические выступы), для описания зависимости силы от расстояния при адгезионном взаимодействии требуются два безразмерных параметра. Первый параметр, E^*/p_0 , это отношение

приведенного модуля упругости к адгезионному напряжению. Второй параметр, $w_a / (p_0 D)$, представляет собой отношение радиуса адгезионного взаимодействия $h_0 = w_a / p_0$ в модели Можи-Дагдейла (см. Главу 1, уравнения (1.10) и (1.11), а также рис.1.1), к характерному размеру выступов D . Как показали результаты расчетов, форма выступов существенно влияет на форму зависимости силы от расстояния между выступами (рис. 2.13-2.15). При увеличении числа n (когда вершины выступов становятся более плоскими), площадь петли гистерезиса на графике сила-расстояние увеличивается, и возрастает потеря энергии в цикле.

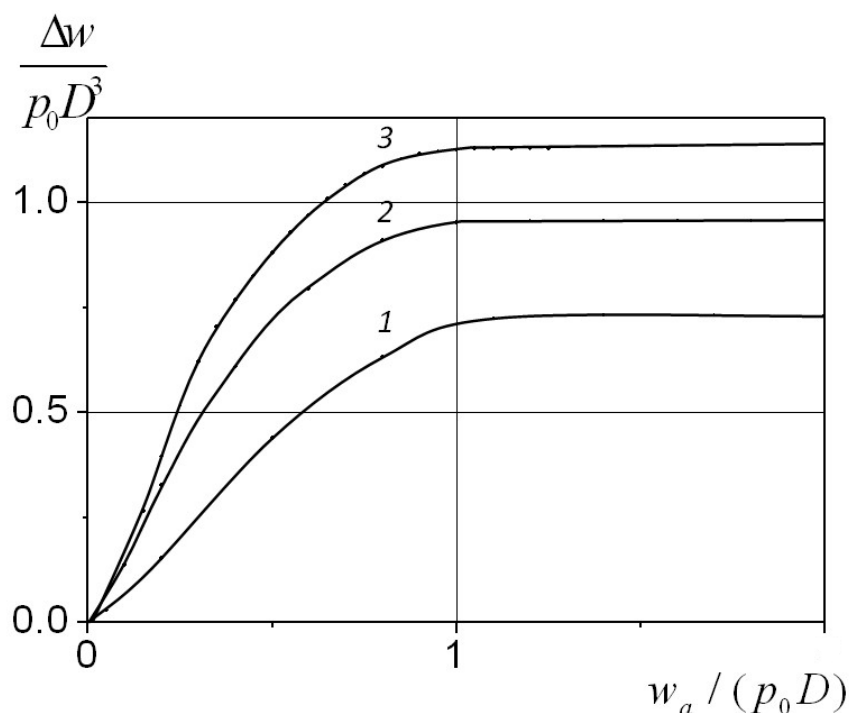


Рис. 4.7. Зависимость безразмерной потери энергии от безразмерной поверхностной энергии для различных форм выступов

Зависимости безразмерной потери энергии $\Delta w / (p_0 D^3)$ от безразмерного параметра $w_a / (p_0 D)$ показаны на рис. 4.7 при $E^* / p_0 = 2$ для различных форм выступов. Кривые 1, 2, 3 построены для $n = 1, 2, 3$, соответственно. Результаты показывают, что с увеличением параметра $w_a / (p_0 D)$ безразмерная потеря энергии увеличивается и достигает

константы при достижении параметром $w_a / (p_0 D)$ некоторой величины. Эта величина получена аналитически аналогично тому, как получено уравнение (4.6). В результате имеем

$$\frac{\Delta w}{p_0 D^3} = \frac{n\pi}{2n+2} (\xi_1^{2n+2} - \xi_2^{2n+2}) - \frac{4p_0}{3E^*} (\xi_1^3 - \xi_2^3)$$

при $\frac{w_a}{p_0 D} \geq \frac{1}{2} \xi_1^{2n} + \frac{2(\pi-2)p_0}{\pi E^*} \xi_1$

где $\xi_1 = \left(\frac{8p_0}{\pi E}\right)^{1/2n-1}$ и $\xi_2 = \left(\frac{4p_0}{n\pi E}\right)^{1/2n-1}$. При $n = 1$ эти выражения совпадают с (4.6).

4.2. Моделирование адгезионной составляющей силы трения в контакте скольжения шероховатых поверхностей

Полученное решение контактной задачи об адгезионном взаимодействии двух упругих выступов и подход, предложенный для расчета потери энергии в процессе сближения и разведения выступов, позволяет определить общую потерю энергии при скольжении шероховатых тел как сумму потерь энергии при образовании и разрыве элементарных адгезионных контактов между выступами. На основе этого подхода ниже строится модель адгезионной составляющей силы трения при скольжении шероховатых упругих тел. Модель будет построена для случая сухих поверхностей, взаимодействующих посредством сил межмолекулярного притяжения.

4.2.1. Взаимное тангенциальное перемещение двух выступов

Рассмотрим взаимное перемещение двух полусферических выступов при скольжении (рис. 4.8). Предполагается, что нижний выступ радиуса R_1

находится в покое, а верхний выступ радиуса R_2 движется в тангенциальном направлении (вдоль оси x), при этом вертикальное расстояние между выступами d (в направлении оси z) остается постоянным во время движения. Вначале выступы не взаимодействуют между собой (рис. 4.8,*а*), потом они приходят в контакт и возникает взаимное скольжение (рис. 4.8,*б* и *в*) до момента, когда контакт скачкообразно разрывается. Таким образом, возникает цикл сближения-удаления выступов в тангенциальном направлении, который также должен сопровождаться потерей энергии.

Поскольку выступы имеют сферическую форму, в каждый момент времени сила взаимодействия между выступами действует вдоль оси O_1O_2 , соединяющей центры сфер. В силу того, что тангенциальные напряжения равны нулю, контактная задача в каждый момент времени является осесимметричной относительно оси O_1O_2 (рис. 4.8,*б*, *в*). Сила q , действующая на верхний выступ, определяется уравнениями (2.102)-(2.104) для случая контакта поверхностей и уравнениями (2.98)-(2.100) для случая отсутствия контакта при $n=1$ (вершины сферических неровностей аппроксимируются параболоидами вращения).

При этом расстояние между выступами δ в направлении линии O_1O_2 связано с тангенциальным расстоянием s между центрами сфер и нормальным расстоянием d формулой $d_{12} = \sqrt{(R_1 + R_2 + d)^2 + s_{12}^2} - R_1 - R_2$. Силу взаимодействия q можно разделить на нормальную n и тангенциальную τ составляющие

$$n = \frac{q(R_1 + R_2 + d)}{\sqrt{(R_1 + R_2 + d)^2 + x^2}} \quad (4.16)$$

$$\tau = \frac{qx}{\sqrt{(R_1 + R_2 + d)^2 + x^2}} \quad (4.17)$$

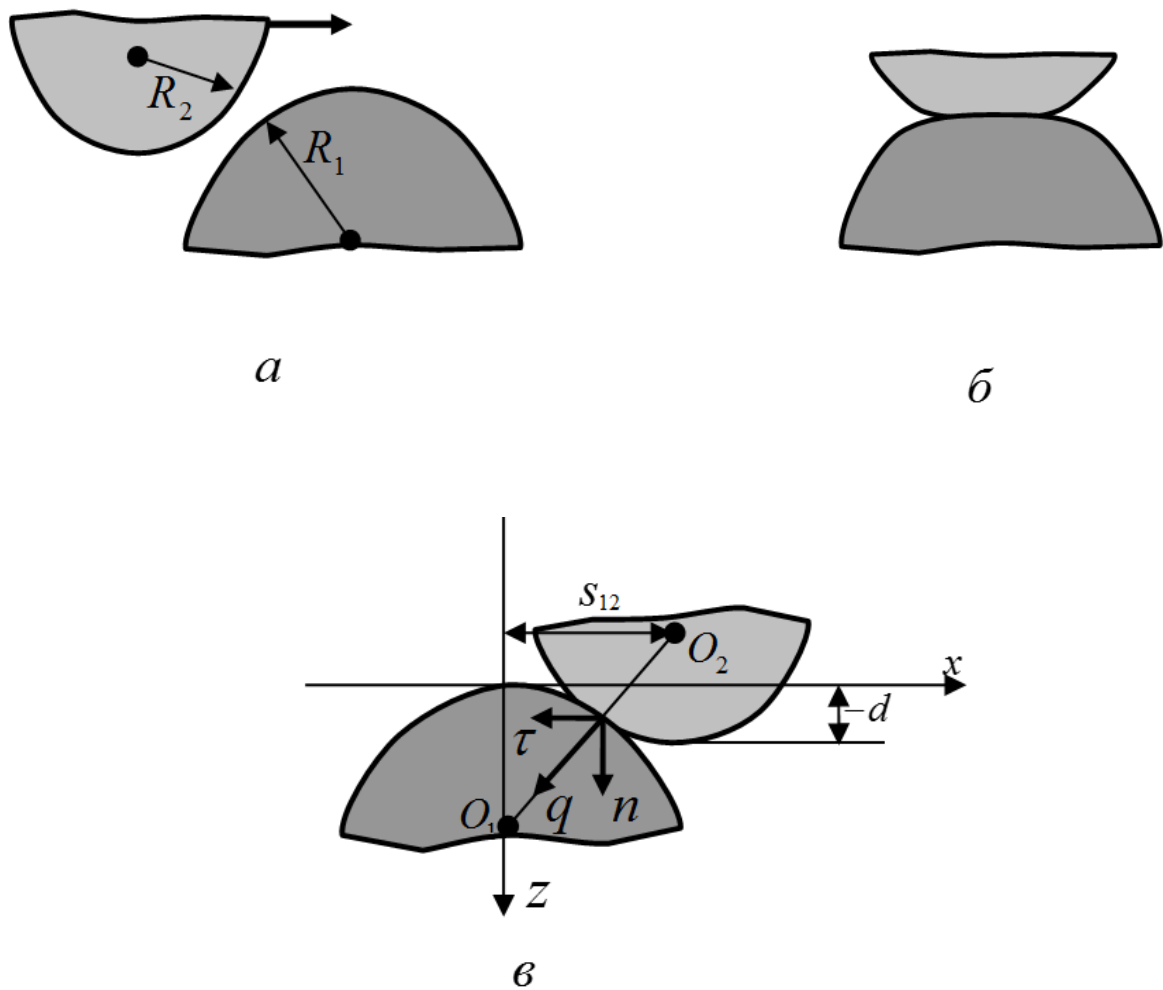


Рис. 4.8. Схема взаимного перемещения двух упругих выступов при скольжении.

График зависимостей безразмерных нормальной n и тангенциальной τ сил, действующих на верхний выступ при движении его относительно нижнего выступа вдоль координаты x , показаны на рис. 4.9. Результаты получены при $\frac{w_a}{p_0 R} = 10^{-3}$, $p_0 / E^* = 1$ и $(R_1 + R_2) / R = 4$, где $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Кривые 1 соответствуют $d / R = -5 \times 10^{-4}$, кривые 2 - $d / R = -0.0225$.

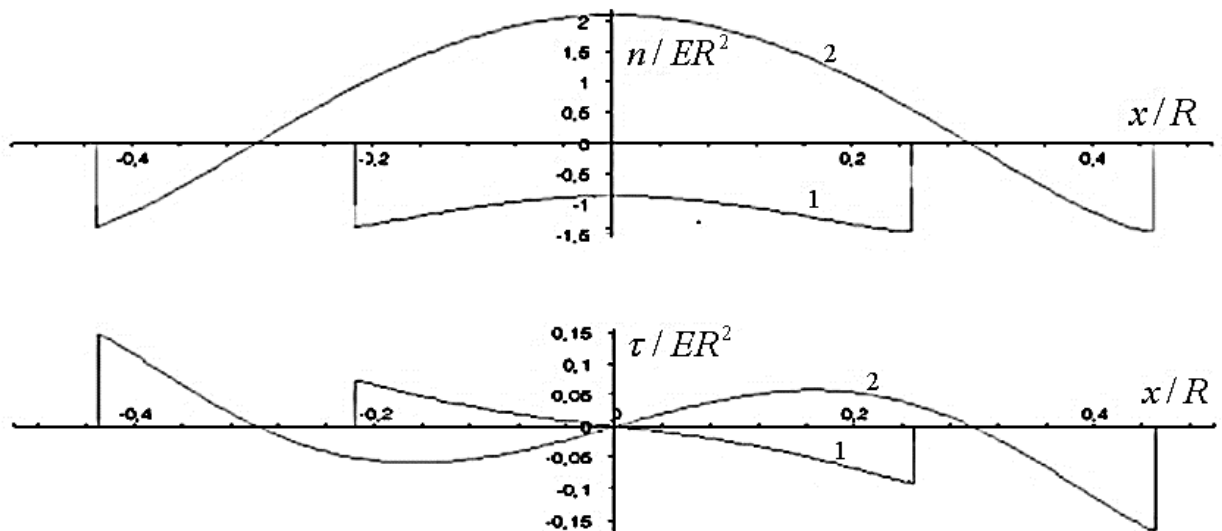


Рис. 4.9. Зависимости нормальной и тангенциальной составляющих силы взаимодействия двух выступов при их взаимном перемещении вдоль оси x .

Для моделирования силы трения рассмотрим тангенциальную компоненту силы τ , действующую на верхний выступ со стороны нижнего. В процессе скольжения верхнего выступа, сила τ меняет свой знак с положительного (когда сила действует в направлении движения выступа) на отрицательный (когда сила препятствует скольжению выступа). Вследствие гистерезиса, который имеет место в цикле сближения-удаления выступов, суммарная работа этой силы

$$A_f = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(s) ds \quad (4.18)$$

отлична от нуля. Эта работа равна потере энергии в элементарном цикле сближения-удаления поверхностей, которая была рассчитана в п.4.1, т.е.

$$A_f = \Delta w.$$

Ниже будет рассмотрен пример шероховатых поверхностей регулярной формы и проведен расчет силы трения, возникающей между ними при скольжении.

4.2.2. Скольжение двух шероховатых поверхностей регулярной формы

Предположим, что верхняя и нижняя поверхности характеризуются одним и тем же периодом шероховатости l (рис. 4.10). Когда каждый выступ верхней поверхности проходит вдоль одного периода нижней поверхности, тангенциальная сила, действующая на этот выступ, совершает работу $A_f = \Delta w$, так что средняя тангенциальная сила, действующая на этот выступ, равна $\Delta w/l$.

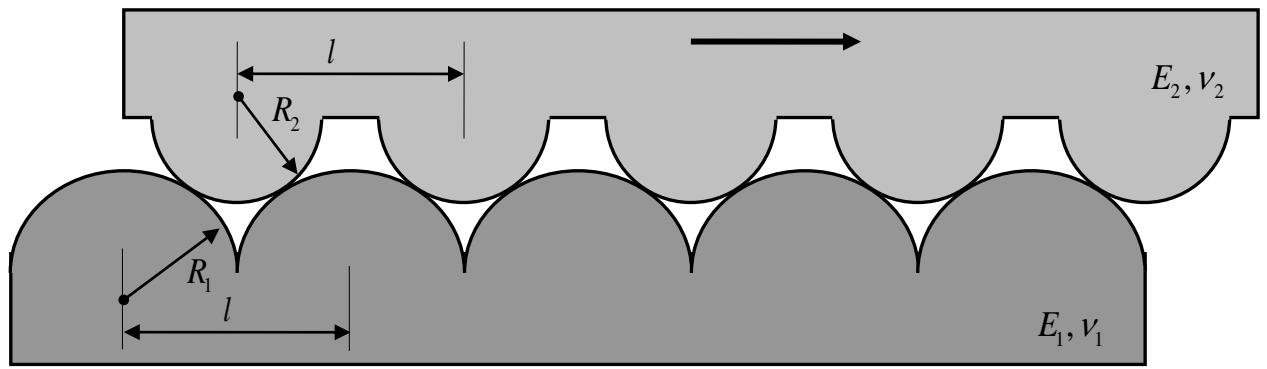


Рис. 4.10. Схема относительного скольжения двух шероховатых поверхностей.

Поскольку выступ занимает площадь l^2 , получим следующее выражение для средней тангенциальной силы, действующей на верхнюю поверхность:

$$\bar{\tau} = \Delta w / l^3 \quad (4.19)$$

Как было показано в п. 4.1, величина Δw , представляющая собой потерю энергии в элементарном цикле сближения-удаления двух выступов в нормальном направлении, может быть представлена в безразмерном виде как функция единственного параметра: $\Delta W = \Delta W(\lambda)$, где ΔW и λ определяются выражениями (4.2) и (4.3). Средняя тангенциальная сила, действующая на

верхнюю шероховатую поверхность, также может быть представлена в безразмерном виде

$$\bar{T} = \bar{\tau} l^3 \left(\frac{16E^{*2}}{9\pi^5 w_a^5 R^4} \right)^{1/3} \quad (4.20)$$

Из (4.19) и (4.20) следует, что

$$\bar{T} = \Delta W(\lambda) \quad (4.21)$$

График функции $\Delta W(\lambda)$ представлен на рис. 4.5,б. Таким образом, безразмерная сила трения \bar{T} может быть рассчитана для любого значения параметра λ .

В предельных случаях можно получить аналитические соотношения для силы трения. Для приближения модели ДКР (большие значения λ), безразмерная потеря энергии определяется соотношением (4.9). В соответствии с (4.20) безразмерное тангенциальное напряжение равно

$$\bar{\tau}_{JKR} = \frac{3^{1/3}(2^{1/3} + 12)}{15l^3} \left(\frac{9\pi^5 w_a^5 R^4}{16E^{*2}} \right)^{1/3} \approx 7.09 \frac{w_a^{5/3} R^{4/3}}{l^3 E^{*2/3}} \quad (4.22)$$

Для приближения модели ДМТ, при малых значениях параметра λ ($\lambda < (9/32)^{1/3} \approx 0.66$), потеря энергии определяется соотношением (4.6).

Учитывая (4.20), получим

$$\bar{\tau}_{DMT} = 12 \frac{P_0^5 R^3}{l^3 E^{*4}} \quad (4.23)$$

Из соотношений (4.22) и (4.23) следует, что и в случае ДКР, и в случае ДМТ адгезионная составляющая силы трения оказывается выше для выступов с большим радиусом кривизны R и для более мягких материалов. То же самое верно для любых значений параметра λ .

4.2.3. Пример расчета силы трения

Результаты расчета адгезионной составляющей силы трения (тангенциального напряжения $\bar{\tau}$), проведенного с использованием уравнений (2.98)-(2.104) и (4.19) представлены на рис. 4.11 для случая скольжения двух упругих тел с приведенным модулем упругости $E^* = 10 \text{ МПа}$ и адгезионным напряжением между поверхностями $p_0 = 1 \text{ МПа}$. Эти величины соответствуют некоторым видам эластомеров.

Графики на рис. 4.11,а построены для приведенного радиуса выступов $R = 0.1 \text{ мм}$ и периода шероховатости $l = 0.1 \text{ мм}$. Величина удельной работы адгезии w_a изменяется от 0 до 0.2 Дж/м^2 , при этом величина параметра адгезии λ изменяется от бесконечности до приблизительно 4, т.е., случай малых w_a на этом рисунке соответствует приближению ДКР. Тангенциальные напряжения $\bar{\tau}$ в этом случае близки к $\bar{\tau}_{JKR}$ рассчитанному по соотношению (4.22) (штриховая линия).

Рисунок 4.11,б соответствует поверхностям с более мелкой шероховатостью: $R = l = 1 \text{ мкм}$. В этом случае изменение удельной работы адгезии w_a от 0 до 0.2 Дж/м^2 соответствует изменению адгезии λ от бесконечности до приблизительно 0.4. Поэтому в области малых w_a , тангенциальное напряжение можно рассчитывать по формуле (4.22) для приближения ДКР, а для больших w_a , тангенциальное напряжение $\bar{\tau}$ становится близким к $\bar{\tau}_{DMT}$, рассчитанному по соотношению (4.23).

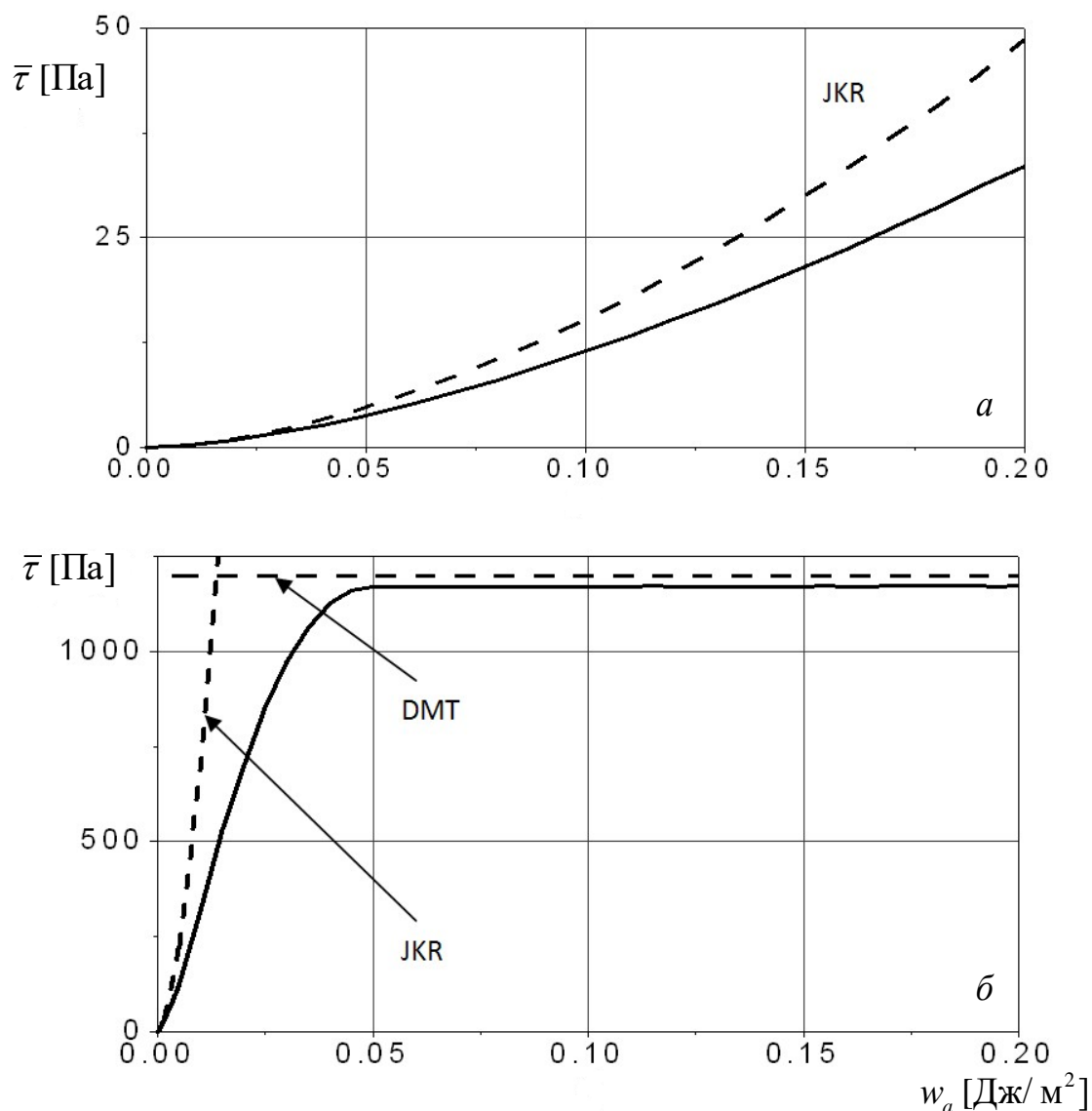


Рис. 4.11. Среднее тангенциальное напряжение при скольжении двух шероховатых поверхностей в зависимости от удельной работы адгезии

4.3. Моделирование адгезионной составляющей силы трения при качении шероховатого цилиндра

4.3.1. Постановка задачи для шероховатого цилиндра

Пусть жесткий цилиндр радиуса R катится с угловой скоростью ω по упругому полупространству. Задача рассматривается в движущейся системе координат, ось z которой проходит через ось цилиндра и направлена вглубь полупространства, ось x совпадает с недеформированной поверхностью

упругого полупространства и направлена в направлении движения цилиндра. Поверхность цилиндра покрыта периодической системой одинаковых выступов, расположенных в узлах квадратичной решетки с шагом l . Вершины выступов имеют сферическую форму с радиусом R_0 , где $R_0 \ll R$. К оси цилиндра приложена внешняя нормальная сила P (рис. 4.12).

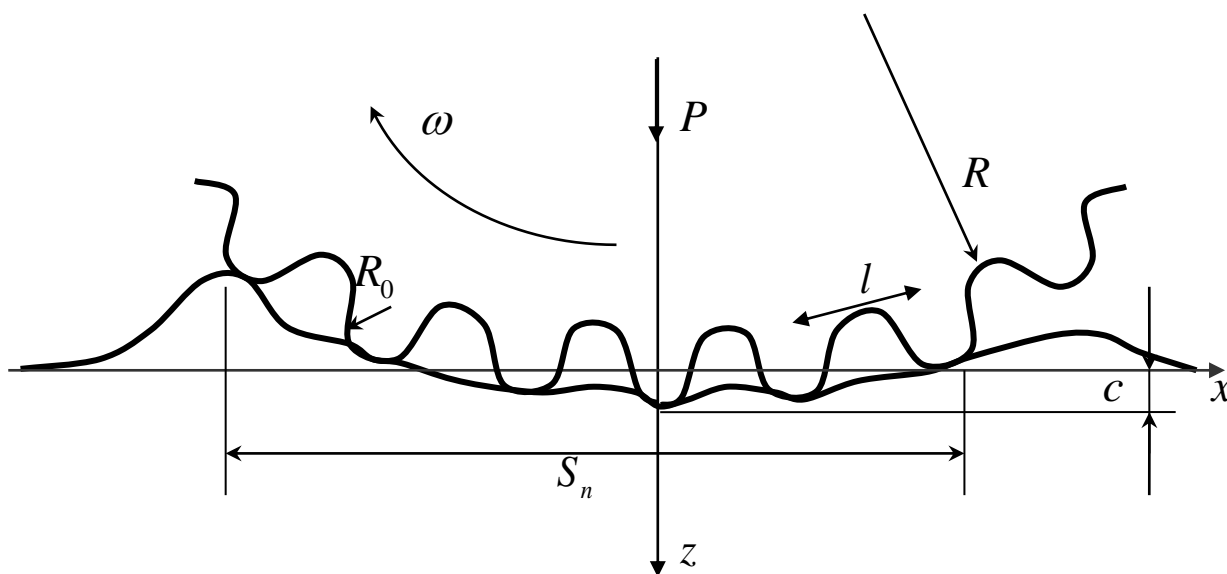


Рис. 4.12. Схема качения жесткого шероховатого цилиндра по упругому полупространству.

Величина зазора между поверхностями шероховатого цилиндра и упругого полупространства определяется выражением:

$$h(x, y) = u_z(x, y) + f(x, y) - c$$

где $u_z(x, y)$ - упругое перемещение поверхности полупространства в направлении оси z , $f(x, y)$ - функция, описывающая форму поверхности шероховатого цилиндра, c - максимальное внедрение цилиндра в упругое полупространство.

Контакт цилиндра и полупространства имеет место в областях A_i , в которых выполняются условия контакта:

$$h(x, y) = 0, \quad (x, y) \in A_i \quad (4.24)$$

Трение на контактной поверхности предполагается равным нулю.

Поверхности цилиндра и упругого полупространства испытывают адгезионное притяжение. Это притяжение имеет место в областях B_i , которые либо являются двусвязными и окружают области контакта выступов с полупространством A_i , либо односвязными областями для выступов, не находящихся в непосредственном контакте с полупространством. Зависимость силы адгезионного притяжения на единицу площади от расстояния между поверхностями описывается моделью Можи-Дагдейла, так что давление $p_a(x, y)$ на поверхности упругого полупространства определяется соотношением, которое следует из (1.10):

$$p_a(x, y) = \begin{cases} -p_0, & h(x, y) \leq h_0 \\ 0, & h(x, y) > h_0 \end{cases}, \quad (x, y) \in B_i \quad (4.25)$$

В этом случае величина удельной работы адгезии, которая равна работе, совершенной при удалении поверхностей друг от друга до бесконечного расстояния на единицу площади, определяется соотношением (1.11).

4.3.2. Сведение к задаче для отдельного выступа

При решении задачи предполагается, что напряженно-деформированное состояние упругого полупространства в окрестности каждого выступа не испытывает влияния от других выступов. Это предположение выполняется, если выступы расположены на достаточном расстоянии друг от друга [18]. В этом случае взаимодействие каждого выступа с упругим полупространством может рассматриваться независимо.

Рассмотрим такое положение шероховатого цилиндра, при котором самый нижний выступ расположен симметрично относительно оси z (рис. 4.12). Пусть внедрение этого выступа в упругое полупространство,

которое совпадает с максимальным внедрением всего цилиндра, равно c , а внедрение некоторого i -го выступа - c_i (рис. 4.13).

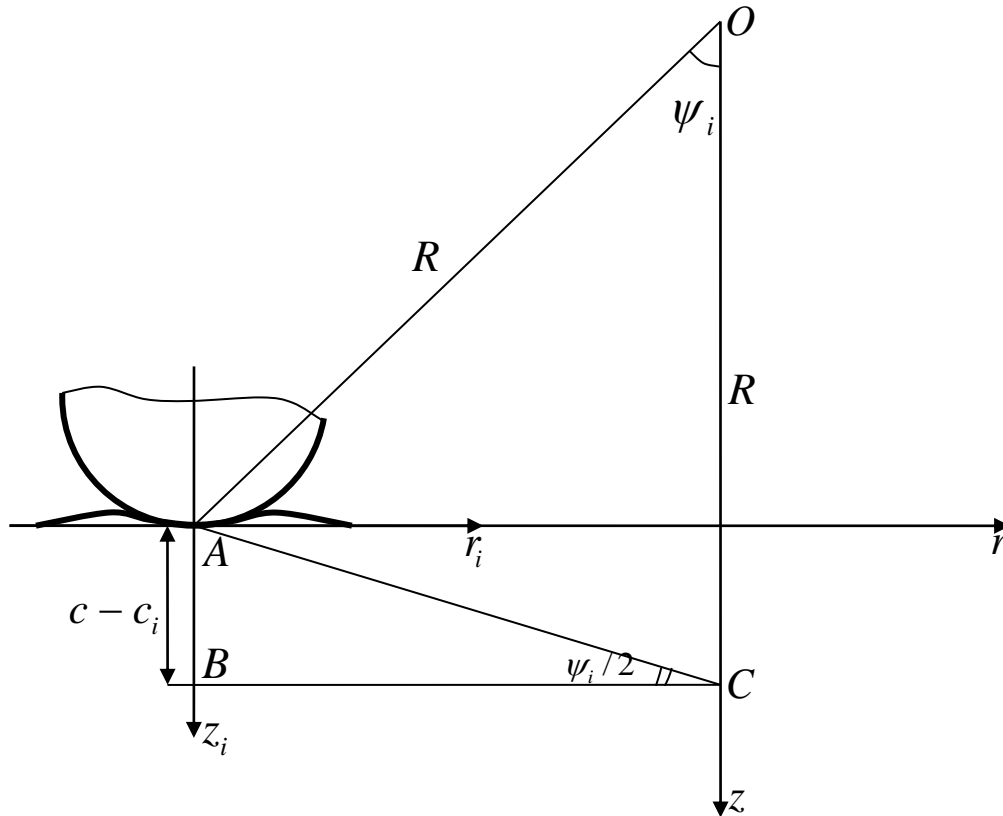


Рис. 4.13. Схема контакта отдельного выступа шероховатого цилиндра с упругим полупространством.

Из треугольников ABC и AOC (O – центр цилиндра, A – вершина i -го выступа, C – вершина центрального выступа) имеем для длины отрезка AC:

$$AC = \frac{c - c_i}{\sin \frac{\psi_i}{2}} = 2R \sin \frac{\psi_i}{2} \quad (4.26)$$

Предполагая, что $l \ll R$, получим для угла $\psi_i = il/R$. Тогда внедрение i -го выступа определяется соотношением:

$$c_i = c - 2R \sin^2 \frac{il}{2R} \quad (4.27)$$

где i пробегает значения от 1 до N_{app} справа от центрального выступа и от 1 до N_{sep} слева от него. Всего во взаимодействии с полупространством находится $N_{app} + N_{sep} + 1$ выступ.

Таким образом, зная внедрение c_i , можно рассмотреть взаимодействие i -го выступа с полупространством отдельно. Введем локальную цилиндрическую систему координат (r_i, φ_i, z_i) с началом в центре области контакта. Поскольку выступ имеет сферическую форму, то распределения давлений и упругих смещений в полупространстве являются симметричными относительно оси z_i в окрестности выступа (рис. 4.13). Внутри области контакта A_i , которая представляет собой круг радиуса a_i , выполняется условие контактирования для перемещения u вдоль оси z_i границы упругого полупространства. В соответствии с (4.24) это условие имеет вид:

$$u(r_i) = -\frac{r_i^2}{2\rho} + c_i, \quad r_i \leq a_i \quad (4.28)$$

Из условия (4.25) и симметрии задачи следует, что внутри области адгезионного взаимодействия B_i , представляющей собой кольцо $a_i < r_i < b_i$, давление p на границе упругого полупространства определяется адгезионным притяжением поверхностей; вне области взаимодействия давление равно нулю:

$$p(r_i) = \begin{cases} -p_0, & a_i < r_i < b_i \\ 0, & r_i > b_i \end{cases} \quad (4.29)$$

Тангенциальные напряжения на границе упругого полупространства равны нулю. Нормальные давления $p(r_i)$ и перемещения $u(r_i)$ связаны между собой известным соотношением для осесимметричной контактной задачи (2.6).

Уравнение (2.6) с условиями (4.28) и (4.29) позволяет определить нормальные контактные давления $p(r_i)$ и перемещения $u(r_i)$ вблизи области контакта i -го выступа с полупространством. Для определения неизвестных

величин a_i и b_i необходимо воспользоваться условием непрерывности давлений на границе области контакта:

$$p(a_i) = -p_0 \quad (4.30)$$

и условием постоянства поверхностной энергии, которое с учетом (4.25) и (1.11) имеет вид:

$$h(b_i)p_0 = w_a, \quad h(r_i) = u(r_i) + \frac{r_i^2}{2R_0} - c_i \quad (4.31)$$

Соотношения (2.6) и (4.28)-(4.31) позволяют определить контактные давления и упругие смещения полупространства в окрестности i -го выступа, внедрение которого задано выражением (4.27). После этого нормальная сила, действующая со стороны упругого полупространства на каждый выступ, определяется выражением:

$$q_i = 2\pi \int_0^{b_i} rp(r)dr \quad (4.32)$$

4.3.3. Решение задачи для отдельного выступа

Задача о взаимодействии осесимметричного штампа с упругим полупространством при наличии адгезионного притяжения, заданного в виде ступенчатой функции, была решена в Главе 2. В результате для адгезионного контакта выступа с упругим полупространством имеем уравнение, связывающее радиусы областей контакта и адгезионного взаимодействия a_i и b_i :

$$\frac{4b_i p_0^2}{\pi E^*} \left(1 - \alpha_i + \varphi_i \sqrt{1 - \alpha_i^2}\right) - \frac{b_i^2 p_0}{R_0 \pi} \left[(2\alpha_i^2 - 1)\varphi_i + \alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} \right] + w_a = 0 \quad (4.33)$$

где использованы обозначения

$$\alpha_i = \frac{a_i}{b_i}, \quad \varphi_i = -\arccos \alpha_i$$

а также выражения для внедрения выступа и действующей на него силы:

$$c_i = -2b_i \left(\frac{P_0}{E^*} \sqrt{1 - \alpha_i^2} + \alpha_i^2 \right) \quad (4.34)$$

$$q_i = \frac{4}{3R_0} E^* b_i^3 \alpha_i^3 - p_0 b_i^2 \left(2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} - \frac{\varphi_i}{2} \right) \quad (4.35)$$

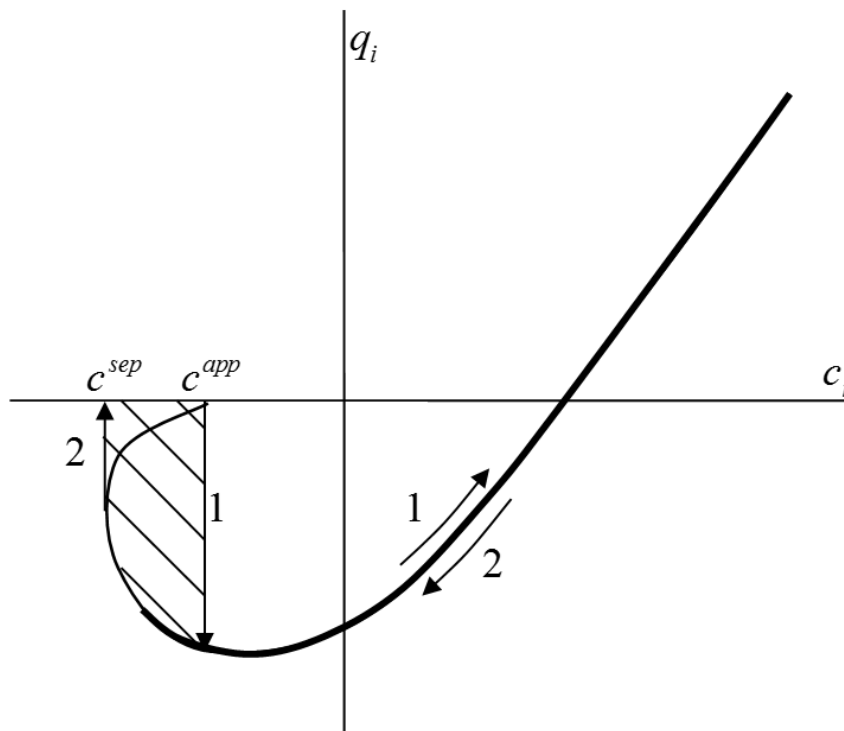


Рис. 4.14. Зависимость нормальной силы, действующей на один выступ поверхностной шероховатости цилиндра, от его внедрения в упругое полупространство, по которому катится цилиндр.

Решая уравнение (4.33) относительно b_i и подставляя результат в (4.34) и (4.35), получим зависимость нормальной силы, действующей на выступ q_i от внедрения выступа c_i в виде параметрической функции от параметра α_i .

Взаимодействие выступа с полупространством может иметь место также и в отсутствие непосредственного контакта поверхностей. В этом случае адгезионное давление $-p_0$ действует на полупространство в круговой области радиуса b_i . При решении этой задачи условие контактирования (4.31) не используется, а в остальных условиях полагается $\alpha_i = 0$. В результате для случая отсутствия контакта получим соотношения:

$$c_i = \frac{b_i^2}{2R_0} - \frac{4p_0 b_i}{\pi E^*} - \frac{w_a}{p_0}, \quad q_i = -\pi b_i^2 p_0 \quad (4.36)$$

Зависимость нормальной силы q_i , действующей на выступ со стороны упругого полупространства, от внедрения этого выступа c_i в полупространство имеет вид, показанный на рис. 4.14. Жирная линия соответствует контакту поверхностей и соотношениям (4.33)-(4.35). Тонкая линия соответствует отсутствию контакта и соотношениям (4.36). При увеличении внедрения c_i от $-\infty$ (приближении выступа к упругому полупространству) поверхности скачкообразно вступают во взаимодействие при $c_i = c^{app}$; при дальнейшем увеличении внедрения взаимодействие идет в соответствии с кривой 1. Обозначим зависимость силы от внедрения, соответствующую кривой 1, через $q_i^{app}(c_i)$. При уменьшении внедрения от максимальной величины c (удалении выступа от поверхности полупространства) происходит скачкообразный разрыв взаимодействия (уменьшение силы взаимодействия до нуля) при $c_i = c^{sep}$ (кривая 2). . Обозначим зависимость силы от внедрения, соответствующую кривой 2, через $q_i^{sep}(c_i)$. Таким образом, процессы приближения выступа к поверхности полупространства и удаления от него идут по разным кривым, что

соответствует различным значениям силы q_i , радиуса области контакта a_i и других характеристик при одном и том же значении внедрения c_i . Функции $q_i^{app}(c_i)$ и $q_i^{sep}(c_i)$ определяются из соотношений (4.33)-(4.36) с учетом выбора необходимой ветви из неоднозначной зависимости нагрузки от внедрения.

4.3.4. Решение для шероховатого цилиндра

Применим полученное в п. 4.3.3 решение для взаимодействия единичного выступа с упругим полупространством к задаче о качении шероховатого цилиндра. При заданном максимальном внедрении цилиндра в полупространство c , которое совпадает с внедрением центрального выступа, величины внедрения остальных выступов c_i определяются соотношением (4.27). Полученное в п.4.3.3 решение позволяет по этим величинам определить величины нормальных сил q_i , действующих на каждый выступ со стороны упругого полупространства (как видно из рис.4.14 эти силы могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от величин c_i) и другие характеристики контактного взаимодействия – радиусы площадок контакта a_i и областей адгезионного взаимодействия b_i . Решение для i -го выступа будет зависеть от величины внедрения c_i и от того, приближается ли этот выступ к упругому полупространству или удаляется от него. Если выступ приближается к упругому полупространству, то сила, действующая на него, будет определяться функцией $q_i^{app}(c_i)$; если удаляться – то функцией $q_i^{sep}(c_i)$. Аналогичным образом определяются радиус области контакта и другие характеристики. Количество выступов, взаимодействующих с полупространством с правой стороны от центрального выступа (выступы, приближающиеся к упругому полупространству), определяется из соотношения, аналогичного (4.27):

$$c - c^{app} = 2R \sin^2 \frac{N_{app} l}{2R} \quad (4.37)$$

откуда имеем

$$N_{app} = \frac{l}{2R} \arcsin \sqrt{\frac{c - c^{app}}{2R}} \quad (4.38)$$

Аналогично определяем количество выступов, взаимодействующих с полупространством слева от центрального выступа:

$$N_{sep} = \frac{l}{2R} \arcsin \sqrt{\frac{c - c^{sep}}{2R}} \quad (4.39)$$

В выражениях (4.38) и (4.39) в качестве искомого количества выступов нужно брать наибольшее целое число, не превышающее значения выражения в правой части. При этом всегда $N_{app} \leq N_{sep}$. В случаях, когда внедрение центрального выступа настолько мало, что $c < c^{sep}$ или $c < c^{app}$, то число неровностей, взаимодействующих с полупространством с соответствующей стороны от центрального выступа, равно нулю, т.е. $N^{sep} = 0$ или $N^{app} = 0$, соответственно.

Таким образом, при заданном внедрении центрального выступа c можно рассчитать внедрения всех выступов по соотношениям (4.27), затем из уравнений (4.33)-(4.35) определить зависимость силы q_i , действующий на каждый выступ от внедрения этого выступа c_i . Из анализа этой зависимости определяются величины c^{app} и c^{sep} , а также функции $q_i^{app}(c_i)$ и $q_i^{sep}(c_i)$. Аналогичным образом определяются зависимости от внедрения размера области контакта выступа с полупространством $a_i^{app}(c_i)$ и $a_i^{sep}(c_i)$. Полученные функции позволяют рассчитать величины сил, действующих на каждый выступ: с правой стороны от центрального выступа $q_i^{app} (i = 1..N_{app})$ и с левой стороны от центрального выступа $q_i^{sep} (i = 1..N_{sep})$. Силу,

действующую на центральный выступ, можно рассчитать по любой из полученных функций $q_0 = q_0^{app}(c) = q_0^{sep}(c)$. При этом нормальная сила, действующая на цилиндр, определяется соотношением

$$P = q_0 + \sum_{i=1}^{N_{app}} q_i^{app} + \sum_{i=1}^{N_{sep}} q_i^{sep} \quad (4.40)$$

4.3.5. Анализ контактных характеристик

Результаты расчета сил, действующих на выступы цилиндра, показаны на рис. 4.15 кривая 1, где представлено распределение среднего безразмерного давления на период $\frac{q_i}{lE^*}$ по безразмерной координате $x_i/R = li/R$. Результаты получены при безразмерной удельной работе адгезии $\frac{w_a}{p_0 R_0} = 0.01$, безразмерном адгезионном давлении $\frac{p_0}{E^*} = 0.1$ и безразмерной нормальной силе, действующей на цилиндр $\frac{P}{E^* R^2} = 1.25 \times 10^{-4}$.

Соотношение радиусов выступов и цилиндра $\frac{R_0}{R} = 0.01$, число неровностей в сечении цилиндра $N = 5000$.

Расчеты показали, что в этом случае число неровностей, взаимодействующих с полупространством справа, равно $N_{app} = 46$; слева - $N_{sep} = 53$. Представленный на рис. 4.15 график (кривая 1) показывает, что среднее (номинальное) давление положительно в центре номинальной области контакта цилиндра с полупространством, и отрицательно по ее краям. Видно также, что представленное распределение давлений несимметрично, что приводит к появлению момента сопротивления качению цилиндра. Для сравнения приведен график распределения номинального контактного давления в отсутствии адгезии (кривая 2); в этом случае

давление везде положительное, распределение симметричное, и сопротивления качению не возникает.

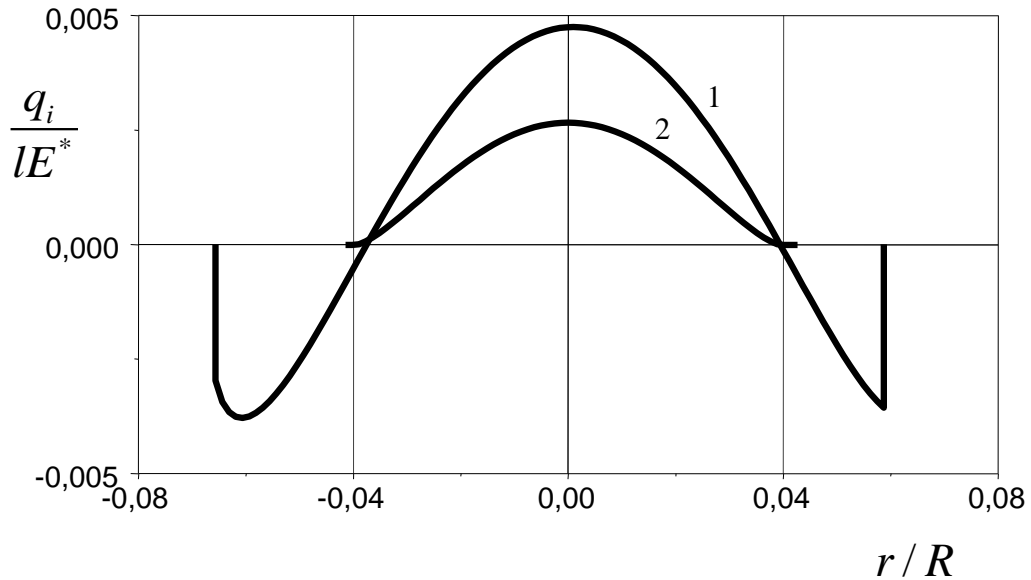


Рис.4.15. Распределение безразмерного номинального давления, действующего в контакте шероховатого цилиндра и упругого полупространства при качении.

Полученное решение позволяет также рассчитать фактическую площадь контакта на единицу длины l цилиндра как сумму площадей контакта для каждого выступа:

$$S_r = \pi \left(a_0^2 + \sum_{i=1}^{N_{app}} (a_i^{app})^2 + \sum_{i=1}^{N_{sep}} (a_i^{sep})^2 \right)$$

и номинальную площадь взаимодействия на ту же единицу длины l цилиндра (рис. 4.12):

$$S_n = l^2 (1 + N_{app} + N_{sep})$$

На рис.4.16 представлены графики зависимости безразмерной номинальной площади контакта S_n/R^2 (пунктирные линии) и фактической площади контакта S_r/R^2 (сплошные линии) от нормальной силы, действующей на цилиндр $\frac{P}{E^*R^2}$ при наличии адгезии с параметрами

$$\frac{w_a}{p_0R_0} = 0.01, \quad \frac{p_0}{E^*} = 0.1 \quad (\text{кривые 1}) \quad \text{и при отсутствии адгезии (кривые 2)}.$$

Геометрические характеристики цилиндра $\frac{R_0}{R} = 0.01, N = 10000$. Результаты показывают, что учет адгезии приводит к неоднозначной зависимости от нагрузки как номинальной, так и фактической площадей контакта, а также к существованию контакта в некоторой области отрицательных нагрузок на цилиндр.

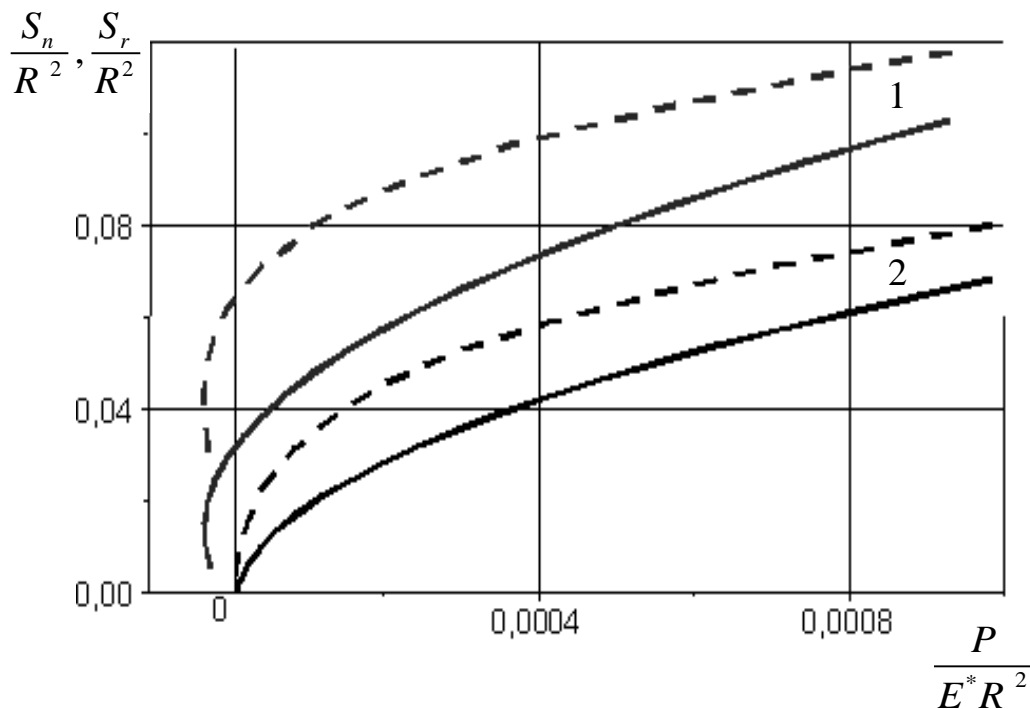


Рис. 4.16. Зависимости номинальной и фактической площади контакта от внешней нормально силы, действующей на катящийся шероховатый цилиндр.

4.3.6. Расчет сопротивления качению

Как следует из рассмотренного в п.4.3.4 решения задачи для отдельного выступа, зависимость между силой, действующей на один выступ q_i и внедрением этого выступа c_i (рис.4.14) является неоднозначной. Из этого следует, что при циклическом приближении выступа к полупространству и удалении от него происходит потеря энергии при условии, что наибольшее внедрение выступа за цикл превышает величину c^{app} . Величина этой потери энергии соответствует площади заштрихованной области на рис.4.14 и рассчитывается из соотношения:

$$\Delta w = \int_{c^{app}}^{c^{sep}} [q_i^{app}(c) - q_i^{sep}(c)] dc \quad (4.41)$$

Потеря энергии за полный оборот цилиндра составляет $\Delta w N_1$, где N_1 - число выступов в сечении цилиндра, для которых максимальное внедрение в полупространство за полный оборот цилиндра превышает величину c^{app} . Предполагая, что эта потеря энергии равна работе момента сопротивления качению за один оборот цилиндра $2\pi M$, получим для момента сопротивления выражение:

$$M = \frac{\Delta w N_1}{2\pi} \quad (4.42)$$

В рассмотренной в предыдущих разделах модели шероховатого цилиндра, имеющего в сечении N одинаковых выступов, число N_1 определяется ступенчатой функцией:

$$N_1 = \begin{cases} N, & c \geq c^{app} \\ 0, & c < c^{app} \end{cases} \quad (4.43)$$

Можно также рассмотреть случай, когда неровности имеют статистическое распределение по высоте:

$$N_1 = N \int_{-\infty}^c \varphi(t) dt \quad (4.44)$$

где $\varphi(t)$ - плотность распределения, например, по закону Гаусса:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

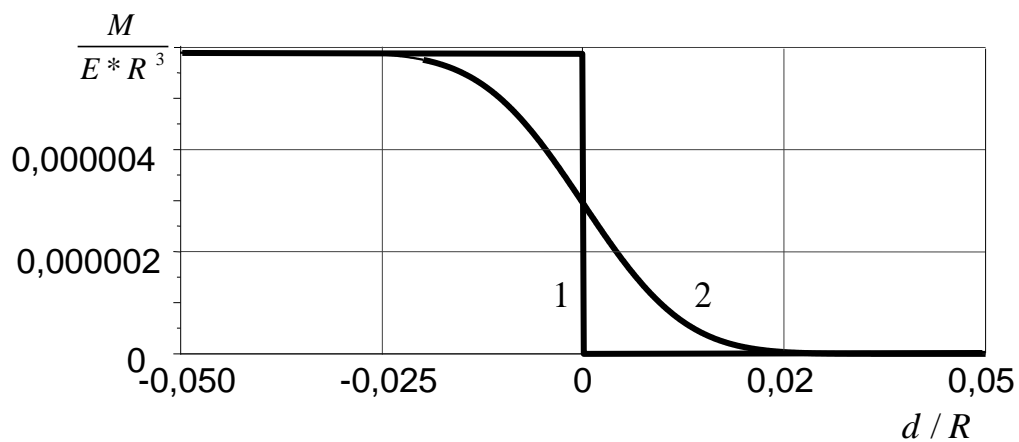


Рис. 4.17. Зависимость безразмерного момента сопротивления качению шероховатого цилиндра от расстояния между цилиндром и полупространством.

Полученные в результате расчетов зависимости безразмерного момента сопротивления качению $\frac{M}{E * R^3}$ от расстояния между цилиндром и полупространством $d = -c$ представлены на рис.4.17 для цилиндра с одноуровневой моделью шероховатости (кривая 1) и с гауссовым распределением неровностей по высоте (кривая 2). Результаты получены при

$\frac{w_a}{p_0 R_0} = 0.1$, $\frac{p_0}{E^*} = 0.1$, $\frac{R_0}{R} = 0.01$, $N = 10^4$, среднеквадратичное отклонение в

случае гауссова распределения высот $\frac{\sigma}{R} = 0.01$. Результаты показывают, что

с увеличением внедрения сопротивление качению возрастает в первом случае скачкообразно, а во втором – плавно, и стремятся к постоянной величине, зависящей от геометрических параметров цилиндра, упругих свойств полупространства и характеристик потенциала адгезионного взаимодействия.

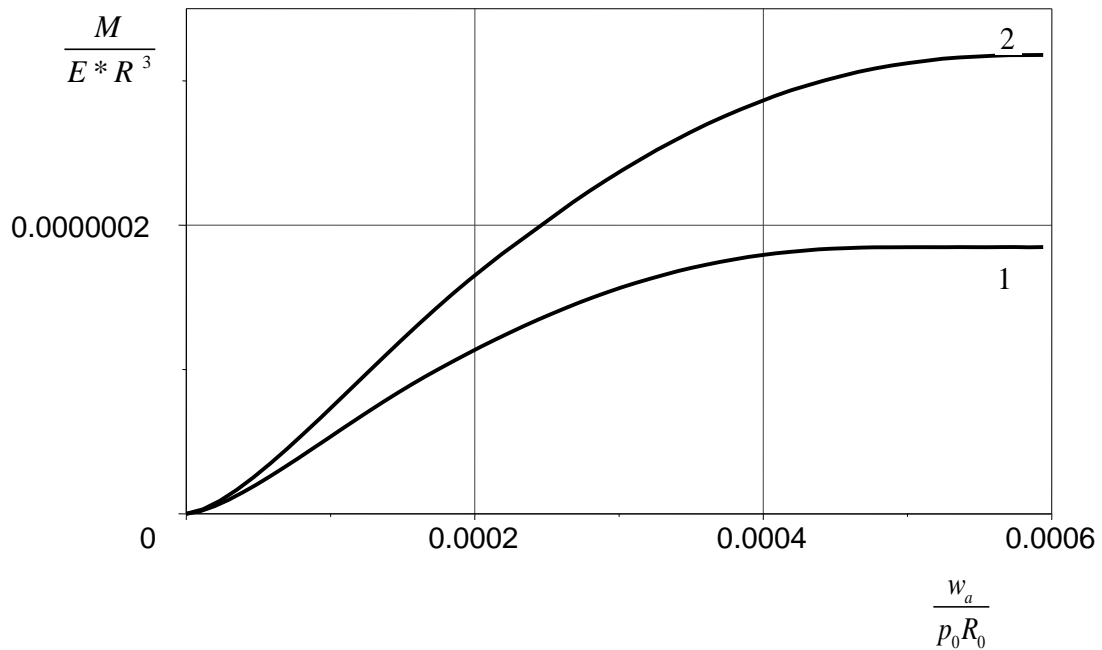


Рис. 4.18. Зависимость безразмерного сопротивления качению шероховатого цилиндра от поверхностной энергии.

Результаты показывают также, что момент сопротивления качению $\frac{M}{E^* R^3}$ увеличивается с увеличением удельной работы адгезии взаимодействующих тел w_a . Это иллюстрируют кривые, представленные на рис. 4.18, которые получены при $\frac{P_0}{E^*} = 0.1$, $N = 10^4$ и различных радиусах кривизны выступа: $\frac{R_0}{R} = 0.01$ (кривая 1) и $\frac{R_0}{R} = 0.012$ (кривая 2) для случая одинаковых по высоте неровностей и внедрения, превышающего c^{app} . Видно, что момент сопротивления при увеличении поверхностной энергии выходит на константу, что является следствием использования модели Можи-

Дагдейла для описания адгезионного притяжения поверхностей. Из результатов следует также, что адгезионные потери энергии, а, следовательно, и сопротивление качению, больше для случая выступов с большим радиусом R_0 .

4.4. Выводы по Главе 4

Проведен расчет диссипации энергии в цикле сближение-разведение осесимметричных упругих тел как для случая адгезии сухих поверхностей, описываемой моделью Можи-Дагдейла, так и для капиллярной адгезии поверхностей, покрытых пленками жидкости. Установлено, что потеря энергии в цикле сближение-разведение поверхностей возрастает с увеличением удельной работы адгезии и уменьшением объема жидкости в мениске. Для более мягких тел (с меньшим модулем упругости) потеря энергии за цикл больше.

Для тел, обладающих формой параболоидов вращения, зависимость нагрузки от расстояния между телами можно описать одним безразмерным параметром. Соответственно, безразмерная потеря энергии в цикле сближение-разведение тел является функцией единственного параметра, как при адгезии сухих поверхностей, так и при капиллярной адгезии. В случае молекулярной адгезии сухих поверхностей, описываемой моделью Можи-Дагдейла, зависимость потери энергии от параметра Тейбора λ получена аналитически в предельных случаях $\lambda \rightarrow 0$ (приближение ДМТ) и $\lambda \rightarrow \infty$ (приближение ДКР). Если же форма взаимодействующих тел описывается степенной функцией более высокой степени, то необходимо использовать два безразмерных параметра для описания зависимости нагрузки от расстояния между телами.

Предложена модель адгезионной составляющей силы трения при скольжении шероховатых поверхностей на основе расчета суммарной потери энергии при образовании и разрыве элементарных контактов между

выступами. Проведен расчет силы трения при различных параметрах шероховатости и величин удельной работы адгезии. В предельных случаях $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ получены аналитические соотношения для силы трения.

Построена модель качения шероховатого цилиндра по упругому полупространству при наличии адгезионного притяжения между поверхностями. Проведен расчет контактных характеристик: распределения номинального контактного давления, номинальной и фактической областей контакта. Установлено, что для выступов, приближающихся к полупространству и удаляющихся от него в процессе качения, имеют место разные зависимости силы, действующей на выступ со стороны полупространства, размера области контакта и других контактных характеристик от внедрения выступа в полупространство. Это приводит к возникновению момента сопротивления качению цилиндра. Предложен метод определения момента адгезионного сопротивления качению цилиндра, основанный на расчете потери энергии при приближении каждой неровности к полупространству и удалении от него в процессе качения цилиндра.

Глава 5. СКОЛЬЖЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ АДГЕЗИИ

В этой главе рассматривается подвижный контакт – скольжение единичного жесткого выступа и регулярной волнистой поверхности по вязкоупругому основанию при наличии адгезии различной природы. Исследуется влияние адгезионного притяжения, действующего в зазоре между поверхностями, на контактные характеристики и деформационную составляющую силы трения.

5.1. Скольжение цилиндрического штампа по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии

5.1.1. Постановка задачи для цилиндрического штампа

Рассматривается плоская контактная задача для вязкоупругого полупространства, по границе которого скользит со скоростью V жесткий цилиндр радиуса R (рис. 5.1). Считаем, что форму цилиндра в окрестности области взаимодействия с полупространством можно описать функцией

$$f(x) = \frac{x^2}{2R} \quad (5.1)$$

Предполагается, что трение между цилиндром и полупространством отсутствует. Также предполагается, что скорость V много меньше скорости распространения звука в вязкоупругой среде, таким образом, инерционными свойствами полупространства можно пренебречь.

Пусть (x_0, y_0) - неподвижная система координат, связанная с вязкоупругим полупространством, при этом ось x_0 лежит на границе

полупространства и совпадает с направлением скольжения цилиндра, а ось y_0 направлена вертикально вверх.

Введем подвижную систему координат (x, y) , связанную с цилиндром:

$$x = x^0 - Vt, \quad y = y^0 \quad (5.2)$$

Механические свойства вязкоупругого полупространства описываются системой уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{x^0}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right) \\ \varepsilon_{y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{y^0}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right) \\ \gamma_{x^0 y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \gamma_{x^0 y^0}}{\partial t} &= \frac{1+\nu}{E} \left(\tau_{x^0 y^0} + T_\sigma \frac{\partial \tau_{x^0 y^0}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

где σ_{x^0} , σ_{y^0} , $\tau_{x^0 y^0}$ — компоненты тензора напряжений, ε_{x^0} , ε_{y^0} , $\gamma_{x^0 y^0}$ — компоненты тензора деформаций, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, T_ε и T_σ характеризуют вязкие свойства полупространства, t — время. Уравнения (5.3) являются двумерным аналогом модели Кельвина-Фойгта и соответствуют случаю плоской деформации.

В области $-a < x < b$ имеет место контакт поверхностей, и, соответственно, выполняется граничное условие для перемещения и условие отсутствия трения между цилиндром и полупространством:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{x}{R}, \quad \tau_{xy} |_{y=0} = 0, \quad -a < x < b \quad (5.4)$$

где $u_y(x)$ — нормальное перемещение границы вязкоупругого полупространства.

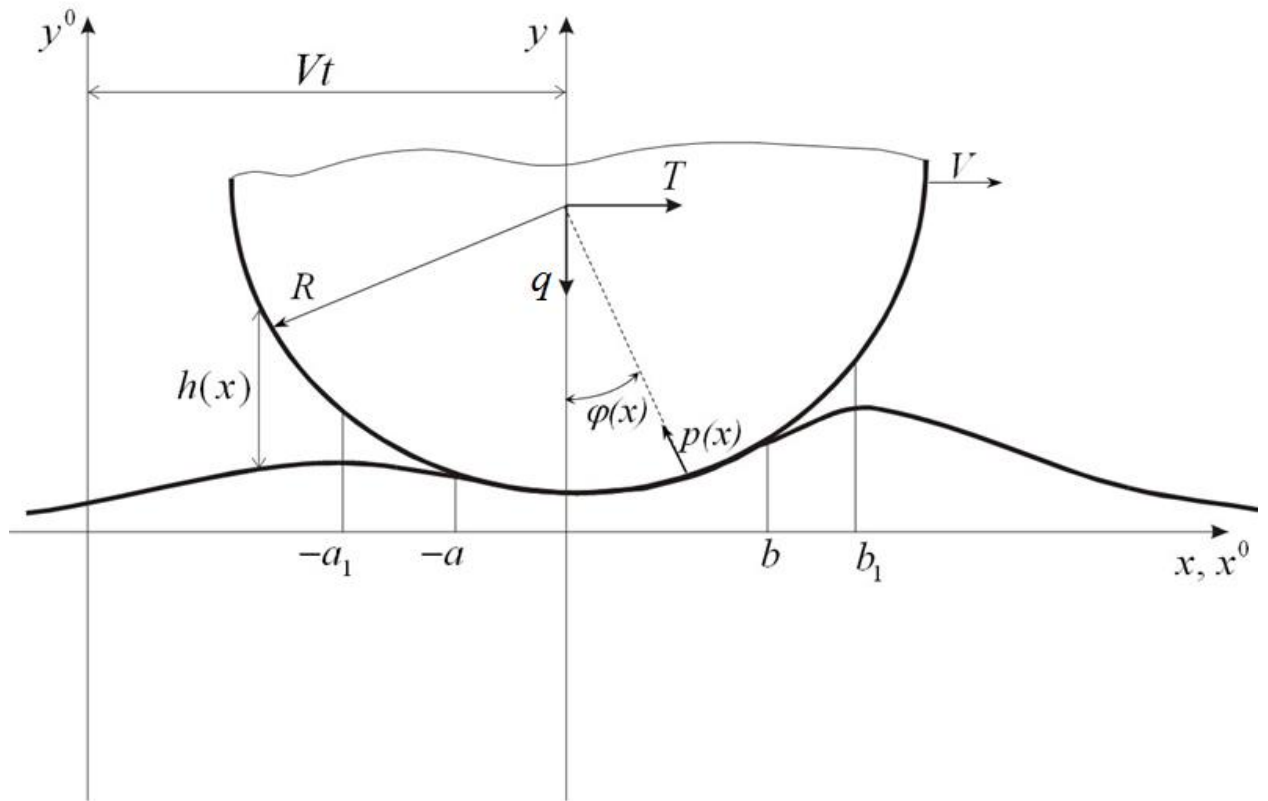


Рис. 5.1. Схема скольжения цилиндра по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии.

В областях, расположенных вокруг области контакта, $-a_1 \leq x \leq a$, $b \leq x \leq b_1$ действует адгезионное притяжение в соответствии с моделью Можи-Дагдейла (1.10)-(1.11). В этих областях задаются граничные условия на напряжения:

$$\sigma_y|_{y=0} = p_0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad -a_1 \leq x \leq a, \quad b \leq x \leq b_1 \quad (5.5)$$

Вне области взаимодействия выполняется условие отсутствия нагружения:

$$\sigma_y|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad x < -a_1, \quad x > b_1 \quad (5.6)$$

В подвижной системе координат (x, y) напряжения, деформации и перемещения не зависят явно от времени. В частности, для нормального

перемещения границы полупространства имеем $u_y(x) \equiv u_y^0(x + Vt, t)$, где $u_y^0(x^0, t)$ — нормальное перемещение в неподвижной системе координат (x^0, y^0) . Дифференцируя это тождество по времени, получим

$$\frac{\partial u_y(x^0, t)}{\partial t} = -V \frac{\partial u_y(x)}{\partial x}$$

Аналогичные соотношения имеют место для производных всех компонент напряжений, перемещений и деформаций.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \varepsilon_{x^0} - T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^* = \varepsilon_{y^0} - T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xy}^* = \gamma_{x^0 y^0} - T_\varepsilon V \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \\ \sigma_x^* &= \sigma_{x^0} - T_\sigma V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \quad \sigma_y^* = \sigma_{y^0} - T_\sigma V \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}, \quad \tau_{xy}^* = \tau_{x^0 y^0} - T_\sigma V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \\ u_y^* &= u_y - T_\varepsilon V \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Тогда уравнения (5.3) принимают вид, совпадающий по форме с законом Гука для упругого полупространства. Введенные функции со звездочкой удовлетворяют также уравнениям равновесия и совместности деформаций для упругого тела.

Для того чтобы получить граничные условия для функций со звездочкой (5.7), используем условия (5.4)–(5.6). Из (5.5) и (5.6) видно, что функцию σ_y при $y=0$ вне области контакта можно представить с помощью θ -функции Хевисайда

$$\sigma_y|_{y=0} = \begin{cases} p_0 \theta(x + a_1), & x \leq -a \\ p_0 \theta(b_1 - x), & x \geq b \end{cases}$$

С учетом этого получаем следующие граничные условия при $y=0$ для функций со звездочкой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y^*}{\partial x} &= \frac{x - T_\varepsilon V}{R}, \quad \tau_{xy}^* = 0, & -a < x < b \\ \sigma_y^* &= p_0 \theta(x + a_1) - T_\sigma V p_0 \delta(x + a_1), \quad \tau_{xy}^* = 0, & x \leq -a \\ \sigma_y^* &= p_0 \theta(b_1 - x) + T_\sigma V p_0 \delta(b_1 - x), \quad \tau_{xy}^* = 0, & x \geq b \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Таким образом, исходная задача сводится к решению задачи для упругой полуплоскости с граничными условиями (5.8). После этого истинные напряжения, деформации и перемещения в вязкоупругом полупространстве определяются из решения дифференциальных уравнений (5.7).

5.1.2. Метод решения контактной задачи

Решение задачи для упругой полуплоскости. Для решения задачи для упругой полуплоскости с граничными условиями (5.8) воспользуемся методом Л. А. Галина [11, 14] и введем при $y \leq 0$ функцию комплексного переменного $z = x - iy$

$$W(z) = X - iY = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y^* \frac{dt}{t - z} \quad (5.9)$$

Поскольку на границе $y = 0$ упругой полуплоскости выполняется соотношение

$$\frac{\pi E}{2(1 - \nu^2)} \frac{\partial u_y^*}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y^* \frac{dt}{t - x} - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} \pi \tau_{xy}^* \quad (5.10)$$

то, с учетом предельного значения интеграла типа Коши (5.9) при $z \rightarrow x - i0$, из условий (5.8) получим граничные условия для компонент функции $W(z)$

$$\begin{aligned}
X(x,0) &= \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)R}(x-T_\varepsilon V), & -a < x < b \\
Y(x,0) &= \begin{cases} \pi p_0 \theta(x+a_1) - \pi T_\sigma V p_0 \delta(x+a_1), & x \leq -a \\ \pi p_0 \theta(b_1-x) + \pi T_\sigma V p_0 \delta(b_1-x), & x \geq b \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Задача определения функции $W(z)$, аналитической при $y \leq 0$, по заданным граничным условиям (5.11) при $y = 0$ является частным случаем задачи Римана-Гильберта. Решение этой задачи, ведущее себя как q/z при $z \rightarrow \infty$, имеет вид [11, 14]

$$\begin{aligned}
W(z) &= \frac{1}{\pi \sqrt{Z(z)}} \left[q + \int_{-a}^b X(x,0) \sqrt{-Z(x)} \frac{dx}{x-z} - \right. \\
&\left. - \int_{-\infty}^{-a} Y(x,0) \sqrt{-Z(x)} \frac{dx}{x-z} + \int_b^{\infty} Y(x,0) \sqrt{Z(x)} \frac{dx}{x-z} \right]
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Здесь

$$Z(z) = (z+a)(z-b)$$

и q — нормальная внешняя сила, действующая на цилиндр (рис. 5.1).

Зная функцию W , можно определить напряжение σ_y^* и перемещение u_y^* на границе $y = 0$ из соотношений

$$X(x,0) = E^* \frac{\partial u_y^*}{\partial x}, \quad Y(x,0) = \pi \sigma_y^* |_{y=0}; \quad E^* = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \tag{5.13}$$

С учетом этих соотношений, после взятия интегралов в (5.12) получим следующие выражения для напряжения σ_y^* и перемещения u_y^* :

$$\sigma_y^* |_{y=0} = -p^*(x) = \frac{1}{\pi} [-F(x) + G(x)], \quad -a < x < b$$

$$\frac{\partial u_y^*}{\partial x} = \frac{x - T_\varepsilon V}{R} + \begin{cases} \frac{1}{E^*} [J(x) - F(x)], & -a_1 < x < -a \\ \frac{1}{E^*} [F(x) - J(x)], & b < x < b_1 \end{cases} \quad (5.14)$$

где

$$\begin{aligned} F(x) = & \frac{1}{\sqrt{|Z(x)|}} \left\{ \frac{E^*}{R} \left[\frac{1}{8} (a+b)^2 + \frac{1}{2} (x - T_\varepsilon V) (b - a - 2x) \right] + \right. \\ & + q + \frac{1}{2} p_0 \ln \frac{2a_1 + b - a + 2\sqrt{Z(-a_1)}}{2b_1 - b + a + 2\sqrt{Z(b_1)}} \\ & \left. + p_0 \left[\sqrt{Z(-a_1)} + \sqrt{Z(b_1)} \right] + T_\sigma V p_0 \left[\frac{\sqrt{Z(b_1)}}{b_1 - x} - \frac{\sqrt{Z(-a_1)}}{a_1 + x} \right] \right\} \\ G(x) = & p_0 \left\{ \pi + \frac{(a_1 - a)(b - x) - (a_1 + b)(a + x)}{2\sqrt{Z(-x)Z(-a_1)}} - \right. \\ & \left. - \frac{(b_1 + a)(b - x) - (b_1 - b)(a + x)}{2\sqrt{Z(-x)Z(b_1)}} \right\} \\ J(x) = & p_0 \left\{ -\operatorname{arcth} \frac{(a_1 - a)(x - b) + (a_1 + b)(x + a)}{2\sqrt{Z(x)Z(-a_1)}} + \right. \\ & \left. + \operatorname{arcth} \frac{(b_1 + a)(x - b) + (b_1 - b)(x + a)}{2\sqrt{Z(x)Z(b_1)}} \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Определение истинных напряжения и перемещения на границе вязкоупругого полупространства. Напряжение и перемещение на границе вязкоупругого полупространства определяются путем решения дифференциальных уравнений (5.8). В качестве граничных условий используются условия непрерывности для этих напряжений и перемещений. С учетом условия $p(-a) = -p_0$, где $p(x) = -\sigma_y|_{y=0}$ — контактное давление, получим в области контакта $-a < x < b$ выражение

$$p(x) = -\frac{1}{T_{\sigma}V} \int_{-a}^x p^*(t) e^{(x-t)/(T_{\sigma}V)} dt - p_0 e^{(x+a)/(T_{\sigma}V)} \quad (5.16)$$

Учитывая условие $\partial u_y / \partial x = -a / R$ при $x = -a$, получим следующее выражение для перемещений при $-a_1 < x < -a$

$$\frac{\partial u_y(x)}{\partial x} = \frac{1}{T_{\varepsilon}V} \int_x^{-a} \frac{\partial u_y^*(t)}{\partial t} e^{(x-t)/(T_{\varepsilon}V)} dt - \frac{a}{R} e^{(x+a)/(T_{\varepsilon}V)} \quad (5.17)$$

Чтобы получить выражение для перемещений в области $b < x < b_1$, используем условие $\partial u_y / \partial x = b / R$ при $x = b$

$$\frac{\partial u_y(x)}{\partial x} = -\frac{1}{T_{\varepsilon}V} \int_b^x \frac{\partial u_y^*(t)}{\partial t} e^{(x-t)/(T_{\varepsilon}V)} dt + \frac{b}{R} e^{(x-b)/(T_{\varepsilon}V)} \quad (5.18)$$

Полученные соотношения (5.16)-(5.18), в которых функции $p^*(x)$ и $\partial u_y^*(x) / \partial x$ заданы выражениями (5.7), определяют нормальное давление и перемещение на границе вязкоупругого полупространства

Определение границ областей контакта и адгезионного взаимодействия. Соотношения (5.16)-(5.18), определяющие напряжения и перемещения на границе вязкоупругого полупространства, содержат неизвестные величины a , b , a_1 , и b_1 — координаты границ области контакта цилиндра с полупространством ($-a$ и b) и внешних границ области адгезионного притяжения поверхностей ($-a_1$ и b_1). Для определения этих четырех неизвестных величин необходимо четыре условия.

Первое условие вытекает из оставшегося неиспользованным условия непрерывности контактного напряжения при $x = b$. Из выражения (5.16) с учетом условия $p(b) = -p_0$ получим

$$-\frac{1}{T_{\sigma}V} \int_{-a}^b p^*(x,0) e^{-x/(T_{\sigma}V)} dx + p_0 \left(1 - e^{(a+b)/(T_{\sigma}V)}\right) = 0 \quad (5.19)$$

Второе условие получается из условия затухания деформаций на границе полупространства при $x \rightarrow \infty$. Применение этого условия к соотношению (5.18) дает

$$\frac{1}{T_\varepsilon V} \int_b^{+\infty} \frac{\partial u_y^*(x)}{\partial x} e^{-x/(T_\varepsilon V)} dx - \frac{b}{R} e^{-b/(T_\varepsilon V)} = 0 \quad (5.20)$$

Третье и четвертое условия следуют из того, что величина зазора между поверхностями цилиндра и полупространства в точках $x = -a_1$ и $x = b_1$ должна быть равна максимальному расстоянию h_0 , при котором поверхности еще испытывают адгезионное притяжение (см. (1.11)). Приравнивая величину зазора в точке $x = -a_1$ величине h_0 , определяемой соотношением (5.3), получим

$$f(-a_1) - f(-a) - u_y(-a_1) + u_y(-a) = \frac{w_a}{p_0}$$

откуда следует

$$\int_{-a_1}^{-a} \frac{\partial u_y(x)}{\partial x} dx = \frac{w_a}{p_0} - \frac{a_1^2 - a^2}{2R}$$

Подставляя в это соотношение выражение для производной нормального перемещения границы полупространства (5.17) при $-a_1 < x < -a$ и выполняя замену пределов интегрирования, получим условие

$$\int_{-a_1}^{-a} \frac{\partial u_y^*(x)}{\partial x} \left(1 - e^{-\frac{a_1+x}{T_\varepsilon V}}\right) dx - \frac{aT_\varepsilon V}{R} \left(1 - e^{-\frac{a_1-a}{T_\varepsilon V}}\right) = \frac{w_a}{p_0} - \frac{a_1^2 - a^2}{2R} \quad (5.21)$$

Аналогичным образом, приравнивая величину зазора в точке $x = b_1$ величине h_0 , находим четвертое условие:

$$\int_b^{b_1} \frac{\partial u_y^*(x)}{\partial x} \left(e^{\frac{b_1-x}{T_\varepsilon V}} - 1\right) dx - \frac{bT_\varepsilon V}{R} \left(e^{\frac{b_1-b}{T_\varepsilon V}} - 1\right) = \frac{w_a}{p_0} - \frac{b_1^2 - b^2}{2R} \quad (5.22)$$

Полученная система из четырех уравнений (5.19)–(5.22) для определения четырех неизвестных a , b , a_1 и b_1 решалась численно методом Ньютона.

5.1.3. Случай упругого полупространства

Рассмотрим случай упругого полупространства, взаимодействующего с жестким цилиндром при наличии адгезии. В этом случае получим контактную задачу для упругой полуплоскости с граничными условиями (5.4)–(5.6). Решая эту задачу методом, аналогичным изложенному в п.5.1.2, находим следующие выражения для контактного давления при $-a \leq x \leq a$ (решение симметрично относительно оси Oy , т.е., $b = a$, $b_1 = a_1$):

$$p(x) = \frac{E^*}{\pi R} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{P_0}{\pi} [\xi_+(x) - \xi_-(x) - \pi] \quad (5.23)$$

$$\xi_{\pm}(x) = \frac{a_1 x \pm a^2}{\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{a_1^2 - a^2}}$$

и упругого перемещения границы полупространства при $a \leq x \leq a_1$

$$\frac{du_y}{dx} = \frac{x}{R} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{R} + \frac{P_0}{E^*} [\eta_+(x) - \eta_-(x)] \quad (5.24)$$

$$\eta_{\pm}(x) = \operatorname{arcth} \frac{a_1 x \mp a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{a_1^2 - a^2}}$$

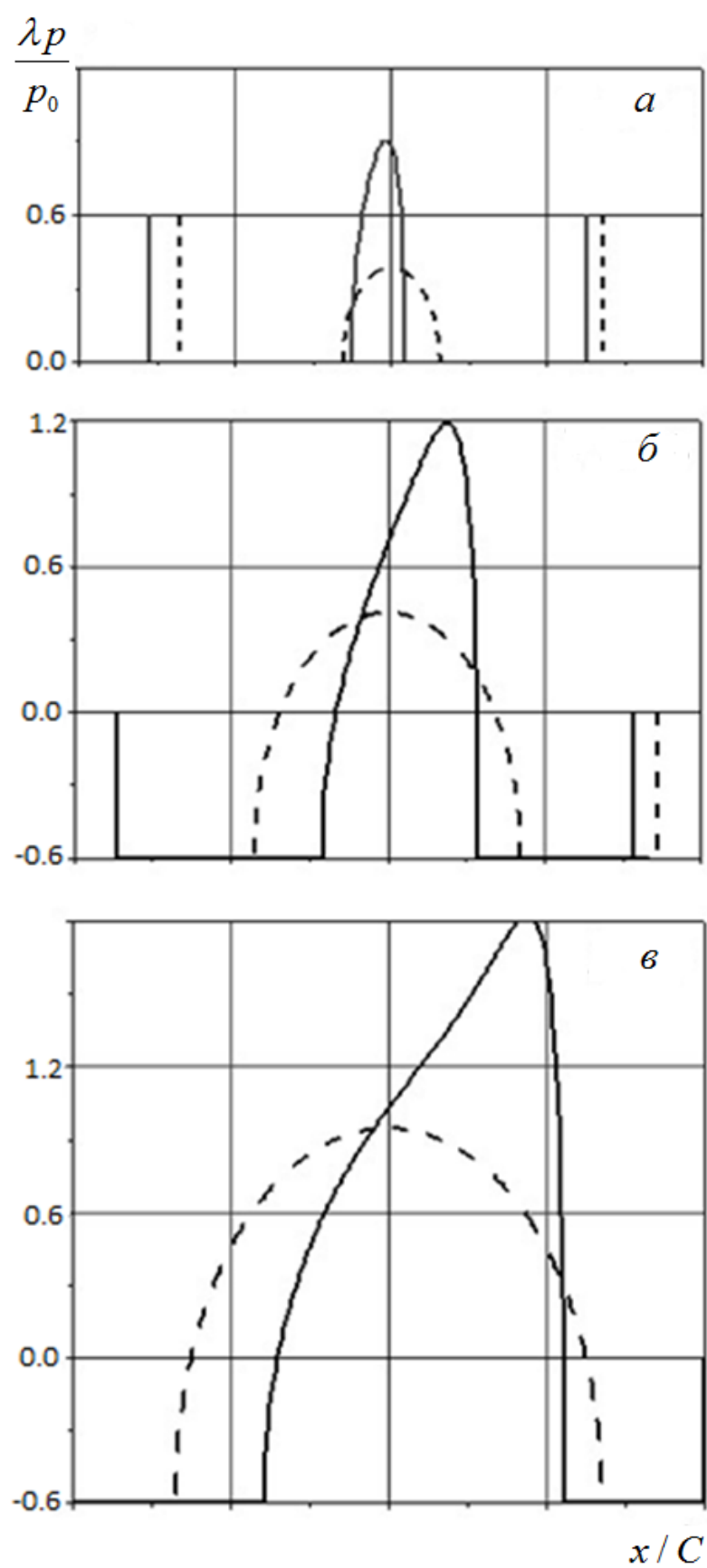


Рис. 5.2. Распределения безразмерного контактного давления при различных величинах нагрузки для вязкоупругого (сплошные линии) и упругого (штриховые линии) полупространства.

Кроме того, получаем выражение для нагрузки, приложенной к цилиндру,

$$q = \frac{E^* a^2}{2R} - 2p_0 \sqrt{a_1^2 - a^2} \quad (5.25)$$

и условие

$$a_1 \sqrt{a_1^2 - a^2} + \left(a^2 - \frac{4p_0}{E^*} \sqrt{a_1^2 - a^2} \right) \ln \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - a^2}}{a} = \frac{2Rw_a}{p_0} \quad (5.26)$$

которое получено в результате приравнивания величины зазора в точке $x = a_1$ величине h_0 , определяемой соотношением (5.3). Соотношения (5.25) и (5.26) служат для численного определения координат a и a_1 границ областей контакта и адгезионного взаимодействия.

5.1.4. Влияние молекулярной адгезии на контактные характеристики

В ходе численного решения задачи исследовалась зависимость решения от следующих безразмерных параметров: параметр T_ε / T_σ , характеризующий вязкие свойства полупространства; параметр адгезии λ , определяемый соотношением (3.24); параметр, характеризующий скорость скольжения цилиндра и время последействия материала полупространства $C / (2VT_\varepsilon)$, а также безразмерную нормальную нагрузку, действующую на цилиндр $\lambda q / (Cp_0)$, где C - величина размерности расстояния $C = [R^2 w_a / (9\pi E^*)]^{1/3}$.

На рис. 5.2 показаны распределения безразмерного контактного давления $\frac{\lambda p}{p_0}$ по безразмерной координате $\frac{x}{C}$ при $\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} = 1$, $\lambda = 0.5$ и разных значениях нагрузки. Рис. 5.2, а соответствует безразмерной внешней нагрузке

$q \frac{\lambda}{Cp_0} = -6$, рис. 5.2, б – нагрузке $q \frac{\lambda}{Cp_0} = -3$, а рис. 5.2, в построен для случая положительной нагрузки $q \frac{\lambda}{Cp_0} = 3$. Штриховые линии показывают распределение давления при тех же параметрах для упругого полупространства, они получены путем расчетов по соотношениям (5.23), (5.25), (5.26). Видно, что учет вязких свойств полупространства приводит к уменьшению области контакта и увеличению максимального контактного давления. Кроме того, распределение контактного давления становится несимметричным. При положительных значениях нагрузки q (внешняя сила прижимает цилиндр к полупространству) область контакта смещается в сторону движения цилиндра. При достаточно больших отрицательных нагрузках (внешняя сила разрывает цилиндр и полупространство) область контакта смещается против движения цилиндра. Аналогичным образом смещается и область адгезионного взаимодействия поверхностей, в которой безразмерное давление $\frac{\lambda p}{P_0}$ на границе вязкоупругого полупространства постоянно и равно $-\lambda$.

Зависимость безразмерной ширины области контакта $\frac{a+b}{C}$ и ее смещения относительно оси симметрии цилиндра $\frac{b-a}{C}$ от параметра скорости $C/(2VT_\varepsilon)$ представлена на рис. 5.3 при $\lambda = 0.5$, $\delta = 3$ и различных нагрузках: $q\lambda/(Cp_0) = -6.3$ (кривая 1), -3 (кривая 2) и 3 (кривая 3).

Результаты расчетов дают возможность заключить, что ширина области контакта ограничена предельными значениями, которые она имеет при $C/(2VT_\varepsilon) \rightarrow 0$ и $C/(2VT_\varepsilon) \rightarrow \infty$. Случай $C/(2VT_\varepsilon) \rightarrow \infty$, т.е. стремящейся к нулю скорости скольжения $V \rightarrow 0$, соответствует решению задачи о взаимодействии цилиндра с упругим полупространством, характеризующимся модулем E (длительным модулем упругости).

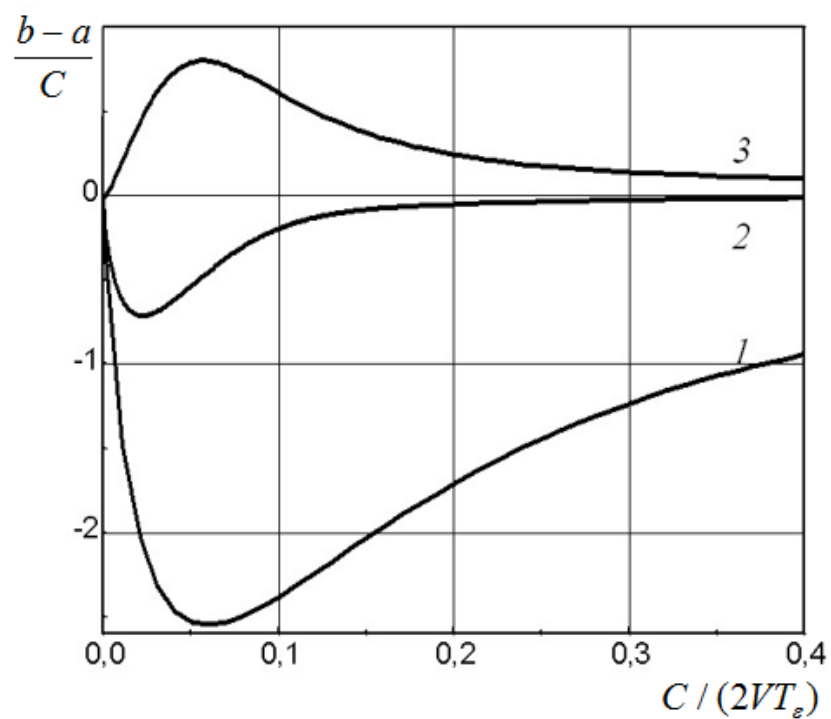
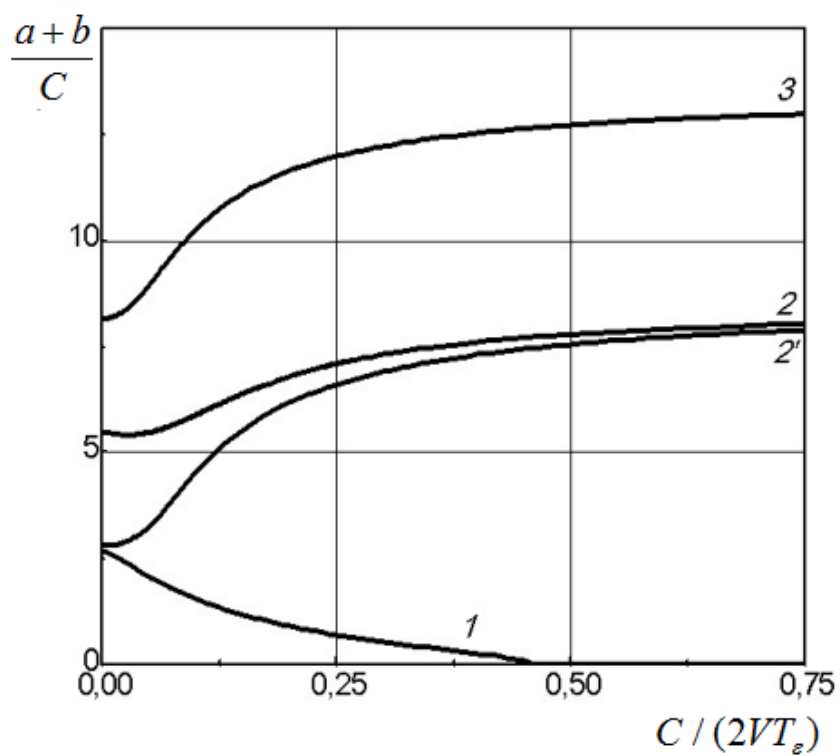


Рис. 5.3. Зависимость безразмерной ширины области контакта и ее смещения относительно оси симметрии цилиндра от параметра скорости при различных значениях нагрузки на цилиндр.

В случае $C/(2VT_\varepsilon) \rightarrow 0$, т.е. при стремлении скорости скольжения к бесконечности $V \rightarrow \infty$, вязкоупругое полупространство ведет себя как упругое тело с модулем $\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} E$, называемым мгновенным модулем упругости.

В случае положительных нагрузок (кривая 3) увеличение скорости скольжения цилиндра V (уменьшение параметра $C/(2VT_\varepsilon)$) приводит к уменьшению размера площадки контакта. Этот эффект аналогичен эффекту всплытия при скольжении по вязкоупругому телу в отсутствие адгезии [14, 18]. В случае отрицательных значений нагрузки зависимость размера площадки контакта от скорости немонотонна, а именно, при больших значениях скорости скольжения V (малых $C/(2VT_\varepsilon)$) имеется область, в которой уменьшение размера площадки контакта происходит при уменьшении скорости скольжения (кривая 2). Эта область расширяется при увеличении абсолютного значения отрицательной нагрузки q . При достаточно больших абсолютных значениях нагрузки уменьшение скорости приводит к уменьшению размера площадки контакта до нуля, за чем следует отрыв взаимодействующих поверхностей (кривая 1). Таким образом, наличие адгезии приводит при отрицательных нагрузках к эффекту, обратному эффекту всплытия: при увеличении скорости разделенные поверхности вступают в контакт, при этом область контакта с возрастанием скорости увеличивается.

Кривая 2' в левой части рис.5.3 получена при тех же значениях параметров, что и кривая 2, но при другой вязкости $\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} = 10$. Кривая 2', в отличие от кривой 2, имеет монотонный характер, т.е., увеличение параметра вязкости $\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}$ привело к уменьшению эффектов, связанных с адгезией.

Смещение площадки контакта $(b-a)/C$, графики которого приведены в правой части рис. 5.3, положительно при положительных нагрузках, т.е., площадка контакта смещается по ходу движения цилиндра (кривая 3), при

этом смещение достигает максимума при некотором κ и стремится к нулю при $C / (2VT_\varepsilon) \rightarrow 0$ и $C / (2VT_\varepsilon) \rightarrow \infty$. При отрицательных нагрузках площадка контакта смещается в противоположную сторону (смещение становится отрицательным, кривые 1 и 2).

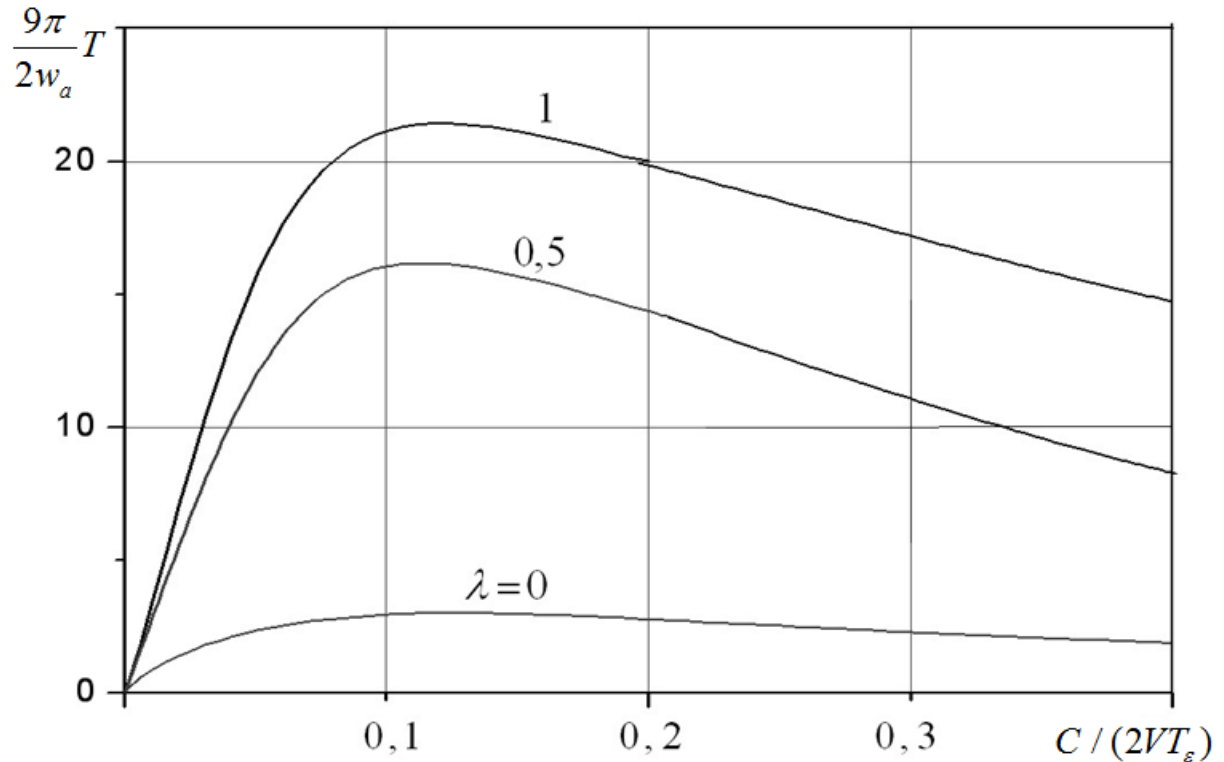


Рис. 5.4. Зависимость безразмерной деформационной силы трения от параметра скорости при различных значениях параметра адгезии.

Результаты показывают, что области контакта и адгезионного взаимодействия смещаются относительно оси симметрии цилиндра, распределение контактного давления также несимметрично. Это приводит к возникновению тангенциальной силы, действующей со стороны вязкоупругого полупространства на цилиндр, несмотря на то, что постановка задачи предполагает нулевые тангенциальные напряжения на границе полупространства ($\tau_{xy} = 0$ при $y = 0$).

Рассчитаем тангенциальную силу T , которую надо приложить к цилиндру, чтобы обеспечить его движение с постоянной скоростью по границе вязкоупругого полупространства. Эта сила равна компоненте силы реакции полупространства вдоль оси Ox . Поскольку размер области взаимодействия $a_1 + b_1$ много меньше радиуса R цилиндра, справедливо соотношение (рис. 5.1)

$$T = \int_{-a_1}^{b_1} p(x) \sin \varphi(x) dx \approx \frac{1}{R} \int_{-a_1}^{b_1} xp(x) dx \quad (5.27)$$

Приводя равенство (5.27) к безразмерному виду, получим

$$\frac{9\pi}{2w_a} T = \int_{-a}^b \xi \bar{p}(\xi) d\xi = \int_{-a/l}^{b/l} \xi \bar{p}(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{2l^2} (b_1^2 - b^2 + a^2 - a_1^2) \quad (5.28)$$

На рисунках 5.4 и 5.5 представлены графики зависимостей величины $\frac{9\pi}{2w_a} T$, рассчитанной по формуле (5.27), от параметра скорости

$C / (2VT_\varepsilon)$ и безразмерной нормальной нагрузки $q \frac{\lambda}{Cp_0} = -6$. Кривые на рис.

5.4 получены при $\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} = 3$, $q \frac{\lambda}{Cp_0} = 3$ и разных значениях параметра адгезии λ .

Результаты показывают, что тангенциальная сила отлична от нуля в некотором диапазоне значений $C / (2VT_\varepsilon)$ и стремится к нулю при $C / (2VT_\varepsilon) \rightarrow 0$ и $C / (2VT_\varepsilon) \rightarrow \infty$. Эти предельные случаи, как отмечалось, соответствуют решению задачи в упругой постановке. Случай $\lambda \rightarrow 0$ соответствует достаточно жестким материалам и слабым адгезионным силам, когда адгезия не оказывает влияния на распределение контактных давлений; для упругих тел этот случай описывается моделью адгезии Дерягина–Муллера–Топорова (ДМТ). Увеличение параметра адгезии λ приводит к возрастанию тангенциальной силы.

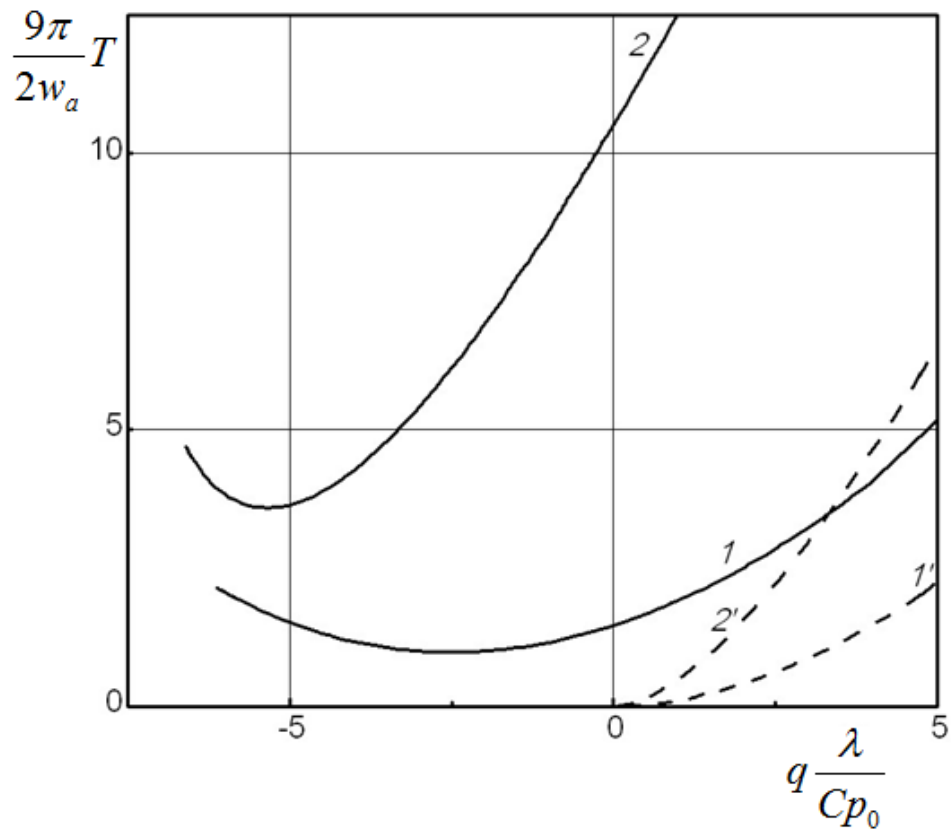


Рис. 5.5. Зависимость безразмерной силы трения от нагрузки на цилиндр.

Результаты показывают также, что тангенциальная сила T , действующая на цилиндр со стороны полупространства, всегда направлена против движения цилиндра как при положительных, так и при отрицательных значениях нагрузки. Зависимости этой величины от безразмерной нормальной нагрузки $q \frac{\lambda}{Cp_0}$, действующей на цилиндр, приведены на рис. 5.5 при наличии адгезии (кривые 1 и 2) и при отсутствии адгезии (кривые 1' и 2'). Кривые 1 и 1' соответствуют $C/(2VT_\varepsilon)=0.01$, кривые 2 и 2' — $C/(2VT_\varepsilon)=0.1$. При отсутствии адгезии ($\lambda=0$) тангенциальная сила сопротивления движению цилиндра равна нулю при нулевой внешней нагрузке $q=0$ и монотонно возрастает при положительной

нагрузке $q > 0$. Учет адгезии приводит к немонотонной зависимости $\frac{9\pi}{2w_a}T$ от нагрузки $q \frac{\lambda}{Cp_0}$ с минимумом в области отрицательных нагрузок.

5.1.5. Капиллярная адгезия

Капиллярная адгезия вызвана наличием в зазоре менисков жидкости, стягивающих между собой выступы взаимодействующих поверхностей. Капиллярная адгезия между упругим полупространством и осесимметричным штампом была рассмотрена в Главе 2 (п. 2.2.1.) Капиллярное давление p_0 под искривленной поверхностью жидкости также определяется формулой Лапласа (1.12).

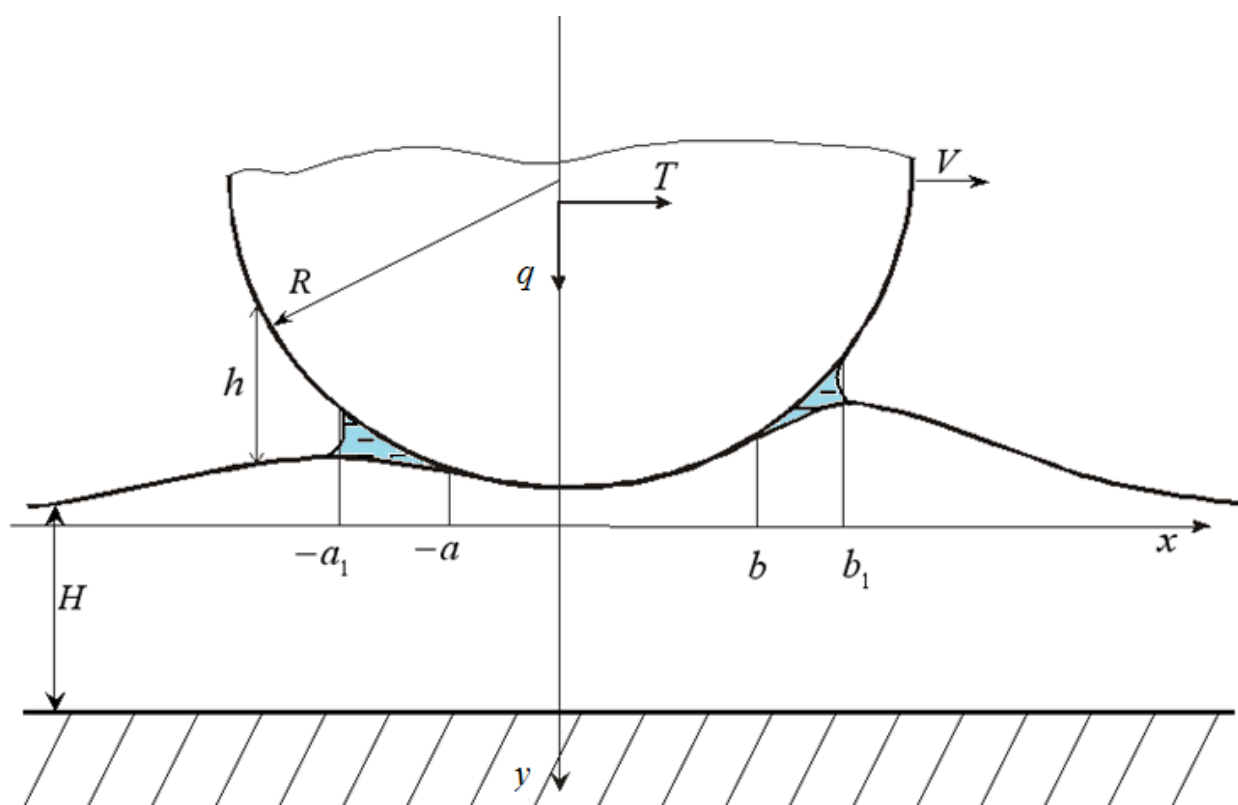


Рис. 5.6. Схема скольжения цилиндра по вязкоупругому слою при наличии капиллярной адгезии.

При взаимодействии между жестким цилиндром радиуса R и первоначально плоской поверхностью деформируемого основания (рис. 5.6) контакт между поверхностями имеет место в некоторой области $-a \leq x \leq b$. Вне области контакта в областях, занятых менисками, $-a_1 \leq x \leq -a$ и $b \leq x \leq b_1$, на основание действует равномерное давление $p_{atm} - p_0$. Используя те же допущения относительно формы мениска, что и в п.2.2.1, для величины p_0 получим соотношение, аналогичное (2.48):

$$p_0 = \frac{2\gamma_0}{h(b_1)} \quad (5.29)$$

где $h(x)$ - зазор между взаимодействующими поверхностями

При постановке контактной задачи атмосферное давление полагается равным нулю, т.е., в области менисков на поверхность основания действует отрицательное давление $p(x) = -p_0$.

Основание, по которому скользит цилиндр, представляет собой одномерный вязкоупругий слой толщины H , лежащий на жесткой подложке (рис.5.6). Механические свойства слоя описываются одномерной моделью Кельвина-Фойгта:

$$u_y + T_\varepsilon \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{(1-\nu^2)H}{E} \left(p + T_\sigma \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (5.30)$$

где $u_y(x^0, y^0, t)$ – смещение поверхности в направлении оси y , $p(x^0, y^0, t)$ – давление, отношение толщины слоя H к приведенному модулю $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$ характеризует податливость слоя, остальные обозначения в уравнении (5.30) совпадают с обозначениями в определяющих уравнениях для вязкоупругого полупространства (5.3). Как и в предыдущей задаче, предполагается, что скорость V много меньше скорости распространения звука в вязкоупругой среде и направлена вдоль оси Ox .

Перейдем к подвижной системе координат (x, y) , жестко связанной с индентором по соотношениям (5.2). Движение считается установившимся, следовательно, в подвижной системе координат (x, y) давление и перемещение не зависят от времени. Тогда в этой системе координат соотношение (5.30), описывающее механические свойства вязкоупругого основания, примет вид:

$$u_y - VT_\varepsilon \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{H}{E^*} \left(p - T_\sigma V \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (5.31)$$

Для нормального перемещения $u_y(x)$ и давления $p(x)$ имеют место следующие условия. В области контакта:

$$u_y(x) = d - \frac{x^2}{2R}, \quad -a \leq x \leq b \quad (5.32)$$

где d – сближение тел за счет деформирования.. В области менисков выполняется условие на давление:

$$p(x) = -p_0, \quad -a_1 \leq x < -a, \quad b < x \leq b_1 \quad (5.33)$$

При $x < -a_1$, $x > b_1$, поверхность вязкоупругого основания не нагружена, $p(x) = 0$.

Капиллярное давление в мениске меньше нуля, $-p_0$, его величина задается условием (5.29):

$$p_0 = \frac{2\gamma_0}{h(-a_1)} = \frac{2\gamma_0}{h(b_1)} \quad (5.34)$$

Величина зазора между цилиндром и основанием определяется выражением

$$h(x) = u(x) + \frac{x^2}{2R} - d \quad (5.35)$$

Кроме того, выполняется условие равновесия для цилиндра:

$$q = \int_{-a_1}^{b_1} p(x) dx \quad (5.36)$$

и условие сохранения объема жидкости в менисках:

$$v_0 = \int_{-a_1}^{-a} h(x) dx + \int_b^{b_1} h(x) dx \quad (5.37)$$

Подставляя условия (5.32) и (5.33) в уравнение (5.31), получим дифференциальные уравнения для функции $u_y(x)$ на интервалах $-a_1 \leq x \leq -a$ и $b \leq x \leq b_1$ и для функции $p(x)$ на интервале $-a \leq x \leq b$. В качестве граничных условий для этих уравнений используются условия непрерывности контактного давления на краях области контакта $x = -a, x = b$, условие непрерывности перемещения и его затухания на бесконечности. В результате, для контактного давления получено выражение

$$p(x) = \frac{E^*}{2RH} \left[2dR - x^2 + 2T_\varepsilon V (T_\varepsilon V + x) \left(\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) \right] - e^{\frac{(x+a)T_\sigma}{V}} \left[p_0 + \frac{E^*}{2RH} \left\{ 2dR - a^2 + 2T_\sigma V (T_\sigma V - T_\varepsilon) \left(\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) \right\} \right] \quad (5.38)$$

где $d = -\frac{Hp_0}{E^*} + \frac{b^2}{2R}$. Величины a, b, a_1, b_1, p_0 определяются численно из системы алгебраических уравнений.

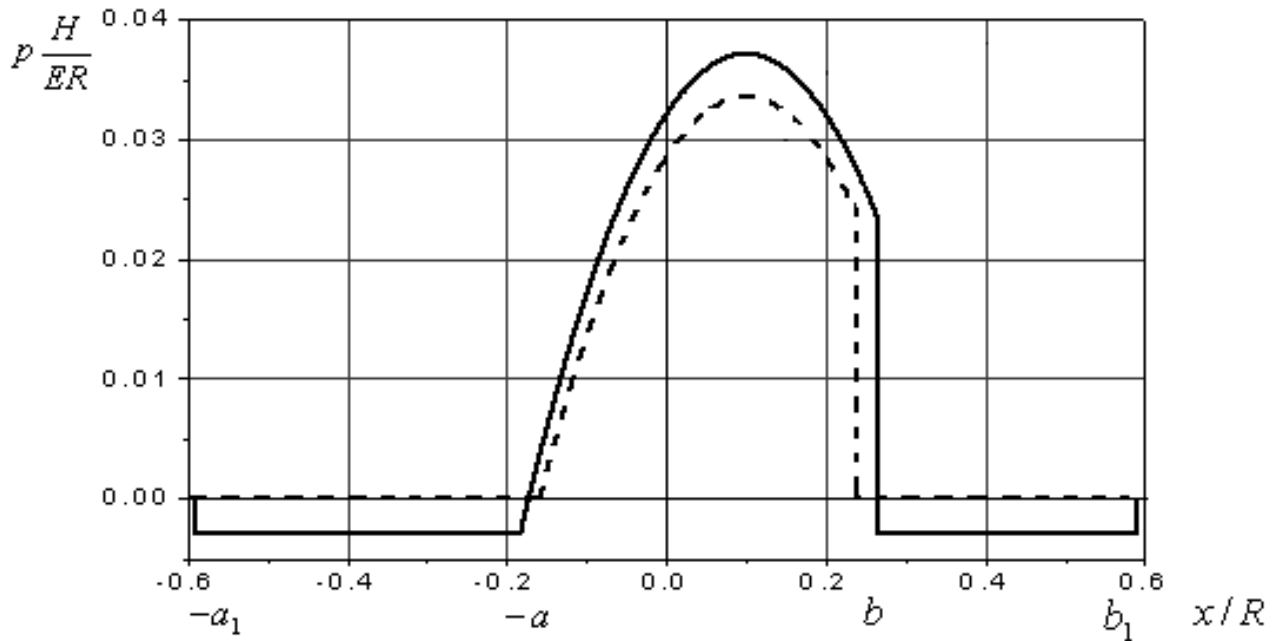


Рис. 5.7. Распределения контактного давления при наличии (сплошная кривая) и отсутствии (штриховая кривая) мениска.

На рис. 5.7 показано распределение безразмерного контактного давления при скольжении цилиндра при наличии мениска (сплошная линия) и без мениска (штриховая линия). Графики построены при следующих значениях параметров: безразмерная нагрузка на цилиндр $q \frac{H}{E^* R} = 0.01$;

параметр скорости $\frac{R}{T_\varepsilon V} = 10$; параметр вязкости $\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} = 10^3$, безразмерный

объем жидкости $\frac{v_0}{R^2} = 4$; безразмерное поверхностное натяжение

$\gamma_0 \frac{2H}{E^* R^2} = 4 \times 10^{-4}$. Результаты показывают, что наличие мениска приводит к

увеличению размера области контакта и к повышению контактного давления.

На рис. 5.8 показаны зависимости коэффициента трения $\mu = T / P$, где тангенциальная сила сопротивления скольжению цилиндра T рассчитывается по соотношению (5.27), от параметра скорости $R / (T_\varepsilon V)$. Результаты, представленные на рис. 5.8 получены при тех же значениях параметров, что и результаты на рис. 5.7 и при двух различных безразмерных объемах

жидкости в мениске $\frac{v_0}{R^2} = 1$ и 4. Штриховая линия соответствует случаю отсутствия мениска.

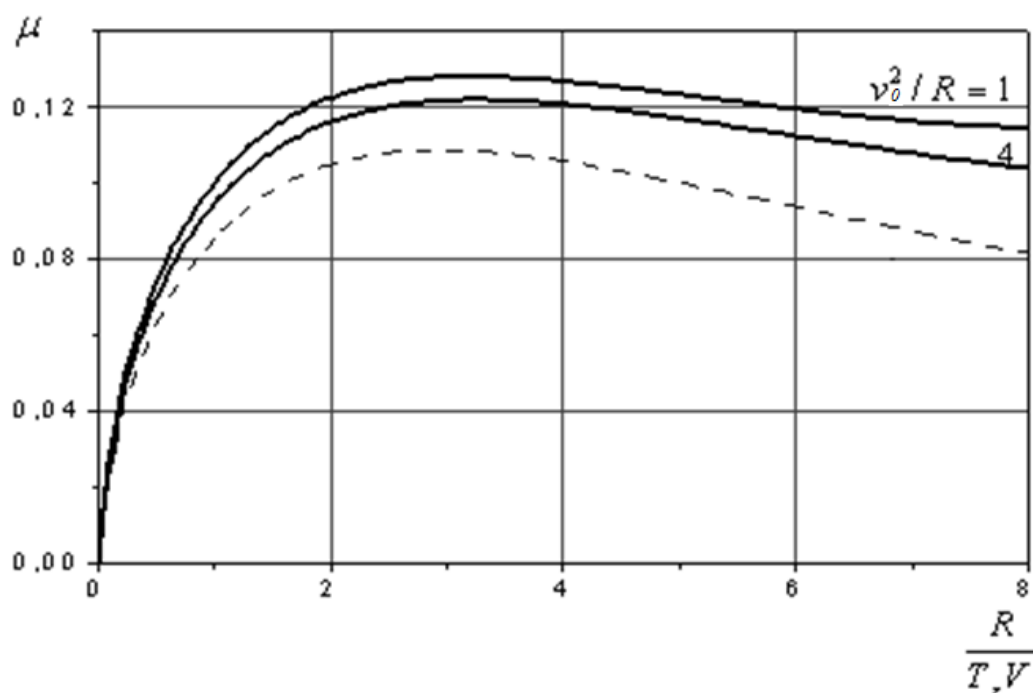


Рис. 5.8. Зависимость коэффициента трения μ от параметра скорости при различных объемах менисков.

Результаты показывают, что капиллярная адгезия, подобно молекулярной адгезии, приводит к увеличению силы трения. При этом максимум коэффициента трения смещается в сторону меньших скоростей. Величина коэффициента трения тем выше, чем меньше размер менисков, окружающих цилиндр.

5.2. Скольжение сферического штампа по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии

В разделе 5.1. была рассмотрена и решена контактная задача о скольжении цилиндрической неровности по вязкоупругому

полупространству при наличии адгезии. Цилиндрическую форму могут иметь, например, выступы поверхности с искусственно нанесенным двумерным рельефом или текстурой. Однако, поверхностные неровности реальных шероховатых поверхностей чаще имеют форму трехмерных выступов. В настоящем разделе учитывается адгезионное притяжение между неровностью и вязкоупругим основанием, действующее вне области контакта. Для упрощения анализа в качестве модели вязкоупругого тела рассматривается одномерный вязкоупругий слой, лежащий на жестком основании.

5.2.1. Постановка задачи для сферического штампа

Сферический индентор 1 скользит с постоянной скоростью V по вязкоупругому слою 2 толщины H , лежащем на жестком основании 3 (рис. 5.9). Механические свойства вязкоупругого слоя описываются одномерной моделью Кельвина-Фойгта (5.30), где вместо функции перемещения $u_y(x, t)$ для плоской задачи следует написать перемещение вдоль оси z $u_z(x, y, t)$. После перехода к подвижной системе координат, связанной с индентором, уравнение для описания свойств вязкоупругого слоя принимает вид (5.32).

Поскольку область взаимодействия поверхностей на порядок меньше радиуса сферы R , форму индентора можно принять в виде параболоида вращения с тем же радиусом кривизны:

$$f(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{2R} \quad (5.39)$$

Адгезионное взаимодействие поверхностей описывается моделью Можи-Дагдейла (1.10)-(1.11).

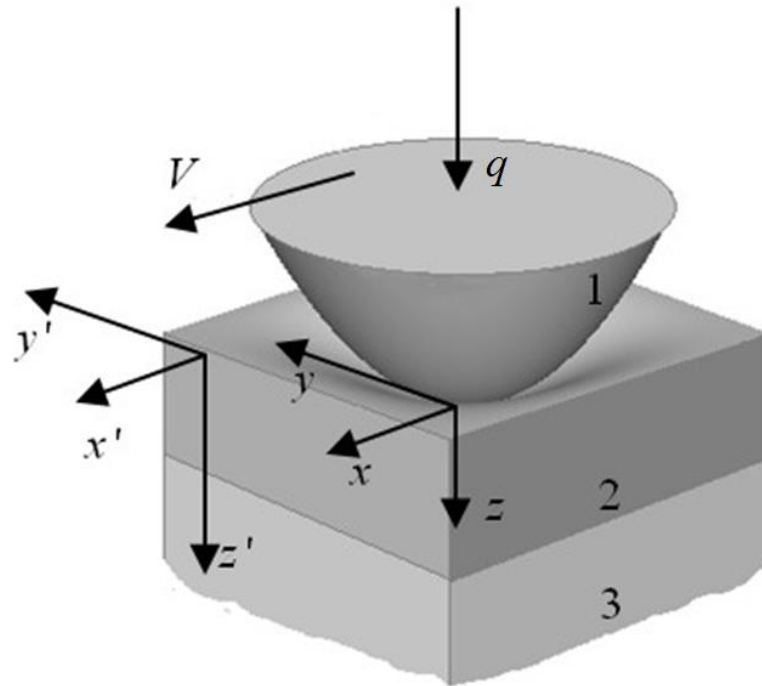


Рис. 5.9. Схема скольжения индентора по вязкоупругому слою.

Обозначим область контакта поверхностей за Ω^c , а области действия адгезионного притяжения Ω^a . (см. рис. 5.10). Тогда в области Ω^c выполняется условие контакта поверхностей:

$$u_z(x, y) = f(x, y) + d, \quad (x, y) \in \Omega^c \quad (5.40)$$

где d – сближение тел за счет деформирования.

В области Ω^a действует адгезионное давление:

$$p(x, y) = -p_0, \quad (x, y) \in \Omega^a \quad (5.41)$$

Нормальная сила q , действующая на индентор, рассчитывается путем интегрирования контактных напряжений по всей области взаимодействия:

$$q = \iint_{\Omega^c \cup \Omega^a} p(x, y) dx dy \quad (5.42)$$

5.2.2. Решение трехмерной задачи методом полос

Контактная задача решается методом полос [143]. Этот метод для рассматриваемой одномерной модели вязкоупругого слоя является точным. Область взаимодействия индентора и поверхности вязкоупругого основания разбивается на $2N$ полос равной толщины Δ (Рис. 5.10).

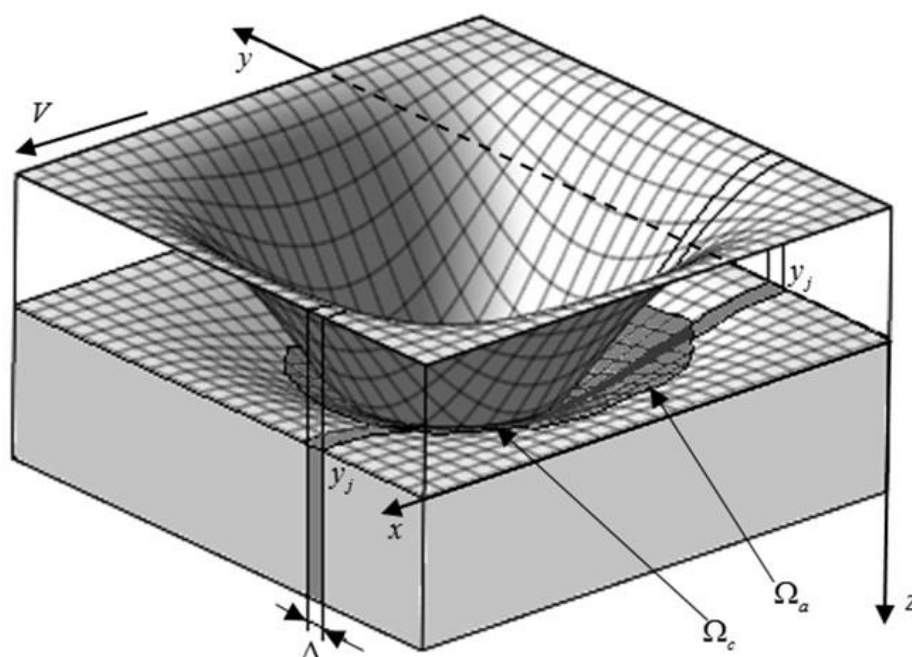


Рис. 5.10. Схема расчета для случая скольжения индентора по вязкоупругому слою при наличии адгезии

Максимальное внедрение j -й полосы в вязкоупругое основание определяется соотношением

$$d_j = d - \frac{\Delta^2 j^2}{2R} \quad (5.43)$$

Решая контактную задачу для j -й полосы, получим следующее соотношение для контактного давления

$$p_j(x) = -p_0 e^{\frac{x-a_j}{T_\sigma V}} + \frac{E}{H} \left\{ d_j - \frac{x^2}{2R} + \frac{V}{R} (T_\sigma V + x)(T_\varepsilon - T_\sigma) \right. \\ \left. - e^{\frac{x-a_j}{T_\sigma V}} \left[d_j - \frac{a_j^2}{2R} + \frac{V}{R} (T_\sigma V - a_j)(T_\varepsilon - T_\sigma) \right] \right\}, \quad -a_j < x < b_j \quad (5.44)$$

где a_j и b_j – границы зоны контакта в j -й полосе. Эти величины, вместе с координатами границ зоны адгезионного взаимодействия, a_{1j} и b_{1j} , рассчитываются для каждой полосы. Уравнения для расчета этих величин следуют из принятой модели адгезионного взаимодействия (1.10)-(1.11), условий (5.39)-(5.41) и условий непрерывности контактного давления на границе зоны контакта и для перемещения на границах зон контакта и адгезии.

Когда контактная задача решена, и контактное давление в каждой полосе $p_j(x)$ найдено, тогда нормальная нагрузка, действующая на индентор, определяется суммированием по полосам или, как следует из (5.42):

$$q = 2\Delta \sum_{j=1}^N \int_{-a_{1j}}^{b_{1j}} p_j(x) dx \quad (5.45)$$

Если максимальное внедрение d неизвестно, а величина нагрузки q задана, тогда выбирается некоторое начальное значение внедрения d_0 , и применяется итерационная процедура, пока заданная величина нагрузки q не будет достигнута с требуемой точностью.

Для определения тангенциального напряжения, действующего на индентор со стороны вязкоупругого основания, используем соотношение

$$\tau_j(x) = p_j(x) \sin \left[\arctg \left(f_j'(x) \right) \right] \approx p_j(x) f_j'(x) \quad (5.46)$$

Тогда тангенциальная сила (деформационная составляющая силы трения сила трения), действующая на индентор со стороны основания, рассчитывается по формуле

$$T = 2\Delta \sum_{j=1}^N \int_{-a_{1j}}^{b_{1j}} \tau_j(x) dx \quad (5.47)$$

Таким образом, трехмерная контактная задача сводится к решению плоской задачи в каждой полосе для определения распределения контактных давлений $p_j(x)$ в зоне контакта $x \in \Omega_j$ и границы зоны адгезии Ω^a , после чего силу трения можно рассчитать по соотношениям (5.46)-(5.47).

Результаты расчета контактных характеристик и деформационной составляющей силы трения для скольжения сферического индентора по вязкоупругому основанию при наличии молекулярной адгезии будут приведены ниже в п. 5.4.4 совместно с результатами для волнистого индентора.

5.2.3. Капиллярная адгезия при скольжении сферического индентора

Пусть между сферической неровностью, форма вершины которой описывается соотношением (5.39), и вязкоупругим основанием имеется мениск жидкости объемом v . Условия контактной задачи описываются в этом случае соотношениями (5.40) - (5.42), где адгезионное давление p_0 равно капиллярному давлению в мениске. Величина этого давления удовлетворяет соотношению (5.29), следующему из формулы Лапласа (1.12). Кроме того, удовлетворяется условие сохранения объема жидкости в мениске:

$$v_0 = \iint_{\Omega^a} h(x, y) dx dy$$

Задача решается методом полос, описанным в разделе 5.2.2. На рис. 5.11 представлены распределения контактного давления при скольжении сферического индентора при наличии мениска для трех различных скоростей скольжения: $V = 10^{-7}$ м/с (а), 10^{-6} м/с (б) и 10^{-3} м/с (с). Расчет проведен для следующих параметров материала, характерных для эластомеров: податливость вязкоупругого слоя $\frac{E}{(1-\nu^2)H} = 5 \times 10^{12}$ Па/м, время релаксации $T_\sigma = 98$ с, соотношение времен запаздывания и релаксации $T_\varepsilon / T_\sigma = 10$. Радиус неровности брался $R = 5$ мм. Величина внешней нормальной нагрузки на неровность $q = 0.39$ Н и объем жидкости в мениске $v_0 = 5 \times 10^{-7}$ м одинаковы для трех представленных на рис.4.15 распределений давлений. Результаты показывают, что при относительно низкой скорости (рис.4.15,а) распределение контактного давления близко к симметричному, а область контакта близка к круговой. При этом мениск, в котором давление отрицательно, занимает узкую кольцевую область вокруг области контакта. При увеличении скорости (рис.4.15,б), область контакта становится вытянутой в направлении оси y , распределение давлений становится несимметричным, при этом большая часть мениска располагается за областью контакта. При дальнейшем увеличении скорости (рис.4.15,с) область контакта снова становится симметричной, материал ведет себя как упругий с более высоким модулем упругости (мгновенный модуль), максимальное контактное давление возрастает, область контакта становится меньше по размеру, а мениск занимает более широкое кольцо вокруг области контакта.

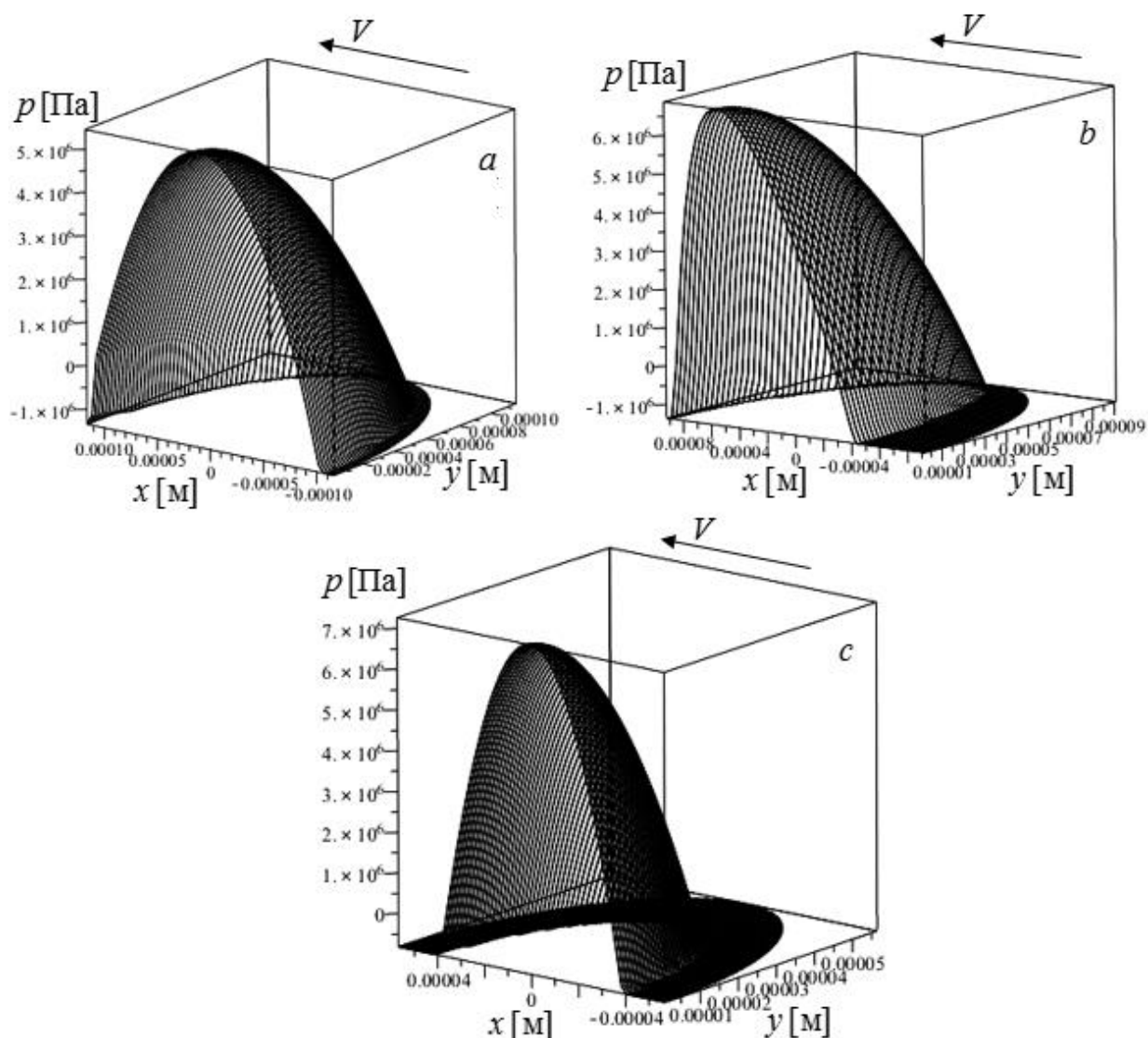


Рис. 5.11. Распределение контактного давления при скольжении сферической неровности при наличии мениска.

5.3. Скольжение индентора с двумерной волнистостью по поверхности вязкоупругого основания при наличии адгезии

В предыдущих разделах данной главы были рассмотрены эффекты, возникающие при скольжении по вязкоупругому основанию единичной неровности при наличии адгезии. Для описания реальных шероховатых поверхностей, однако, может быть недостаточно моделировать каждый выступ как отдельную изолированную неровность, поскольку учет точной

формы зазора между поверхностями (не только формы вершин выступов, но и впадин между ними) особенно важен при расчете адгезионных сил. В этом случае можно использовать модель поверхности с регулярным рельефом. Ниже будет построено решение задачи для индентора с регулярным рельефом с учетом молекулярной адгезии и проведено сравнение со случаем скольжения изолированной неровности также с учетом адгезии.

5.3.1. Постановка задачи для индентора с двумерной волнистостью

Рассматривается плоская контактная задача о скольжении с постоянной скоростью V вдоль оси Ox жесткого волнистого тела, поверхность которого описывается периодической функцией $f(x) = f_0 \sin^2 \frac{\pi x}{l}$ ($f_0 \ll l$), где f_0 и l – высота и длина волны, соответственно, по вязкоупругому основанию (рис. 5.12). Ось z прямоугольной системы координат направлена вглубь вязкоупругого основания, оси x и y лежат на границе невозмущенного вязкоупругого основания. Его механические свойства которого описываются одномерной линейной моделью (5.30), где вместо функции перемещения $u_y(x, t)$ следует написать перемещение вдоль оси z $u_z(x, y, t)$.

Считается, что контактное давление $p(x, y, t)$ действует в направлении нормали к поверхности вязкоупругого основания, в этом же направлении имеет место перемещение границы основания $u(x, y, t)$. Перемещение границы вязкоупругого основания в направлении оси z обозначим $u_z(x, y, t)$. Поскольку граница волнистого тела является полой ($f_0 \ll l$), то можно предполагать, что граница вязкоупругого полупространства при взаимодействии с ним тоже остается полой, т.е. $\partial u_z / \partial x \ll 1$. Тогда можно считать, что величины p и u равны по величине своим проекциям на ось z : p_z и u_z , соответственно, так как $p_z = p \cos \left[\arctg \left(\partial u_z / \partial x \right) \right] \approx p$ и, аналогично, $u \approx u_z$.

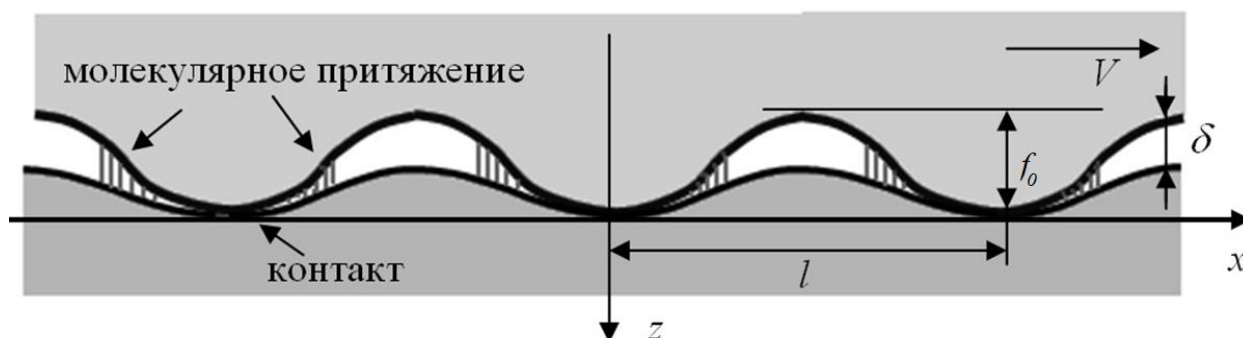


Рис. 5.12. Схема скольжения волнистого индентора по поверхности вязкоупругого основания при наличии адгезии

Пусть неподвижная система координат (x', y', z') связана с вязкоупругим основанием, а система координат (x, y, z) связана со скользящим волнистым телом, так что: $x' = x + Vt$; $y' = y$; $z' = z$. Как и ранее, считаем движение установившимся по отношению к системе координат (x, y, z) , в которой смещения и напряжения не зависят от времени t и являются функциями только координат (x, z) . В силу постановки задачи смещения и перемещения не зависят от координаты y , поэтому решение задачи можно строить в плоскости $y = 0$.

В подвижной системе координат (x, y) соотношение (5.30) принимает вид (5.32).

Адгезионное взаимодействие поверхностей (молекулярное притяжение сухих поверхностей) описывается моделью (1.10)–(1.11).

Постановка контактной задачи, а именно, условия на функции контактного давления и перемещения зависят от режима заполнения зазора.

5.3.2. Решение задачи при различных режимах заполнения зазора

Рассматриваются три возможных режима: дискретный контакт с зонами адгезионного взаимодействия (рис. 5.12), дискретный контакт с насыщенным адгезионным взаимодействием (рис. 5.13,а) и насыщенный

контакт (рис. 5.13,б). Реализуется один из этих режимов в зависимости от заданных характеристик взаимодействующих тел и условий нагружения (нагрузки и скорости скольжения).

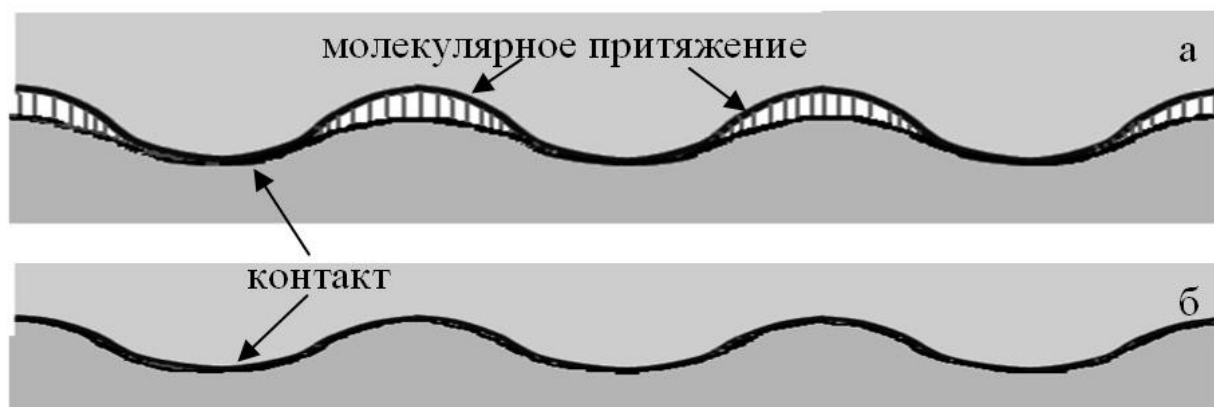


Рис. 5.13. Различные режимы заполнения зазора при скольжении волнистого индентора по вязкоупругому основанию.

Начнем анализ задачи с **режима насыщенного контакта**. В этом случае перемещения границы $z=0$ вязкоупругого основания $u(x) \equiv u(x,0)$ удовлетворяют условию контакта по всей поверхности:

$$u(x) = d + f(x) \quad (5.48)$$

Поскольку шероховатая поверхность описывается периодической функцией $f(x)$, контактные давления $p(x)$ и перемещения $u(x)$ тоже являются периодическими функциями. Поэтому рассмотрим задачу в интервале $x \in [-l/2, l/2]$, содержащем один выступ шероховатой поверхности, и наложим на контактные давления условие периодичности: $p(x-l/2) = p(x+l/2)$.

В этом случае, решая дифференциальное уравнение (5.32) с учетом (5.48) получим контактное давление $p(x)$ в виде:

$$p(x) = \frac{E^* f_0 (l^2 + 4\pi^2 T_\varepsilon T_\sigma V^2) \cos \frac{2\pi x}{l} + 2\pi l f_0 V (T_\varepsilon - T_\sigma) \sin \frac{2\pi x}{l}}{2H (l^2 + 4\pi^2 T_\sigma^2 V^2)} + \frac{E^*}{2H} (2d - f_0) \quad (5.49)$$

Нормальная погонная сила q , действующая на период $x \in [-l/2, l/2]$ волнистого тела, определяется соотношением

$$q = \int_{-l/2}^{l/2} p(x) dx = \frac{E^* l}{2H} (2d - f_0) \quad (5.50)$$

Для определения сил, действующих на жесткую волнистую поверхность со стороны вязкоупругого основания в тангенциальном направлении, воспользуемся выражением для напряжений, действующих в тангенциальном направлении

$$\tau(x) = p(x) \sin [\operatorname{arctg} (f'(x))] \approx p(x) f'(x) \quad (5.51)$$

Тогда тангенциальная погонная сила T , действующая на период, определяется выражением

$$T = \int_{-l/2}^{l/2} \tau(x) dx = \frac{\pi^2 f_0^2 E^* V l (T_\varepsilon - T_\sigma)}{2H (l^2 + 4\pi^2 T_\sigma^2 V^2)} \quad (5.52)$$

Эта сила всегда действует в направлении, противоположном направлению скольжения жесткого волнистого тела, и является деформационной составляющей силы трения.

Как следует из соотношений (5.49), (5.51) и (5.52), в случае полного контакта адгезионные характеристики не влияют на контактные напряжения и силу трения. Однако адгезия влияет на условие, при котором возможен полный контакт поверхностей. Так, при отсутствии адгезии полный контакт поверхностей реализуется при условии, что контактные давления $p(x)$ везде

неотрицательны, т.е. $\min(p(x)) \geq 0$. При наличии адгезии контактные давления могут быть отрицательными, но не меньшими, чем адгезионное напряжение $-p_0$. Т.е. насыщенный контакт реализуется при условии

$$\min(p(x)) \geq -p_0 \quad (5.53)$$

Если минимальное контактное давление, рассчитанное по (5.49), не удовлетворяет условию (5.53), то насыщенный контакт не реализуется. В этом случае решение ищется для режима дискретного контакта с насыщенным адгезионным взаимодействием.

Для исследования **дискретного контакта с насыщенным адгезионным взаимодействием** рассмотрим решение задачи в интервале $x \in [-a, l-a]$. В области контакта $-a < x < b$ выполняется условие контактирования (5.48), а в области отсутствия контакта $b < x < l-a$ - вытекающее из (5.1) условие адгезионного взаимодействия:

$$p(x) = -p_0 \quad (5.54)$$

Дифференциальное уравнение (5.32) решается в интервале $-a < x < b$ относительно контактного давления $p(x)$ при перемещении $u(x)$, заданном соотношением (5.48). В интервале $b < x < l-a$ дифференциальное уравнение (5.32) решается относительно $u(x)$ при давлении $p(x)$, заданном соотношением (5.54). Таким образом, необходимы два граничных условия для решения двух дифференциальных уравнений и еще два условия для определения границ a и b области контакта. Такими условиями служат условия непрерывности функций $p(x)$ и $u(x)$ в точках $x = -a$ и $x = b$ и условие периодичности. Эти условия приводят к двум нелинейным алгебраическим уравнениям для численного определения величин a и b в случае, если задано сближение взаимодействующих тел d . В результате решения этой системы уравнений для давления $p(x)$ в области контакта $-a \leq x \leq b$ получено следующее выражение:

$$\begin{aligned}
p(x) = & -p_0 e^{\frac{x-a}{\beta V}} + \frac{E^*}{2H} (2d - f_0) \left(1 - e^{\frac{x-a}{\beta V}} \right) + \\
& + \frac{E^* f_0}{2H(l^2 + 4\pi^2 \beta^2 V^2)} \left[(l^2 + 4\pi^2 \alpha \beta V^2) \left(\cos \frac{2\pi x}{l} - e^{\frac{x-a}{\beta V}} \cos \frac{2\pi a}{l} \right) - \right. \\
& \left. - 2\pi l V (\alpha - \beta) \left(\sin \frac{2\pi x}{l} - e^{\frac{x-a}{\beta V}} \sin \frac{2\pi a}{l} \right) + 2dl^2 f_0 \left(1 - e^{\frac{x-a}{\beta V}} \right) \right]
\end{aligned} \quad (5.55)$$

Аналогичное соотношение получено для определения неизвестной функции перемещения $u_z(x)$ в области $b < x < l - a$.

Учитывая, что в области отсутствия контакта $b < x < l - a$ давление определяется соотношением (5.54), а в области контакта – выражением (5.55), можно найти тангенциальные напряжения для любого x по формуле (5.51), а также определить нормальную и тангенциальную погонные силы, действующие на один период скользящего волнистого тела:

$$q = \int_{-a}^{l-a} p(x) dx, \quad T = \int_{-a}^{l-a} \tau(x) dx \quad (5.56)$$

Дискретный контакт с насыщенным адгезионным взаимодействием имеет место при условии, что в полученном решении $b < l - a$. Если оказывается, что $b \geq l - a$, то реализуется полный насыщенный контакт. Другое условие существования режима дискретного контакта с насыщенным адгезионным взаимодействием следует из принятой модели адгезионного взаимодействия (1.10) и (1.11): максимальная величина зазора между поверхностями взаимодействующих тел $u(x) - f(x) - d$ не превышает заданной величины h_0 , т.е.

$$\max(u(x) - f(x) - d) \leq \frac{W_a}{P_0} \quad (5.57)$$

Если полученная в результате расчетов функция $u(x)$ в области $b < x < l - a$ не удовлетворяет условию (5.57), то дискретный контакт с насыщенным адгезионным взаимодействием не реализуется, и решение нужно искать для случая дискретного контакта с зонами адгезионного взаимодействия.

В режиме **дискретного контакта с зонами адгезионного взаимодействия** имеем три вида граничных условий в трех контактных зонах. В области контакта $-a < x < b$ выполняется условие контактирования (5.48). В областях адгезионного взаимодействия $-a_1 < x < -a$ и $b < x < b_1$ выполняется условие адгезионного взаимодействия (5.54). В области отсутствия взаимодействия $b_1 < x < l - a_1$ граница вязкоупругого основания свободна от усилий:

$$p(x) = 0 \quad (5.58)$$

Дифференциальное уравнение (5.32) решается на интервале $-a < x < b$ относительно контактного давления $p(x)$ при перемещении $u(x)$, заданном соотношением (5.48). На интервалах $-a_1 < x < -a$ и $b < x < b_1$ дифференциальное уравнение (5.32) решается относительно $u(x)$ при давлении $p(x)$, заданном соотношением (5.54), а на интервале $b_1 < x < l - a_1$ - при давлении $p(x)$, заданном условием (5.58). В качестве дополнительных условий используем условия непрерывности для давления $p(x)$ и перемещения $u(x)$ в точках $x = -a_1$, $x = -a$ и $x = b$ и $x = b_1$ и условия периодичности. Кроме того, для определения границ областей адгезионного взаимодействия a_1 и b_1 используем условия, следующие из (5.1) и (5.2), согласно которым величина зазора между поверхностями в точках $x = -a_1$ и $x = b_1$ должна быть равно величине h_0 , т.е.

$$\begin{aligned}
 u(-a_1) - f(-a_1) - d &= \frac{w_a}{p_0} \\
 u(b_1) - f(b_1) - d &= \frac{w_a}{p_0}
 \end{aligned}
 \tag{5.59}$$

В результате получим четыре нелинейных алгебраических уравнения для численного определения величин a , b , a_1 и b_1 в случае, если задано сближение взаимодействующих тел d . После решения этой системы уравнений давление $p(x)$ в области контакта $-a \leq x \leq b$ определяется выражением (5.55). После этого можно найти тангенциальные напряжения для любого x по формуле (5.51), а также, воспользовавшись (5.56), определить нормальную и тангенциальную погонные силы, действующие на один период волнистого индентора.

5.3.3. Анализ контактных характеристик при разных режимах заполнения зазора

Ниже приведены основные результаты решения контактной задачи, иллюстрирующие влияние исследуемых факторов (несовершенной упругости, дискретности контакта и молекулярного взаимодействия) на контактные характеристики и силу трения скольжения.

На рис. 5.14 показано распределение по периоду l волнистости нормальных $p(x)$ (кривые 1) и тангенциальных $\tau(x)$ (кривые 2) напряжений, действующих на поверхность волнистого тела со стороны вязкоупругого основания при скольжении, при отсутствии (рис. 5.14, а) и при наличии адгезии (рис. 5.13, б). Расчеты проведены для вязкоупругого материала, механические свойства которого задаются следующими значениями введенных характеристик: $E^* / H = 2 \times 10^6$ Па/м, $T_\sigma = 0.003$ с, $T_\varepsilon / T_\sigma = 10^3$, при погонной нагрузке $q = 154$ Н/м, скорости скольжения $V = 0.1$ м/с, параметрах волнистости $l = 0.086$ мм, $f_0 = 0.008$ мм и параметрах адгезии $w_a = 0.05$ Н/м, $p_0 = 5.5 \times 10^6$ Па.

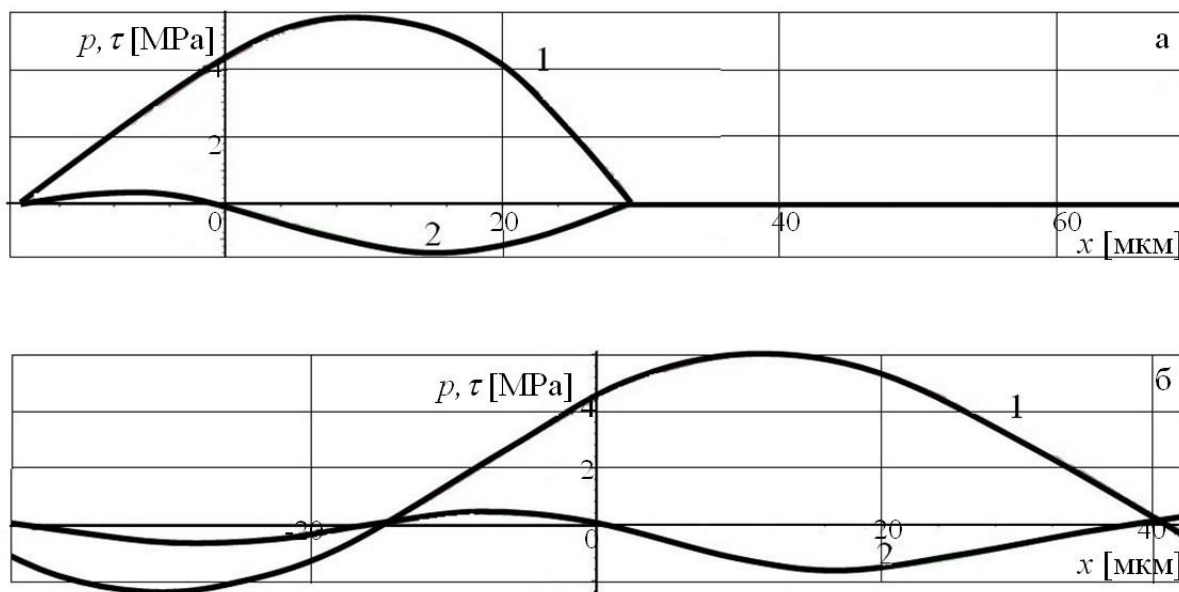


Рис. 5.14. Распределение нормального и касательного напряжений по периоду волнистости индентора.

Результаты показывают, что несовершенная упругость основания приводит к асимметрии распределения нормальных контактных напряжений $p(x)$ относительно оси симметрии выступа, а также к тому, что средняя погонная тангенциальная сила T , действующая на период волнистого тела, отлична от нуля в некотором диапазоне скоростей и стремится к нулю при больших и малых скоростях. Эта сила (деформационная составляющая силы трения), действующая в направлении, противоположном направлению скольжения тела, возникает вследствие гистерезисных потерь в вязкоупругом материале. Соответствующий коэффициент трения $\mu = T/P$, где P – нормальная погонная внешняя нагрузка, рассчитывался в результате решения задачи. Для распределения контактных напряжений, представленных на фиг. 5.14,а $\mu = 0.139$, а для напряжений на фиг. 5.14,б - $\mu = 0.273$. Увеличение параметра вязкости T_ε/T_σ приводит к увеличению деформационной составляющей силы трения. При выбранных значениях входных параметров учет адгезионного взаимодействия приводит к

увеличению коэффициента трения и к переходу от дискретного к насыщенному контакту.

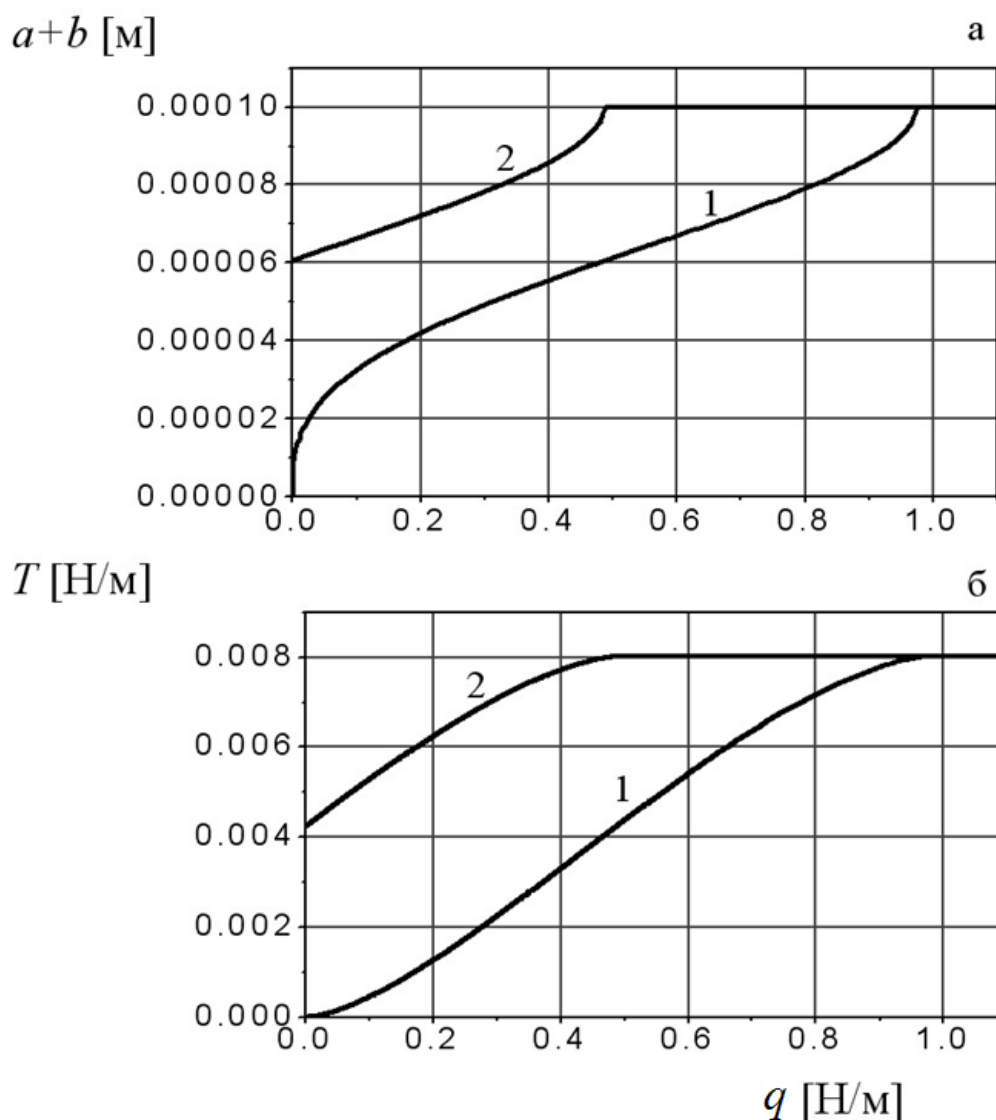


Рис. 5.15. Зависимость размера области фактического контакта (а) и деформационной составляющей силы трения (б) от нагрузки.

На фиг. 5.15 показаны зависимости ширины области фактического контакта $a+b$ (фиг.5.15, а) и деформационной составляющей силы трения T (фиг.5.15, б) от нагрузки q при отсутствии адгезии (кривые 1) и при наличии адгезии (кривые 2). Расчеты проведены для вязкоупругого материала, механические свойства которого задаются следующими значениями введенных характеристик: $E^* / H = 2 \times 10^6$ Па/м, $T_\sigma = 0.003$ с,

$T_\varepsilon / T_\sigma = 10^{-3}$, скорости скольжения $V = 0.1 \text{ м/с}$, параметрах волнистости $l = 0.1 \text{ мм}$, $f_0 = 0.01 \text{ мм}$ и параметрах адгезии $w_a = 0.01 \text{ Н/м}$, $p_0 = 5 \times 10^3 \text{ Па}$.

При увеличении нагрузки размер области контакта и сила трения возрастают пока не достигают насыщения, при этом происходит переход от дискретного к полному контакту. Результаты расчетов показывают, что поведение контактных характеристик количественно и качественно различаются при трении в режимах дискретного и полного контакта. Например, коэффициент трения μ возрастает с увеличением нагрузки P при дискретном контакте, и убывает – при полном контакте. Важным свойством дискретного контакта по сравнению с полным является также то, что в этом случае существенную роль играют адгезионные силы, действующие вне областей контакта.

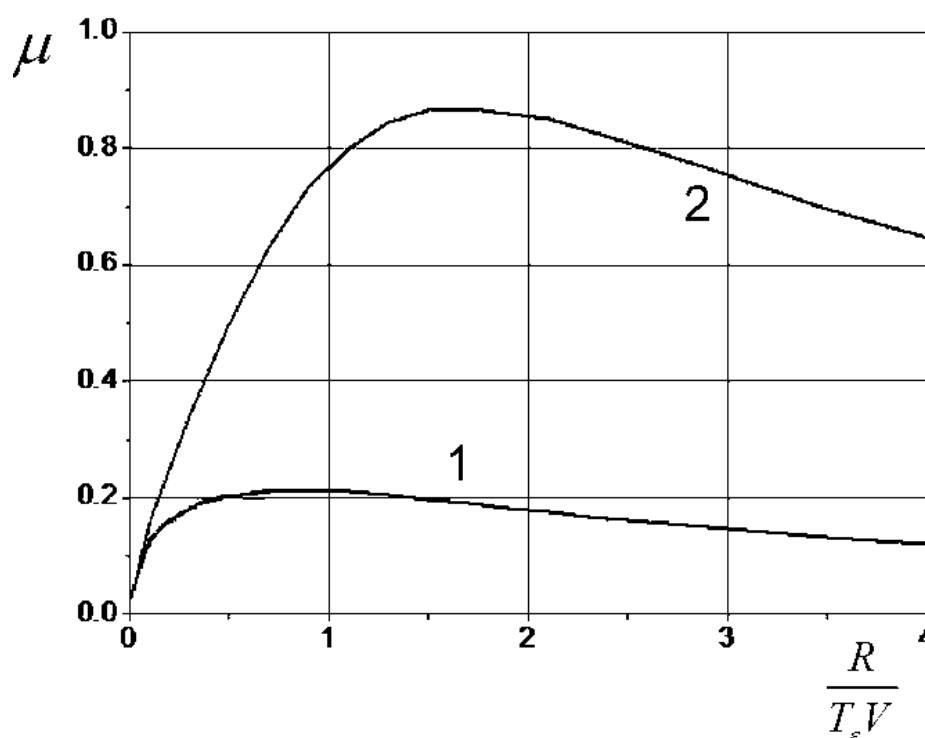


Рис. 5.16. Зависимость коэффициента трения от параметра скорости скольжения волнистого индентора.

Сравнение кривых 1 и 2 на фиг. 5.15 показывает, что учет адгезионного взаимодействия приводит к существенному увеличению

фактической площади контакта и деформационной составляющей силы трения в случае дискретного контакта поверхностей. Кроме того, учет адгезии приводит к появлению отрицательных давлений в области контакта (фиг. 5.14,б). При полном контакте адгезия не оказывает влияния на площадь контакта и силу трения, однако может влиять на контактные давления. Результаты также показывают, что при наличии адгезии переход от дискретного к полному контакту происходит при меньших нагрузках, чем при отсутствии адгезии.

В результате релаксационных свойств основания коэффициент трения немонотонно зависит от скорости. На фиг. 5.16 представлены зависимости коэффициента трения $\mu = T / q$ от параметра, зависящего от скорости V , для скольжения одного параболического выступа радиуса R . Кривая 1 соответствует случаю отсутствия адгезии, кривая 2 – учету адгезии. Результаты получены при следующих значениях механических параметров материала $E^* / H = 10^9$ Па/м, $T_\sigma = 0.001$ с, $T_\varepsilon / T_\sigma = 1000$, и параметров адгезии $w_a = 0.05$ Н/м, $p_0 = 5 \times 10^5$ Па. Показано, что при наличии адгезии сохраняется немонотонный характер зависимости коэффициента трения от скорости и стремление его к нулю при больших и малых скоростях скольжения, при этом учет адгезии приводит к сдвигу максимума коэффициента трения в сторону меньших скоростей.

5.3.4. Влияние адгезии на силу трения на разных масштабных уровнях

Большое влияние на силу трения оказывают характеристики шероховатой поверхности. Для одной и той же поверхности на разных масштабных уровнях осредненные параметры неровностей отличаются высотой, формой вершины неровности и характерным расстоянием между ними. Полученные выше результаты могут быть использованы для анализа контактных характеристик и вида взаимодействия (насыщенный или дискретный контакт) на разных масштабных уровнях, характеризуемых в

рамках наших модельных рассмотрений разными величинами высоты и периода волнистой поверхности.

Таблица

		$V = 0.1$ м/с	$V = 0.5$ м/с	$V = 1$ м/с
масштаб 1: $l = 6.316$ мм $f_0 = 0.1863$ мм	без адгезии	$\tau = 86$ Па НК	$\tau = 328$ Па ДК	$\tau = 326$ Па ДК
	адгезия	$\tau = 86$ Па НК	$\tau = 426$ Па НК	$\tau = 846$ Па НК
масштаб 2: $l = 1.093$ мм $f_0 = 0.0538$ мм	без адгезии	$\tau = 236$ Па НК	$\tau = 494$ Па ДК	$\tau = 320$ Па ДК
	адгезия	$\tau = 236$ Па НК	$\tau = 1098$ Па НК	$\tau = 1784$ Па НК
масштаб 3: $l = 0.0834$ мм $f_0 = 0.0087$ мм	без адгезии	$\tau = 657$ Па ДК	$\tau = 228$ Па ДК	$\tau = 120$ Па ДК
	адгезия	$\tau = 659$ Па НК	$\tau = 336$ Па НК	$\tau = 180$ Па НК
масштаб 4: $l = 0.0165$ мм $f_0 = 0.0023$ мм	без адгезии	$\tau = 115$ Па НК	$\tau = 25$ Па НК	$\tau = 12$ Па НК
	адгезия	$\tau = 115$ Па НК	$\tau = 25$ Па НК	$\tau = 12$ Па НК

В таблице приведены расчеты средних по периоду касательных напряжений, возникающих при разных геометрических параметрах волнистой поверхности. Параметры волнистости взяты на основании обработки профилограмм поверхности дорожного покрытия. Расчеты проводились с учетом и без учета адгезионного взаимодействия между поверхностями. Для простоты анализа принято, что номинальные давления $p = 5000$ Па на каждом масштабном уровне одинаковы. Для остальных параметров были взяты следующие значения: $E^* / H = 2 \times 10^6$ Па/м, $T_\sigma = 10^{-4}$ с, $T_\varepsilon / T_\sigma = 10^3$, $w_a = 0.01$ Н/м, $p_0 = 5.5 \times 10^5$ Па. Обозначение

НК соответствует случаю насыщенного контакта, ДК – дискретного контакта.

Расчеты проводились при трех различных скоростях скольжения. Результаты расчетов показывают, что для разных масштабных уровней и одинаковых значениях всех остальных параметров взаимодействия и свойств материала сила трения различна. С ростом скорости сила трения либо возрастает (масштаб 1 и 2 с учетом адгезии), либо убывает (масштаб 3 и 4). Адгезия приводит к более быстрому насыщению площади фактического контакта по сравнению со случаем отсутствия адгезии. На масштабе 4, характеризуемом самой малой высотой неровностей, наступает насыщение как в отсутствие, так и при наличии адгезии, величина силы трения при одинаковых скоростях скольжения одинакова. Вклад адгезии в силу трения на разных масштабных уровнях зависит от параметров волнистости и от скорости скольжения.

5.4. Скольжение индентора с трехмерной волнистостью по поверхности вязкоупругого основания при наличии адгезии

5.4.1. Постановка задачи для индентора с трехмерной волнистостью

Рассматривается жесткий волнистый индентор, скользящий с постоянной скоростью по поверхности вязкоупругого слоя, лежащего на жестком основании. На рис. 5.17 показана схема контакта, где 1 – жесткий волнистый индентор, 2 – вязкоупругий слой, 3 – жесткое основание. Волнистый индентор 1 состоит из периодически расположенных одинаковых выступов, форма его поверхности описывается функцией

$$f(x, y) = f_0 - \frac{f_0}{4} \left(\cos \frac{2\pi x}{l} + 1 \right) \left(\cos \frac{2\pi y}{l} + 1 \right) \quad (5.60)$$

где f_0 и l – высота выступов и расстояние между ними, соответственно.

Индентор скользит со скоростью V вдоль оси x и прижимается к вязкоупругому слою внешней силой P , действующей на каждый выступ и направленной вдоль оси z .

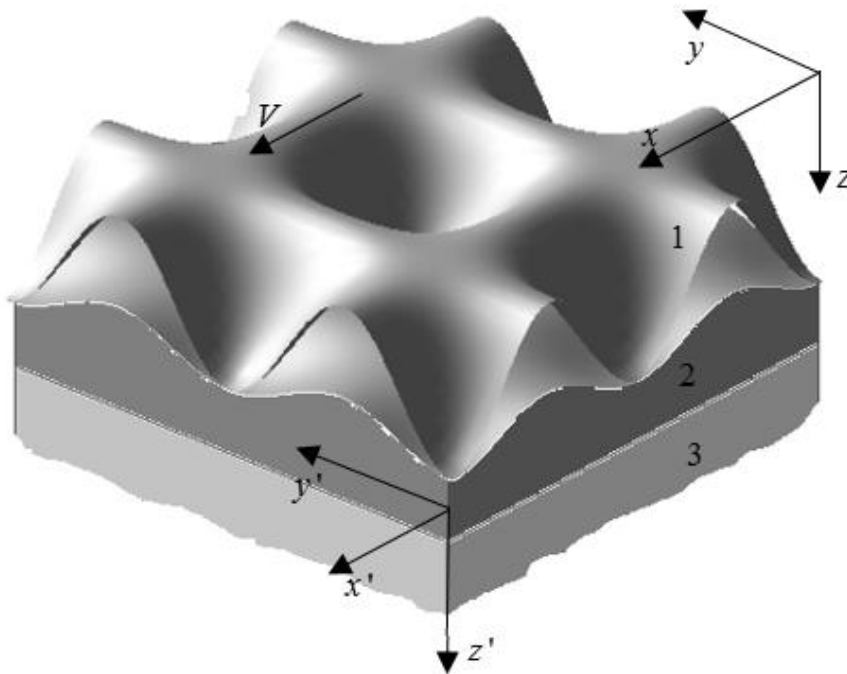


Рис. 5.17. Схема скольжения индентора с трехмерной волнистостью по вязкоупругому основанию.

Механические свойства вязкоупругого слоя описываются линейной одномерной моделью (5.30), которая в движущейся вместе с индентором системе координат приобретает вид (5.32)

В зазоре между взаимодействующими поверхностями действует сила адгезии, описываемая моделью Можи–Дагдейла (1.10)-(1.11).

В силу периодической формы поверхности контактную задачу можно рассматривать в ячейке периодичности $x \in (-l/2, l/2)$, $y \in (-l/2, l/2)$, которая содержит один выступ (рис.5.10). На границе этой области должны удовлетворяться условия периодичности для давления $p(x, y) = p(x + l, y)$, $p(x, y) = p(x, y + l)$ и перемещения $u(x, y) = u(x + l, y)$, $u(x, y) = u(x, y + l)$.

Поверхность вязкоупругого слоя $z=0$ внутри ячейки периодичности $x \in (-l/2, l/2)$, $y \in (-l/2, l/2)$ можно разделить на следующие области. Во-первых, это область контакта Ω^c , в которой выступ волнистого индентора непосредственно соприкасается с поверхностью вязкоупругого слоя. Во-вторых, это область адгезионного взаимодействия Ω^a , в которой поверхности не соприкасаются, но взаимодействуют друг с другом посредством силы адгезионного притяжения (рис.5.10). Оставшаяся поверхность вязкоупругого слоя свободна от взаимодействия.

В подвижной системе координат (x, y, z) , граничные условия для напряжений и перемещений в области $x \in (-l/2, l/2)$, $y \in (-l/2, l/2)$ при $z=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(x, y) + d, & (x, y) \in \Omega^c \\ p(x, y) &= -p_0, & (x, y) \in \Omega^a \\ p(x, y) &= 0, & (x, y) \notin \Omega^c \cup \Omega^a \end{aligned} \quad (5.61)$$

Выполняется также условие равновесия для нагрузки q , действующей на один выступ

$$q = \iint_{\Omega^c \cup \Omega^a} p(x, y) dx dy \quad (5.62)$$

5.4.2. Применение метода полос

Задача решается методом полос, аналогично задаче о скольжении сферического выступа в п. 5.2.2. Область $x \in (-l/2, l/2)$, $y \in (-l/2, l/2)$ делится на $2N$ полос одинаковой толщины Δ , параллельных оси x (рис. 5.10). Нормальное перемещение j -й полосы индентора равно:

$$d_j = \frac{f_0}{2} \left(\cos \frac{2\pi y j}{l} - 1 \right) + d \quad (5.63)$$

где $y_j = j\Delta$. Максимальное внедрение d имеет место в центральной полосе $j = 0$. Форма индентора в каждой полосе имеет вид

$$f(x, y_j) = \frac{f_0 j}{2} \left(\cos \frac{2\pi x}{l} - 1 \right), \quad f_{0j} = \frac{f_0}{2} \left(\cos \frac{2\pi y_j}{l} + 1 \right) \quad (5.64)$$

Задача решается в каждой полосе отдельно. Для j -той полосы, условия для перемещения $u(x, y_j)$ и давления $p(x, y_j)$ следуют из (5.61):

$$\begin{aligned} u(x, y_j) &= f(x, y_j) + d_j, & x \in \Omega_j^c \\ p(x, y_j) &= -p_0, & x \in \Omega_j^a \\ p(x, y_j) &= 0, & x \notin \Omega_j^c \cup \Omega_j^a \end{aligned} \quad (5.65)$$

где Ω_j^c – область контакта в j -й полосе, а Ω_j^a – область адгезионного взаимодействия в j -й полосе. После определения контактного давления $p(x, y_j)$ для каждой полосы, нормальная нагрузка, действующая на каждый выступ (5.62), определяется суммированием:

$$q = 2 \sum_{j=1}^N q_j, \quad q_j = \Delta \int_{-l/2}^{l/2} p(x, y_j) dx \quad (5.66)$$

Для определения тангенциальной нагрузки, действующей на индентор со стороны вязкоупругого слоя, используется соотношение, аналогичное соотношению (5.51) для случая двумерной волнистости:

$$\tau(x, y_j) = p(x, y_j) \sin \left[\arctg \left(f'(x, y_j) \right) \right] \approx p(x, y_j) f'(x, y_j) \quad (5.67)$$

С помощью этого соотношения тангенциальная сила определяется как

$$T = 2 \sum_{j=1}^N T_j, \quad T_j = \Delta \int_{-l/2}^{l/2} \tau(x, y_j) dx \quad (5.68)$$

Соответственно, коэффициент трения определяется соотношением $\mu = T / P$.

Таким образом, задача сводится к плоской контактной задаче для определения в каждой полосе контактного давления $p(x, y_j)$ в области контакта $x \in \Omega_j$ и перемещения $u(x, y_j)$ в области адгезии Ω^a , после чего нормальная нагрузка и сила трения определяются соотношениями (5.66)-(5.68). Для точной формулировки граничных условий в каждой полосе необходимо рассмотреть различные режимы взаимодействия.

Рассмотрены различные возможные режима взаимодействия: насыщенный контакт, дискретный контакт с насыщенным адгезионным взаимодействием, дискретный контакт с областями адгезионного взаимодействия, адгезионное взаимодействие без контакта. В j -й полосе реализуется один из этих режимов, в зависимости от сближения поверхностей d_j в этой полосе. Решение плоской контактной задачи для каждого режима приведено в п. 5.3.2., а также приведены условия, при которых эти режимы реализуются. По этим соотношениям производится расчет контактного давления в каждой полосе $p(x, y_j)$ и находятся границы зон контакта и адгезии a_j, b_j, a_{1j} , и b_{1j} , при условии, что сближение поверхностей в j -й полосе d_j задано. Если полученные уравнения не удастся решить относительно a_j, b_j, a_{1j} , и b_{1j} так, чтобы найденные корни были положительными и не превышали $l/2$, то можно предположить, что поверхности индентора и вязкоупругого слоя в этой полосе не соприкасаются. В этом случае реализуется один из следующих режимов взаимодействия: адгезионное притяжение по всей поверхности, адгезионное притяжение по отдельным областям либо отсутствие взаимодействия между поверхностями. Решения для этих режимов получены аналогично решениям для описанных в п.5.3.2 режимов взаимодействия.

5.4.3. Анализ контактных характеристик

Для расчетов использовалась параметризация со следующими безразмерными величинами:

- контактное давление pl / w_a ,
- координаты $x/l, y/l$,
- нормальное сближение $d\sqrt{k w_a}$ индентора и вязкоупругого слоя, где $k = (1 - \nu^2)H / E$,
- нормальная нагрузка на один выступ $q / (l w_a)$,
- сила трения на один выступ $T / (l w_a)$.

Полученное решение зависит от следующих безразмерных параметров:

- параметр вязкости основания T_ε / T_σ ,
- параметр адгезии $\lambda_w = p_0 (k / w_a)^{1/2}$ - аналог параметра адгезии λ для модели одномерного основания Винклера (см. Главу 4, п. 4.1.3),
- параметр, зависящий от скорости и времени запаздывания материала вязкоупругого основания скорости $l / (VT_\varepsilon)$,
- параметр волнистости f_0 / l - отношение высоты выступов к расстоянию между ними.

На рис. 5.18 показаны распределения контактного давления pl / w_a на половине ячейки периодичности $x/l \in [-0.5, 0.5]$, $y/l \in [-0.5, 0]$ при $T_\varepsilon / T_\sigma = 10$, $\lambda_w = 0.5$, $l / (VT_\varepsilon) = 1.5$, $f_0 / l = 0.3$. Результаты, представленные на рис. 5.18, а, получены при величине безразмерной нормальной нагрузки, действующей на выступ, равной $q / (l w_a) = -1$. При отрицательной нагрузке, которая тянет индентор вверх, контакт поверхностей имеет место вследствие действия адгезионных сил.

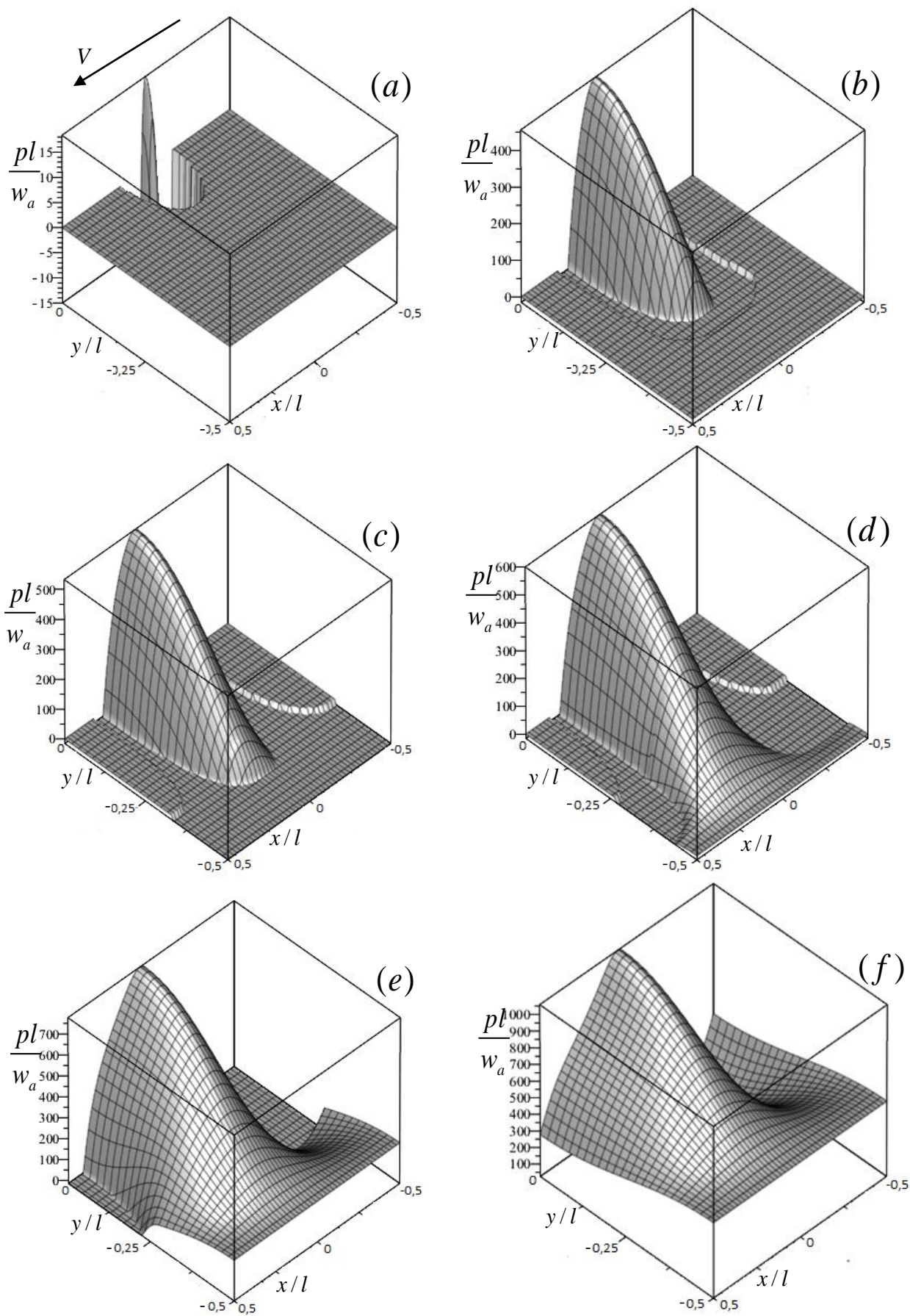


Рис. 5.18. Распределение контактного давления на половине ячейки периодичности волнистого индентора для разных нормальных нагрузок.

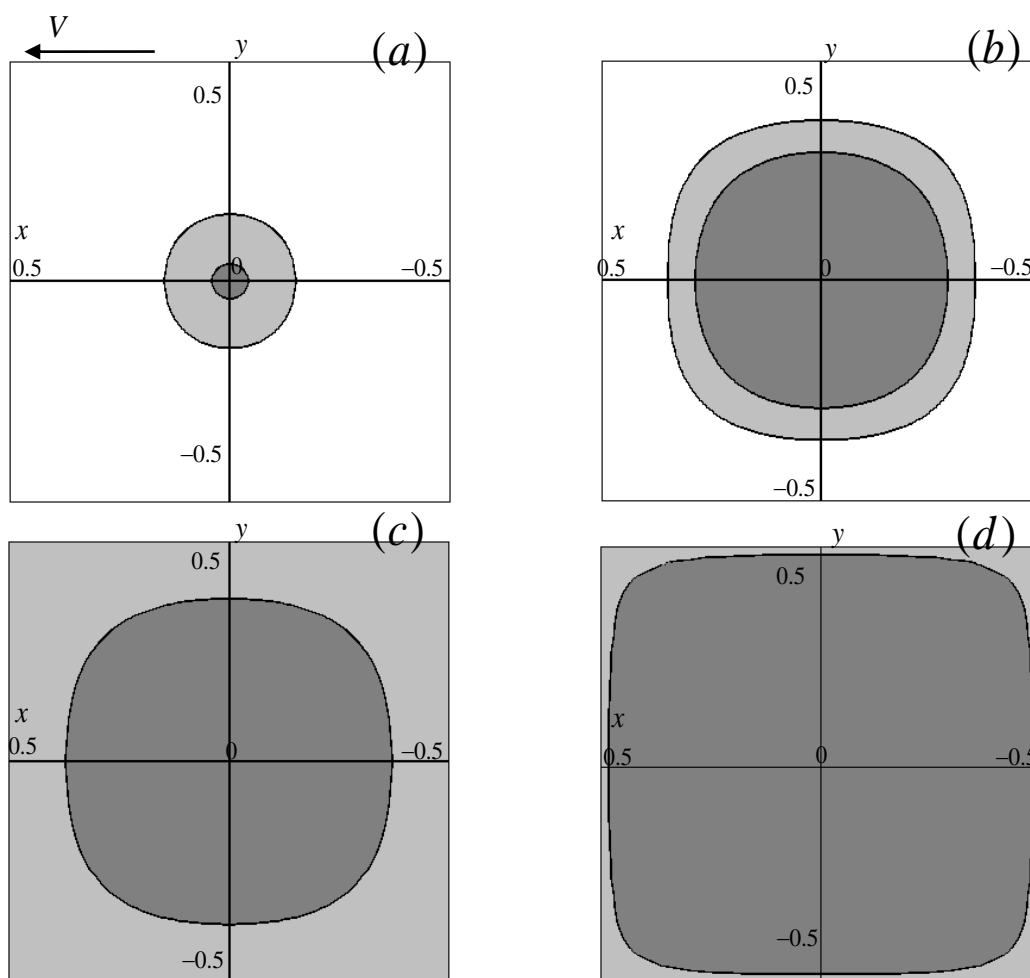


Рис. 5.19. Форма областей контакта и адгезии для случая упругого основания

Вокруг каждой области контакта существует область адгезионного взаимодействия, в которой действует отрицательное давление. Таким образом, учет адгезии приводит к увеличению фактической площади контакта, что особенно выражено для малых и отрицательных нагрузок, и к появлению отрицательных давлений в области контакта.

Результаты на рис. 5.18, *b* получены при положительной нагрузке $q/(lw_a) = 32$. В этом случае область контакта увеличилась по сравнению с предыдущим случаем, контактные давления возросли, область адгезионного взаимодействия также заметно расширилась. Дальнейшее возрастание нормальной нагрузки показано на следующих графиках: соответствует $q/(lw_a) = 51$ (рис. 5.18, *c*), 87 (рис. 5.18, *d*), 234 (рис. 5.18, *e*), 506 (рис. 5.18, *f*).

Результаты показывают, что с увеличением нагрузки области адгезионного взаимодействия вокруг отдельных выступов сливаются друг с другом, затем сливаются области контакта. Случай, изображенный на рис. 5.18, *f* соответствует насыщенному контакту по всей поверхности. При дальнейшем увеличении нагрузки контакт остается насыщенным. Адгезионные давления играют значительную роль при малой внешней нагрузке; с увеличением нагрузки силы адгезии становятся малы по сравнению с контактным давлением. Несовершенная упругость слоя приводит к тому, что распределения давления становятся несимметричными относительно оси симметрии выступа $x = 0$, при этом области контакта и адгезионного взаимодействия также смещаются относительно этой оси симметрии.

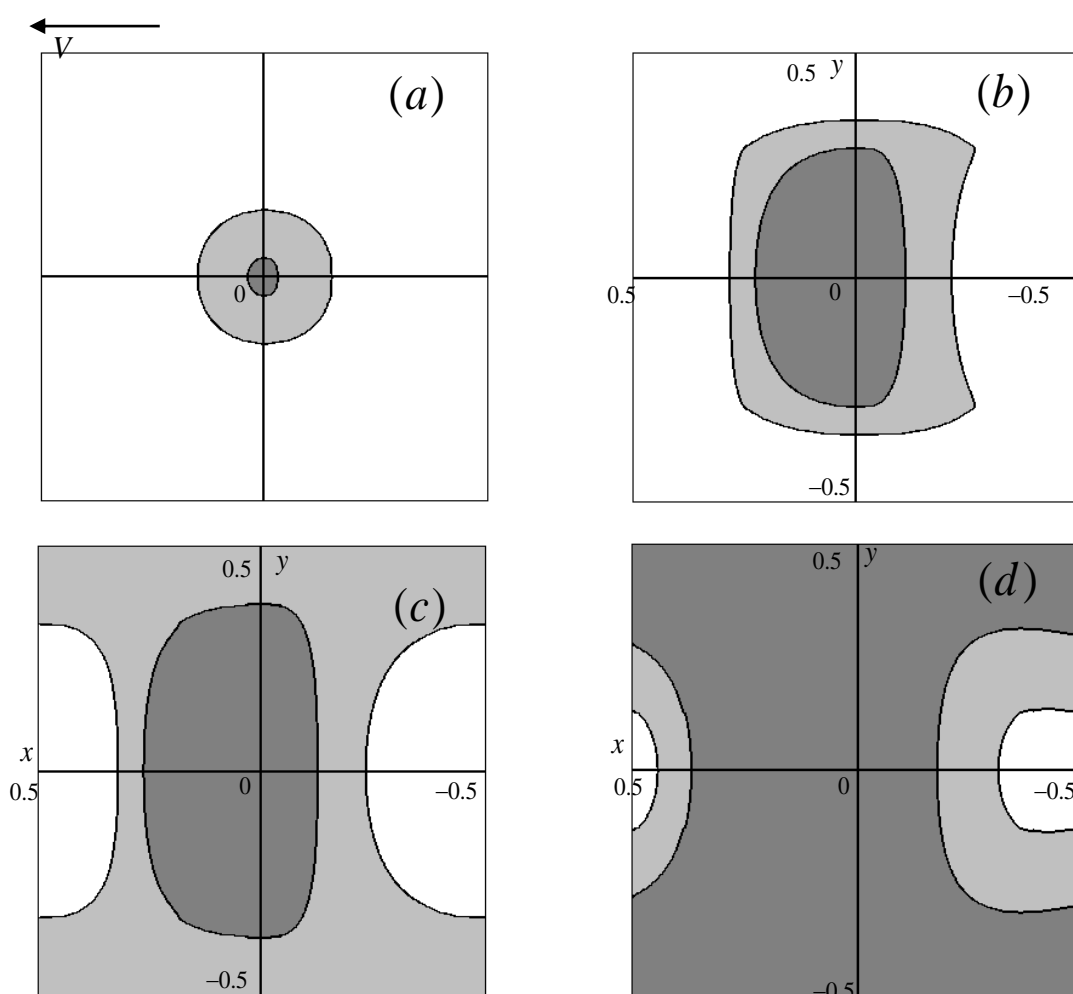


Рис. 5.20. Форма областей контакта и адгезии для случая $T_\varepsilon / T_\sigma = 10$.

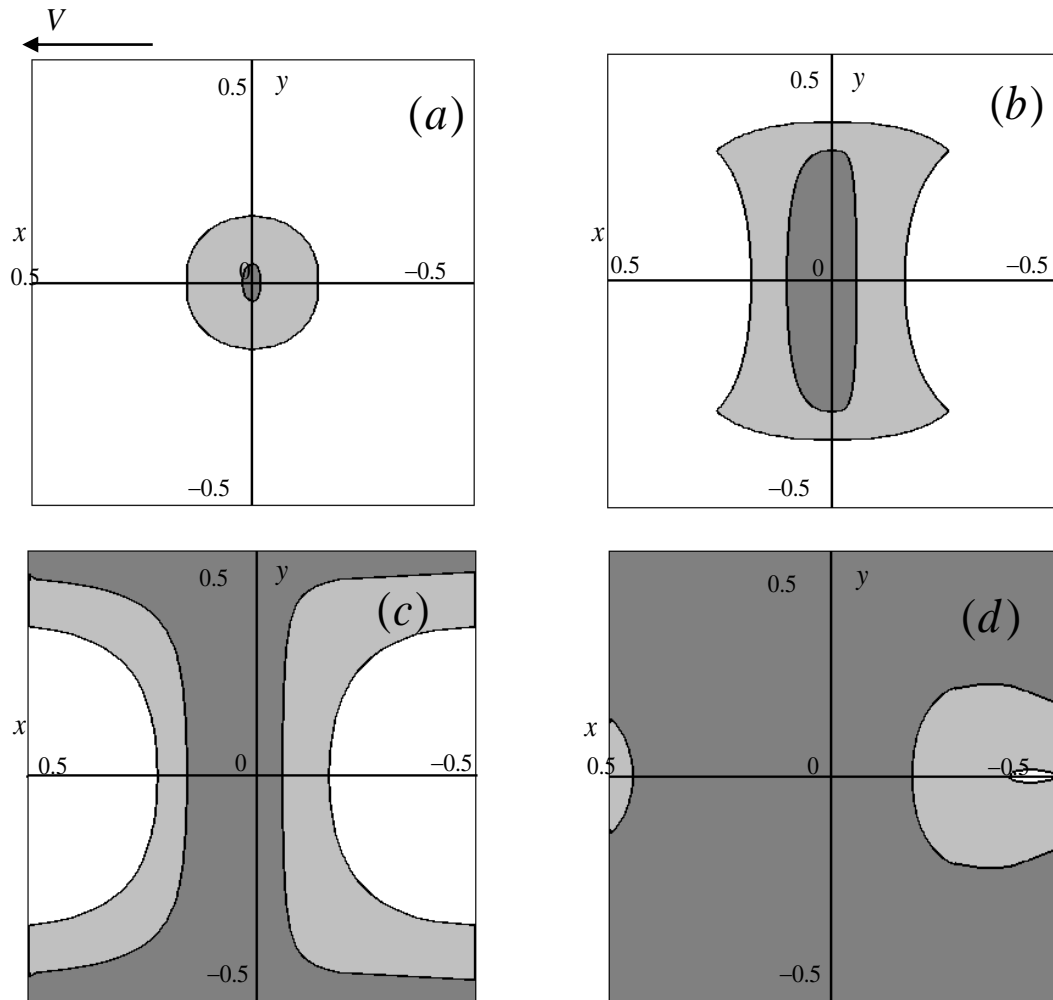


Рис. 5.21. Форма областей контакта и адгезии для случая $T_\varepsilon / T_\sigma = 100$.

На рис. 5.19, 5.20 и 5.21 показано, как изменяется форма областей контакта (темные области) и адгезионного взаимодействия (светлые области) с увеличением нагрузки. На этих фигурах показана ячейка периодичности $x/l \in [-0.5, 0.5]$, $y/l \in [-0.5, 0.5]$. Результаты, представленные на рис. 5.19, получены при параметре вязкости $T_\varepsilon / T_\sigma = 1$, что соответствует случаю упругой полосы. Остальные параметры имеют следующие значения: $\lambda_w = 0.5$, $l / (VT_\varepsilon) = 1.5$, $f_0 / l = 0.3$. Случаи a , b , c , d соответствуют нагрузкам $q / (lw_a) = -1, 15, 27, 48$. Для упругой полосы решение получается симметричным, и переход к насыщенному контакту происходит путем слияния областей адгезионного взаимодействия, а потом и областей контакта

симметрично относительно осей x и y . Результаты, представленные на рис. 5.20, получены при $T_\varepsilon / T_\sigma = 10$ и величинах нагрузки $q / (lw_a) = -1, 32, 55, 182$ (рис. 5.20, a, b, c, d , соответственно). Остальные параметры имеют те же значения, что и на рис. 5.19.

Вязкость материала приводит к тому, что области контакта и адгезионного взаимодействия становятся несимметричными относительно оси $x = 0$, смещаясь вперед по направлению движения. Кроме того, эти области становятся вытянутыми вдоль оси y , и их слияние при возрастании нагрузки происходит сначала вдоль оси y , и только потом вдоль оси x . На рис. 5.21 показаны результаты для еще большего значения вязкости $T_\varepsilon / T_\sigma = 100$ и $q / (lw_a) = -1, 54, 237, 3334$ (рис. 5.21, a, b, c, d). Остальные параметры имеют те же значения, что и на рис. 5.19 и 5.20. В этом случае области контакта становятся еще более вытянутыми вдоль оси y , при этом для достижения насыщенного контакта требуется значительно более высокая нагрузка.

Рис.5.22 иллюстрирует зависимости безразмерной нормальной силы $q / (lw_a)$ (a) и тангенциальной силы $T / (lw_a)$ (b) от внедрения волнистого индентора $d\sqrt{kw_a}$ в вязкоупругий слой при $T_\varepsilon / T_\sigma = 10$, $l / (VT_\varepsilon) = 1.5$, $f_0 / l = 0.3$ и различных значениях параметра адгезии $\lambda_w = 0$ (кривые 1), 5 (кривые 2), 10 (кривые 3), 15 (кривые 4) и 20 (кривые 5). Линии 6 построены для случая $\lambda_w \rightarrow \infty$. Нагрузку, при которой зависимость $q / (lw_a)$ от $d\sqrt{kw_a}$ достигает минимума, можно назвать аналогом силы отрыва для случая скольжения вязкоупругих тел при наличии адгезии – при достижении этой нагрузки происходит скачкообразный отрыв поверхностей друг от друга. Абсолютная величина силы отрыва тем больше, чем больше параметр адгезии λ_w .

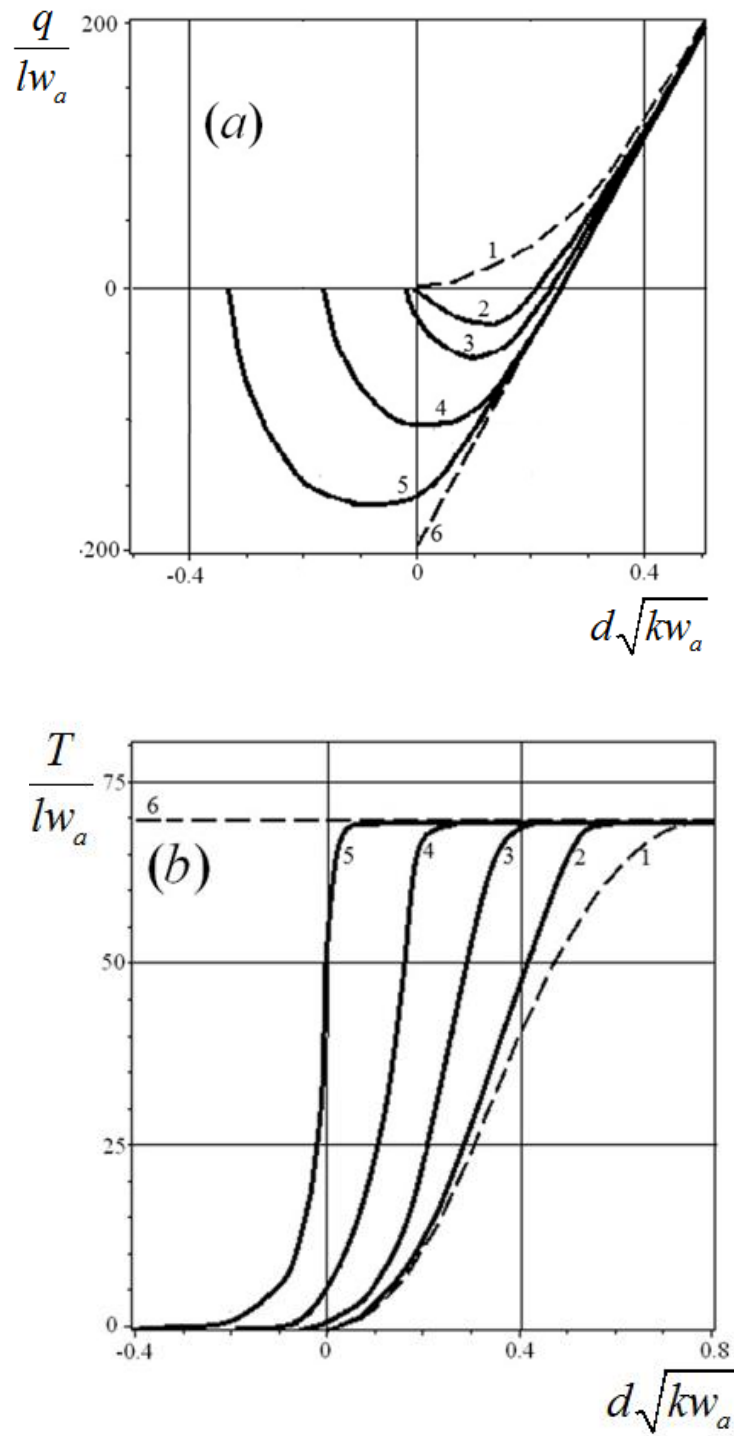


Рис. 5.22. Зависимость нормальной и тангенциальной сил, действующих на один выступ волнистого индетнора, от его внедрения в вязкоупругое основание.

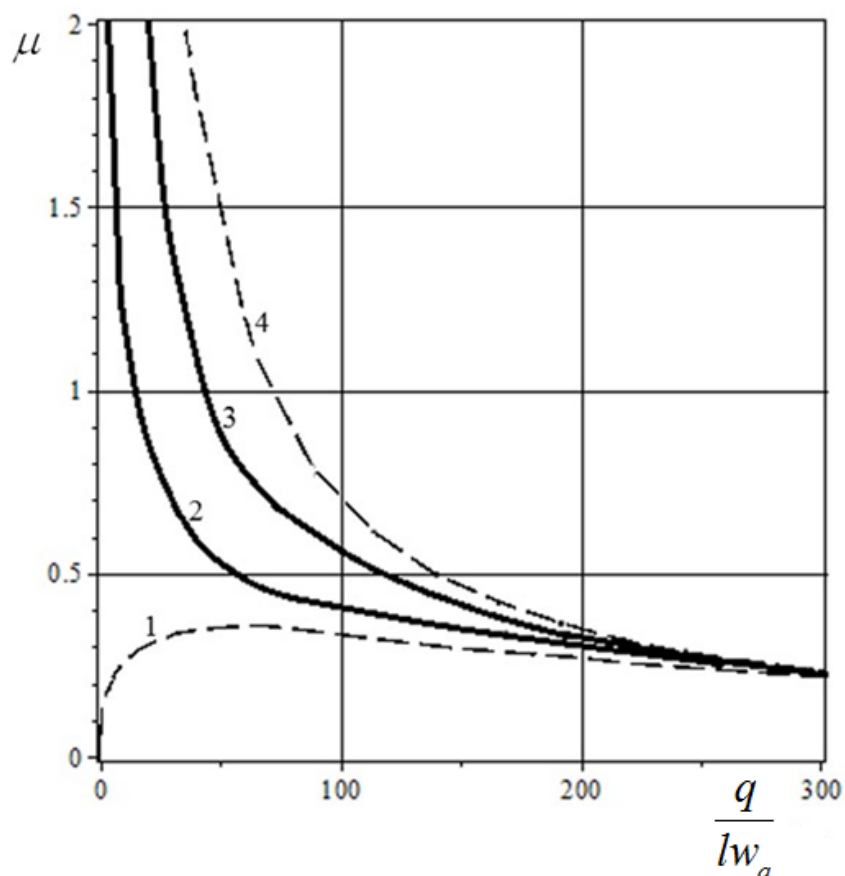


Рис. 5.23. Зависимость коэффициента трения от нормальной нагрузки, действующей на один выступ волнистого индентора.

Тангенциальная сила, действующая на индентор, или сила трения, также отлична от нуля при отрицательных нагрузках и внедрениях, при этом сила трения всегда положительна, т.е. действует в направлении, противоположном направлению скольжения индентора. Результаты, представленные на фиг. 5.21, б, показывают, что с увеличением внедрения индентора сила трения растет, пока не достигнет предельного значения, соответствующего насыщенному контакту поверхностей. Чем больше параметр адгезии λ_w , тем при меньших внедрениях происходит переход от дискретного контакта к насыщенному.

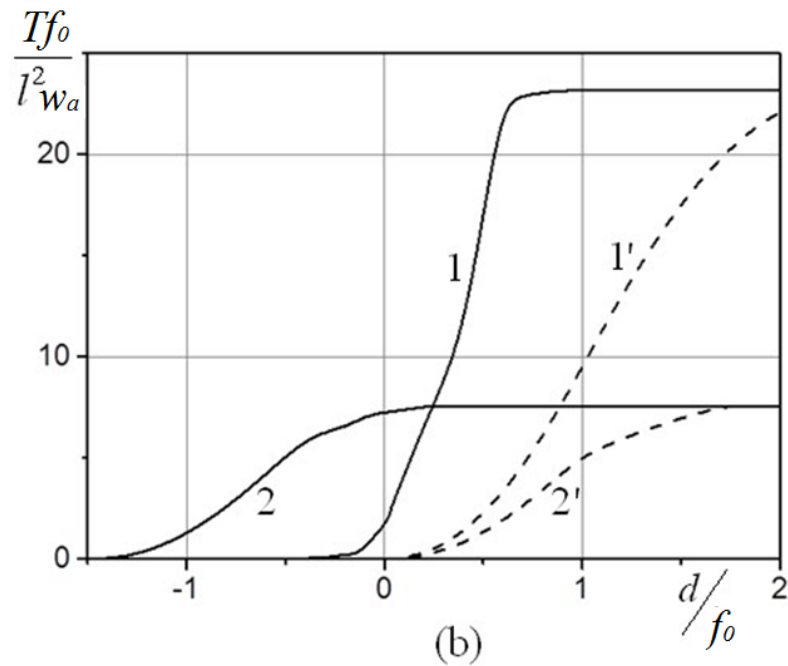
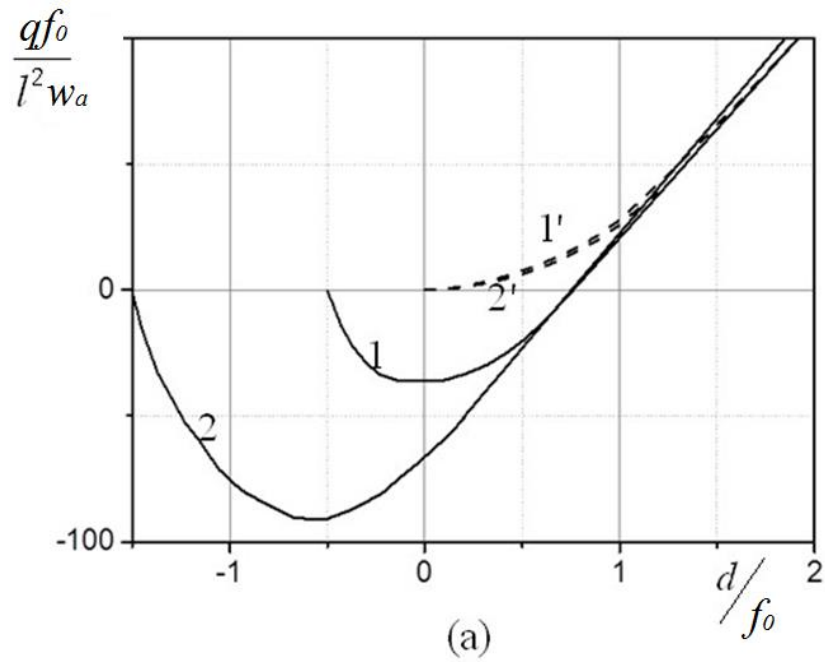


Рис. 5.24. Зависимость номинальных нормального и тангенциального напряжений от внедрения индентора в вязкоупругий слой.

На рис. 5.23 приведены зависимости коэффициента трения $\mu = T/P$ от внешней нормальной нагрузки, при этом коэффициент трения определялся только в области положительных нагрузок, как это принято в трибологии. Кривая 1 соответствует параметру адгезии $\lambda_w = 0$, кривая 2 – $\lambda_w = 5$, кривая 3 – 10, кривая 4 построена для случая $\lambda_w \rightarrow \infty$. В случае, когда адгезия не

влияет на контактные характеристики (кривая 1), коэффициент трения равен нулю при нулевой нагрузке, с увеличением нагрузки он возрастает, достигает максимума, а потом уменьшается, что связано с вязкими свойствами материала и эффектом насыщения фактической площади контакта. Учет адгезии приводит к тому, что сила трения всегда отлична от нуля при нулевой внешней нагрузке, вследствие чего коэффициент трения резко возрастает при малых нагрузках.

Рис. 5.24 иллюстрирует влияние плотности контакта (расстояния между выступами волнистой поверхности индентора). Номинальное давление (q/l^2) и тангенциальное напряжение рассчитаны для двух величин безразмерного расстояния между выступами волнистой поверхности — $l/f_0 = 3$ (кривые 1 и 1') и $l/f_0 = 6$ (кривые 2 и 2'). Графики, показанные сплошными линиями 1 и 2, рассчитаны для следующих значений параметров: $T_\varepsilon/T_\sigma = 10$, $l/(VT_\varepsilon) = 0.4$, $\lambda_w = 15$. Штриховые линии 1' и 2' соответствуют тем же самым значениям параметров, но без учета адгезии: $\lambda_w = 0$.

Результаты показывают, что чем больше расстояние между выступами, тем выше отрицательная нагрузка, которую выдерживает контакт. Величина тангенциального напряжения, соответствующая насыщенному контакту, тем выше, чем меньше расстояние между выступами. Таким образом, уменьшение расстояния между выступами (увеличение плотности контакта) приводит к уменьшению влияния адгезии, но к более высоким гистерезисным потерям. Поэтому при отрицательных и малых величинах внедрения, сила трения выше для поверхностей с большим расстоянием между выступами, а при относительно глубоких внедрениях сила трения больше для поверхностей с меньшим расстоянием между выступами.

5.4.4. Сравнение результатов расчета для случаев одного выступа и волнистой поверхности

Для более детального анализа влияния множественности контакта, которая имеет место при скольжении волнистой поверхности, сравним решение задачи для волнистой поверхности с результатами для одного сферического выступа, рассчитанными по соотношениям, представленным в п. 5.2.

При расчетах радиус отдельного выступа R считался равным радиусу закругления вершины выступов волнистой поверхности $R = l^2 / (2\pi^2 f_0)$.

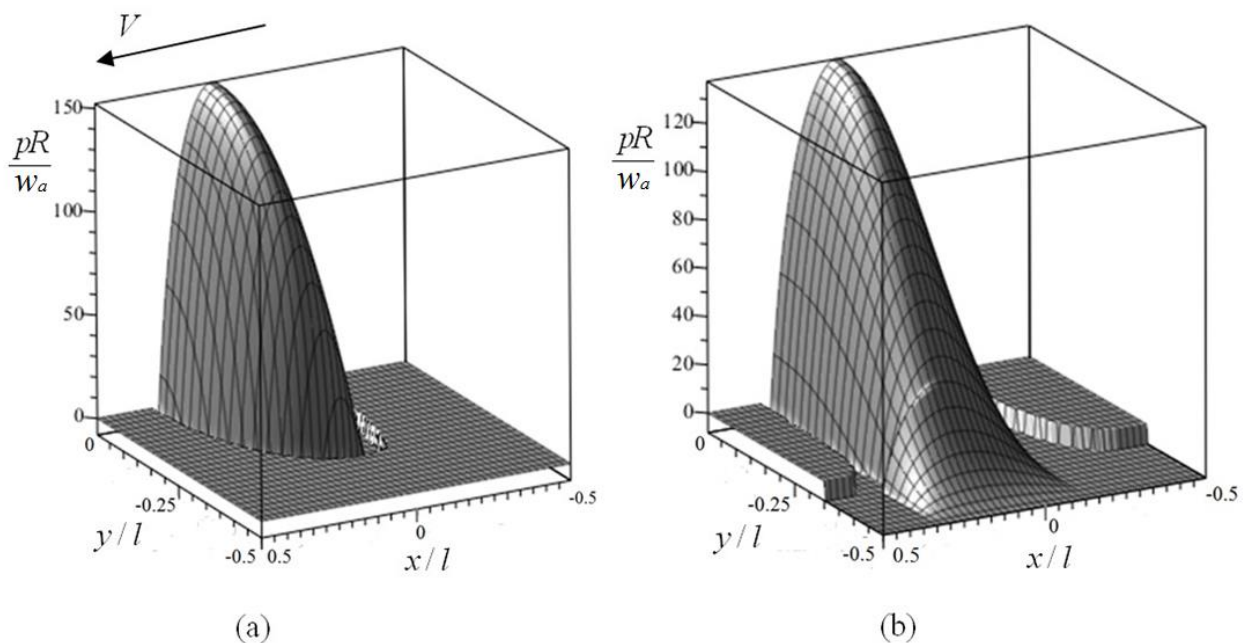


Рис. 5.25. Распределения контактного давления для отдельного выступа (а) и для выступа волнистого индентора (б).

На рис. 5.25 приведены распределения безразмерного контактного давления $p(x, y)R/w_a$ для случая отдельного выступа (а) и для выступа волнистого индентора (б), при этом к выступам приложена одна и та же внешняя нормальная нагрузка $q/(Rw_a) = 400$. График для волнистой поверхности (б) представлен на половине ячейки периодичности

$\frac{x}{l} \in [-0,5; 0,5]$, $\frac{y}{l} \in [-0,5; 0]$, график для отдельного выступа (а) для удобства сравнения приведен на той же области определения. При расчете использованы следующие значения параметров: $T_\varepsilon / T_\sigma = 10$, $\lambda_w = 1$, $l / (VT_\varepsilon) = 0.4$, $l / f_0 = 4$. Результаты показывают, что в случае волнистой поверхности индентора максимальное контактное давление ниже, а области контакта и адгезии шире, чем для случая отдельного выступа.

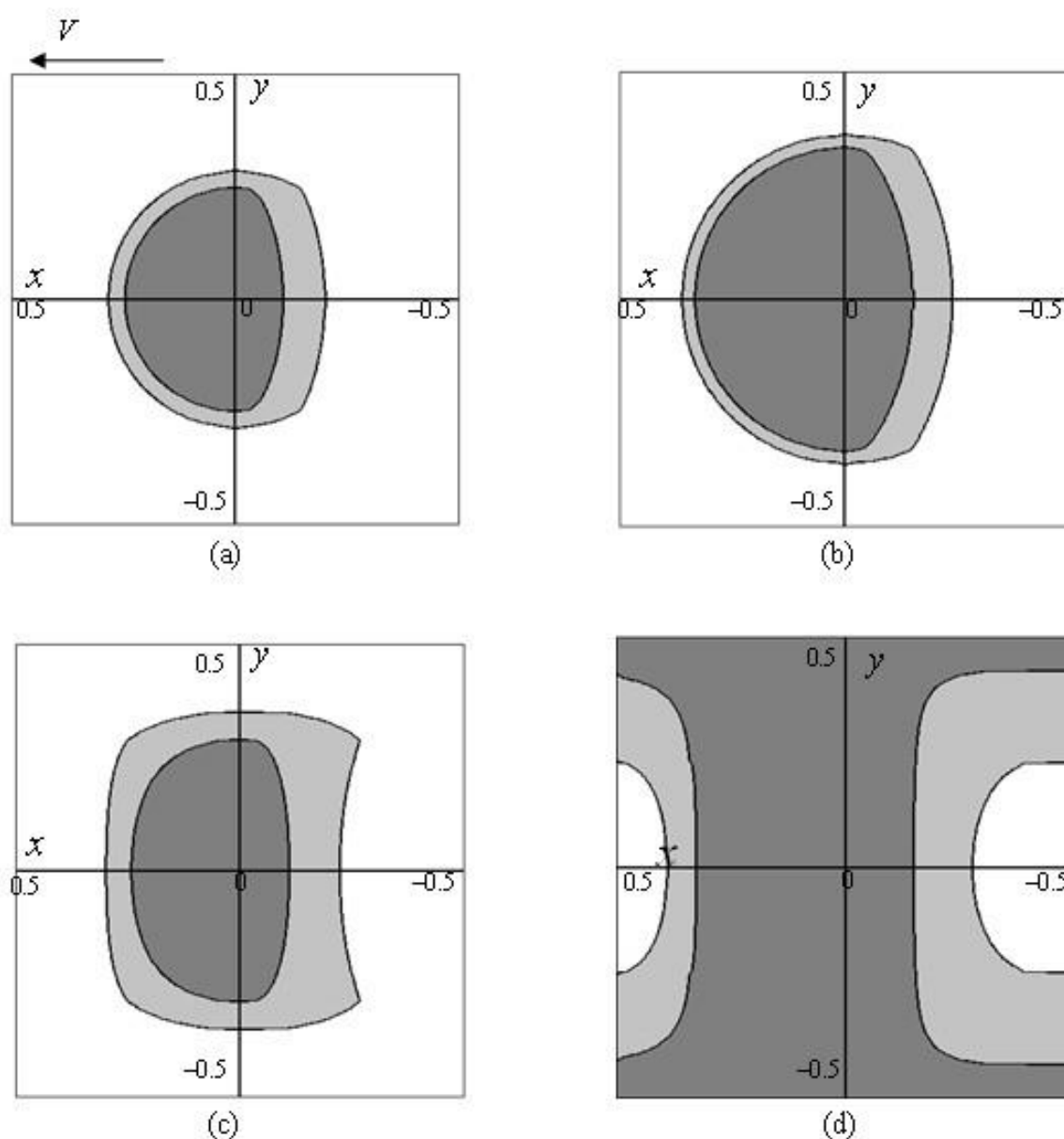


Рис. 5.26. Области контакта и адгезии при различной нагрузке для отдельного выступа (а), (b) и для волнистого индентора (с), (d).

Расчеты показывают, что при относительно малых нагрузках, когда только вершины выступов волнистого индентора находятся в контакте с вязкоупругим основанием, распределение контактных давлений в окрестности вершины каждого выступа волнистой поверхности аналогично такому распределению для изолированного выступа. По мере того, как нагрузка возрастает, и контакт волнистой поверхности с вязкоупругим основанием становится ближе к насыщенному, существенно возрастает и отличие распределения давления от соответствующих результатов, полученных для модели с отдельным выступом.

На рис. 5.26 показаны области контакта (темно-серые области) и адгезии (светло-серые области) для отдельного выступа, (a) и (b), и для одного из выступов волнистого индентора, (c) и (d). Рисунки (a) и (c) соответствуют безразмерной нагрузке $q/(Rw_a) = 200$; в этом случае форма пятен контакта и адгезии для отдельного выступа и для одного из выступов волнистой поверхности отличается незначительно. Рисунки (b) и (d) соответствуют нагрузке $q/(Rw_a) = 550$, при которой пятна контакта начинают сливаться для волнистой поверхности (d); в этом случае размер и форма областей контакта и адгезии существенно отличаются от соответствующих размеров для случая изолированного выступа (b).

Таким образом, для малых нагрузок, пока пятна контакта удалены друг от друга, распределение контактных давлений на каждом пятне контакта и форма областей контакта и адгезии аналогичны результатам, соответствующим модели изолированного выступа, скользящего по вязкоупругому основанию. С увеличением нагрузки происходит слияние областей адгезии и контакта, и модель изолированного выступа становится непригодной для описания, т.е. необходимо использовать модель волнистой поверхности.

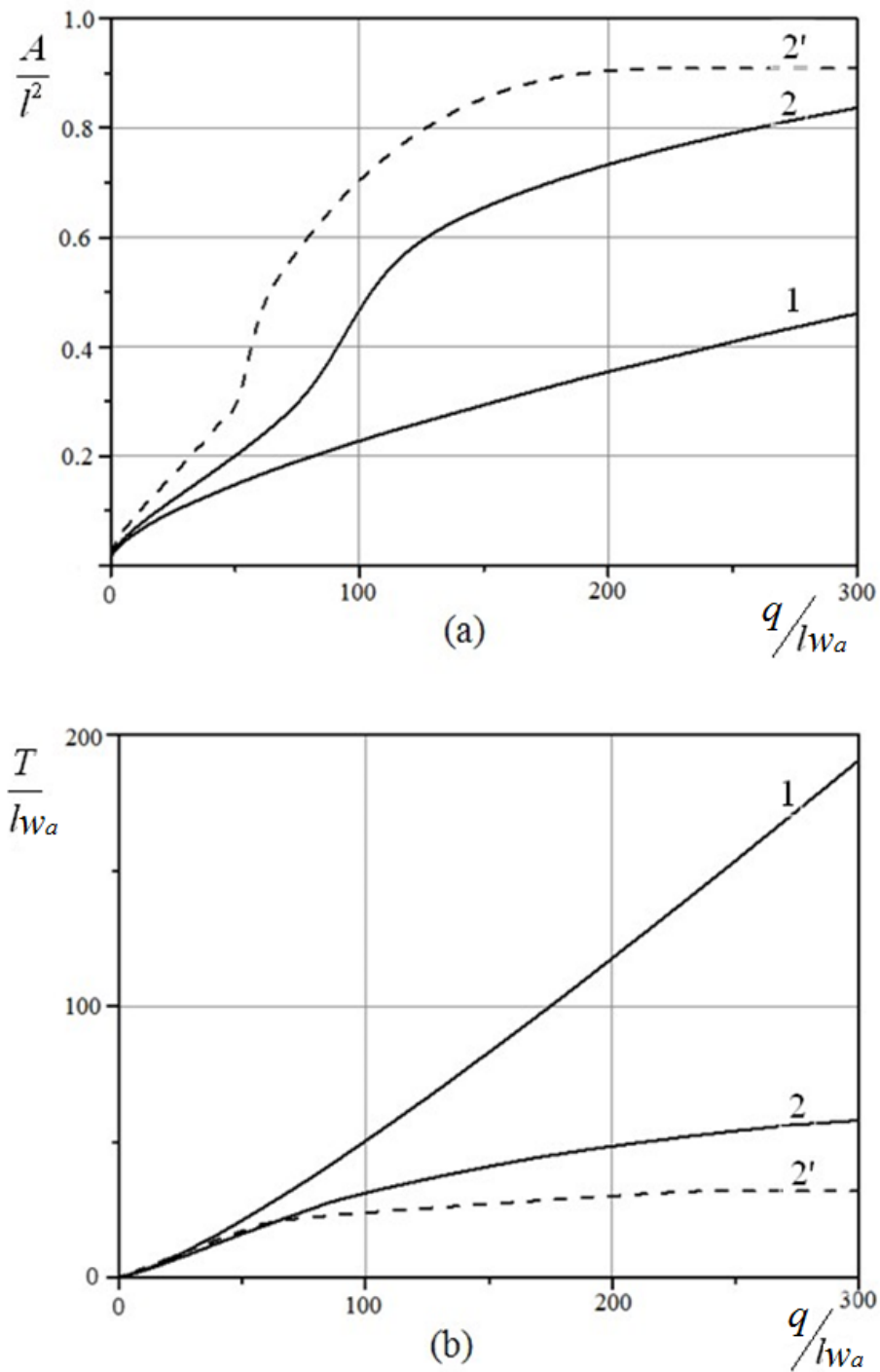


Рис. 5.27. Зависимость площади контакта (а) и силы трения (б) от нормальной нагрузки на один выступ.

На рис. 5.27 показаны графики для фактической площади контакта, которую можно рассчитать суммированием:

$$A = 2\Delta \sum_{j=1}^N (a_j + b_j) \quad (5.69)$$

и силы трения, рассчитанной по соотношениям (5.68), в зависимости от величины нормальной нагрузки, действующей на один выступ. Результаты приведены в безразмерном виде.

Кривые 1 соответствуют отдельному выступу, а кривые 2 и 2' – случаю волнистой поверхности. Представленные величины представлены в расчете на один выступ (одну ячейку периодичности волнистой поверхности) и следующих значений параметров: $T_\varepsilon / T_\sigma = 10$, $\lambda_w = 0.5$, $l / f_0 = 4$. Для кривых 1 и 2, параметр скорости равен $\kappa = 0.4$. Для кривой 2', параметр скорости равен $l / (VT_\varepsilon) = 0.8$. Видно, что для случая отдельного выступа площадь контакта меньше, а сила трения – выше, чем для одного из выступов волнистой поверхности. Кроме того, для отдельного выступа эти величины возрастают неограниченно с увеличением нагрузки, в то время как для волнистой поверхности площадь контакта и сила трения достигают насыщения и в дальнейшем не увеличиваются. Увеличение параметра скорости κ , т.е. уменьшение значения скорости скольжения, приводит к увеличению площади контакта, что объясняется несовершенной упругостью основания.

5.4.5. Скольжение волнистого индентора в случае насыщенного контакта поверхностей

Как было показано в п. 5.3.2, насыщенный контакт индентора и вязкоупругого основания в каждой полосе реализуется при условии (5.53), которое состоит в том, что контактное давление в каждой точке должно быть не меньше, чем адгезионное напряжение $-p_0$. В этом случае решение задачи о скольжении трехмерного волнистого индентора значительно упрощается, т.к. нет необходимости решать численно алгебраические уравнения для определения границ областей контакта и адгезионного взаимодействия. При этом решение задачи в каждой полосе дается простыми выражениями (5.49)-(5.50), и деформационная сила трения также определяется аналитически

(5.52). Простота решения задачи в этом случае позволяет рассмотреть более сложную модель для описания деформационных свойств вязкоупругого основания. А именно, вместо модели Кельвина-Фойгта (5.30), содержащей одно время релаксации T_σ , рассмотрим модель со спектром времен релаксации [4, 52]:

$$u + T_\varepsilon^i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{H}{E^i} \left(p^i + T_\sigma^i \frac{\partial p^i}{\partial t} \right), \quad p = \sum_{i=1}^M p^i \quad (5.70)$$

где T_ε^i и T_σ^i – времена запаздывания и релаксации материала, соответственно, E^i / H – податливость материала для i -го времени релаксации, M – число членов спектра времен релаксации материала. Отношение времен запаздывания и релаксации материала считается постоянным для любого i :

$$\tau_0 = T_\varepsilon^i / T_\sigma^i$$

Задача рассматривается для трехмерного волнистого индентора, форма которого описывается соотношением (5.60), при этом по всей поверхности вязкоупругого основания для любых x и y выполняется условие контакта с индентором (первое условие из (5.61)):

$$u(x, y) = f(x, y) + d \quad (5.71)$$

Выполняется также условие равновесия для нагрузки q , действующей на один период волнистого индентора (5.62).

Задача решается тем же методом, что и представленные выше задачи: переходом к подвижной системе координат и применением метода полос. Нормальные перемещения для j -й полосы представим в виде:

$$u_j(x) = d_j + \frac{f_j}{2} \left(\cos \left(\frac{2\pi x}{l} \right) \right) - 1 \quad (5.72)$$

где $d_j = \frac{f_0}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi y_j}{l}\right) - 1 \right) + d$ - внедрение j -й полосы в вязкоупругое основание, а, $f_j = \frac{f_0}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi y_j}{l}\right) + 1 \right)$.

Для определения распределения давлений внутри произвольной полосы y_j , решим систему уравнений (5.70), используя условия периодичности в каждой полосе $p_j(-l/2) = p_j(l/2)$ и условие контакта (5.71), получим выражение для определения контактных давлений в j -й полосе $p_j(x)$:

$$p_j(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \sum_{i=1}^M A_{ij} + \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \sum_{i=1}^M B_{ij} + \sum_{i=1}^M C_{ij}, \quad (5.73)$$

где:

$$A_{ij} = \frac{f_j E^i \left(\left(\frac{\tau_0}{T_\varepsilon^i V} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \right)}{\left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{\tau_0}{T_\varepsilon^i V} \right)^2};$$

$$B_{ij} = \frac{\frac{f_j \pi \tau_0 E^i}{T_\varepsilon^i V l H} (\tau_0 - 1)}{\left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{\tau_0}{T_\varepsilon^i V} \right)^2};$$

$$C_{ij} = \frac{E^i}{H} \left(d_j - \frac{f_j}{2} \right);$$

Определяя экстремум давления $p_1(x)$ для центральной полосы из соотношения $\frac{dp_1(x)}{dx} = 0$, находим минимальное давление в центральной полосе p_1^{\min} . Условием полного контакта (5.53) является неравенство

$p_1^{\min}(x) \geq -p_0$, из которого минимальное внедрение, необходимое для поддержания полного контакта составит:

$$d_{\min} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^M A_{i0}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^M A_{i0}\right)^2} + p_0}{\sum_{i=1}^M \frac{E^i}{H}} + \frac{f_0}{2} \quad (5.74)$$

При $d > d_{\min}$ имеет место дискретный контакт.

Зная контактное давление $p_j(x)$ в каждой полосе, можно определить его проекции на оси x и z

$$p_{xj} = \frac{p_j(x) \frac{f_j \pi}{l} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_j \pi}{l}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}}; \quad (5.75)$$

$$p_{zj} = \frac{p_j(x)}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_j \pi}{l}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}}. \quad (5.76)$$

откуда получим проекции сил, действующих со стороны выступа на основание

$$T = 2\Delta y \sum_{j=1}^N \int_{-l/2}^{l/2} p_{xj} dx; \quad q = 2\Delta y \sum_{j=1}^N \int_{-l/2}^{l/2} p_{zj} dx; \quad (5.77)$$

где N – число полос в разбиении. Таким образом, можно рассчитать деформационную составляющую коэффициента трения $\mu = T/q$ в зависимости от V , f_0 , l , d а также параметров вязкоупругого материала. Используя итерационный принцип, можно также рассчитать величину деформационной составляющей коэффициента трения при заданной нагрузке на выступ.

Для описания релаксационных свойств материала использована зависимость между податливостью и временем релаксации, показанная на рис.5.28. Для расчетов брался соответствующий дискретный спектр времен релаксации и податливостей из $M = 66$ членов. Соотношение между временами запаздывания и релаксации бралось $\tau_0 = 1000$.

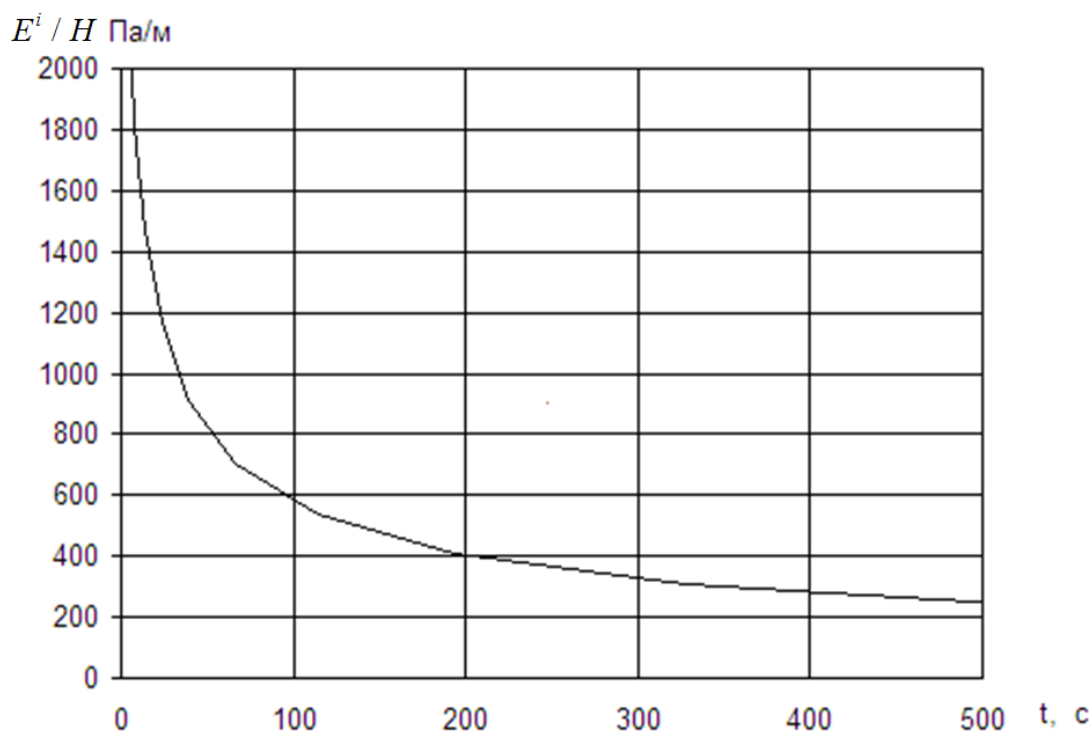


Рис.5.28. Спектр времен релаксации материала, использованный для расчета.

Заметим, что полученное решение (5.73) и (5.75)-(5.77) задачи не зависит от адгезионных характеристик поверхностей. Однако, от них (а именно, от адгезионного давления p_0), зависит условие реализации насыщенного контакта поверхностей (5.74).

Распределение контактного давления (5.73), которое соответствует минимальному внедрению (5.74), необходимому для поддержания полного контакта при отсутствии адгезии $p_0=0$, при скорости $V = 0.1$ м/с и параметрах шероховатости $l = 0.006$ м, $f_0 = 0.0003$ м., показано на рис. 5.29.

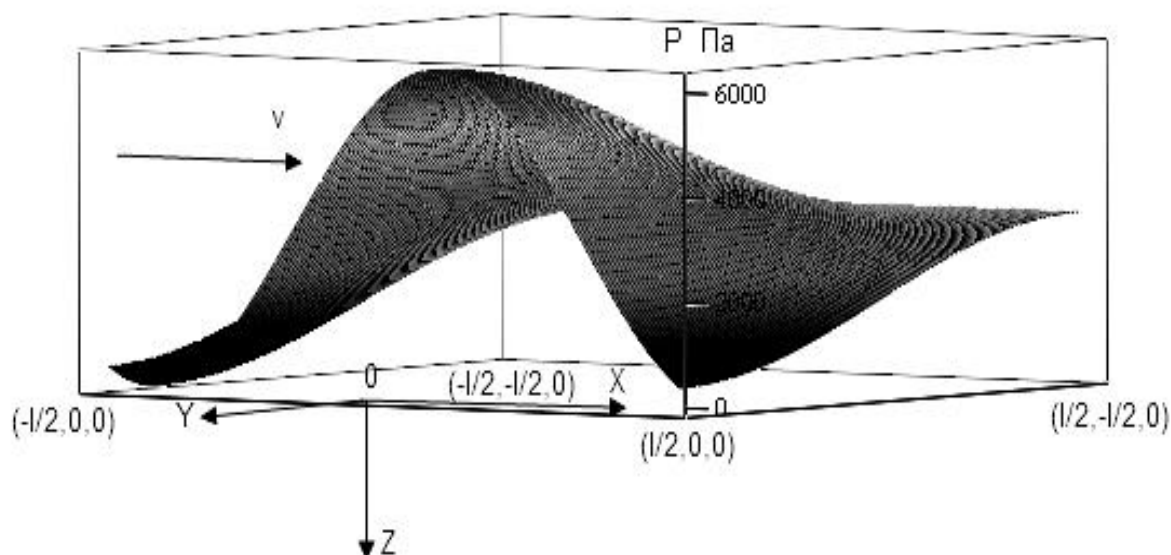


Рис.5.29. Распределение контактного давления для одного выступа шероховатости (ось z – ось симметрии выступа).

Распределение давления имеет несимметричную форму относительно оси симметрии выступа.

Зависимости коэффициента трения от скорости при постоянной нормальной нагрузке $q = 375.5$ Н, действующей на площадку размером $m \times m$ ($m = 0.1$ м), для $l = 0.006$ м и 0.003 м показаны на рис. 5.30 (кривые 1 и 2, соответственно). При этом коэффициент трения увеличивается при увеличении скорости скольжения V . Как следует из полученных выше решений, при использовании модели Кельвина-Фойгта зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости является немонотонной и имеет максимум. Однако, при численных параметрах, используемых для получения результатов на рис. 5.30, этот максимум не достигается в условиях полного контакта (при увеличении скорости V происходит переход к дискретному контакту). Увеличение частоты расположения выступов (уменьшение периода l) приводит к увеличению коэффициента трения, что связано с уменьшением радиуса вершины неровности и соответствующим увеличением гистерезисных потерь в вязкоупругом материале.

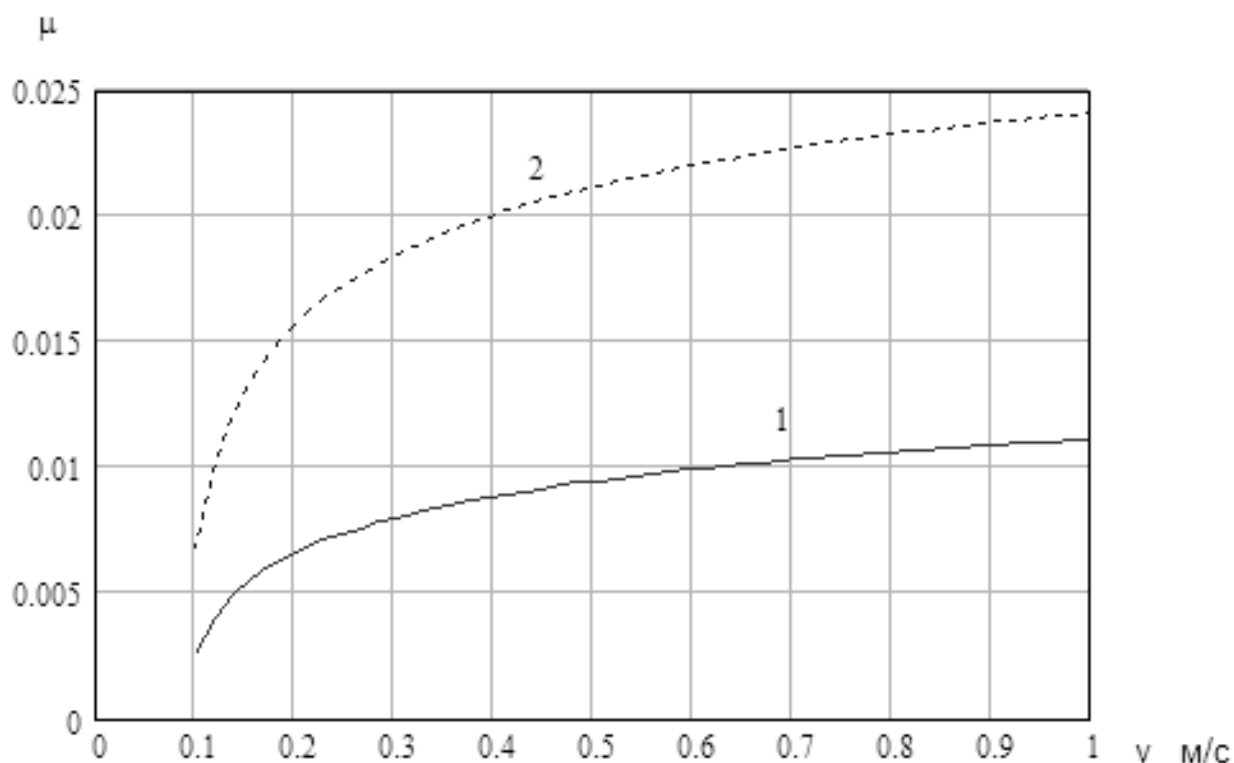


Рис. 5.30. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения при различных значениях периода расположения неровностей

Зависимости коэффициента трения от нормальной нагрузки при постоянной скорости $V = 0.1$ для $f_0 = 0.0003$ и 0.00015 показаны на рис. 5.31 (кривые 1 и 2, соответственно).

Результаты показывают, что при увеличении нагрузки на единичную площадь коэффициент трения уменьшается. Этот эффект связан с тем, что контакт происходит по всей поверхности (является полным), поэтому площадь контакта не изменяется с увеличением нагрузки. Как было показано выше, в условиях дискретного контакта увеличение нагрузки, напротив, приводит к увеличению коэффициента трения, так как при этом происходит увеличение площади фактического контакта и, соответственно, увеличение гистерезисных потерь. Увеличение высоты выступов приводит к увеличению деформационной составляющей силы трения.

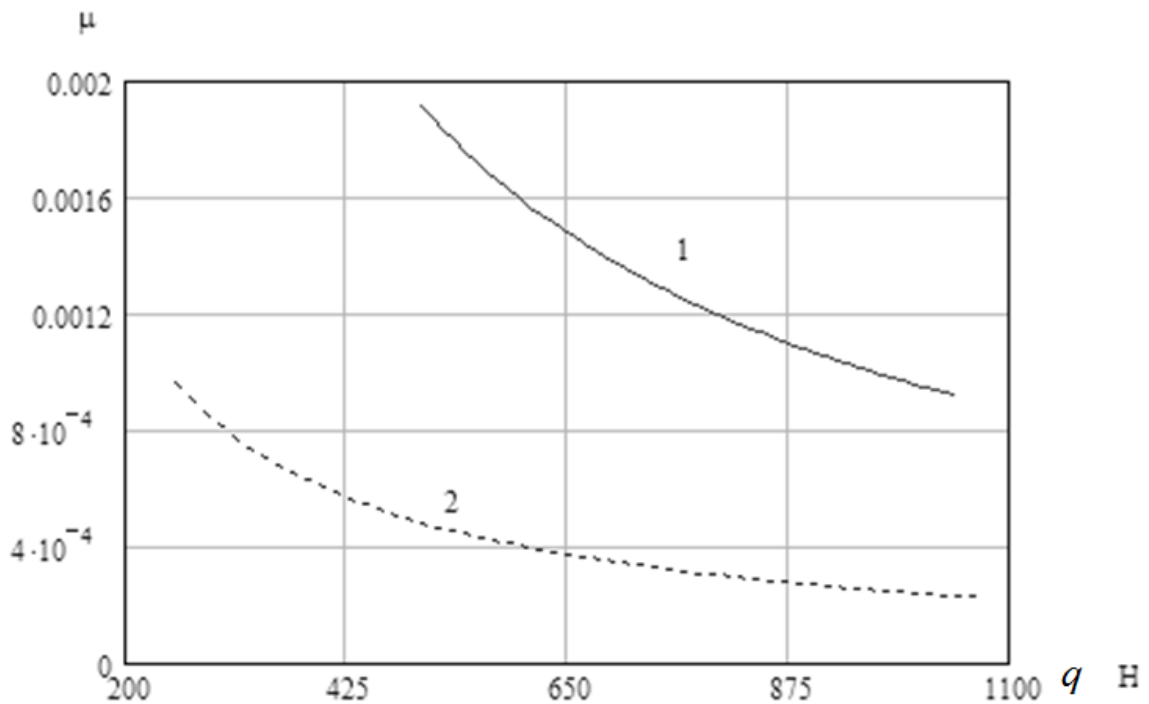


Рис.5.31. Зависимость коэффициента трения от нагрузки при различной высоте выступов шероховатой поверхности.

Заметим, что в частном случае одного времени релаксации, $M = 1$, получается простое аналитическое выражение для коэффициента трения для волнистой поверхности, скользящей по вязкоупругому основанию в условиях полного контакта:

$$\mu = \frac{3\pi^2 l^2 E f_0^2 V (T_\varepsilon - T_\sigma)}{16qH(l^2 + 4\pi^2 T_\sigma^2 V^2)} \quad (5.78)$$

Из этого соотношения следует, что коэффициент трения немонотонно зависит от скорости V и расстояния между выступами l , обратно пропорционален внешней нормальной нагрузке q , и пропорционален квадрату высоты выступов f_0 .

5.5. Сопоставление с экспериментальными результатами

Модели вязкоупругого тела, использованные в этой главе, могут служить для описания механического поведения высокоэластичных материалов. Примерами таких материалов являются различные марки резин, каучуки, высокоэластичные полимеры и композиционные материалы на их основе, которые широко используются в различных узлах трения, в частности, числе для изготовления автомобильных шин. Исследование их фрикционных свойств является очень важной и актуальной задачей.

Ниже результаты моделирования сопоставляются с некоторыми результатами испытаний эластомерных материалов на трение, проведенными в лаборатории трибологии ИПМех РАН А.В. Морозовым и М.Н. Добычиным.

В работе [63] проведены серии экспериментов с целью изучения деформационных потерь на трение в контакте скольжения стального сферического индентора и образца, изготовленного из резины, при отсутствии адгезии. Целью работы было изучение чисто гистерезисного механизма трения. Для экранирования адгезионного взаимодействиями между взаимодействующими телами эксперименты проводились в условиях граничного трения. На рис. 5.32 приведена зависимость деформационной компоненты коэффициента трения μ_D от скорости скольжения при четырех фиксированных давлениях.

Для описания экспериментальных результатов построена теоретическая зависимость коэффициента трения от скорости скольжения индентора по образцу. Расчеты велись по соотношениям модели (5.39)-(5.47) для скольжения сферического индентора по вязкоупругому основанию при отсутствии адгезии, т.е. при $\lambda_w = 0$.

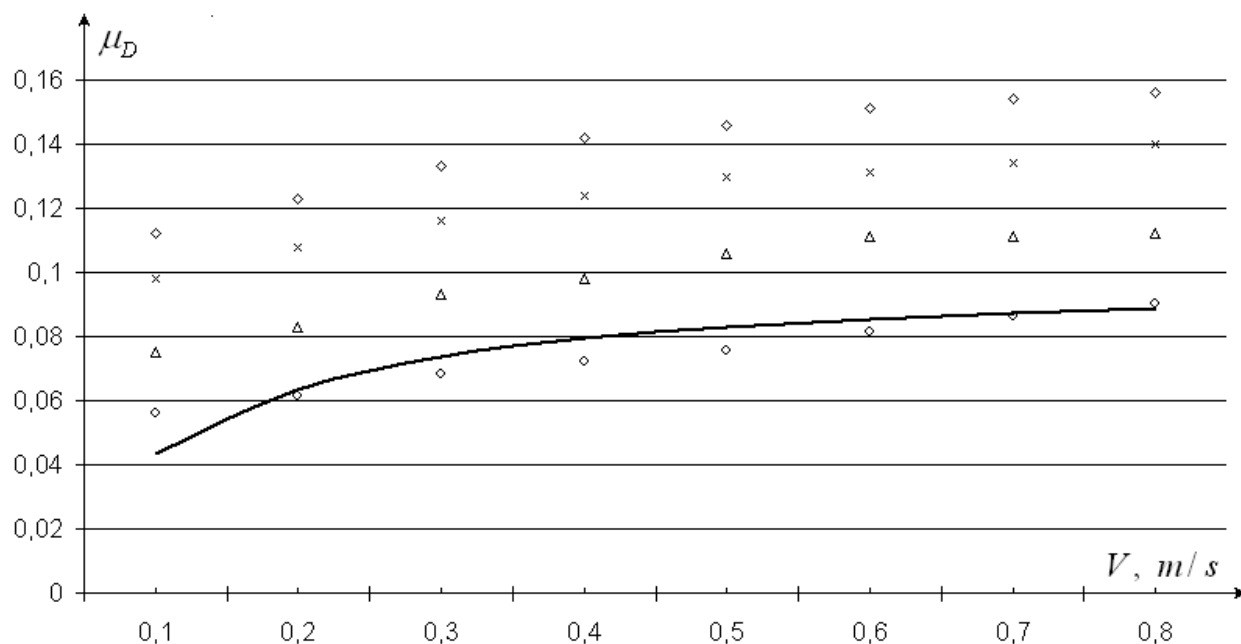


Рис. 5.32. Экспериментальная зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости скольжения о – 4 Н; Δ – 10 Н; \times – 20 Н; \diamond – 30 Н. Сплошная кривая – расчет ($q = 4$ Н, $T_\sigma = 0,003$ с) [63].

При этом необходимая для расчётов величина модуля упругости образца определялась в результате отдельного эксперимента ($E^* = 6.3$ МПа), а величина времени релаксации вязкоупругого материала – путём сопоставления с экспериментальными данными для коэффициента трения ($T_\sigma = 0,003$ с).

Как показывают результаты, получить точное количественное соответствие между экспериментальными и модельными расчетами при различных нагрузках и скоростях не удастся, поскольку предложенная используемая модель материала использует всего одно время релаксации и является линейной, однако эта модель позволяет качественно предсказывать зависимости, характерные для гистерезисного механизма трения.

В случае наличия адгезии (при трении сухих поверхностей эластомерных материалов) построенные выше модели также позволяют предсказать качественные закономерности поведения коэффициента трения.

Сухое трение
 $T = -25 \div 100^\circ \text{C}$; $P = 0.1 \div 0.4 \text{ МПа}$; $V = 1 \div 200 \text{ мм/с}$

Трение смазанных поверхностей
 $T = 5 \div 85^\circ \text{C}$; $P = 0.1 \div 0.4 \text{ МПа}$; $V = 1 \div 200 \text{ мм/с}$

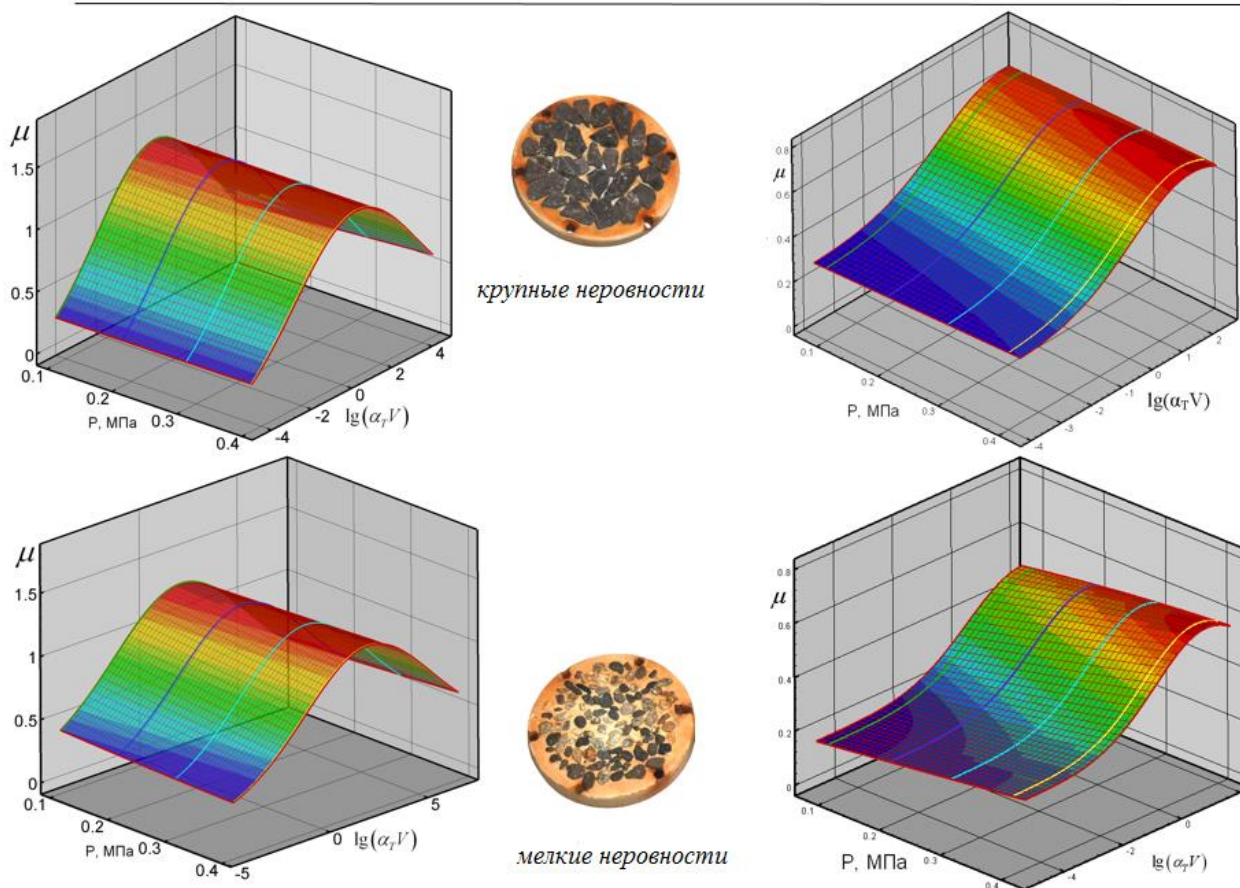


Рис. 5.33. Карты трения, построенные для резиновых образцов по результатам экспериментов в условиях трения сухих и смазанных поверхностей [158].

На рис. 5.33 приведены карты трения – зависимости коэффициента трения, отложенные как функции двух координат – скорости (умноженной на коэффициент α_T , зависящий от температуры) и нормальной нагрузки. Приведенные результаты получены из экспериментов на трения для резиновых образцов и образцов дорожного покрытия с различными видами шероховатости, результаты взяты из работы [158]. При этом можно считать, что трение в условиях граничной смазки соответствует отсутствию или малому влиянию адгезии (смазочный слой экранирует межмолекулярные силы), в то время как в условиях сухого трения адгезия оказывает значительное влияние на деформационную силу трения. Анализ

приведенных экспериментальных результатов и сравнение их с полученными выше результатами моделирования позволяет заключить, что следующие эффекты, полученные в результате расчетов, качественно подтверждаются результатами экспериментов:

- зависимость коэффициента трения от скорости имеет вид «колокола»: величина коэффициента трения достигает максимума при некоторой скорости и стремится к нулю при больших и малых скоростях;
- влияние адгезии приводит к увеличению деформационного коэффициента трения, при этом максимум коэффициента трения сдвигается в сторону меньших скоростей (см. рис. 5.16);
- уменьшение средней высоты выступов приводит к уменьшению гистерезисного вклада в силу трения, при этом адгезионный вклад в силу трения при малых нагрузках возрастает (см. рис. 5.24 и 5.31).

На рис. 5.34 приведены результаты испытаний в виде зависимостей коэффициента трения μ от скорости скольжения V при разных значениях номинального давления P , варьируемых в пределах от 0,1 до 0,3 МПа [64]. Рассматривались два типа эластомерных материалов: морозостойкая резина на основе синтетического пропиленоксидного каучука (СКПО) и такой же материал, но с антифрикционной добавкой – ультрадисперсный порошок политетрафторэтилена (УПТФЭ) в количестве 1 массовой части на 100 весовых частей.

Представленные на рис. 5.34 результаты демонстрируют, что введение ультрадисперсного ПТФЭ приводит к существенному снижению коэффициента трения эластомерного материала, поскольку наличие порошка ослабляет молекулярные силы, действующие между резиной и контртелом.

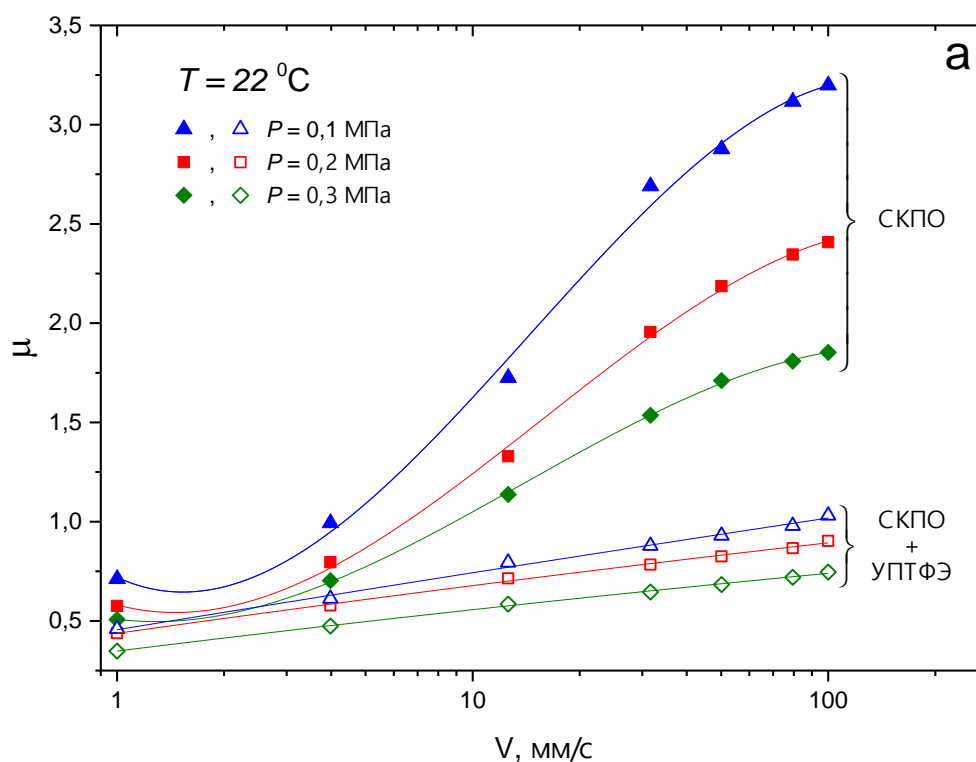


Рис. 5.34. Зависимость коэффициента трения μ от скорости скольжения V для резин на основе СКПО и СКПО с добавлением 1 м.ч. ультрадисперсного ПТФЭ [64]

Представленные на рис. 5.34 экспериментальные результаты подтверждают, что влияние адгезии приводит к резкому увеличению коэффициента трения при малых нагрузках в случае скольжения по шероховатой поверхности (см. рис. 5.22 и 5.31).

5.6. Выводы по Главе 5

Разработанные в этой главе модели позволяют оценить влияние сил адгезии на распределение контактного давления, размер области фактического контакта и силу трения при скольжении по поверхности вязкоупругого материала инденторов, имеющих разные формы поверхностного рельефа. Результаты проведенных расчетов позволяют сделать следующие выводы.

При положительных нагрузках на индентор (прижимающих его к полупространству) область контакта выступа с основанием смещается относительно оси симметрии выступа по ходу движения индентора, при этом увеличение скорости скольжения приводит к уменьшению размера области контакта ("эффект всплытия"). Эти эффекты аналогичны тем, что были получены без учета адгезии [18, 21].

При отрицательных нагрузках на индентор (отрывающих его от полупространства), область контакта смещается против хода движения индентора. При постоянной отрицательной нагрузке поверхности, не находящиеся в контакте, могут при увеличении скорости вступить в контакт.

Учет адгезии приводит к увеличению деформационной составляющей силы трения. Эта сила направлена против движения индентора как при положительных, так и при отрицательных нагрузках. Деформационный коэффициент трения немонотонно зависит от скорости скольжения индентора, достигая максимума при некоторой скорости. Учет адгезии приводит к смещению этого максимума в сторону меньших скоростей.

При малых внешних нагрузках на волнистый индентор контакт имеет место вокруг вершин выступов, а области адгезионного взаимодействия окружают области контакта. Увеличение нагрузки приводит к слиянию между собой сначала областей адгезионного взаимодействия, а потом областей контакта, и переходу от дискретного контакта к насыщенному. Вязкие свойства материала приводят к несимметрии пятен контакта относительно оси выступа, при этом области контакта, как и области адгезионного взаимодействия смещаются в направлении скольжения индентора. Кроме того, вследствие вязкости основания области контакта и адгезионного взаимодействия вытягиваются в направлении, перпендикулярном направлению скольжения. При увеличении нагрузки слияние зон взаимодействия происходит сначала в поперечном к скорости направлении, и только после этого в продольном.

Учет адгезии приводит к тому, что сила трения всегда отлична от нуля при нулевой внешней нагрузке, вследствие чего коэффициент трения резко возрастает при очень малых нагрузках. При уменьшении отношения высоты к расстоянию между выступами состояние насыщенного контакта возникает при меньших номинальных давлениях.

Заключение

Цель проведенных в диссертационной работе исследований заключалась в построении новых моделей контактного взаимодействия деформируемых тел при наличии адгезионного притяжения между поверхностями. В работе получены следующие основные результаты.

1. Получено аналитическое решение задачи о контакте без трения упругого полупространства с осесимметричным штампом, форма которого описывается степенной функцией, при наличии вне области контакта пригрузки, задаваемой кусочно-постоянной функцией. Решение построено на основе интегральных соотношений, связывающих перемещения границы упругого полупространства с действующими на нее нормальными напряжениями для случая осесимметричного нагружения, и применения метода разложений в ряды.

2. Предложен метод решения контактной задачи для упругого полупространства, взаимодействующего с осесимметричным штампом, при наличии молекулярной адгезии, задаваемой потенциалом произвольного вида (в частности, потенциалом Леннарда-Джонса), основанный на представлении зависимости удельной силы адгезии от величины зазора между поверхностями в виде кусочно-постоянной функции. В частном случае штампа параболической формы и упрощенной формы потенциала адгезионного взаимодействия результаты совпадают с результатами известной модели Можи-Дагдейла.

3. Получено решение контактной задачи о капиллярной адгезии при взаимодействии осесимметричного штампа с упругим полупространством. Исследована зависимость контактных характеристик (размеров областей контакта и мениска, распределения контактных давлений и др.) от объема жидкости в мениске и ее поверхностного натяжения.

4. Решена периодическая контактная задача о взаимодействии упругого полупространства с системой штампов при наличии адгезии различной

природы – молекулярной и капиллярной. Проведен анализ влияния плотности расположения штампов и их формы на характеристики дискретного контакта.

5. Установлено, что при циклическом подводе и отводе упругих тел, испытывающих адгезионное притяжение, имеет место гистерезис. На основе полученных решений проведен анализ и расчет потери энергии как разности между величинами работы, совершаемыми для подвода поверхностей до контакта друг с другом и их последующего отвода. Исследована зависимость этой потери энергии от поверхностных свойств взаимодействующих тел или покрывающих их пленок жидкости, их геометрии и упругих характеристик. Получены аналитические выражения для величины диссипации энергии в предельных случаях, соответствующих известным упрощенным моделям адгезионного взаимодействия ДКР и ДМТ.

6. Предложены модели для расчета адгезионной составляющей силы трения в процессе скольжения и качения шероховатых поверхностей на основе расчета работы силы трения как суммы потерь энергии при образовании и разрыве элементарных адгезионных контактов между неровностями. Исследована зависимость адгезионной составляющей силы трения от параметров шероховатости и поверхностных свойств взаимодействующих тел.

7. Дана постановка и получено решение контактной задачи о скольжении жесткого цилиндра по поверхности вязкоупругого полупространства при наличии молекулярной адгезии. Решение граничной задачи для напряжений и перемещений в полупространстве строилось на основе аналитического метода сведения к задаче Римана-Гильберта. Исследованы распределение контактного давления, размер и положение области контакта и деформационная сила сопротивления движению цилиндра в зависимости от адгезионных свойств поверхностей, механических характеристик полупространства и скорости скольжения цилиндра.

8. Предложены модели, позволяющие рассчитывать контактные характеристики и деформационную силу трения при скольжении отдельной сферической неровности и тела с регулярным рельефом по поверхности вязкоупругого основания при наличии адгезии. Проведен анализ совместного влияния параметров микрогеометрии контактирующих поверхностей, поверхностных свойств и несовершенной упругости взаимодействующих тел на характеристики контактного взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М., Горячева И.Г., Торская Е.В. Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству // Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. № 4. С. 490-493.
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М: Наука, 1983. – 488 с.
3. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 319 с.
4. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М., Мир, 1965.
5. Бородич Ф.М., Галанов Б.А., Простов Ю.И., Суарес-Алварес М.М. Влияние полного сцепления на вдавливание жесткого конуса в упругое полупространство при наличии молекулярной адгезии // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 744-753.
6. Боуден, Ф.П., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. М.: Машиностроение, 1968. - 544 с.
7. Васильев Ю. Н., Фуголь В. А. Математическая модель трения и изнашивания поликристаллических твердых тел // Трение и износ. 2010. Т. 31, N 2. С. 127-143.
8. Галанов Б.А. Пространственные контактные задачи для шероховатых тел при упругопластических деформациях поверхностей. // ПММ. 1984. Вып. 6.С. 1020-1029.
9. Галанов Б.А., Валеева И.К., Иванов С.М. Двучленный закон трения Б.В. Дерягина в скользящем контакте шероховатых упругих тел // Доклады национальной академии наук Украины. 2010. №8. С.106-112.
10. Галанов Б.А., Горячева И.Г., Валеева И.К., Иванов С.М., Маховская Ю.Ю. Модели адгезионного контакта упругих тел с регулярной шероховатостью // В сборнике под ред. И.Г. Горячевой «Развитие идей

- Л.А. Галина в механике» – Ижевск. Регулярная и хаотическая динамика, 2012.
11. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
 12. Гегузин Я. Е, Овчаренко Н. Н. Поверхностная энергия и процессы на поверхности твердых тел // Успехи физ. наук. 1962. Т.76, М9 2. С. 283 – 328.
 13. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука Физматлит, 1995. 352 с.
 14. Горячева И.Г. Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 925–933.
 15. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ. 1979. Т. 43. вып 1. С. 99-105.
 16. Горячева И. Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036-1044.
 17. Горячева И.Г. Расчет контактных характеристик с учетом макро- и микрогеометрии взаимодействующих тел // Трение и износ. 1999.Т. 20. № 3. С. 239-245.
 18. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
 19. Горячева И. Г., Горячев А. П., Садеги Ф. Контактное взаимодействие упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения или скольжения // ПММ, 1995. т. 59, Вып.4, С. 634-641.
 20. Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю. Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // Прикладная механика и техническая физика, 2014, №1, С. 99-107
 21. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии, М., Машиностроение, 1989, 256 с.

22. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Влияние несовершенной упругости поверхностного слоя на контактные характеристики при скольжении шероховатых упругих тел // Трение и износ. 1997. Т. 18, вып. 1. С. 5–12.
23. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 128-137.
24. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Адгезионное взаимодействие упругих тел // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, № 2. С. 279–279.
25. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Об одном подходе к решению задач о взаимодействии упругих тел при наличии адгезии // Докл. АН. 2004. Т. 398. № 3. С. 323-327.
26. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Адгезионное сопротивление при качении упругих тел // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 4, С. 534-543.
27. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Модели адгезионного взаимодействия упругих тел // Актуальные проблемы механики, под ред. Р.В.Гольдштейна, Москва, Наука, 2009, С.211-219.
28. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Моделирование трения на разных масштабных уровнях // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 100-110.
29. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Скольжение волнистого индентора по поверхности вязкоупругого слоя при наличии адгезии // Изв. РАН. МТТ, 2015, №4, С. 98-111.
30. Горячева И.Г., Степанов Ф.И., Торская Е.В. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 853-863.
31. Горячева И. Г., Торская Е. В. Анализ напряженного состояния тел с покрытиями при множественном характере нагружения // Трение и износ, 1994. т. 15, 3, с. 349-357.

32. Горячева И. Г., Торская Е. В. Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ, 1995. т. 16, 4, с. 642-652.
33. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
34. Григорьев А.Я., Дубравин А.М., Ковалев А.В., Ковалева И.Н., Комков О.Ю., Мышкин Н.К. Измерение контактной адгезии и аттракционного взаимодействия технических поверхностей // Трение и износ. 2003 Т. 14, № 4, С.405-412.
35. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970, 228 с.
36. Дерягин Б. В. Теория прилипания // Журнал физической химии. 1935. Т. 6, вып. 10, С. 1306-1319.
37. Дерягин Б. В. Молекулярная теория трения и скольжения // Журнал физической химии. 1934. Т.5, вып. 9. С.1165- 1176.
38. Дерягин Б.В., Абрикосова И.И. Прямое измерение молекулярного притяжения в функции расстояния между поверхностями // ЖЭТФ. 1951. Т.21, вып. 8, С.945-946.
39. Дерягин Б.В., Кротова Н.А., Смилга В.П. Адгезия твердых тел. М., Наука, 1973. 280 с.
40. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985.
41. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия, М.: Мир, 1989, 509 с.
42. Довнорович В. И., Яшин В. Ф. Некоторые пространственные задачи теории упругости. Гомель: БИИЖТ, 1961. 55 с.
43. Журавлев В.А. К вопросу о теоретическом обосновании закона Амонтона-Кулона для трения несмазанных поверхностей // Журнал технической физики. 1940. Т.10. № 17. С. 1447-1452.
44. Зимон А.Д. Адгезия пыли и порошков. М.: Химия, 1976.

45. Иванова Е. Б., Кравчук А. С. Вариационный подход к решению контактных задач с учетом адгезии // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 30, С. 156-165.
46. Иванова Р.Я. Качение вязко-упругого цилиндра по основанию из того же материала // ПМТФ. 1964. № 3. С. 179–184.
47. Каплан И. Г. Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 312 с.
48. Ковалев А. В., Ковалева И. Н., Мышкин Н. К. Феноменологическая модель адгезионного контакта / // Трение и износ. - 2005. - Т. 26, N 6. - С. 575-585
49. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997. 339 с.
50. Крагельский, И. В. Трение и износ. - М.: Машиностроение, 1968. - 480 с.
51. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. – М., Машиностроение, 1977. – 526 с.
52. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974
53. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. О фактическом контактном давлении// Проблемы трения и изнашивания. 1977. Вып. 12. С. 10-15.
54. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. Поля нормальных напряжений под скользящим периодическим индентором, моделирующим микрошероховатость поверхности//Проблемы трения и изнашивания. 1979. Вып. 16. С. 6-11.
55. Любичева А. Н. Анализ взаимного влияния пятен контакта при скольжении периодической системы неровностей по вязкоупругому основанию винклеровского типа // Трение и износ. 2008 (29). № 2. С. 125—133

56. Морозов Н.Ф., Фрейдин А.Б. Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1998. Т. 223. С.220-232
57. Мамонова М. В., Прудников В. В., Прудникова И. А. Физика поверхности. Теоретические модели и экспериментальные методы. М.: Физматлит, 2011. 400 с.
58. Маховская Ю.Ю. Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии // Изв. РАН. МТТ. 2003. N 2. С. 49–60
59. Маховская Ю. Ю. Скольжение вязкоупругих тел при наличии адгезии // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 334-344.
60. Маховская Ю. Ю.. Скольжение шероховатых вязкоупругих тел при наличии адгезии // Вестник Нижегородского университета. 2011. №4. часть 4, С.1613-1614.
61. Маховская Ю.Ю. Моделирование взаимодействия индентора с упругим полупространством при наличии адгезионного притяжения произвольного вида // Трение и износ, 2016, Т. 37, № 4. С.393-400.
62. Маховская Ю.Ю., Горячева И.Г. Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии // МТТ. 2017. № 4, в печати.
63. Морозов А.В., Маховская Ю.Ю., Теоретико-экспериментальная оценка деформационной составляющей коэффициента трения //Трение и износ. 2007. Т. 28, № 4, с.335-344.
64. Морозов А.В., Муравьева Т.И., Петрова Н.Н., Портнягина В.В., Аммосова В.Н., Загорский Д.Л. Исследование триботехнических и адгезионных свойств морозостойких резин // Каучук и резина. 2015. № 6. С. 22-26
65. Ноздрин М.А., Маховская Ю.Ю., Шептунов Б.В., Расчет деформационной составляющей силы трения при скольжении тела по вязкоупругому основанию // Вестник ИГЭУ, Вып.3, 2009, с.48-50.

66. Пинегин С.В., Орлов А.В. Сопротивление движению при некоторых видах свободного качения // Изв.АН СССР.ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 3. С.91-97.
67. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: Выща школа, 1982. 168 с.
68. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
69. Солдатенков И.А. К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 1. С. 12–21.
70. Солдатенков И.А. Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
71. Солдатенков И.А. Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия (уточненная постановка) // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 877–893.
72. Солдатенков И. А. Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: функция влияния для упругой композиции слой – полупространство // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 496-506.
73. Степанов Ф. И., Последовательное скольжение двух гладких штампов по вязкоупругому основанию с трением.//Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т.56, №6, 2015, С.158-165.
74. Теодорович Э.В. Сила молекулярного трения между ионной решеткой и диэлектрической средой // Изв. вузов: Физика. 1977. No 10. С. 67-79.
75. Ужегова Н.И., Свистков А.Л., Гаришин О.К. Моделирование контакта зонда атомно-силового микроскопа с жидкой пленкой // Конденсированные среды и межфазные границы. 2014. Т. 16, № 1. С. 84-90.
76. Чекина О.Г. О трении шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. 1998. Т. 19, № 3, С.306-311.

77. Чижик С. А. Капиллярный механизм адгезии и трения шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. 1994. Т. 15. 1. С. 11-26.
78. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 270 с.
79. Шептунов Б.В., Горячева И.Г., Ноздрин М.А.. Контактная задача о движении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию, Трение и износ. 2013. Т. 34. № 2. С. 109–119.
80. Шоркин В. С. Метод расчета энергии адгезии упругих тел / Фроленкова Л. Ю., Шоркин В. С. // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2010. № 2. С. 25-33.
81. Шоркин В. С. Учет влияния тройного взаимодействия частиц среды на поверхностные и адгезионные свойства твердых тел / Азаров А.С., Фроленкова Л. Ю., Шоркин В. С. // Материаловедение. 2011. №2. С. 2-7.
82. Adams, G. G., Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // ASME J. Appl. Mech. 2004. V. 71. N. 6, P. 851–856.
83. Archard J.F. Elastic deformation and the laws of friction // Proc. R. Soc. Lond. 1959. V. A 243. P. 190-205.
84. Attard P., Parker J.L. Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // Phys. Rev. A. V. 46. № 12. P. 7959–7971, 1992.
85. Barber J. R., Ciavarella M. JKR solution for an anisotropic half space // J. Mech. Phys. Solids. 2014. 64 P. 367–76
86. Barnes W.J.P. Adhesion in wet environments—frogs // Encyclopedia of nanotechnology, part 2 (ed. Bhushan B). 2012. P. 70–83. Berlin, Germany: Springer.
87. Barquins M., Adherence, friction and contact geometry of a rigid cylinder rolling on the flat and smooth surface of an elastic body // J. Nat. Rub. Rs. 1990, 5(3). P. 199-210.

88. Barber J. R., Similarity considerations in adhesive contact problems // Tribology International. 2013. 67 P. 51–53.
89. Barthel E. On the description of the adhesive contact of spheres with arbitrary interaction potentials // J. Colloid Interface Sci. 1998. 200. P. 7–18
90. Boer J. H., The influence of van der Waals' forces and primary bonds on binding energy, strength and orientation, with special reference to some artificial resins// Trans. Faraday Soc., 32, P. 10-37, 1936.
91. Borodich F. M., Galanov B. A. Molecular adhesive contact for indenters of non-ideal shapes // in: 21st ICTAM Abstracts Book and CD-ROM Proceedings. – Warsaw: IPPT PAN; 2004.
92. Borodich, F. M.; Galanov, B. A.; Suarez-Alvarez, M. M., The JKR-type adhesive contact problems for power-law shaped axisymmetric punches // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2014. V. 68. P. 14-32.
93. Borodich F.M., Galanov B.A., Keer L.M., Suarez-Alvarez M.M. The JKR-type adhesive contact problems for transversely isotropic elastic solids // Mech. Mater. 2014. V. 75, P. 34–44.
94. Borodich F.M., Galanov B.A. Non-direct estimations of adhesive and elastic properties of materials by depth-sensing indentation // Proc. R. Soc. A. 2008. 464, P. 2759–2776.
95. Borodich F.M., Galanov B.A., Gorb S.N., Prostov M.Y., Prostov Y.I., Suarez-Alvarez M.M. Evaluation of adhesive and elastic properties of polymers by the BG method // Macromol. React. Eng. 2013. 7, P. 555–563.
96. Borodich F.M., Mosolov A.B. Fractal roughness in contact problems // J. Appl. Math. Mech. 1992. Vol. 56. № 5.– P. 786-795.
97. Braat G. F. M., Kalker J. J. Theoretical and experimental analysis of the rolling contact between two cylinders coated with multilayered viscoelastic rubber // Contact Mechanics, Computational Techniques, M. H. Aliabadi, C. A. Brebbia, eds., Contact Mechanics Publications, Southampton, Boston, 1993, P. 115-126.

98. Bradley R.S., The cohesive force between solid surfaces and the surface energy of solids // *Phil. Mag.* 1932. 13, 853–862.
99. Butt H.-J., Barnes W.J.P., Del Campo A., Kappl M. Capillary forces between soft, elastic spheres // *Soft Matter*. 2010. 6. P. 5930–5936.
100. Carbone G., Mangialardi L., Adhesion and friction of an elastic half-space in contact with a slightly wavy rigid surface // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2004, 52 (6) P. 1267-1287.
101. Carbone G., Putignano C., A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials: Theory and experiments // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2013. 61. P. 1822–1834.
102. Chaudhury M.K., Owen M.J., Adhesion hysteresis and friction // *Langmuir* 1993, 9(1) P. 29-31.
103. Chaudhury M.K., Whitesides G.M. Direct measurement of interfacial interaction between semispherical lenses and flat sheets of polydimethylsiloxane and their chemical derivatives // *Langmuir* 1991. 7. P. 1013–25
104. Chen Y. L., Helm C. A., Israelachvili J. N. Molecular mechanisms associated with adhesion and contact angle hysteresis of monolayer surfaces. // *J. Phys. Chem.* 1991, V. 95 N. 26. P. 10736–10747
105. Cheng W., Dunn P.F., Brach R.M. Surface roughness effects on microparticle adhesion // *J. Adhesion*. 2002. Vol. 78. P. 929-965.
106. Chowdhury S.K.Roy, Ghosh P. Adhesion and adhesional friction at the contact between solids // *Wear* 1994. 174 P. 9-19
107. Chumak K. Adhesive contact between solids with periodically grooved surfaces // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. 78, P. 70-76
108. Chumak K., Chizhik S., Martynyak R. Adhesion of two elastic conforming solids with a single interface gap // *J. of Adhesion Science and Technology*. 2014. Vol. 28, № 16. P. 1568-1578.
109. Creton, C., Gorb, S.N. Sticky feet: from animals to materials // *MRS Bulletin*. 2007. 32. P. 466-468.

110. Derjaguin B. V., Untersuchungen uber die reibung und adhesion // *Kolloid Z.* 1934, 69. P. 155–164.
111. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. // *J. Colloid. Interface Sci.* 1975. V. 53, N 2, P. 314–326.
112. Fan H. and Gao Y. X., Elastic Solution for Liquid-bridging- induced Microscale Contact // *Journal of Applied Physics.* 2001. Vol. 90, N. 12. P. 5904-5910
113. Feng J.Q. Contact behavior of spherical elastic particles: a computational study of particle adhesion and deformations // *Colloids Surf.* 2000 A 172 P. 175–98
114. Feng J.Q. Adhesive contact of elastically deformable spheres: a computational study of pull-off force and contact radius // *J. Colloids Interface Sci.* 2001. V. 238 P. 318–23
115. Filippov A.E., Klafter J., Urbakh M., Friction through dynamical formation and rupture of molecular bonds // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V.92, P. 135503.
116. Fuller K.N.G., Tabor D. The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // *Proc. R. Soc. Lond.* 1975. Vol. A 345. P. 327-342.
117. Gao C., Tian X., and Bhushan B., A meniscus model for optimization of texturing and liquid lubrication of magnetic thin film rigid disks // *Tribol. Trans.* 1995, Vol. 38, Issue 2, P. 201–212.
118. Galanov B.A. Models of adhesive contact between rough elastic bodies // *Int. J. Mech. Sci.* 2011. 53. P. 968-977.
119. Goryacheva I.G. Mechanics of discrete contact // *Tribology Intern.* 2006. V. 39. № 5. P. 381-386.
120. Goryacheva I.G., Sadeghi F., Nickel D. Internal stresses in contact of a rough body and a viscoelastic layered semi-infinite plane // *ASME. J. Tribol.* 1996. Vol. 118, No 1. P. 131–136.
121. I.Goryacheva, Yu.Makhovskaya. A model of the adhesive component of the sliding friction force // *Wear* 2011. V.270, P 628-633.

122. Goryacheva I., Makhovskaya Yu., Adhesion effect in sliding of a periodic surface and an individual indenter upon a viscoelastic base // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2016. V/ 51, Issue 4, P. 286 – 293.
123. Gotzinger M., Peukert W. Particle adhesion force distributions on rough surfaces // *Langmuir*. 2004. Vol. 20. P. 5298-5303.
124. Greenwood, J.A., Adhesion of elastic spheres // *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1997. A453, P.1277.
125. Greenwood J.A., Johnson K.L. An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres // *J Phys D-Appl Phys*. 1998. V. 31 N.22. P.3279–3290.
126. Greenwood J. A., Tabor D. The friction of hard sliders on lubricated rubber: the importance of deformation losses // *Proc. Phys. Soc.* 1958. V. 71. №. 6. P. 989.
127. Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces // *Proc. R. Soc. Lond.* 1966. V. A. 295. P. 300-319.
128. Grosch KA.: The relation between the friction and visco-elastic properties of rubber // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys.* 1963. 274-1356, P. 21–39.
129. Hamaker H.C., The London—van der Waals attraction between spherical particles // *Physica Volume 4, Issue 10, P. 1058–1072, 1937.*
130. Huber G, Mantz H, Spolenak R, Mecke K, Gorb S, Arzt E. Evidence for capillary contribution to gecko adhesion from single spatula nanomechanical measurements // *Proc Natl Acad Sci USA*. 2005. V.102: P. 16293–16296.
131. Hughes B. D. and White L. R.. “Soft” contact problems in linear elasticity // *Q. J. Mech. appl. Math.* 1979. 32. P.445–71.
132. Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J. The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // *J. Polym. Sci.* 2001. B 39, P.1195–1214.

133. Hunter S.C. The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1961. V. 28. No 4. P. 611–617.
134. Israelachvili J. *Intermolecular and Surface Forces*. New York: Academic. 1992.
135. Jacquot C., Takadoum J., A study of adhesion forces by atomic force microscopy // *J. Adhes. Sci.* 2001, 15(6). P. 681-687.
136. Jin C., Jagota A., and Hui C-Y. An easy-to-implement numerical simulation method for adhesive contact problems involving asymmetric adhesive contact // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2011. 44, P. 405303.
137. Johnson K.L. Non-Hertzian contact of elastic bodies // in: D.E. Pater, J.J. Kalker (Eds.), *The mechanics of the contact between deformable bodies*. Delft University Press, 1975. P. 26-40.
138. Johnson K. L. Adhesion and friction between a smooth elastic spherical asperity and a plane surface // *Proc. R. Soc. Lond. A* 1997. 453, P. 163-179.
139. Johnson K.L., Greenwood J.A. An adhesion map for the contact of elastic spheres // *J. Colloid Interface Sci.* 1997 192 (2) P. 326.
140. Johnson K.L. Mechanics of adhesion // *Tribol. Int.* 1998 31 (8), P. 413.
141. Johnson K. L ., Greenwood J. A. An approximate JKR theory for elliptical contacts // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2005. 38 P. 1042.
142. Johnson K. L., Kendall K., and Roberts A. D. Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1971. 324. P. 301–313.
143. Kalker J. J. Viscoelastic multilayered cylinders rolling with dry friction // *Journal of Applied Mechanics.* 1991. V. 58 P. 666-679.
144. Kogut L., and Etsion I. Static Friction Model for Elastic-Plastic Contacting Rough Surfaces // *J. Tribol.-T. ASME* 2004, 126, P. 34–40.
145. Lennard-Jones J. E. On the Determination of Molecular Fields // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 106 (738). P. 463–477, 1924

146. Li Q., Rudolph V., Peukert W. London-van der Waals adhesiveness of rough particles // *Powder Technology*. 2006. Vol. 161. P. 248-255.
147. Liu C. C., Mee P. B. Stiction at the winchester head-disk interface // *IEEE Transactions on Magnetics*. 1983. V. 19. No 5. P. 1569-1661.
148. Makhovskaya Yu.Yu., Goryacheva I.G. The combined effect of capillarity and elasticity in contact interaction // *Tribology Intern.* 1999. N 32. P. 507-515.
149. Mastrangelo C. H., Hsu C. H. Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces-Part II: experiments // *Journal of Microelectromechanical Systems* 1993, V. 2. N. 1, P. 44-55.
150. Mattewson M. J., Mamin H. J. Liquid mediated adhesion of ultra-flat solid surfaces // *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.* 1988. V. 119. P. 87-92.
151. Maugis D., Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // *J. Colloid Interface Sci.* 1992. 150 P. 243–269.
152. Maugis D., Gauthier-Manuel B. JKR-DMT transition in the presence of a liquid meniscus // *J. Adhesion Sci. Technol.* 1994. V. 8. N. 11. P. 1311-1322.
153. Maugis D., *Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids*. 2000. Springer-Verlag, Berlin.
154. May W. D., Morris E. L., Atack D. Rolling friction of a hard cylinder over a viscoelastic material // *J. Appl. Phys.* 1959. V. 30. №. 11. P. 1713-1724.
155. Megias-Alguacil D. and Gauckler L.J. Capillary forces between two solid spheres linked by a concave liquid bridge: Regions of existence and forces mapping // *AIChE J.* 2009. 55, P. 1103–1109.
156. Mendez Vilas A., Nuevo M. J., Gonzalez Martin M. L., Labajos-Broncano L. Experimental analysis of the influence of topography on the adhesion force as measured by an AFM // *Journal of Adhesion Science and Technology* 2002. V. 16 N. 13, P. 1737-1748
157. Menga N, Putignano C, Carbone G., Demelio G.P., The sliding contact of a rigid wavy surface with a viscoelastic half-space // *Proceedings of the*

- Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2014. 470, Issue 2169. Article number 20140392[.
158. Morozov A., Dobychin M., Charleux D., Influence of mechanical properties of rubbers on sliding friction // 38th Leeds-Leon Symposium on Tribology. Book of Abstracts. 2011.
 159. Morland L. W. A plane problem of rolling contact in linear viscoelasticity theory // *J. Appl. Mech.* 1962. V. 29. №. 2. P. 345-352.
 160. Morrow C., Lovell M., Ning X., A JKR-DMT transition solution for adhesive rough surface contact // *J. Phys. D* 2003, 36, P. 534–540.
 161. Myshkin N.K. AY Grigoriev, AM Dubravin. Experimental Equipment for Interfacial Force and Friction. Measurements of Micro Scale Samples // *Proc. 14th Int. Coll. Tribology. Esslingen.* 2004, P. 73-78.
 162. Myshkin N. K., Petrokovets M. I., and Kovalev A. V., Tribology of polymers: adhesion, friction, wear, and mass-transfer // *Tribology International* 2005. V. 38, N. 11-12, P. 910–921.
 163. Myshkin N.K., Kovalev A.V., Adhesion and friction of polymers // *Polymer Tribology.* 2009, Ch.1, P.2-37.
 164. Myshkin N, Kovalev A, Grigoriev A, Scharff W, Kovalev E. Adhesion, Friction and Wear Measurements at Microscale // in *Advanced Tribology.* Springer. 2009, P. 497-498
 165. Myshkin N., Kovalev A., Makhovskaya Y., Torskaya E., Goryacheva I. Influence of adhesion induced contact areas on sliding friction // *Tribology - Materials, Surfaces and Interfaces.* 2010. V. 4. № 3. P. 130-135.
 166. Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V. On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Colloid Interface Sci.* 1980. V. 77. № 1.P. 91–101.
 167. Muller V. M., Yushchenko V. S., Derjaguin B. V. General theoretical consideration of the influence of surface forces on contact deformations and reciprocal adhesion of elastic spherical particles // *Journal of Colloid and Interface Science* 1983. Vol. 92 N. 1. P. 92-101c

168. Nasdala L., Kaliske M., Becker A., Rothert H. An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures. *Comput. Mech.* 1998. 22. P. 395–403.
169. Payam A. F. and Fathipour M. A capillary force model for interactions between two spheres. *Particuology*, 9, 381–386 (2011).
170. Persson B.N.J., Tossati E. The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // *J. Chem. Phys.* 2001. Vol. 115. P. 5597-5610.
171. Persson B.N.J. Adhesion between Elastic Bodies with Randomly Rough Surfaces // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. P. 245502-1- 245502-4.
172. Persson B.N.J. Capillary adhesion between elastic solids with randomly rough surfaces // *J. Phys: Condens. Matt.* 2008, 20 P. 315007.
173. Popov V.L. , Filippov A.E. Adhesive properties of contacts between elastic bodies with randomly rough self-affine surfaces: A simulation with the method of reduction of dimensionality // *Физическая мезомеханика* 2012. Т. 15. № 4. С. 87-92
174. Rabinowicz E. *Friction and Wear of Materials*. New York: Wiley, 1965.
175. Rabinovich Y.I., Adler J.J., Ata A., Singh R.K., Moudgil B.M. Adhesion between nanoscale rough surfaces. I. Role of asperity geometry // *J. Colloid Interface Science.* 2000. Vol. 232. P. 10-16.
176. Rabinovich Y.I., Adler J.J., Ata A., Singh R.K., Moudgil B.M. Adhesion between nanoscale rough surfaces. II. Measurement and comparison with theory // *J. Colloid Interface Science.* 2000. Vol. 232. P. 17-24.
177. Rabinovich Y.I., Esayanur M.S., Moudgil B.M. Capillary forces between two spheres with a fixed volume liquid bridge: theory and experiment *Langmuir* 2005, 21 P. 10992-10997.
178. Reynolds O. On rolling friction// *Philos.Trans. Roy.Soc. London A.* 1875. Vol.166. P.155-175.
179. Szoszkiewicz R, Bhushan B, Huey B.D., Kulik A.J., Gremaud G., Correlations between adhesion hysteresis and friction at molecular scales // *The Journal of chemical physics* 2005. 122 (14), 2005.

180. Sahoo P. and Chowdhury S.K.R.. A fractal analysis of adhesion at the contact between rough solids // Proc. Instn. Mech. Engrs. 1996, 210 P.269–279.
181. Sahoo P., Mitra A., Saha K.. Elastic-plastic adhesive contact of rough surfaces using n-Point asperity model // J. Phys. D: Appl. Phys. 2009, 42, P. 1–13
182. Tabor D. The mechanism of rolling friction. II. The elastic range //Proc. Roy. Soc. London ser. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1955. V. 229. №. 1177. P. 198-220.
183. Tabor D., Winterton R.H.S., The direct measurement of normal and retarded van der Waals forces // Proc. R. Soc. Lond. A. 1969. 312, P. 435–450.
184. Tabor D., Surface forces and surface interactions // J. Colloids Interface Sci. 1977, V. 58. N 2. P.13.
185. Tian H., Matsudaira T. Effect of relative humidity on friction behavior of the head/disk interface // IEEE Transactions on Magnetics. 1992. V. 28. N 5. P. 2530-2532.
186. Tomlinson J.A. A molecular theory of friction // Philos.Mag.Ser.7. 1929. Vol. 46. P.905-939.
187. Westergaard H. M. Bearing pressure and cracks // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1939, 6, P. 49-53.
188. Wu J. J., Numerical Simulation of the Adhesive Contact Between a Slightly Wavy Surface and a Half-Space // J. Adhes. Sci. Technol. 2012, V. 26 N 1, P. 331–351.
189. Yoshizawa H., Chen Y.-L., Israelachvili J., Fundamental mechanisms of interfacial friction. 1. Relation between adhesion and friction // J. Physical Chemistry 1993 V. 97. N 16. P. 4128-4140.
190. Zakerin M., Kappl M., Backus E.H.G., Butt H.-J., Schönfeld F., Capillary forces between rigid spheres and elastic supports: the role of Young's

- modulus and equilibrium vapor adsorption // *Soft Matter* 2013, V. 9 P. 4534-4543.
191. Zheng W. and Ya-Pu Z., Adhesion elastic contact and hysteresis effect // *Chinese Physics* 2004, 13 P. 1320–1325.
 192. Zheng Z., and Yu J., Using the Dugdale approximation to match a specific interaction in the adhesive contact of elastic objects// *Journal of Colloid and Interface Science* 2007 V. 310 N 1, P. 27-34.
 193. Zhou S.-S., Gao X.-L., He Q.-C. A unified treatment of axisymmetric adhesive contact problems using the harmonic potential function method // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2011, V.59, P. 145–159.